Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika - smjer nastavnički

Dinka Ivanović

Kubne jednadžbe i origami

Diplomski rad

Rijeka, srpanj 2020.

Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika - smjer nastavnički

Dinka Ivanović

Kubne jednadžbe i origami

MENTOR: dr. sc. Marijana Butorac

KOLEGIJ: Metodika nastave matematike I, Metodika nastave matematike II

Diplomski rad

Rijeka, srpanj 2020.

SAŽETAK

U ovom diplomskom radu pručavat ćemo spoj matematike i tradicionalne japanske umjetnosti savijanja papira (origami) pri čemu će nam biti potrebni pojmovi iz algebre, točnije pojmovi vezani uz algebarske jednadžbe. Najstariji način da matematički proučimo navedeni spoj je pomoću geometrijskih konstrukcija koje su vrlo slične konstrukcijama pomoću ravnala i šestara. Talijanska matematičarka Margherita Piazzola Beloch prva je dokazala kako savijanje papira može riješiti proizvoljne kubne jednadžbe, klasične probleme trisekcije kuta te duplikaciju kocke.

KLJUČNE RIJEČI

Kubne jednadžbe, origami, trisekcija kuta, duplikacija kocke, Belochin kvadrat, Belochino presavijanje

Sadržaj

1 UVOD

Najljepše što možemo doživjeti je ono što je tajanstveno. To je temeljni osjećaj koji stoji u zametku svake umjetnosti i znanosti. [1]

Cilj ovog rada je povezati matematiku s umjetnosti savijanja papira, origamijem. Na prvi pogled, teško je pronaći zadanu poveznicu osim oblika papira kojeg savijamo (kvadrat) te kreiranja raznih geometrijskih likova i geometrijskih tijela (jednakostraničan trokut, tetraedar, oktaedar...). Upravo zbog toga, mnogi matematičari su se okušali u dokazivanju matematičkih pojmova i teorema pomoću origamija. Origami omogućava približavanje apstraktnih matematičkih pojmova pomoću zornih prikaza na konkretnim primjerima na kreativan i inovativan način. Također, pomaže pri razvoju društvenih, kreativnih, komunikacijskih i tehničkih kompetencija ljudi, pogotovo učenika u nastavi matematike. S obzirom da matematika nije popularna znanost među učenicima osnovnih i srednjih škola, ova poveznica može poslužiti prilikom njezina populariziranja.

Sve je češća projektna nastava[2] u matematici koja ima veliki utjecaj na razvoj kreativnog mišljenja i logičkog razmišljanja. Takav oblik nastave pokazat će primjenu matematičkih znanja u stvarnom svijetu. Jedan primjer projektne nastave bi upravo bilo rješavanje kubne jednadžbe pomoću origamija, kako bi zainteresirali učenike za nastavu matematike i produbljivanje njihovog znanja.

U ovom radu povezat ćemo kubne jednadžbe s origamijem. S kubnim jednadžbama učenici se susreću tek u srednjoj školi gdje ih samo spominju, ali ih dublje ne obrađuju. Usprkos tome, neke dokaze pomoću origamija im možemo prikazati kako bi ih zainteresirali za nastavno gradivo i dokazali kako sve u matematici ima neku primjenu. Upravo te dokaze ću obraditi u ovom radu, a za njihovo otkriće je zaslužna talijanska matematičarka Margherita Piazzola Beloch koja je prva dokazala kako savijanje papira može riješiti proizvoljne kubne jednadžbe.

Radi lakšeg shvaćanja navedene poveznice, prvo ću reći nešto o kubnim jednadžbama te aksiomima origamija kako bi mogli pratiti dokaze pomoću origamija.

[1] Albert Einstein - njemački fizičar (14.3.1879.- 18.4.1955.)

[2] Projektna nastava je organiziran proces aktivnog učenja u kojem učenici, u grupama ili samostalno, prema pažljivo planiranom projektu, istražujući dolaze do novih spoznaja.

2 KUBNE JEDNADŽBE

U osnovnoj i srednjoj školi učenici se postepeno upoznavaju s jednadžbama (prvo proučavaju linearne jednadžbe, potom kvadratne...). U nižim razredima osnovne škole učenici se susreću s jednadžbama iako ih tako ne nazivaju jer umjesto nepoznanice x nalaze se kvadratići u koje upisuju odgovarajući prirodan broj kako bi zadana jednakost imala smisla. Tek u 6. razredu osnovne škole učenici uvode pojam jednadžbe[3] te rješavaju linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom koju označavaju s x. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja, učenici rješavaju razne odredbene i dokazne zadatke koristeći znanje rješavanja linearnih jednadžbi.

U prvom polugodištu 2. razreda srednje škole, učenici se susreću s kvadratnom jednadžbom gdje traže rješenja kvadratne jednadžbe, susreću se s Vieteovim formulama te rješavaju jednadžbe koje se svode na kvadratne jednadžbe.

Definicija 2.1. *Jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su a, b, $c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.*

Brojevi a, b i c se nazivaju *koeficijenti kvadratne jednadžbe* $ax^2 + bx + c = 0$.
Broj a se naziva *vodeći koeficijent*, broj b je *koeficijent linearnog člana*, a broj c *slobodni član jednadžbe.*

Kubna jednadžba ili jednadžba trećeg stupnja se najčešće spominje u matematičkim i općim gimnazijama ili određenim strukovnim srednjim školama (npr. tehničke škole) u 2. razredu prilikom obrađivanja nastavne cjeline *Kvadratna jednadžba*. Za razliku od kvadratnih i linearnih jednadžbi, jednadžbe trećeg stupnja se samo spominju te se formule i postupci za njihovo rješavanje opisuju samo u slučajevima kada se jednadžba može "lijepo" faktorizirati da bude primjerena za uzrast učenika i njihovo predznanje.

Definicija 2.2. *Kubna jednadžba je jednadžba oblika*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

gdje je $a \neq 0$, a a, b, c i $d \in \mathbb{R}$.

Analogno, kao i kod kvadratnih jednadžbi, rješenje kubne jednadžbe je svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava zadanu kubnu jednadžbu.

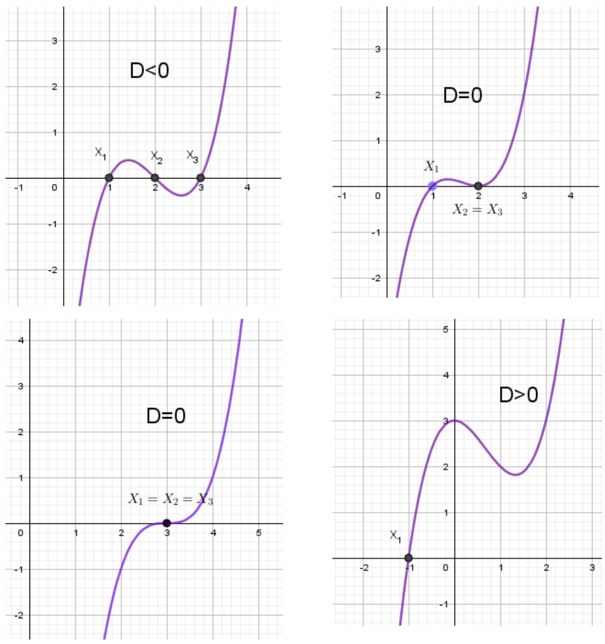
Kao i kvadratne jednadžbe, kubne jednadžbe imaju također diskriminantu te je ona oblika:

$$D = -4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 + 18abcd - 27a^2d^2.$$

[3]Jednadžba je matematički pojam koji izražava vezu između poznatih i nepoznatih veličina pomoću znaka jednakosti koji izjednačava lijevu i desnu stranu znaka jednakosti.

Rješenja kubne jednadžbe (geometrijski, presjek krivulje s x-osi) mogu biti:

- tri različita realna rješenja (presjek krivulje i x-osi je u tri točke, $D < 0$),
- dva različita realna rješenja od kojih je jedno dvostruko (presjek krivulje i x-osi je u dvije točke, $D = 0$),
- jedno trostruko realno rješenje (ako krivulja dodiruje x- os u samo jednoj točki, $D = 0$),
- presjek krivulje i x-osi je u jednoj točki, $D > 0$ (jedno realno rješenje).



Slika 1: Geometrijska interpretacija rješenja kubne jednadžbe

2.1 Polinomi

Učenici se s polinomima prvi put susreću već u osnovnoj školi u 7. razredu prilikom obrađivanja nastavne cjeline *Linearne funkcije.* Nakon toga, u 8. razredu proširuju znanje te uvode kvadratne funkcije, tj. poseban oblik $f(x) = x^2$. Iako se učenici susreću s polinomima, ne spominje im se izraz "polinom".
Tek u srednjoj školi u prvom razredu prvi puta se spominje i definira polinom prvog, a u drugom razredu polinom drugog stupnja, crta se njegov graf te određuju nultočke polinoma. Prilikom obrade nastavne cjeline *Polinom 2. stupnja*, njegove nultočke se određuju kao rješenja kvadratne jednadžbe. Kvadratne i kubne jednadžbe su algebarske jednadžbe, tj. kubna jednadžba je algebarska jednadžba stupnja tri dok je kvadratna jednadžba algebarska jednadžba stupnja dva. Polinom se definira kao funkcija pa se na primjeru polinoma učenicima prvi puta objašnjava zbroj, razlika, umnožak i kvocjent funkcija. Poseban naglasak se stavlja i na stupanj polinoma te se određuje faktorizirani oblik polinoma. S obzirom na prethodno znanje, učenici su sposobni povezati nastavna gradiva te sami zaključiti kako bi zapisali polinom n-tog stupnja:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koeficijenti polinoma (realni ili kompleksni brojevi) od kojih koeficijent $a_n \neq 0$ nazivamo *vodeći koeficijent.*

Polinomi se u 1. razredu srednje škole definiraju pomoću funkcije, iako nastavnu cjelinu *Funkcije* obrađuju tek u 4. razredu srednje škole.

Funkcija $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$ je faktorizirani oblik polinoma gdje su x_1, x_2, ..., x_n njegove nultočke. Za nultočku koja se u ovom prikazu pojavljuje više puta kažemo da je višestruka ili da ima onoliku kratnost koliko se puta pojavljuje u prikazu.

Osnovni teorem algebre
Bitno je i spomenuti *Osnovni teorem algebre* čije znanje će nam biti kasnije potrebno za Cardanovu formulu i kubne jednadžbe.

Teorem 2.3 (Osnovni teorem algebre). *Neka je P kompleksni polinom stupnja $n \geq 1$. Tada P ima barem jedan kompleksni korijen, tj. postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ takav da je $P(z_0) = 0$.*

Samim time što znamo pomoću osnovnog teorema algebre da svaki kompleksni polinom ima barem jedan kompleksni korijen te da svaki polinom $n-$ tog stupnja ima točno n nultočaka (ako za svaku od njih brojimo onoliko puta kolika je njezina kratnost) tada možemo zaključiti kako ćemo rješavanjem kubne jednadžbe pronaći maksimalno tri rješenja kao što je prikazano na slici 1.

2.2 Vieteove formule

Učenici produbljuju znanje i povezuju Vieteove formule kod nastavne cjeline *Kvadratne jednadžbe* sa Vieteovim formulama za polinom $n-$tog stupnja. Izjednačimo li prikaz polinoma $n-$tog stupnja sa njegovom faktorizacijom, dobit ćemo sljedeću jednakost:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Sredimo li zadani izraz dobit ćemo jednakosti koje moraju zadovoljavati nultočke zadanog polinoma:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Znanje o polinomima $n-$ tog stupnja kao i Vieteove formule bit će nam potrebne prilikom dokazivanja Cardanove formule koja nam otkriva kako odrediti rješenja kubne jednadžbe.

