Igre za dva igrača s nenul sumom

Radoš, Mijo

Sveučilište u Rijeci – Odjel za matematiku

Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika – smjer nastavnički

Mijo Radoš

Igre za dva igrača s nenul sumom

Diplomski rad

Rijeka, srpanj 2020.

Sveučilište u Rijeci – Odjel za matematiku

Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika – smjer nastavnički

Mijo Radoš

Igre za dva igrača s nenul sumom

Mentorica: doc. dr. sc. Ana Jurasić

Kolegij: Linearno programiranje

Diplomski rad

Rijeka, srpanj 2020.

SADRŽAJ

SAŽETAK

U ovom diplomskom radu proučava se teorija igara kao posebna grana matematike, s naglaskom na razmatranje igara za dva igrača s nenul sumom. Najprije se u uvodnom dijelu rada upoznajemo s teorijom igara i osnovnim pojmovima koji će nam biti potrebni za lakše razumijevanje ovog diplomskog rada i „smještamo“ igre za dva igrača s nenul sumom u kontekst teorije igara te povezujemo teoriju igara s linearnim programiranjem. Nakon toga, detaljnije se razmatraju igre za dva igrača s nenul sumom, pri čemu se posebno promatraju strategije i potezi koje igrači povlače, s obzirom na to je li riječ o kooperativnim ili nekooperativnim igrama za dva igrača s nenul sumom. Nakon teorijskog razmatranja, objašnjava se primjena igara za dva igrača s nenul sumom na nizu primjera i problema iz raznih područja znanosti i svakodnevnog života, kako bi se što bolje približio pojam igara za dva igrača s nenul sumom čitateljima ovog diplomskog rada.

KLJUČNE RIJEČI:

- teorija igara
- igra
- igrač
- strategija
- igre sa sumom nula
- igre s nenul sumom
- Nash-ova ravnoteža
- Pareto optimalnost
- Nash-ova arbitražna shema

1. UVOD

1.1. Osnovni pojmovi teorije igara

U svakodnevnom životu često se susrećemo s pojmom igra. Najčešće ne provodimo puno vremena razmišljajući o tom pojmu, nego odmah krenemo nabrajati razne primjere igara, kao što su npr. „Čovječe, ne ljuti se“, „Bela“, „Heroes III of Might and Magic“, itd. Kao rezultat tog nabrajanja, obično dobivamo primjere raznih društvenih i kartaških igara ili računalnih igrica. Pogledamo li pojam igra s matematičkog gledišta, dolazimo do nešto drugačije predodžbe o značenju pojma igra.

Definicija 1.1.1. **Igra** predstavlja natjecateljsku, odnosno konfliktnu, situaciju u kojoj sudjeluje dvoje ili više igrača, pri čemu svaki igrač, odnosno sudionik igre, ima određenu kontrolu nad ishodom igre.

S obzirom na način kako smo definirali igru u definiciji 1.1.1., tijekom 20-og stoljeća, zbog različitih praktičnih potreba iz svakodnevnog života, ali i potreba iz različitih znanosti, a posebno iz ekonomije, krenula se razvijati posebna grana matematičke znanosti, koja detaljnije proučava igre, a u sebi objedinjuje primjenu teorije vjerojatnosti, linearnog programiranja, kombinatorike, algebre i mnogih drugih grana matematike. Ta nova grana matematike zove se teorija igara.

Teorija igara predstavlja posebnu matematičku disciplinu, koja proučava i razmatra razne vrste natjecateljskih, odnosno konfliktnih, situacija u kojima ishod ovisi o najmanje dva sudionika igre i njihovim racionalno donesenim odlukama.

S obzirom na definiciju igre i objašnjenje pojma teorije igara, možemo uvidjeti da postoje različite vrste igara s obzirom na broj igrača. U ovom diplomskom radu se prvenstveno proučavaju igre u kojima sudjeluju točno dva igrača.

U svakoj igri postoje **pravila igre,** koja su unaprijed poznata svakom igraču i koja, za svakog pojedinog igrača, određuju koje su njegove mogućnosti tijekom igre. Pravila igre određuju koje poteze igrač ima na raspolaganju i koje će biti posljedice povlačenja svakog poteza. Osim toga, pravilima igre uređen je i mogući dobitak igrača na kraju igre.