2.3 Cardanova formula

Postupci i formule za rješavanje kubnih jednadžbi se ne spominju u srednjoj školi. Spomenute formule otkrili su talijanski renesansni matematičari Scipione del Ferro[4], Niccolo Tartaglia[5], Girolamo Cardano[6] i Lodovico Ferrari.[7]

Slika 2: Girolamo Cardano

Neka je opći oblik kubne jednadžbe:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je zadana jednadžba normirana[8] te uvodimo supstituciju:

$$x = y - \frac{a}{3},$$

kako bi poništili kvadratni član. Nakon uvođenja supstitucije, naša kubna jednadžba je oblika:

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0,$$

$$y^3 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{1}{9}a^3 + by - \frac{1}{3}ab + c = 0.$$

[4]Scipione del Ferro je bio talijanski matematičar (6.2.1465. - 5.11.1526.).

[5]Niccolo Tartaglia je bio mletački matematičar (1499. - 1557.).

[6]Girolamo Cardano je bio talijanski fizičar, matematičar, astronom, liječnik i filozof (1501. - 1576.).

[7]Lodovico Ferrari je bio talijanski matematičar (1522. - 1565.).

[8]Jednadžba je normirana kada joj je vodeći koeficijent jednak jedan.

Dobivenu jednadžbu ćemo zapisati u kanonskom[9] obliku trećeg stupnja:

$$y^3 + py + q = 0, \tag{1}$$

gdje su $p = b - \frac{1}{3}a^2$ i $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ac + c$.

Rješenje naše jednadžbe (1) tražit ćemo u obliku:

$$y = u + v, \tag{2}$$

gdje su u i v neodređeni brojevi. Ako je (2) rješenje naše kubne jednadžbe (1) onda mora vrijediti:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 + p(u+v) + q &= 0, \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q &= 0, \\ (3uv + p)(u+v) + (u^3 + v^3 + q) &= 0. \end{aligned}$$

Ukoliko pretpostavimo da je:

$$\begin{aligned} 3uv + p &= 0, \\ uv &= -\frac{p}{3}. \end{aligned}$$

te drugi pribrojnik jednadžbe također izjednačimo s nulom:

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + q &= 0, \\ u^3 + v^3 &= -q, \end{aligned}$$

tada ćemo dobiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} uv &= -\frac{p}{3}, \\ u^3 + v^3 &= -q. \end{aligned} \tag{3}$$

Nakon toga kubiramo prvu jednadžbu te dobivamo:

$$\begin{aligned} u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27}, \\ u^3 + v^3 &= -q. \end{aligned} \tag{4}$$

Ako su u i v rješenja sustava, onda je i $u + v$ također rješenje (1). Bitna napomena je da sustavi (3) i (4) nisu ekvivalentni, stoga sustav (3) možemo riješiti na način da riješimo prvo sustav (4) te uzmemo samo ona rješenja koja zadovoljavaju sustav jednadžbi (3).
Prema Vieteovim formulama možemo zaključiti da su u^3 i v^3 korijeni jednadžbe:

$$t^2 + qt - (\frac{p}{3})^3 = 0.$$

[9] Jednadžba u kojoj nema kvadratnog člana.

Iz navedene jednadžbe slijedi:

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}.$$

Dakle,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

Rješenje naše kanonske jednadžbe (1) se može zapisati u obliku:

$$y = u + v,$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}},$$

što nazivamo **Cardanova formula**.

Napomena 1. *S obzirom da treći korijen ima tri vrijednosti iz Cardanove formule, možemo zaključiti da kubna jednadžba ima devet rješenja. S obzirom, da naši sustavi jednadžbi (3) i (4) nisu ekvivalentni, brojevi u i v moraju još zadovoljavati jednadžbu*

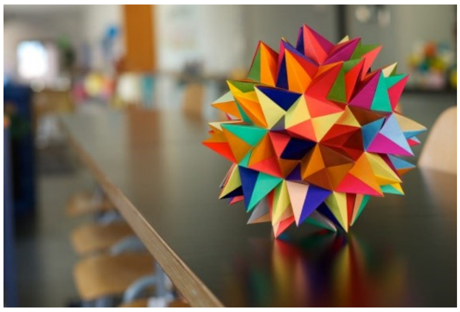
$$3uv + p = 0.$$

Upravo zbog toga, naša jednadžba ima samo tri rješenja što i zadovoljava broj nultočaka polinoma.

3 ORIGAMI

Prije nego otkrijem poveznicu kubnih jednadžbi i origamija prisjetimo se što je točno origami.
Origami je stara japanska tradicionalna umjetnost savijanja papira u različite modele (ptica, ždral, ukrasna kutija, leptir...) bez korištenja škara i ljepila. Naziv dolazi od japanskih riječi *oru*= savijanje i *kami*= papir. U Japanu se često koristi „vaši“, specijalan papir čvršće strukture napravljen od pulpe dobivene iz kore nekoliko karakterističnih drvenastih vrsta koje rastu u Japanu. Prilikom konstruiranja različitih oblika možemo koristiti jedan papir (tradicionalni origami) ili više papira koji se povezuju u jednu cjelinu (modularni origami). Bitno je samo da se papir ne rasteže i ne trga.

Slika 3: Tradicionalni origami



Slika 4: Modularni origami

Tradicionalno se koristi papir oblika kvadrata, ali postoji veliki broj modela koji se rade od oblika pravokutnika, trokuta... Origami je u Japanu postao dio raznih ceremonija pa su tako za vrijeme obreda šintoističkih vjenčanja korišteni origami leptiri koji simboliziraju mladence. To su bili ujedno i prvi origamiji u Japanu i njima su se ukrašavale posude sa pićem. Također, samurajima su u 12. stoljeću prije odlaska u bitku posluživali obredno jelo u listu papira tako što su ga zamotavali u posebno presložen papir na koji su zaticali vrpcu za koju se vezao poklon. Takav papirnati origami model se zvao „noshi“.

Slika 5: Noshi

Iako je origami prvenstveno umjetnost, danas se njegova primjena može pronaći u mnogim znanostima kao što su medicina, elektrotehnika... Jedan od primjera su konvencionalni štitnici od metaka koje koristi policija, a teže 90 kilograma i više. Tim inženjera sa Sveučilišta Brigham Young je upotrijebio origami za dizajniranje 55 kilogramskog štita koji je dovoljno širok da zaštiti nekoliko ljudi, a može se presaviti u oblik koji se lako uklapa u prtljažnik auta. Sljedeći primjer je malen ingestibilni robot kojeg možemo progutati te se taj robot može kretati unutar našeg tijela kako bi izveo jednostavne kirurške zahvate. Naime, istraživači na MIT-u su stvorili robota inspiriranog origamijem koji se može dovoljno presaviti da stane u jednu pilulu te je dizajniran tako da se odmota i preusmjeri kroz crijeva uz pomoć vanjskih magneta.

Osim u znanosti, mnogi su matematičari promatrali spoj matematike i origamija, a jedna od njih je Margherita P. Beloch koja je doprinijela povezivanju kubnih jednadžbi i origamija što je i tema ovog rada. Margherita je otkrila potpunu moć savijanja papira kao alata geometrijskih konstrukcija te ću u ovom radu predstaviti njezin dokaz kako savijanje papira može riješiti proizvoljne kubne jednadžbe i tako u stvari i riješiti klasične probleme trisekcije kuta i duplikacije kocke. Ovdje će nam pomoći i geometrijska metoda za pronalaženje korijena polinomne jednadžbe matematičara Eduarda Lilla[10].

3.1 Aksiomi origamija

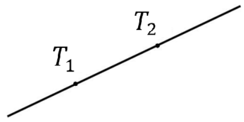
Origami je još jedan matematički model u kojem se matematički problemi prenose i rješavaju. Riješiti isti konstruktivan zadatak pomoću ravnala i šestara ili pomoću origamija znači na osnovu poznatih podataka, pomoću aksioma, konstruirati traženu figuru. Pomoću origamija možemo zapravo konstruirati sve geometrijske figure koje možemo konstruirati i pomoću ravnala i šestara. Važno je napomenuti kako konstrukcijama pomoću ravnala i šestara možemo riješiti algebarske jednadžbe stupnja dva (zato što algebarska jednadžba stupnja dva ne uključuje ništa više od zbrajanja, množenja i kvadratnih korijena koji su svi konstruktivni.), dok konstrukcijama origamija možemo riješiti algebarske jednadžbe do četvrtog stupnja. Mi ćemo u ovom radu proučavati algebarske jednadžbe stupnja 3, odnosno kubne jednadžbe.
Uspoređujemo li presavijanje papira kod origamija i konstruiranje geometrijskih konstrukcija pomoću ravnala i šestara, pronaći ćemo mnogo sličnosti. Svaku geometrijsku konstrukciju možemo promatrati kao niz koraka gdje je svaki korak određen geometrijskim pravilima (aksiomima)[11]. Na analogan način, postoje aksiomi, pravila kod origami konstrukcija. Taj skup aksioma kod origami konstrukcija nazivamo Huzita-Hatori aksiomi gdje je prvih 6 formirao matematičar Humiaki Huzita 1992. godine, a sedmi je aksiom postavio Koshiro Hatori 2002. godine. Svim aksiomima je zajedničko da konstruiraju točno po jednu liniju savijanja, a da bi izvršili određenu konstrukciju nije nam potrebno više od navedenih Huzita-Hatori pravila.

[10] (1830.-1900.) austrijski inžinjer i policajac. Studirao je matematiku u Češkoj u Pragu.

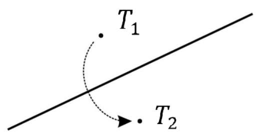
[11] Aksiomi su istinite tvrdnje koje ne dokazujemo i koje nam služe kao logička osnova neke matematičke ili logičke teorije.

3.1.1 Huzita-Hatori aksiomi

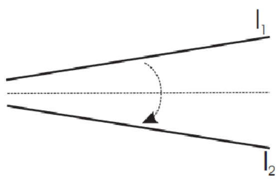
1. Za dane dvije točke T_1 i T_2, postoji linija savijanja koja sadrži obje točke.



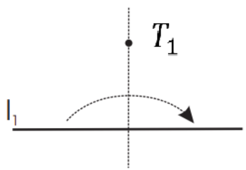
2. Za dane dvije točke T_1 i T_2, postoji linija savijanja koja preslikava točku T_1 u točku T_2.



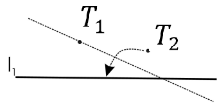
3. Za dana dva pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja preslikava pravac l_1 na pravac l_2.



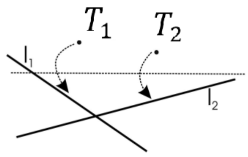
4. Za danu točku T_1 i pravac l_1, postoji linija savijanja okomita na pravac l_1 koja sadrži točku T_1.



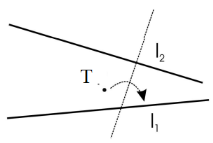
5. Za dane dvije točke T_1 i T_2 i dani pravac l_1, postoji linija savijanja koja preslikava točku T_2 na pravac l_2 i sadrži točku T_1.



6. Za dane dvije točke T_1 i T_2 i dana dva pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja preslikava točku T_1 na pravac l_1 i točku T_2 na pravac l_2.



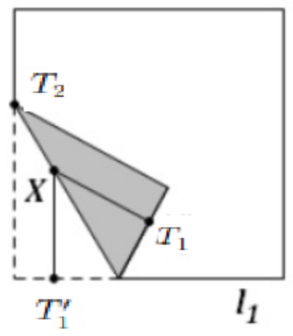
7. Za danu točku T_1 i dana dva pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja preslikava točku T_1 na pravac l_1, a okomita je na pravac l_2.



Svi aksiomi origamija (osim 5., 6. i 7.) mogu se konstruirati pomoću ravnala i šestara i sa njima smo se susreli u osnovnoj i srednjoj školi prilikom obrađivanja nastavnih jedinica iz geometrije. Prilikom obrađivanja nastavne jedinice pravac susreli smo se sa 1. i 4. aksiomom. Naime, možemo konstruirati pravac koji sadrži dvije zadane točke, što nam je analogno sa prvim Huzita-Hatori aksiomom. Za danu točku i dani pravac, postoji jedinstveni pravac koji sadrži zadanu točku i okomit je na zadani pravac. S ovim su se učenici susreli u 3. razredu srednje škole prilikom obrade nastavne cjeline *Pravac*, a analogno je 4. Huzita-Hatori aksiomu.
Zanimljivo je da nam origami nudi više mogućnosti za konstruiranje različitih matematičkih problema za razliku od konstrukcija pomoću ravnala i šestara. Zašto je to tako?
Naime, prilikom origami konstrukcija mi presavijamo papir te ulazimo u 3D prostor. Na taj način sva presavijanja papira nude više mogućnosti prilikom konstruiranja jer nisu samo ograničeni na 2D prostor kao što su konstrukcije pomoću ravnala i šestara.