Dobitak na kraju igre, osim o pravilima i potezima koje povlači igrač u igri, ovisi i o povučenim potezima „suparničkog“ igrača tijekom igre. Upravo zbog utjecaja drugih igrača na ishod igre, možemo govoriti ili o konfliktu ili o suradnji među igračima, ovisno o tome što je kojem od igrača u interesu. Zbog toga, svaki igrač treba imati i primjenjivati i određenu strategiju tijekom igre.

U teoriji igara susrećemo se s nekoliko vrsta strategija, a najčešće ćemo se susretati s mješovitim strategijama.

Definicija 1.1.2. Neka igrač 1 i igrač 2 igraju igru, u kojoj igrač 1 na raspolaganju ima m poteza, a igrač 2 na raspolaganju ima n poteza. **Mješovita strategija** za igrača 1 je uređena m-torka $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, gdje x_i, $i \in \{1,2,\dots,m\}$, predstavlja vjerojatnost s kojom igrač 1 bira i-ti potez. Mješovita strategija za igrača 2 je uređena n-torka $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, gdje y_j, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, predstavlja vjerojatnost s kojom igrač 2 bira j-ti potez.

Napomena 1.1.3. Za vrijednosti x_i, $i \in \{1,2,\dots,m\}$, iz uređene m-torke $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ i vrijednosti y_j, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, iz uređene n-torke $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ iz definicije 1.1.2. vrijedi[1]:

$$0 \leq x_i \leq 1, \qquad \forall\, i \in \{1,2,\dots,m\},$$

$$0 \leq y_j \leq 1, \qquad \forall\, j \in \{1,2,\dots,n\},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_i = 1.$$

Napomena 1.1.4. Ukoliko se dogodi situacija u kojoj bi samo jedna vrijednost x_i, $i \in \{1,2,\dots,m\}$, u m-torki $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ bila jednaka 1, a sve ostale vrijednosti u navedenoj m-torki bile jednake 0, onda govorimo o **čistoj strategiji** za igrača 1. Analogno vrijedi i za igrača 2 i vrijednosti y_j, $j \in \{1,2,\dots,n\}$,u n-torki $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

U situaciji opisanoj u napomeni 1.1.4. možemo primijetiti da pojam čiste strategije, za razliku od pojma mješovite strategije, zapravo predstavlja odabir točno jednog poteza u igri. Naime, kako je samo jedna, recimo i-ta, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, vrijednost x_i uređene m-torke

[1] Sume u napomeni 1.1.3. vrijede zato što vrijednosti x_i i y_j predstavljaju vjerojatnosti da smo odabrali pojedini potez u igri, tj. da smo odabrali pojedini redak, odnosno pojedini stupac u matrici plaćanja. Kako je izbor poteza, tj. izbor retka, odnosno izbor stupca, potpun sustav događaja, onda koristeći definiciju potpunog sustava događaja možemo zaključiti da je unija tih događaja jednaka prostoru događaja Ω, a potom, korištenjem svojstva aditivnosti vjerojatnosti i svojstva normiranosti vjerojatnosti, dobivamo sume iz napomene 1.1.3.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ jednaka 1, a sve ostale vrijednosti navedene m-torke su jednake 0, to znači da će se i-ti potez odabrati s vjerojatnošću od 100%. Dakle, igrač korištenjem čiste strategije odabire točno jedan potez koji će povlačiti svaki put dok se igra igra.

Možemo zaključiti da je glavni zadatak teorije igara racionalno proanalizirati igru i pronaći kriterije na temelju kojih će se odrediti koja strategija je optimalna za svakog pojedinog igrača, kako bi njegova dobit na kraju igre bila što veća, odnosno u slučaju gubitka na kraju igre, kako bi taj gubitak bio što manji. Dakle, optimalne strategije zapravo predstavljaju najopreznije strategije u kojima se igrač želi osigurati da će mu minimalni dobitak biti najveći mogući, dok će istovremeno za drugog igrača maksimalan gubitak biti najmanji mogući. Pri određivanju optimalne strategije pomaže linearno programiranje, što ćemo razmotriti kasnije u ovom diplomskom radu.

U teoriji igara, kod igara za dva igrača situacije u kojima se nalaze igrači te poteze koje imaju na raspolaganju i u konačnici rezultate koji su posljedice povlačenja određenih poteza i odabira odgovarajućih strategija, možemo lako prikazati koristeći se matričnim zapisom, odnosno matricama.

Definicija 1.1.5. Neka je F polje. Za m i n, koji su prirodni brojevi, preslikavanje

$$P: \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\} \to F$$

nazivamo **matrica** tipa (m, n) s koeficijentima iz polja F.

Djelovanje funkcije P pišemo u obliku tablice s m redaka i n stupaca, pri čemu se u i-ti redak i j-ti stupac upisuje funkcijska vrijednost $P(i,j) = p_{ij}$:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mj} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}.$$

U teoriji igara koristit ćemo **matrice plaćanja**[2] koje ćemo označavati s P, po uzoru na englesku terminologiju[3]. Pri tome će svaki redak matrice plaćanja P označavati po jedan od m

---

[2] Ovisno o literaturi koja se promatra, moguće je naići i na termin tablica plaćanja, koji se koristi uz termin matrica plaćanja. Naime, na temelju tablice plaćanja formira se matrica plaćanja. U ovom diplomskom radu, uglavnom ćemo direktno formirati matrice plaćanja, bez prethodnog formiranja tablice plaćanja.

[3] Oznaka P dolazi od engleske riječi „payoff“, što prevodimo kao isplata, odnosno plaćanje. U engleskoj terminologiji matrica plaćanja naziva se „payoff matrix“.

poteza koje na raspolaganju ima igrač 1, a svaki stupac matrice plaćanja P će označavati po jedan od n poteza koje na raspolaganju ima igrač 2. Pojasnimo sada kako se određuje dobitak, odnosno isplata, kada igrač 1 odabere npr. i-ti potez u igri (i-ti redak), a igrač 2 j-ti potez u igri (j-ti stupac):

- ukoliko je vrijednost $p_{ij} > 0$, onda igrač 1 dobiva p_{ij}, recimo kuna, od igrača 2, odnosno igrač 2 gubi p_{ij} kuna,
- ukoliko je vrijednost $p_{ij} = 0$, onda nijedan od igrača niti dobiva niti gubi,
- ukoliko je vrijednost $p_{ij} < 0$, onda igrač 1 dobiva $-p_{ij}$ kuna od igrača 2, odnosno gubi p_{ij} kuna koje dobiva igrač 2.

U sljedećem primjeru ćemo pojasniti primjenu matrice plaćanja u jednoj konkretnoj situaciji.

Primjer 1.1.6. Marija i Domagoj igraju igru par-nepar. Ako oboje pokažu paran broj prstiju, Marija dobiva 1 kunu od Domagoja. Ako oboje pokažu neparan broj prstiju, Domagoj od Marije dobiva 1 kunu. Ako jedan od igrača pokaže paran broj prstiju, a drugi igrač neparan broj prstiju, rezultat igre je neriješen i nitko ne dobiva ni ne gubi. Prikažimo navedeni slučaj pomoću matrice plaćanja:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Domagoj} \\ & & \begin{array}{cc} par & nepar \end{array} \\ Marija & \begin{array}{c} par \\ nepar \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ako u ovom primjeru i Marija i Domagoj pokažu paran broj prstiju, onda je isplata $p_{11} = 1$, odnosno Marija dobiva 1 kunu od Domagoja. Ako i Marija i Domagoj pokažu neparan broj prstiju, onda je isplata $p_{22} = -1$, odnosno Marija gubi 1 kunu koju dobiva Domagoj. Ako jedan od igrača pokaže paran, a drugi neparan broj prstiju, onda je isplata $p_{12} = 0$ ili $p_{21} = 0$ i u tom slučaju nema ni pobjednika ni gubitnika. ◄

Primijetimo kako se u primjeru 1.1.6. pojavila situacija u kojoj je gubitak jednog igrača direktno odgovarao dobitku drugog igrača. Dakle, Marija će dobiti jednu kunu ako Domagoj izgubi jednu kunu, odnosno ako je njegov dobitak -1 kunu. Takve igre zovemo igre za dva igrača sa sumom nula.