Nama će u ovom radu biti potreban 5. aksiom za dokazivanje origami konstrukcije trisekcije kuta. Promatramo li papir oblika kvadrata, donji rub papira označimo sa l_1, a sa T_1 označimo točku koja je sadržana na simetrali od l_1. Neka je T_2 proizvoljna točka na lijevom rubu papira kao na slici 6. Primijenimo li 5. aksiom dovoljan broj puta, mijenjajući pritom položaj točke T_2 duž oba okomita ruba papira, na papiru će se ocrtati parabola[12].

Točka X na dobivenoj liniji savijanja jednako je udaljena od točke T_1 i linije l_1, jer je $|T_1X| = |T_1'X|$. Iz toga slijedi da točka X pripada paraboli te da je točka T_1 fokus parabole, a linija l_1 ravnalica parabole. S obzirom da točka X pripada i liniji savijanja, tada je linija savijanja tangenta[13] parabole.

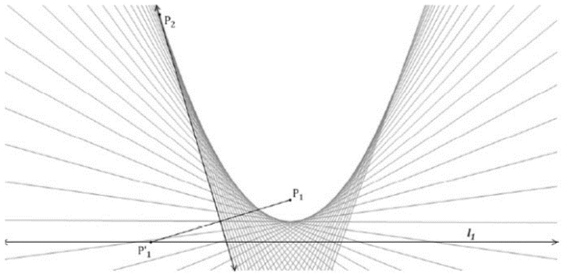


Slika 6: Preuzeto iz [8]

Jednadžba parabole je oblika: $y^2 = 2px$, tj. jednadžba parabole je drugog stupnja pa će se pomoću 5. aksioma moći riješiti kvadratna jednadžba. Bitno je primijetiti kako su točka T_1 i pravac l_1 fiksni, a točka T_1' se mijenja u ovisnosti o položaju točke T_2, tj. u ovisnosti tangente.

[12]Parabola je skup točaka u ravnini koje su jednako udaljene od zadane točke fokusa i pravca ravnalice ili direktrise.

[13]Tangenta parabole je pravac koji s parabolom ima jednu zajedničku točku.



Slika 7: Preuzeto iz [8]

Također, 6. aksiom će nam biti potreban prilikom origami konstrukcije duplikacije kocke te kojeg možemo usporediti sa 5. aksiomom. U ovom slučaju su T_1 i l_1 fokus i ravnalica prve parabole, a T_2 i l_2 fokus i ravnalica druge parabole. Za dvije zadane parabole u ravnini trebamo pronaći zajedničku tangentu. Upravo nam šesti aksiom u tome može pomoći jer može riješiti proizvoljnu jednadžbu trećeg stupnja s racionalnim koeficijentima te se zbog njega razlikuju konstrukcije savijanja papira od euklidskih konstrukcija.

Pretpostavimo da su parabole označene sa p_1 i p_2 te da je t njihova zajednička tangenta. Tada su parabole zadane jednadžbama:

$$\begin{aligned} p_1 : (y-n)^2 &= 2a(x-m), \\ p_2 : x^2 &= 2by, \\ t : y &= kx + l. \end{aligned}$$

Ukoliko je točka dodira tangente i prve parabole označena sa $P_1(x_1, y_1)$, tada se jednadžba tangente može napisati u obliku:

$$(y-n)(y_1-n) = a(x-m) + a(x_1-m).$$

Izlučimo li y iz zadane jednadžbe, dobivamo:

$$y = \frac{a}{y_1-n}x + n + \frac{ax_1-2am}{y_1-n},$$

iz čega zaključujemo da je $k = \frac{a}{y_1-n}$, a $l = n + \frac{ax_1-2am}{y_1-n}$. Dakle, imamo:

$$y_1 = \frac{a+nk}{k} \quad i \quad x_1 = \frac{l-n}{k} + 2m.$$

Analogno, ako točku dirališta tangente t i parabole p_2 označimo sa $P_2(x_2, y_2)$ tada jednadžbu tangente možemo zapisati u obliku:

$$y = \frac{x_2}{b}x - y_2,$$

gdje su $k = x_2 b$, a $l = -y_2$,, tj. $x_2 = bk$ i $y_2 = -l$.

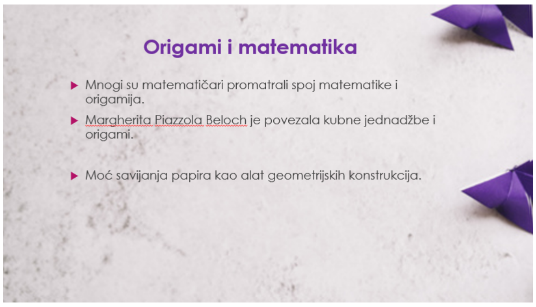
3.1.2 Aktivnost za učenike - Upoznavanje sa aksiomima origamija

Navedena aktivnost je predviđena za dodatnu nastavu iz matematike u trajanju od jednog školskog sata. Na početku nastavnog sata objašnjavamo učenicima što je origami te ih upoznajemo sa povijesti origamija (gdje je nastao, kada je nastao, kakav papir se koristi...). Nakon toga, uvodimo ih u aksiome origamija i aktivnost koju ću naknadno objasniti.
S obzirom da sam aktivnost provela pomoću aplikacije Zoom, ova aktivnost je trajala 10 minuta. Prvo pitanje koje sam postavila učenicima na početku navedene aktivnosti je *znaju li što je origami.* Većina učenika je odgovorila da znaju što je origami te su neki od učenika krenuli objašnjavati kako je to umjetnost savijanja papira. Pitala sam ih *smijemo li trgati ili rezati papir prilikom savijanja u origami modele* te su učenici na to spremno odgovorili da ne smijemo. Pomoću navedenih pitanja shvatila sam da su učenici upoznati sa origamijem te sam nastavila dalje sa aktivnosti. Nekolicima učenika je reklo da su se u osnovnoj i srednjoj školi susreli s origamijem u nekim nastavnim predmetima (matematika, fizika, sat razrednika...) te da zato znaju odgovore na moja postavljena pitanja.
Nakon kratkog uvoda, prikazala sam im sljedeći slajd pomoću *PowerPoint* prezentacijie:

Slika 8: Prezentacija 1

Objasnila sam im kako postoje dvije vrste origamija s obzirom na broj papira koji koristimo prilikom savijanja u origami modele. Postoji tradicionalni origami prilikom kojeg koristimo samo jedan papir i modularni origami kod kojega koristimo više papira koje savijamo u jednu cjelinu, tj. u jedan origami model.
Nakon toga, pitala sam učenike *smatraju li da se matematički problemi mogu rješavati pomoću origamija, tj. može li se proučavati spoj matematike i origamija.* Učenici su na navedeno pitanje odgovorili da sigurno možemo povezati matematiku i origami, ali su pritom mislili na konstruiranje geometrijskih likova i tijela pomoću origamija jer su se s time susreli već u osnvnoj školi.
Prije samog objašnjavanja aksioma origamija, s obzirom da se učenici nisu do sad susreli sa riječi aksiom, prvo sam im objasnila značenje navedenog pojma. Aksiom je tvrdnja čija istinitost se ne dokazuje, odnosno tvrdnja koju smatramo istinitom. Primjer aksioma u nastavi matematike je: *Za svake dvije točke postoji jedinstveni*

Slika 9: Prezentacija 2



Slika 10: Prezentacija 3

Slika 11: Prezentacija 4

pravac koji ih sadrži. Pomoću *PowerPoint* prezentacije prikazala sam učenicima aksiome origamija te sam prvi aksiom objasnila i povezala sa prvim Euklidovim aksiomom koji sam navela kao primjer. Objasnila sam također kako navedeni aksiom možemo konstruirati i pomoću origamija, ali i pomoću ravnala i šestara. Pomoću papira sam im prikazala dvije zadane točke te sam presavila papir tako da nabor papira sadrži obje točke. Na analogan način sam zajedno s učenicima objasnila 2., 3. i 4. aksiom. Za posljednja tri aksioma sam ih pitala *smatraju li da se oni mogu konstruirati pomoću ravnala i šestar*a. Učenici su na ovom pitanju bili podijeljena mišljenja te sam ih priupitala *može li se više konstrukcija napraviti pomoću origamija, pomoću ravnala i šestara ili podjenako pomoću svega nabrojenoga* te da

obrazlože svoj odgovor. Jedan učenik je tada zaključio kako se više konstrukcija može konstruirati pomoću origamija jer ulazimo u 3D prostor. Navedeni zaključak je bio posljednji zaključak ove aktivnosti te sam nakon nje uvela učenike u sljedeću aktivnost koju ću opisati naknadno.
Smatram da je ovaj dio online sata prošao odlično jer su učenici aktivno sudjelovali u nastavi i spremno odgovarali na sva moja potpitanja. S obzirom da su se učenici već susreli sa origamijem, nisam im morala detaljno objašnjavati kakva je to umjetnost. Koncentracija učenika u ovom dijelu online sata je bila na vrhuncu te su se zainteresirali za daljnje aktivnosti i što će sve novo naučiti tokom online nastavnog sata.

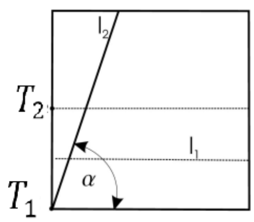
S obzirom da online nastava ograničava način izvođenja aktivnosti, ovu aktivnost bi na satu u školi mogli izvesti na drugačiji način. Kako bi učenike zainteresirali za aktivnost, svakom učeniku podijelimo papir na kojem je prikazan prvi aksiom origamija te ih ispitujemo s čime ga možemo usporediti iz nastave matematike, može li se navedeni aksiom konstruirati pomoću ravnala i šestara ili pomoću origamija. Nakon toga, presavinemo papir tako da se nabor savijanja preklapa sa prikazanim pravcem. Na taj načim učenici mogu zaključiti kako se navedeni aksiom može konstruirati i pomoću geometrijskih konstrukcija i pomoću origamija.

Učenike zatim podijelimo u parove te im podijelimo papire sa Huzita-Hatori aksiomima. Cilj svakog tima je objasniti za svaki navedeni aksiom (osim prvog koji smo im objasnili) može li se konstruirati pomoću ravnala i šestara i u kojem razredu i kojem nastavnom gradivu su se susreli s navedenim aksiomom. Ukoliko postoje aksiomi čija konstrukcija nije moguća pomoću ravnala i šestara učenici trebaju razmisliti i sami zaključiti zašto su neke konstrukcije moguće pomoću origamija, ali ne pomoću ravnala i šestara. Učenici zapisuju navedene zaključke na papir koji će kasnije predati profesorici kako bi profesorica mogla pratiti njihovo logičko zaključivanje i razumijevanje nastavnog gradiva iz aktivnosti, odnosno za vrednovanje za učenje.

Nakon održanog sata o aksiomima origamija, profesorica zadaje učenicima da ispune kratku anketu koju ću detaljnije objasniti u posljednjem poglavlju ovog rada.

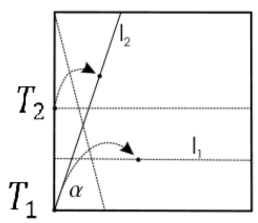
3.2 Origami konstrukcija trisekcije kuta

Trisekcija kuta je podjela kuta na 3 jednaka dijela, tj. tri sukladna kuta te je taj problem poznat još Grcima iz doba antike. Stoljećima su matematičari tražili euklidske konstrukcije, koristeći samo ravnalo i šestar, ali je u 19. stoljeću dokazano da se ona ne može riješiti konstrukcijom pomoću ravnala i šestara. Taj dokaz je algebarski i oslanja se na činjenicu da se trisekcija kuta opisuje kubnom jednadžbom dok se pravci i kružnice opisuju linearnim i kvadratnim jednadžbama. Iako se trisekcija kuta ne može konstruirati pomoću geometrijskih konstrukcija, ipak pomoću origamija lako dolazimo do rješenja. Naš problem je podjela kuta na tri jednaka dijela, odnosno tri sukladna kuta (kutevi jednakih mjera). Promatramo li papir oblika kvadrata, pretpostavimo da je kut koji želimo podijeliti donji lijevi kut kvadrata te ga označimo sa α. Pretpostavimo da je naš kut kojeg dijelimo mjere manje od 90°, odnosno šiljasti kut (iako se ova metoda može primijeniti i na tupe kuteve). Presavijemo papir tako da napravimo dvije jednako udaljene linije savijanja na dnu. Donju liniju savijanja označimo sa l_1, a drugi krak kuta kojeg dijelimo s l_2. Kao što je prikazano na slici 12 označimo točke T_1 i T_2.



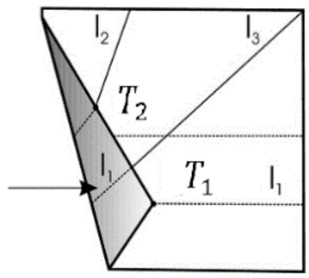
Slika 12: Trisekcija kuta - 1. korak

Točku T_1 preslikamo pomoću presavijanja na pravac l_1, a točku T_2 na pravac l_2.



Slika 13: Trisekcija kuta - 2. korak

Zatim, presavijemo i odsavijemo papir duž linije l_1 te tako dobivamo liniju nabora l_3 koju proširujemo do donjeg lijevog ruba. Linija nabora l_3 sadrži točku T_1 i dijeli kut α u omjeru $2 : 1$.



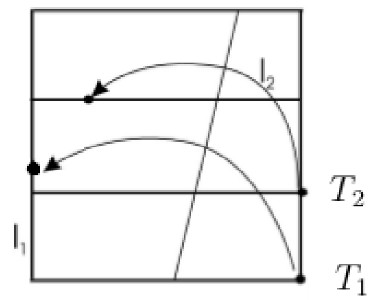
Slika 14: Trisekcija kuta - 3. korak

Dokaz. Označimo slike točaka T_1 i T_2 sa T_1' i T_2', s N označimo nožište pravca koji sadrži točku T_1' i okomit je na donji rub papira, a s R označimo polovište dužine $\overline{T_1'T_2'}$. Primijetimo da je: $|T_1'N| = \frac{1}{2}|T_1T_2| = |T_1'R|$. Iz toga slijedi da su: $|\angle T_1'T_1N| = |\angle T_1'T_1R| = |\angle T_2'T_1R|$. $\square$

3.3 Origami konstrukcija duplikacije kocke

Duplikacija kocke je problem konstruiranja kocke čiji je volumen dvostruko veći od volumena zadane kocke. Drugi naziv za ovaj problem je *Delijski problem* jer potječe od legende da je u Ateni oko 430. g. pr. Kr. harala kuga pa su stanovnici Atene, tražeći pomoć, otišli u Delfijsko područje u Delosu. Tamo su im rekli da će pobijediti kugu ukoliko uspiju udvostručiti volumen oltara Apolona koji je bio u obliku kocke. Atenjani su isprva udvostručili duljinu svakog brida kocke te su tako dobili osam puta veći volumen kocke od volumena polazne kocke. Kuga je tada nastavila harati među stanovništvom s obzirom da nisu ispunili proročanstvo.
Promatrajmo naš problem na algebarski način te označimo duljinu brida kocke sa y. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je naša kocka brida duljine jedan te tada rješavanjem jednadžbe $V_2 = 2V_1$ računamo da je duljina brida naše duplicirane kocke jednaka $\sqrt[3]{2}$, tj. $x = y\sqrt[3]{2}$.
Kontrukciju dužine čija je duljina $y\sqrt[3]{2}$ je objavio Peter Meser u jednom matematičkom časopisu 1986. godine.

Pretpostavimo da imamo papir u obliku kvadrata koji se savijanjem podijeli na tri jednaka dijela. Na papiru označimo točke T_1 i T_2, te pravce l_1 i l_2 kao na sljedećoj slici:

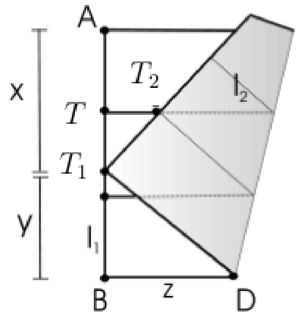


Slika 15: Duplikacija kocke - prvi korak

Sljedeći cilj prilikom presavijanja papira je preslikati točku T_1 na pravac l_1, a točku T_2 preslikati na pravac l_2. Točka T_2 dijeli stranicu kvadrata na dvije dužine čije ćemo duljine označavati sa x i y.
Omjer duljina tih dužina je:

$$x : y = \sqrt[3]{2}.$$

Dokaz. Sada ćemo dokazati da je $\sqrt[3]{2}$ zaista naš omjer duljina zadanih dužina.
Neka su zadane točke T_1, T_2, A, B i D kao što je prikazano na slici. Označimo sa $|AB| = y + x$, $|AT_1| = x$, $|T_1B| = y$ i $|BD| = z$.



Slika 16: Duplikacija kocke - drugi korak

Primijetimo sa slike da je $|BD| + |T_1D| = x + y$ te pomoću Pitagorina poučka promatrajući trokut $\triangle T_1BD$ možemo izračunati $|T_1D| = \sqrt{y^2 + z^2}$. Odnosno računamo:

$$\begin{aligned}
|BD| + |DT_1| &= x + y && \Leftrightarrow\\
z + \sqrt{y^2 + z^2} &= x + y && \Leftrightarrow\\
\sqrt{y^2 + z^2} &= x + y - z \quad /^2 && \Leftrightarrow\\
y^2 + z^2 &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y)z + z^2 && \Leftrightarrow\\
2(x + y)z &= x^2 + 2xy / : 2(x + y) && \Leftrightarrow\\
z &= \frac{x^2 + 2xy}{2(x + y)}
\end{aligned}$$

Također, možemo primijetiti da je:

$$|T_1T_2| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{y + x}{3},$$

i da je:

$$|T_1T_2| = |AB| - |T_1B| - |AT| = y + x - y - \frac{y + x}{3} = \frac{2x - y}{3}.$$

S obzirom da je $\triangle TT_1T_2$ sličan trokutu $\triangle BDT_1$, vrijedi:

$$\frac{|T_1D|}{|BD|} = \frac{|T_1T_2|}{|T_1T|},$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
\frac{x + y}{z} - 1 &= \frac{y + x}{2x - y} && \Leftrightarrow\\
\frac{y + x}{z} &= \frac{y + x + 2x - y}{2x - y} && \Leftrightarrow\\
\frac{z}{y + x} &= \frac{2x - y}{3x} && \Leftrightarrow\\
z &= \frac{2x^2 + xy - y^2}{3x}.
\end{aligned}$$

Kada izjednačimo obje jednakosti koje su vrijednost naše nepoznanice z dobit ćemo:

$$\frac{x^2 + 2xy}{2(x+y)} = \frac{2x^2 + xy - y^2}{3x},$$

$$3x^3 + 6x^2y = 4x^3 + 6x^2y - 2y^3.$$

Upravo je zbog toga $x^3 = 2y^3$, tj. $x = y\sqrt[3]{2}$ čime je naš dokaz gotov. $\square$

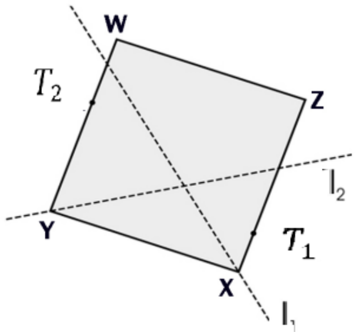
4 RJEŠAVANJE KUBNE JEDNADŽBE POMOĆU ORIGAMIJA

Margherita P. Beloch (12.7.1879. - 28.9.1976.) je bila talijanska matematičarka koja je proučavala algebarsku geometriju, algebarsku topologiju i fotogrametriju.
Studirala je matematiku na rimskom sveučilištu Sapienza University of Rome te je napisala diplomski rad pod nadzorom Guida Castelunova. Diplomirala je 1908. godine s pohvalom da je njezin rad bio vrijedan objavljivanja te je njezina teza „Sulle trasformazioni birazionali dello spazio" u prijevodu znači „O biraciolanim transformacijama u svemiru" objavljena u časopisu Annali di Matematica Pura ed Applicata. Njezin mentor, Guida Castelunova, je bio vrlo impresioniran njezinim talentom te joj je ponudio mjesto asistenta na fakultetu koji je radila do 1919. godine kada se preselila u Paviju pa u Palermo. U Palermu je radila kod Michelea De Franchisa, vrlo poznatog i važnog matematičara talijanske algebarske škole geometrije. Nakon toga, 1924. godine dovršila je svoju „libera docenzu", tj. diplomu koju je u to doba bilo potrebno steći kako bi mogla raditi kao profesor na fakultetu. Tri godine kasnije, postala je profesorica na Sveučilištu Ferrari gdje je predavala do umirovljenja 1995. godine.
Kao što sam već navela, glavni znanstveni interes su joj bile algebarska geometrija, algebarska topologija i fotogrametriju. Fotogrametrija je znanost koja se bavi prikupljanjem prostornih podataka iz zračnih snimaka. To je znanost, umjetnost i tehnologija koja obuhvaća pouzdane kvantitativne informacije o fizičkim objektima i okolini procesom zabilježavanja, mjerenja i interpretacije fotografskih snimaka i scena.
Također, smatra se da je Margherita prva formalizirala potez origamija kojim je pokazala kako vaditi kubni korijen presavijanjem papira, što je po pravilu nemoguće učiniti pomoću ravnala i šestara. Taj potez je nazvala Belochino presavijanje kao i drugi pojam koji je nazvala Belochin kvadrat.

4.1 Belochin kvadrat

Za proučavanje i konstruiranje Belochinog kvadrata koristit ćemo neke osnovne već navedene asiome origamija, a to su 2. i 4. aksiom origamija.

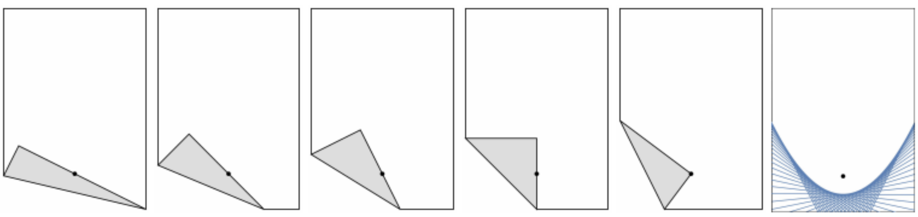
Neka su dane dvije točke T_1 i T_2, i dvije linije savijanja l_1 i l_2. Konstrirajmo kvadrat kojemu dva nasuprotna vrha sadrže navedene zadane točke, a preostala dva vrha su sadržana na dvije zadane linije presavijanja.



Slika 17: Belochin kvadrat

Konstrukcija kvadrata je ključ za konstruiranje problema 3. stupnja pomoću savijanja papira. Tu nam je potreban 6. aksiom origamija koji nam omogućava konstruiranje kvadrata sa slike 17.

Potrebno je zapravo geometrijski objasniti 5. i 6. aksiom. Već sam navela kako u 5. aksiomu presavijanjem papira konstruiramo tangentu na parabolu te da je točka T_1 fokus naše parabole. Beloch je tu otkrila kako možemo rekonstruirati parabolu savijanjem tangenti na prikazan način, uzimanjem donjeg ruba papira kao direktrisu parabole i označavanjem fokusa. Zatim presavijamo papir bez da pomičemo fokus koji smo zadali pazeći pritom da naš donji rub papira prilikom savijanja sadrži zadani fokus kako je prikazano na sljedećoj slici.