<u>Definicija 1.1.7.</u> Igre sa sumom nula su igre u kojima dobitak jednog igrača direktno predstavlja gubitak drugog igrača, odnosno vrijedi da je zbroj dobitaka oba igrača u igri jednak je nuli[4].

Drugim riječima, dobitak jednog igrača u igri sa sumom nula, jednak je negativnom dobitku, odnosno gubitku, drugog igrača, kao što smo vidjeli u primjeru 1.1.6. pa je zbroj dobitaka igrača u igri jednak 0. Odatle dolazi i naziv za igre sa sumom nula.

S obzirom na definiciju 1.1.7. možemo uvidjeti da postoje različite vrste igara s obzirom na to u kakvom je odnosu dobitak jednog igrača prema gubitku drugog igrača u igri. Promatrajući taj odnos, razlikujemo igre sa sumom nula i igre s nenul sumom. U ovom diplomskom radu detaljnije će se proučavati igre za dva igrača s nenul sumom.

[4] Postoje igre u kojima dobitak jednog igrača ne predstavlja direktno gubitak drugog igrača, ali zapravo predstavljaju igre sa sumom nula. Naime, korištenjem teorije korisnosti (engl. Utility theory), takve igre se mogu svesti na situacije u kojima dobitak jednog igrača direktno predstavlja gubitak drugog igrača. U ovom diplomskom radu nećemo proučavati takve primjere igara, ali je vrijedno spomenuti da i takve igre postoje.

2. IGRE ZA DVA IGRAČA S NENUL SUMOM

2.1. Što su igre s nenul sumom i zašto ih proučavamo?

U svijetu oko nas postoji puno više primjera igara koje nisu igre sa sumom nula, odnosno u kojima interesi igrača nisu strogo suprotstavljeni, kao što smo to imali prilike vidjeti u primjeru 1.1.6., gdje dobitak jednog igrača predstavlja direktni gubitak za drugog igrača. Ponekad će određene situacije zahtijevati suradnju među igračima, kao i međusobnu komunikaciju među igračima, kako bi se došlo do što veće dobiti za oba igrača, a to u igrama sa sumom nula nije slučaj.

Definicija 2.1.1. **Igre s nenul sumom** su igre u kojima dobitak jednog igrača ne predstavlja direktni gubitak drugog igrača u svakom od različitih mogućih krajnjih ishoda igre, odnosno zbroj dobitaka oba igrača nije nužno jednak je nuli.

Drugim riječima, dobitak jednog igrača u igri s nenul sumom nije nužno jednak negativnom dobitku, odnosno gubitku drugog igrača. S obzirom na tu činjenicu, vidimo da igre sa sumom nula predstavljaju poseban oblik igara, pa moramo malo prilagoditi i matrice plaćanja. Od sada, u matricama plaćanja, moramo navoditi dobit i za jednog i za drugog igrača u igri. To ćemo postići korištenjem uređenih parova, pri čemu će prva koordinata uređenog para predstavljati vrijednost isplate za prvog igrača, a druga koordinata uređenog para će predstavljati vrijednost isplate za drugog igrača. Promotrimo navedenu situaciju na sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.2. Zadana je igra s matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & \quad s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (7,7) & (-5,5) \\ (-5,5) & (0,0) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Primijetimo da u ovoj igri u slučaju da igrač 1 odabere potez r_1, a igrač 2 odabere potez s_1, kao isplatu dobivamo p_{11} = (7, 7). To je jedan primjer nenul sume. Naime, dobitak jednog igrača ne rezultira jednakim gubitkom kod drugog igrača. Naprotiv, u ovoj situaciji, oba igrača su na dobitku, jer i igrač 1 i igrač 2 dobivaju vrijednost 7. ◄

Iz navedenog primjera vidljivo je da bi u igrama s nenul sumom bilo moguće da oba igrača budu na dobitku. Igre s nenul sumom omogućuju igračima i suradnju te komunikaciju. U skladu s time razlikovat ćemo kooperativne i nekooperativne igre s nenul sumom.