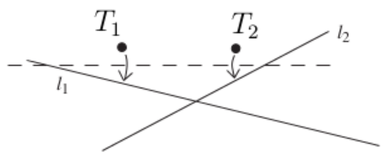


Slika 18: Parabola

4.1.1 Belochino presavijanje

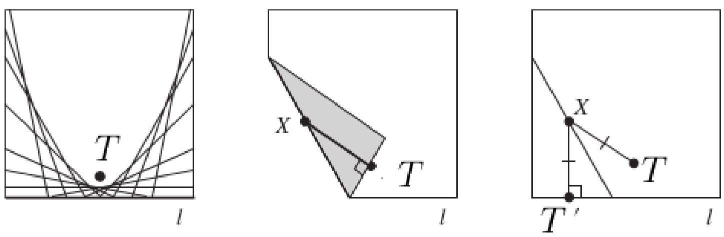
Nakon što sam objasnila konstrukciju Belochinog kvadrata pomoću origamija, sada ću navesti jedan osnovni način presavijanja papira koji razlikuje origami konstrukcije od konstrukcija pomoću ravnala i šestara, a njegov naziv je Belochino presavijanje.

Za dane dvije točke T_1 i T_2 i dva pravca l_1 i l_2 možemo u jednom presavijanju istovremeno preslikati točku T_1 na pravac l_1, kao i točku T_2 na pravac l_2. Ako pre-



Slika 19: Belochino presavijanje

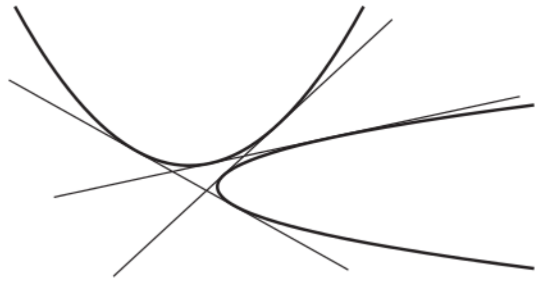
savijemo točku T na zadani pravac l, dobiveni pregib će biti tangenta parabole sa fokusom u točki T i ravnalicom l. Drugim riječima, uzmemo li papir, označimo na njemu točku T te uzmemo da je rub papira pravac l. Zatim presavijemo papir nekoliko puta tako da točku T preslikamo na pravac l svaki put. Najlakše ćemo to učiniti izaberemo li na pravcu l proizvoljnu točku koju ćemo preslikati na našu točku T. Nakon toga, odsavijemo papir, izaberemo novu proizvoljnu točku na pravcu te ponovimo postupak. Nakon što postupak ponovimo nekoliko puta, pojavit će se obris parabole kao na slici 20. Nakon što smo preslikali točku T' na pravac l i na



Slika 20: Belochino presavijanje - parabola

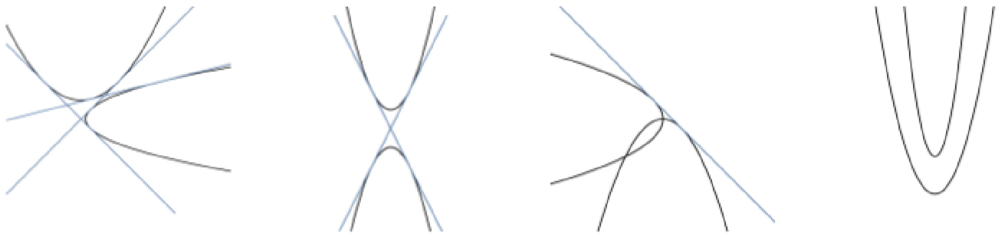
točku T, konstruirajmo pravac okomit na presavinut prikaz pravca koji sadrži točku T. Točka X na dobivenoj liniji presavijanja jednako je udaljena od točke T_1 i linije l_1 jer je $|TX| = |XT'|$. S obzirom na definiciju parabole, možemo zaključiti da točka X pripada paraboli gdje je točka T fokus parabole, a pravac l ravnalica parabole. S obzirom da točka X pripada liniji savijanja, možemo zaključiti da je ta linija savijanja zapravo tangenta parabole sa diralištem u točki T.

Proučimo li sliku 21 možemo zaključiti ukoliko smo konstruirali dvije parabole, tada one mogu imati najviše tri različite tangente što znači da pomoću origamija možemo riješiti kubnu jednadžbu.



Slika 21: Belochino presavijanje - parabola

Na slici 22 nalaze se svi slučajevi koliko dvije različite parabole mogu imati zajedničkih tangenti.



Slika 22: Tangente dviju parabola

4.2 Rješavanje kubne jednadžbe

Nakon proučavanja Belochinog kvadrata i Belochinog presavijanja, Margherite Piaozzola Beloch je također i opisala kako su njezine kvadratne jednadžbe dovele do metode savijanja papira da bi pronašla prave korijene kubnih jednadžbi referirajući se na poznatu Lillovu metodu grafičkih rješenja za jednadžbe trećeg stupnja. Ona se zapravo referira na rad iz 1867. godine austrijskog inžinjera Eduarda Lilla[14]. Njegovu metodu objasnit ću u nastavku kako bismo mogli lakše shvatiti kako se rješavaju kubne jednadžbe pomoću origami konstrukcija.
Pretpostavimo da je zadana funkcija:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

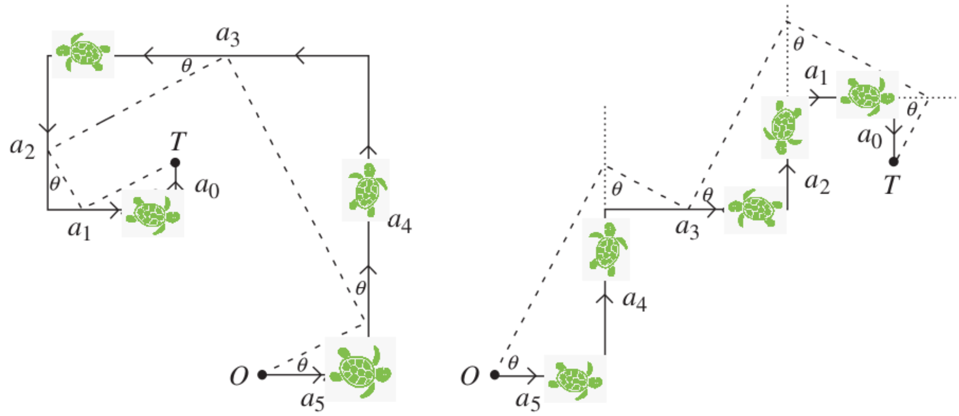
sa realnim koeficijentima te želimo pronaći realni korijen funkcije $f(x)$ ukoliko on postoji. Eduard Lill predlaže da se to napravi geometrijski, konstruirajući put u ravnini koji ovisi o koeficijentima funkcije. Drugim riječima, opisao je to uz pomoć šetnje kornjače. Zamislimo li kornjaču koja hoda uz duž pozitivnog dijela x-osi do točke koja je od početne točke udaljena za iznos koeficijenta a_n. Potom se kornjača okreće za mjeru kuta od $90°$ u obrnutom smjeru od kretanja kazaljki na satu te prelazi udaljenost koja je jednaka iznosu koeficijenta a_{n-1}. Nakon toga, kornjača ponavlja proces sve dok ne dođe to točke T. Ukoliko je neki od koeficijenata negativan broj, tada kornjača hoda unatrag te se taj put smatran negativnom dužinom.

Nakon što kornjača napravi cijeli put, smještamo se na 0 i tada se pokušavamo riješiti kornjače koja se nalazi u točki T, tj. pokušavamo je "upucati". Prvo zamislimo da živimo u svemiru u kojem se metci odbijaju od zida pod kutom mjere $90°$. Mi se nalazimo na mjestu 0 te ispalimo metak iz tog mjesta u pravac kojim se kornjača kretala, tj. dužinom a_{n-1}. Taj metak se odbija od pravca do pravca pod kutom mjere $90°$ sve dok ne dođe do kornjače. Ukoliko metak udari kornjaču onda put metka ima n strana, a put kornjače $n+1$ stranu.

Pogledamo li sliku 23, vidjet ćemo da je označen kut θ koji označava kut između putanje metka i $x-osi$.
Tvrdimo da je $x = \tan\theta$ jedno rješenje zadane funkcije $f(x)$.
Primijetimo kako su strane putanje metka zapravo hipotenuze niza pravokutnih trokuta čiji krakovi sadrže putanju kornjače. Neka je y_k duljina dužine koja se nalazi nasuprot kuta θ u trokutu čije su strane preostale dvije stranice koje zatvaraju spomenuti kut θ i dio su dužine a_k. Tada dobivamo:

$$\begin{aligned}
y_n &= (\tan\theta)a_n = -xa_n,\\
y_{n-1} &= (\tan\theta)(a_{n-1} - (-xa_n)) = -x(a_{n-1} + x_{a_n}),\\
&\vdots\\
y_1 &= -x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n))) = -x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)).
\end{aligned}$$

[14](1830–1900) je bio austrijski inženjer i vojni zapovjednik.



Slika 23: Put kornjače

Možemo zapisati da je $y_1 = a_0$ iz čega dobivamo da je $f(x) = 0$. Odnosno, ukoliko ne postoji vrijednost kuta θ koja bi nam omogućila da pogodimo kornjaču, tada naša funkcija neće imati realnih korijena. Put metka je zapravo sličan putu kornjače te je tada naša funkcija $f(x)$ faktorizirana sa $(x + \tan\theta)$.

U slučaju prikazivanja kubnih jednadžbi pomoću Lillove metode imat ćemo zadanu kubnu jednadžbu oblika:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

te će tada biti četiri strane kretanja kornjače dok će put metka imati samo tri strane. Ako zamislimo da je 0 točka A te da je T točka B i da linije koje sadrže a_2 i a_1 strane su pravci r i s, tada Belochin kvadrat sa prilagođenim mjerama kutova na s i r i suprotnim stranama prolazeći kroz 0 i T će nam prikazati put metka do kornjače. Na taj način možemo savijanje papira iskoristiti za formulaciju Lillove metode za rješavanje kubnih jednadžbi.

4.3 Aktivnost za učenike - Rješavanje kubne jednadžbe pomoću Lillove metode

Nakon što su se učenici prošli nastavni sat iz dodatne nastave iz matematike upoznali sa origamijem i aksiomima origamija, ovaj nastavni sat ih uvodimo u nastavnu jedinicu *Kubne jednadžbe*. Ova aktivnost je namijenjena za uvodni dio sata u trajanju od 15 minuta. Na početku nastavnog sata profesorica ponavlja s učenicima nastavno gradivo iz nastavne cjeline *Kvadratna jednadžba* kako bi sami zaključili metodom analogije i povezali gradivo sa kubnim jednadžbama. Prvo što učenici trebaju zaključiti je kako izgleda kubna jednadžba te od učenika očekuje odgovor: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ gdje je $a \neq 0$, a a, b, c i d iz skupa realnih brojeva.
Nakon toga profesorica ukratko objašnjava kako se izvodi Cardanova formula za rješavanje kubne jednadžbe. Opći oblik jednadžbe je $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, gdje su a, b i c realni brojevi. Supstitucijom $y = x - \frac{a}{3}$ jednadžba prelazi u oblik $x^3 + px + q = 0$. Ta jednadžba ima tri rješenja i oblika je:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

Kada smo učenike uveli u nastavnu jedinicu kubne jednadžbe, objašnjavamo rješavanje kubne jednadžbe pomoću Lillove metode, ali prilagodimo objašnjavanje uzrastu kako bi svi učenici shvatili navedenu metodu.
Naše objašnjavanje započinjemo sa sljedećim:

Pretpostavimo da je zadana funkcija

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

sa realnim koeficijentiuma te želimo pronaći realni korijen ukoliko on postoji. Lill predlaže da se geometrijski konstruira put u ravnini koji ovisi o koeficijentima funkcija te je to opisao uz pomoć šetnje kornjače. Zamislimo kornjaču koja hoda duž pozitivnog smjera $x-$ osi do točke koja je od početne točke udaljena za iznos koeficijenta a_n. Potom se okreće za mjeru kuta od 90° i prelazi udaljenost a_{n-1}. Kornjača ponavlja proces dok ne dođe do točke T. Ako je neki od koeficijenata negativan, onda kornjača hoda unatrag, tj. taj put je negativna dužina. Kada kornjača napravi cijeli put, mi se smještamo u početak u točku 0 i pokušavamo „upucati” kornjaču. Pretpostavimo da se metci odbijaju od zidova pod kutom mjere 90°. Naš metak se odbija od pravca do pravca dok ne dođe do kornjače.
Ukoliko metak udari kornjaču, onda put metka ima n strana, a put kornjače $n + 1$ strana. Kut θ je kut između putanje metka i $x-$ osi. Strane putanje metka su hipotenuze niza pravokutnih trokuta čiji krakovi sadrže putanju kornjače. Jedno rješenje zadane funkcije je $x_1 = \tan\theta$.
Nakon što smo objasnili Lillovu metodu za pronalaženje korijena kubne jednadžbe, ostatak sata provodimo aktivnost objašnjenu u sljedećem poglavlju.