2.2. Nekooperativne igre s nenul sumom

U ovom dijelu diplomskog rada promatramo situacije, u kojima među igračima u igri s nenul sumom nema ni komunikacije, ni suradnje. Kao što smo već spomenuli, u igrama sa sumom nula komunikacija i suradnja nisu prisutne, pa su s obzirom na to, igre sa sumom nula i nekooperativne igre s nenul sumom međusobno povezane. U obje vrste igara mogu se iskoristiti neki pojmovi i termini koje spominjemo u ovom dijelu diplomskog rada.

Jedno od pitanja koje ćemo proučiti je kako korištenje dominantnih strategija utječe na ishod nekooperativnih igara s nenul sumom[5].

Definicija 2.2.1. Za čistu strategiju S kažemo da je dominantna u odnosu na čistu strategiju T ako je svaka isplata pri odabiru strategije S, u najgorem slučaju jednako dobra s obzirom na odgovarajuću isplatu pri odabiru strategije T, a barem jedna isplata pri odabiru strategije S strogo bolja s obzirom na odgovarajuću isplatu pri odabiru strategije T.

Napomena 2.2.2. Strategiju S iz definicije 2.2.1. nazivamo **dominantna strategija**, a strategiju T iz definicije 2.2.1. nazivamo **dominirana strategija**.

Drugim riječima, kada određujemo koja je od strategija u igri povoljnija, uspoređujemo isplate koje bi igrači dobili za odabir promatranih strategija i nakon usporedbe odabiremo onu strategiju koja ima povoljnije isplate za nas pri svakom odabiru poteza drugog igrača. Očekuje se da razuman igrač neće nikada u igri odabrati dominiranu strategiju.

U sljedećem primjeru ćemo promotriti kako korištenje dominantnih strategija kod igrača može utjecati na ishod igre u nekooperativnim igrama s nenul sumom.

Primjer 2.2.3. Neka je zadana igra s matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Igrač } 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & \quad s_2 \end{array} \\ \textit{Igrač } 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (0,0) & (10,-8) \\ (-5,8) & (8,8) \end{bmatrix}. \end{array}$$

[5] Osim u nekooperativnim igrama s nenul sumom, korištenje dominantnih strategija moguće je i kod igara sa sumom nula, gdje je puno primjenjivije i puno češće se koristi u odnosu na igre s nenul sumom. U igrama s nenul sumom korištenje dominantnih strategija ima manju ulogu, ali ipak vrijednu spomena, kako bismo bolje shvatili posebnosti igara s nenul sumom.

Promotrimo li igru s gledišta igrača 1, možemo uočiti da će za njega biti povoljnije odabrati strategiju r_1. Naime, usporedimo li isplate koje omogućuje odabir strategija r_1 i r_2, možemo primijetiti da je strategija r_1 dominantna u odnosu na strategiju r_2. Isplata p_{11} koja osigurava dobitak 0 je bolja za igrača 1 od isplate p_{21} koja osigurava dobitak -5, jer je $0 > -5$. Isto tako je isplata p_{12} koja osigurava dobitak 10 bolja za igrača 1 od isplate p_{22} koja osigurava dobitak 8, jer je $10 > 8$. Kako su obje isplate dobivene odabirom strategije r_1 bolje od odgovarajućih isplata dobivenih odabirom strategije r_2, igrač 1 bi trebao izabrati strategiju r_1 koja je njegova dominantna strategija u ovoj igri.

Promotrimo li igru s gledišta igrača 2, možemo uočiti da će za njega biti povoljnije odabrati strategiju s_1. Naime, usporedimo li isplate koje omogućuje odabir strategija s_1 i s_2, možemo primijetiti da je strategija s_1 dominantna u odnosu na strategiju s_2. Naime isplata p_{11} koja osigurava dobitak 0 je bolja za igrača 2 od isplate p_{12} koja osigurava dobitak -8, jer je $0 > -8$. S druge strane isplata p_{21} koja osigurava dobitak 8 za igrača 1 je jednako dobra kao i isplata p_{22} koja također osigurava dobitak 8, jer je $8 = 8$. Kako je jedna od isplata dobivena odabirom strategije s_1 bolja od odgovarajuće isplate dobivene odabirom strategije s_2, a druge dvije uspoređene isplate su jednako dobre, igrač 2 bi trebao izabrati strategiju s_1 koja je njegova dominantna strategija u ovoj igri.