4.4 Aktivnost za dodatnu nastavu iz matematike

Svrha ovog rada je pokazati kako se kubne jednadžbe rješavaju pomoću origamija. Za to će nam biti potrebno svo znanje iz ovog rada, papir oblika kvadrata, olovka i ravnalo te Lillova metoda i Belochin kvadrat.

Sljedeća aktivnost se može provesti na dodatnoj nastavi u 2. ili 3. razredu srednje škole. S obzirom da u 2. razredu srednje škole učenici obrađuju nastavnu cjelinu *Kvadratna jednadžba* koju sam objasnila već u ranijem poglavlju, ova aktivnost je idealna za produbljivanje znanja kod učenika pomoću origamija.

Nakon proučavanja kubne jednadžbe i Cardanove formule, profesorica objašnjava učenicima rješavanje kubne jednadžbe pomoću kornjačinog puta iz prethodnog poglavlja te ih dijeli u timove po 4 učenika. Svaki tim dobiva nekoliko a4 papira te primjer sa uputama i koracima za crtanje i traženje korijena kubne jednadžbe. Učenicima je prikazana jednadžba $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Sljedeći dio učenicima nije prikazan, ali je zapisan ovdje za lakše praćenje nastavka ovog rada.
Neka je zadana kubna jednadžba:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

S obzirom da je lijeva strana znaka jednakosti naše kubne jednadžbe zapisana u obliku umnoška faktora, možemo iščitati njene korijene: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ i $x_3 = 3$. Pomoću Lillove metode riješit ćemo ovu kubnu jednadžbu. Prvo odredimo sami duljinu jedinične dužine. Ja ću u ovom radu uzeti 1 cm za duljinu jedinične dužine.

Započnimo primjer koji je prikazan učenicima:

Primjer 4.1. *Neka je zadana kubna jednadžba:*

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Potrebno je pomoću uputa i koraka konstruirati na a4 papiru skicu pomoću koje ćemo savijati papir.

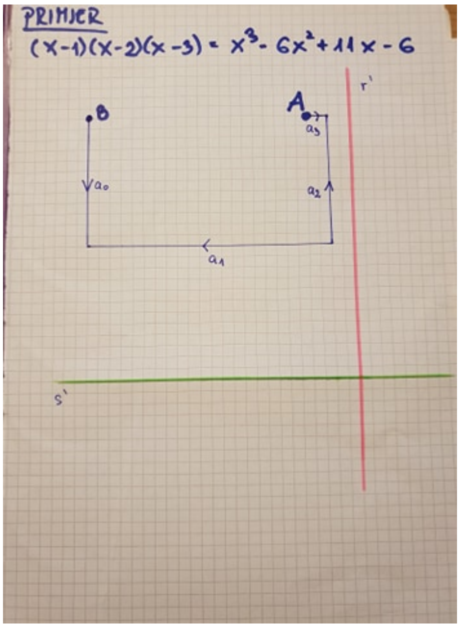
Koraci:

1. *Neka je A naša početna točka kretanja. Konstruiramo dužinu duljine jednog centimetra koliko i iznosi vrijednost vodećeg koeficijenta uz x^3. Stavljamo strelicu u desno jer je pozitivan broj. Tu duljinu dužine nazovimo a_3.*

2. *Vrijednost koeficijenta uz x^2 je -6 pa rotiramo našu putanju za $90°$ u smjeru gibanja kazaljke na satu te je naša strelica putovanja prema "gore" suprotno od smjera gibanja kazaljke na satu s obrzirom na negativan koeficijent. Zatim kada smo odredili smjer, konsturiramo dužinu duljine šest centimetara. Tu duljinu dužine nazovimo a_2.*

3. *Sljedeći koeficijent uz nepoznanicu x je 11 pa rotiramo za $90°$ našu putanju u smjeru gibanja kazaljke na satu te potom konstruiramo dužinu duljine 11 centimetara. Naša strelica je prema lijevo jer je negativna vrijednost koeficijenta. Tu duljinu dužine nazovimo a_1.*

4. *Posljednja vrijednost koeficijenta je -6 pa našu putanju rotiramo za $90°$ u smjeru gibanja kazaljke na satu a strelicu crtamo prema dolje. Tu duljinu dužine nazovimo a_0.*



Slika 24: Lillova metoda

Kada smo konstruirali smjer kretanja, sada je potrebno odrediti korijene kubne jednadžbe. Pogledajmo korake:

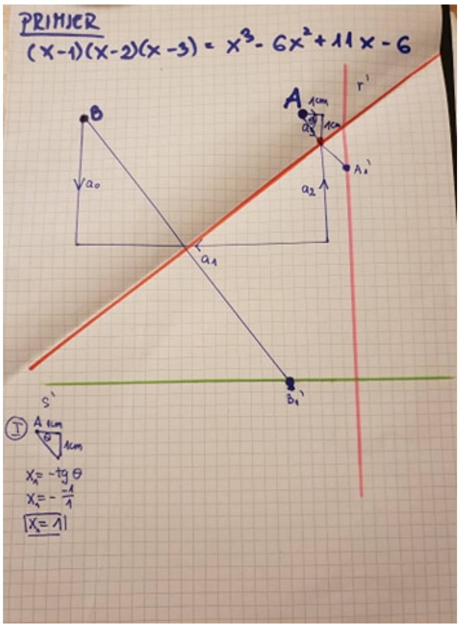
1. *Konstruiramo pravac paralelan sa a_2 koji je od njega udaljen jedan centimetar. Nazovimo taj pravac r'.*

2. *Konstruiramo pravac paralelan sa a_1 koji je od njega udaljen 6 centimetara. Nazovimo taj pravac s' kao na slici 24.*

3. *Neka je početna točka kretanja A, a krajnja točka B. Pokušajmo presavinuti papir tako da točku A preslikamo na pravac r', a točku B na pravac s'.*

4. *Sliku točke A preslikanu na pravcu r' nazovimo A_1', a sliku točke B preslikanu na s' nazovimo B_1'.*

5. *Potom konstruiramo dužinu čije su krajnje točke A i A_1' kao i dužinu čije su krajnje točke B i B_1'.*



Slika 25: Lillova metoda - traženje prvog rješenja kubne jednadžbe

6. *Konstruiramo pravac koji sadrži nabor koji je nastao savijanjem papira. Dužina* $\overline{AA_1'}$ *i taj pravac označen crvenom bojom na slici određuju pravokutni trokut kojemu je mjera kuta pri vrhu* A *mjere* θ*. Znamo da je* $a_3 = 1$ *te možemo iz presjeka izmjeriti da je duljina druge katete pravokutnog trokuta jednaka 1 pa možemo izračunati korijen kubne jednadžbe. Prisjetimo se trigonometrije pravokutnog trokuta:*

$$\tan\theta = \frac{\textit{nasuprotna kateta}}{\textit{priležeća kateta}}.$$

Tada primijenimo to na našem pravokutnom trokutu:

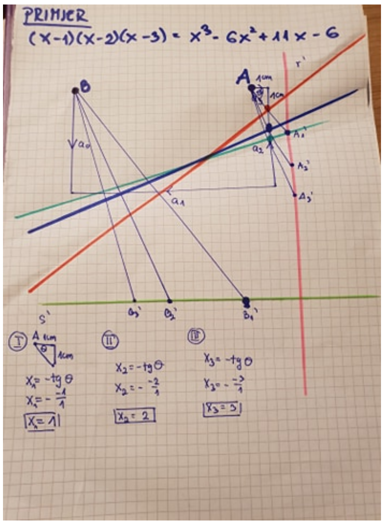
$$x = -\tan(\theta).$$

S obzirom na suprotni smjer kretanja obje katete pišemo minus ispred tangensa.
Zatim računamo korijen kubne jednadžbe.

Profesorica od učenika očekuje sljedeća rješenja: Nasuprotnu katetu smo izmjerili i ona je duljine 1, ali pišemo -1 jer je suprotnog smjera od smjera kretanja kazaljke na satu zbog negativnog koeficijenta. Priležeća kateta nam je zadana i ona je duljine 1 pa imamo:

$$x_1 = -\frac{-1}{1},$$
$$x_1 = 1.$$

Naše rješenje $x = 1$ je zapravo naše prvo rješenje, tj. korijen kubne jednadžbe. Pogledajmo sliku 25. Ponavljamo postupak na analogan način. Točku ponovno preslikavamo na pravac r', tj. klizimo niže od točke A_1' s ciljem da se i točka B preslika na pravac s'. Nakon toga ponavljamo postupak te ćemo izračunat da je drugo rješenje kubne jednadžbe jednako 2 kao na slici 26.
Na analogan način izračunat ćemo i treće rješenje kubne jednadžbe , tj. $x_3 = 3$ kao na slici 26.



Slika 26: Lillova metoda - traženje drugog i trećeg rješenja kubne jednadžbe

S obzirom da je gradivo malo kompleksnije i složenije, nakon prvih koraka kako konstruirati na a4 papiru skicu pomoću koje će učenici savijati papir, profesorica provjerava svakom timu skicu te pomaže ukoliko im skica nije ispravna. Na taj način svaki tim nakon provjere može prijeći na drugi dio zadatka odnosno na korake traženja korijena zadane kubne jednadžbe. Nakon što tim odredi rješenja kubne jednadžbe, potrebno je istu jednadžbu riješiti faktorizacijom, primjenom Caradnove formule ili upotrebom kalkulatora kako bi provjerili svoja rješenja.

5 ANALIZA ANKETE KOJA JE PROVEDENA MEĐU UČENICIMA 3. RAZREDA SREDNJE ŠKOLE

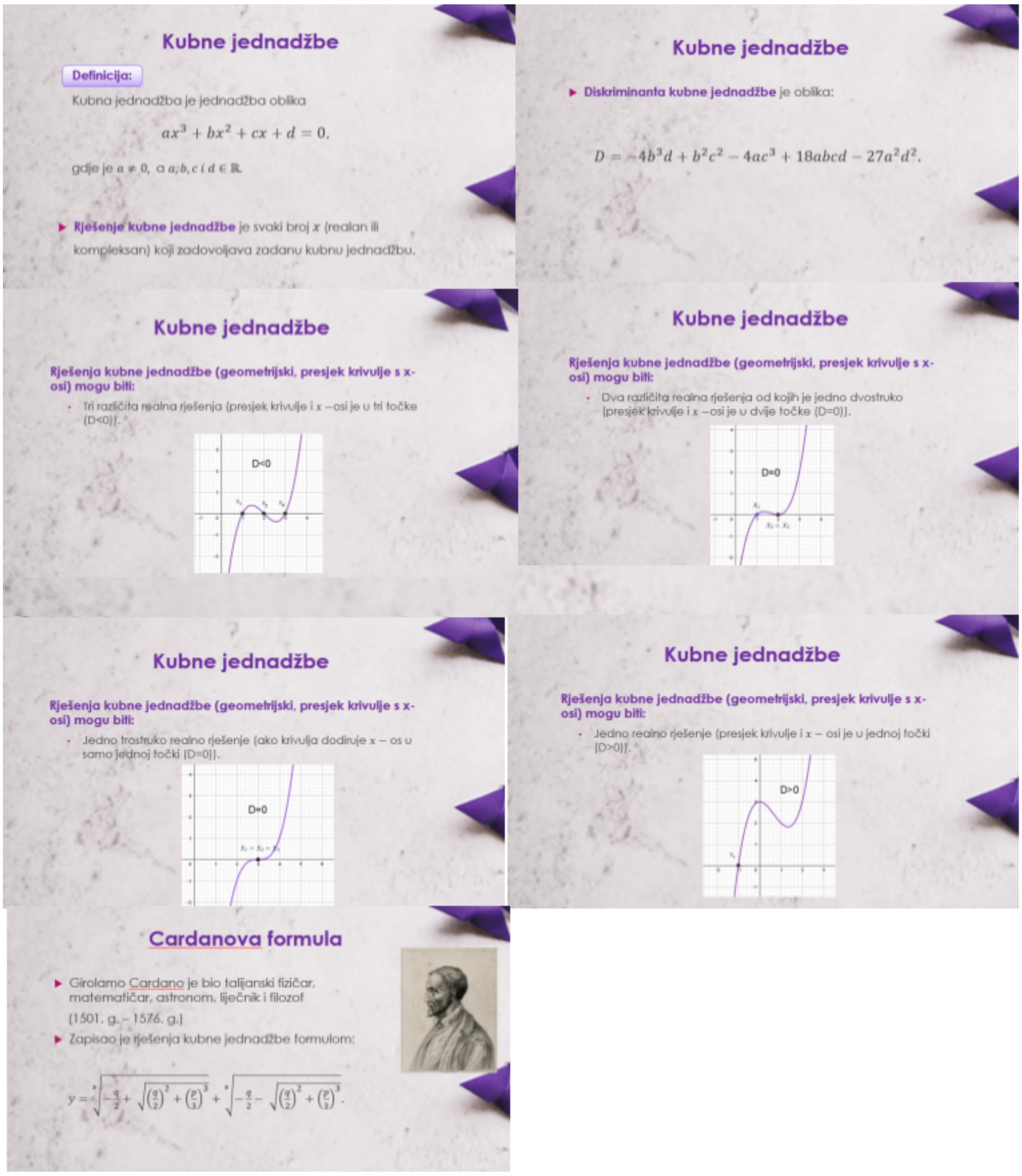
S obzirom da je nastava u školama online, u prethodnim poglavljima sam opisala kako bi izgledale aktivnosti na dodatnoj nastavi iz matematike u školskim klupama. Opisala sam na koji način bi učenike uvela u navedenu temu te što i na koji način je potrebno obraditi i objasniti kako bi shvatili najvažniji dio ovog rada, a to je kako riješiti kubnu jednadžbu pomoću origamija.

Kako se nastava u školama trenutno ne održava u učionicama, aktivnosti sam održala pomoću video poziva u Zoomu u srijedu 10.6.2020. godine, ali sam ih malo prilagodila s obzirom da je nastava online. Na linku (`https://drive.google.com/file/d/1xCDy7xPuq9VxBqoNfRr99rBccrDDPtO5/view?usp=sharing`) možete vidjeti prezentaciju koju sam poslala učenicima i pomoću koje sam održala predavanje u trajanju od jednog školskog sata. U nastavi je sudjelovalo 21 učenika 3.BR razreda Tehničke škole Rijeka. Učenici su prije održanog predavanja imali 3 dana da riješe zadanu anketu (`https://forms.gle/VWhSu86xgaXaiXPi9`).
S obzirom da u suvremenoj nastavi profesori vode dijalog s učenicima te ih na taj način uključuju u nastavu, cijelo predavanje sam učenicima postavljala potpitanja na koja su oni spremno odgovarali. U aktivnosti kod aksioma origamija objasnila sam kako sam uvela učenike u pojam origami te na koji način sam objasnila aksiome origamija. Sada ću objasniti kako sam ponovila kubne jednadžbe. Nakon predstavljanja teme, online nastavni sat sam započela na način da sam ih priupitala *jesu li se susreli s kubnim jednadžbama te ako jesu u kojem razredu su se susreli s njima.* Učenici su odgovorili kako su se s kubnim jednadžbama susreli u 2. razredu srednje škole gdje su ih samo spomenuli prilikom obrade kvadratnih jednadžbi.
Nakon toga su učenici prisječajući se kvadratnih jednadžbi na analogan način zaključili kako izgleda kubna jednadžba te što je rješenje kubne jednadžbe. Pitala sam ih *što je rješenje kubne jednadžbe* te su učenici zaključili da je analogno kao i kod kvadratnih jednadžbi rješenje kubne jednadžbe realan ili kompleksan broj koji zadovoljava navedenu jednadžbu. Potom sam im ukratko objasnila Cardanovu formulu i upitala ih *koliko rješenja može imati kubna jednadžba.* Učenici su spremno odgovorili da može imati najviše tri rješenja. Sve navedeno sam prikazala pomoću *PowerPoint* prezentacije kao na slici 27.

Nakon što sam ih uvela u temu sata, započela sam s objašnjavanjem kako riješiti kubnu jednadžbu pomoću Lillove metode. Prvo sam im objasnila da je zadana funkcija:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

sa realnim koeficijentima te želimo pronaći realni korijen ukoliko on postoji. Lill je predložio da se geometrijski konstruira put u ravnini koji ovisi o koeficijentima funkcije te je to opisao uz pomoć šetnje kornjače. Prikazala sam im sliku 23 te objasnila cijeli postupak koji sam prethodno objasnila u poglavlju Rješavanje kubne jednadžbe.

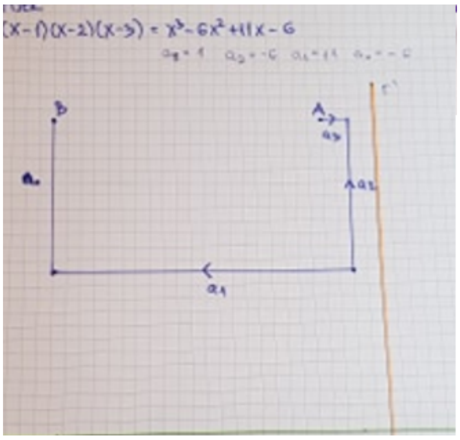


Slika 27: Prezentacija - Kubne jednadžbe

Isprva većina učenika nije shvatila Lillovu metodu pa sam ju ponovila još nekoliko puta dok svima nije bilo jasno. Razveselilo me je da ih je prikazana kornjača i njezin put jako zainteresirala za aktivno slušanje i sudjelovanje u nastavi.

Nakon što smo prokomentirali Lillovu metodu za rješavanje kubne jednadžbe prešli smo na najbitniji dio ovog predavanja, a to je rješavanje kubne jednadžbe pomoću origamija. To je bilo jedno pitanje u prethodno spomenutoj anketi gdje su učenici trebali dati mišljenje smatraju li da se kubna jednadžba može riješiti pomoću origamija.

Navedena aktivnost je detaljno objašnjena u prethodnom poglavlju te sam ju na taj način održala učenicima. Zajedno s učenicima sam prolazila korake konstrukcije te su mi oni govorili kako bi skica kornjačinog puta trebala izgledati dok sam ja skicirala na papir kao što je prikazano na slici 28. Nakon toga sam im pokazala sliku pomoću



Slika 28: Kornjačin put

prezentacije koju sam prije sata konstruirala. S obzirom na angažiranost učenika i zaključivanje tokom crtanja kornjačinog puta, smatram da su shvatili ovaj dio gradiva. Uslijedio je drugi dio, tj. kako odrediti prvi korijen zadane kubne jednadžbe. Na tom dijelu sam zamolila učenike da pokušaju sami precrtati skicu sa prezentacije da zajedno probamo izvesti Belochino presavijanje. Učenici koji su sudjelovali u ovom dijelu predavanja rekli su da im je teško pronaći liniju savijanja koja obje točke preslikava na navedene pravce. Potom sam im prikazala sliku 24 i objasnila kako ćemo pronaći prvi korijen promatrajući pravokutni trokut naznačen na slici. Kako bi provjerila koliko su shvatili nastavno gradivo, zamolila sam učenike da pokušaju sami pronaći drugo rješenje zadane kubne jednadžbe i pokažu crtež pomoću kamere. Dvojica učenika su se potrudila te brzo i točno riješili zadani problem dok je ostalima trebalo više vremena.

Na kraju nastavnog sata, odnosno video poziva upitala sam učenike znaju li neku znanost koja koristi origami pri istraživanju. Potom sam im ispričala o NASA letjelicama i umetanju kralježaka u medicini čime sam ih uspjela zadiviti kako jedna takva umjetnost može pomoći u mnogim znanostima. Detaljno sam objasnila kako NASA uz pomoć origamija dizajnira verziju solarne ploče. Ideja je da ploča bude u 2D obliku manjih dimenzija kako bi ju lakše poslali u svemir te da se prilikom njena odmotavanja u svemiru njezina površina poveća za deset puta od prvobitnog stanja. Napomenula sam da takvih primjera spoja origamija i znanosti ima mnogo te da mogu i sami istražiti na internetu neke primjere. Za kraj sata zamolila sam ih da ispune anonimnu anketu o tome kako im se činilo predavanje, odnosno opći dojam o predavanju.
Također, htjela bih pohvaliti učenike koji su izdvojili svoje slobodno vrijeme i

poslušali moje online predavanje i riješili sve ankete koje sam ih zamolila da riješe. Učenici su dobrovoljno u svoje slobodno vrijeme odlučili poslušati predavanje namijenjeno za dodatnu nastavu iz matematike te su cijelo online predavanje aktivno sudjelovali u nastavi. S obzirom da je predavanje održano preko Zooma gdje sam morala prilagoditi način izlaganja i gdje nisam mogla održati radionice koje sam objasnila kako bi izgledale u školskim klupama, smatram da je aktivnost odlično prošla. Samim time što je odaziv učenika bio velik, radionicu sam u startu započela sa velikim entuzijazmom koji je bio prisutan tijekom cijelog izlaganja. Na kraju sata sam pitala učenike kako im se svidjelo predavanje te sam dobila mnogo riječi pohvala. Smatram da bi takvih aktivnosti trebalo uvrstiti i u redovnu nastavu jer bi na taj način zainteresirali više učenika za nastavu matematike. Tijekom cijelog sata učenici su bili koncentrirani na nastavno gradivo i nisu se ustručavali pitati ako im neki dio nije bio jasan i ako žele da im ponovim. Najviše poteškoća je bilo kod objašnjavanja Lillove metode te sam nju nekoliko puta morala objasniti dok svim učenicima nije bilo jasno.

5.1 Analiza ankete - Kubne jednadžbe i origami

Anketu Kubne jednadžbe i origami sam zadala učenicima da riješe prije online predavanja u srijedu 10.6.2020. godine. Pitanja s kojima su se učenici susreli na zadanoj anketi su:

1. Smije li se papir u origamiju trgati, rezati ili rastezati?

   Na ovo pitanje 19 učenika je odgovorilo točno, tj. da se papir ne smije trgati, rastezati ili rezati, dok su dvojica učenika odgovorila netočno.

2. Da li ste se susreli s origamijem u nastavi matematike u osnovnoj ili srednjoj školi?

   Od ukupno 21 učenika, 16 učenika se susrelo s origamijem u svojem osnovnoškolskom ili srednjoškolsom obrazovanju dok 5 učenika se nije susrelo s origamijem u školi.

3. Jeste li se susreli s origamijem u nekom drugom predmetu u osnovnoj ili srednjoj školi? Ako je odgovor da, napišite u kojem.

   Četiri učenika se susrelo s origamijem u nastavnom predmetu likovna kultura, trojica učenika u nastavnom predmetu tehnička kultura dok se jedan učenik susreo s origamijem na satu razrednika.

4. Ukoliko ste se u nastavi matematike koristili origamijem, napišite u kojem razredu/ima je to bilo.

   1.- 4. razred - 6 učenika
   5. razred - 1 učenik
   6. razred - 3 učenika
   7. razred - 3 učenika
   8. razred - 5 učenika
   1. razred srednje škole - 1 učenik
   2. razred srednje škole - 1 učenik
   3. razred srednje škole - 3 učenika

5. Koje pojmove ste vezali uz origami kad ste ga koristili?

   Na ovo pitanje mnogi učenici se ili ne sjećaju ili nisu detaljno opisali svoj odgovor. Neki od odgovora su: geometrija, oblici, tehnika kolažem, kocka ...

6. Da li vam se svidjelo uvođenje origamija u nastavu matematike?

   Od ukupno 21 učenika, 16 učenika je odgovoilo da im se sviđa, 3 učenika je reklo da im se ne sviđa dok dvojica nisu odgovorila na to pitanje.

7. Smatrate li da bi origami trebalo uvrstiti u nastavu matematike prilikom obrađivanja novog nastavnog gradiva u kojem je to moguće?

   Deset učenika je odgovorilo da treba uvrstiti origami u nastavu matematike, devet učenika je odgovorilo da ponekad treba uvrstit origami u nastavu dok su dva učenika odgovorila da ne treba uvrstit origami u nastavu matematike.

8. Sljedećih 7 pitanja su bili prikazani aksiomi origamija te su učenici trebali zaključiti koji od origamija se mogu konstruirati pomoću ravnala i šestara, koji samo pomoću origamija, a koji pomoću svega navedenog.

   Najviše točnih odgovora je bilo u 4. aksiomu origamija (17 učenika je točno odgovorilo), dok je najmanje točnih odgovora bilo u 7. aksiomu (svega četiri učenika je točno odgovorilo).

9. Pokušajte izvesti konstrukciju iz prethodnog zadatka pomoću origamija (7. aksiom). Da li je bilo lako izvesti konstrukciju pomoću origamija?

   Od ponuđenih odgovora: Bilo je lako izvesti konstrukciju: 9 učenika je odabralo ovaj odgovor. Nije bilo lako izvesti konstrukciju: 6 učenika je odabralo ovaj odgovor. Nisam uspio/uspjela izvesti konstrukciju: 6 učenika je odabralo ovaj odgovor.

10. Smatrate li da se sve konstrukcije koje se mogu izvest origamijem mogu izvest i pomoću ravnala i šestara ili obrnuto?

    Ponuđeni odgovori su:
    Pomoću origamija se može izvesti više konstrukcija, nego pomoću ravnala i šestara. Ovo je ujedno i točan odgovor kojeg je odabralo 10 učenika.
    Jednak broj konstrukcija se mogu izvesti i pomoću ravnala i šestara i pomoću origamija. Ovaj odgovor je odabralo 10 učenika.
    Pomoću ravnala i šestara se može izvesti više konstrukcija, nego pomoću origamija. Ovaj odgovor je odabrao samo jedan učenik.

11. Obrazloži prethodni odgovor.

    Neki od odgovora koje su učenici napisali su: Mislim da se može izvesti jednak broj zato što se većina origamija može uz pomoć ravnala i šestara, Pomoću origamija lakše je doći do rješenja do kojih se ne može doći pomoću ravnala i šestara, Origami nudi više mogućnosti prilikom konstruiranja matematičkih problema, Ne mogu dati odgovor jer nisam upućen baš u taj svijet ...

    Većina učenika je pokušalo shvatiti i obrazložiti svoj odgovor, ali samo su tri učenika bili vrlo blizu točnog odgovora: Zato što ravnalom i šestarom konstruiramo na papiru, zato sto ulazimo u 3D prostor, origami je 3D.

12. Jeste li se susreli u nastavi matematike s kubnom jednadžbom?

    Od ukupnog broja učenika, njih 15 je odgovorio da jesu dok 6 učenika tvrdi da nisu.

13. Ako je prethodni odgovor da, u kojem razredu ste se susreli sa kubnom jednadžbom?

    Jedan učenik je odgovorio da se u 8. razredu osnovne škole susreo sa kubnom jednadžbom, dvoje se susrelo u 1. razredu srednje škole, u 2. razredu srednje škole ih se petero susrelo dok ih se u 3. razredu srednje škole šest susrelo sa kubnom jednadžbom.

14. Kako bi opisali što je rješenje kubne jednadžbe. (Pomoć: Analogno je sa rješenjem kvadratne jednadžbe)

    Na ovo pitanje je samo troje učenika točno odgovorilo pa sam u online aktivnosti još jednom naglasila koji je odgovor na navedeno pitanje kako bi svi učenici znali točan odgovor.

15. Smatrate li da se korijeni kubne jednadžbe mogu pronaći pomoću origamija.

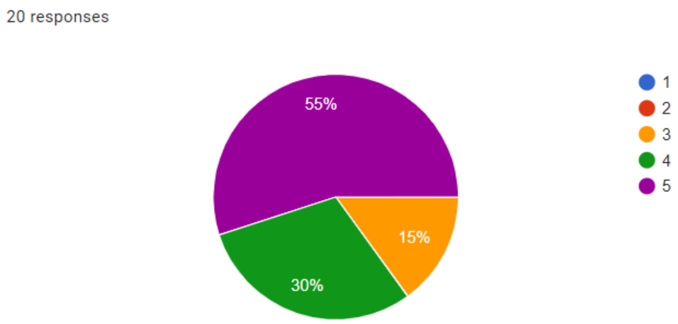
    Na ovo pitanje pozitivan odgovor je dalo 16 učenika dok 6 učenika smatra da se korijeni kubne jednadžbe ne mogu pronaći pomoću origamija.

5.2 Analiza ankete - Rješavanje kubne jednadžbe pomoću origamija

Nakon online predavanja preko Zoom aplikacije, učenicima sam dala posljednju anketu koja se sastoji od četiri pitanja. Ovu anketu je riješilo 20 učenika. Pitanja koja se nalaze u anketi su:

1. Koliko sam naučio/naučila u ovoj radionici?

   Troje učenika je dodijelilo ocjenu dobar, šest učenika je dalo ocjenu vrlo dobar, a 11 učenika je aktivnosti dalo ocjenu odličn. Na sljedećoj slici možemo vidjeti kako se odnose dane ocjene u obliku postotaka.



Slika 29: 1. pitanje iz ankete

2. Želim li/odgovara li mi ovakav način nastave?

   Od ukupno 20 učenika, dva učenika su dala ocjenu dobar, četiri učenika ocjenu vrlo dobar te 14 učenika je dalo ocjenu odličan što u obliku postotaka možemo vidjeti na sljedećoj slici.

Slika 30: 2. pitanje iz ankete

3. Što mi se na radionici posebno svidjelo?

   Neke od odgovora učenika možete pročitati na slici 31.

Origami

Novi način objašnjavanja kubnih jednadžbi.

Dio s origamijem

kreativnost, izlaganje profesorice, rješavanje kubnih jednadžbi pomoću origamija

Najviše mi se svidjelo kako je predavatelj nam izložio ovu te nam obrazložio njezino znač

.

real life origami demonstracije

To što je profesorica karizmatična

to sto smo naucili neke nove stvari

Slika 31: 3. pitanje iz ankete

4. Što smatram da bi trebalo promijeniti?

   Neke od odgovora možete pročitati na slici 32.

Ništa,nemam zamjerki

Nista,sve super

radionica bi bila još bolja da se mogla izvesti u školi

Ništa ne bih mijenjao pošto je sve vrlo jasno obrazloženo i ne treba se mijenjati

.

samo nacin komunikacije (uzivo umjesto preko zooma...)

Ništa, sve je super

bolja je uzivo radionica nego online

Možda još neki primjeri iz stvarnog svijeta

Slika 32: 4. pitanje iz ankete

S obzirom koliko se učenika odazvalo za online dodatnu nastavu iz matematike te koliko su bili aktivni na izlaganju, smatram da je ova radionica prošla uspješno te da su naučili nešto novo i zanimljivo. Nakon izlaganja sam popričala s učenicima o njihovim dojmovima te su rekli sve pozitivno i lijepo kao što su i napisali u anketama. Nadam se da ću jednog dana moći i uživo izvesti radionicu i vidjeti kako to stvarno izgleda. Nekolicina učenika je u razgovoru reklo kako im je žao što ovakvo predavanje se održava preko Zooma s obzirom da upravo zbog origamija, radionica je idealna za školske klupe i nastavu u školi.

6 ZAKLJUČAK

Japanska umjetnost savijanja papira, origami, sve je zastupljenija u znanosti. U ovom radu je spomenut jedan od najsloženijih poteza preklapanja papira pod nazivom Belochino presavijanje. Ukoliko bi pokušali napisati popis svih mogućih poteza presavijanja origamija od kojih dobivamo samo jednu liniju presavijanja, nijedan drugi način neće dati više algebarske moći od Belochinog presavijanja, odnosno Belochinog nabora. Također, prva je otkrila geometrijske granice origamija koje obične algebarske metode rješavanja ne mogu.
Osim što je origami vrlo zastupljen u znanosti, njegova primjena u matematici je zapanjujuća. Origamijem možemo riješiti i duplikaciju kocke i trisekciju kuta, ali ono što je najzanimljivije, pomoću origamija možemo odrediti korijene jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja. Na taj način, možemo učenicima u 2. razredu srednje škole prilikom obrađivanja nastavne cjeline *Kvadratne jednadžbe* ili u 4. razredu srednje škole prilikom obrađivanja nastavne cjeline *Funkcije* spomenuti ovu zanimljivost te zajedno sa njima odrediti korijene kubne jednadžbe pomoću origamija.
Proučavajuči origami, sve će više biti njegove primjene i u znanosti i u školi te se granice mogućnosti još u potpunosti ni ne znaju. U školi primjena origamija omogućava učenicima zorni prikaz te lakše pamćenje podataka i gradiva kao i dugoročno pamćenje nastavnog gradiva.
S obzirom da sam održala online radionicu s učenicima Tehničke škole Rijeka kako pronaći korijene kubne jednadžbe pomoću origamija, smatram da će im ova radionica ostati u dugoročnom pamćenju te da je barem nekolicinu učenika zainteresiralo za daljnje proučavanje i istraživanje origamija u matematici i ostalim znanostima. Iako se kubne jednadžbe i traženje korijena kubnih jednadžbi pomoću origamija ne provodi na rednovnoj ni na dodatnoj nastavi iz matematike, smatram da bi se ova radionica trebala uvrstiti u nastavu bilo kojeg tipa jer je dobila odlične kritike od učenika i jer im je pobudila znatiželju i o samoj umjetnosti savijanja papira, ali i što se još zanimljivo može povezati s matematikom.

Literatura

[1] Allais, Simon, *Solving cubic equation by paper folding*, URl: `http://perso.ens-lyon.fr/simon.allais/Documents/folding.pdf`
(pristup: 18.2.2020.)

[2] *Cardanova formula*:
URL: : http://www.bitrak.org/tonimilun/Cardano%20i%20Ferrari%20formula%20za%20jednadzbe%20treceg%20i%20cetvrtog%20stupnja.pdf
(pristup:18.2.2020.)

[3] Denne, Elizabeth, *Folds and cuts: Mathematics and origami*, Washington and Lee University, Pi Mu Epsilon, Washington, 2014.

[4] Horvatić, Krešimir: *Linearna algebra*, Sveučilište u Zagrebu, Golden marketing, Zagreb, 2004.

[5] Hull, Thomas C., *Solving Cubics with creases: The work of Beloch and Lill*, The American Mathematical Monthly, Engleska, 2011.

[6] Jukić, Ljerka, *Matematika i origami*, 2007., URL: `https://courses.csail.mit.edu/6.885/fall04/erik_notes/anydpi/L19_slides.pdf` (pristup: 17.2.2020.)

[7] Kiš, Josipa, *Nestandardne jednadžbe*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike, Osijek ,2012.

[8] Tokić, Marija, *Konstrukcije origamijem*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike, Osijek ,2013.

[9] Wikipedia, *Kubna jednadžba*, URL: `https://hr.wikipedia.org/wiki/Kubna_jednad%C5%BEba` (pristup: 10.2.2020.)

Popis slika