S obzirom na odabrane dominantne strategije, r_1 i s_1, igrača u igri, kao ishod igre dobivamo isplatu $p_{11} = (0,0)$ koja obojici igrača osigurava dobitak 0, odnosno nijedan igrač nije ni na gubitku, ni na dobitku u ovoj igri. ◄

Pozornijim promatranjem igre iz primjera 2.2.3. možemo primijetiti da za igrače postoji povoljnija isplata u odnosu na isplatu $p_{11} = (0,0)$ koja je dobivena kao ishod igre. Ta povoljnija isplata je isplata $p_{22} = (8,8)$, koju dobivamo ako igrač 1 odabere strategiju r_2, a igrač 2 odabere strategiju s_2. S obzirom na to da su u tom slučaju oba igrača na dobitku, a u slučaju odabira dominantnih strategija nijedan igrač nije ni na dobitku ni na gubitku, zaključujemo da korištenje dominantnih strategija u nekooperativnim igrama s nenul sumom, neće uvijek rezultirati najboljim ishodom za igrače.

Koristeći definiciju 1.1.2. možemo primijetiti da izbor dominantne strategije u primjeru 2.2.3 možemo predočiti uređenim parom $(1, 0)$ i za igrača 1 i za igrača 2. Dakle, u tom slučaju smo zapravo odabrali točno jedan potez u igri, odnosno onaj potez čije su isplate bile povoljnije u odnosu na odgovarajuće isplate u potezu s kojim smo ga uspoređivali. Zbog toga, treba skrenuti pažnju na to da kod izbora dominantnih strategija, kao i u situaciji kada se u nekoj igri javlja čista strategija, rezultat toga izbora predstavlja točno jedan potez koji povlačimo tijekom igre.

U sljedećem primjeru promotrit ćemo jednu igru u kojoj nećemo biti u mogućnosti koristiti dominantne strategije.

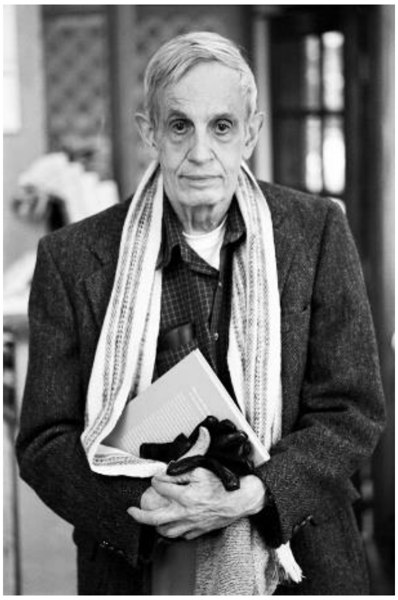
Primjer 2.2.4. Neka je zadana igra s matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igra\check{c}\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ Igra\check{c}\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (4,8) & (2,0) \\ (6,2) & (0,8) \end{bmatrix}. \end{array}$$

U ovoj igri nećemo moći odrediti dominantne strategije za igrače, zato što nijedna od dvije strategije, koje igrači imaju na raspolaganju, nije dominantna u odnosu na onu drugu. Naime, uspoređujemo li isplate koje omogućuje odabir strategija r_1 i r_2 za igrača 1, odnosno odabir strategija s_1 i s_2 za igrača 2, kao što smo to činili u primjeru 2.2.3., nećemo moći odrediti koja je od promatranih strategija dominantna jer u ovoj igri neće biti zadovoljeni uvjeti iz definicije 2.2.1. ◄

U primjeru 2.2.4. primijenit ćemo pojam ravnoteže, koja se u čast američkog matematičara Nasha, koji ju je otkrio, naziva Nash-ova ravnoteža.

John Forbes Nash Jr. (1928. – 2015.) bio je američki ekonomist i matematičar, koji je dao veliki doprinos razvoju teorije igara otkrićem postojanja Nash-ove ravnoteže u igrama 1951. godine. Nash-ova ravnoteža unijela je velike promjene i u ekonomiji te je imala veliku primjenu kod donošenja poslovnih strategija. Trebalo je proći određeno vrijeme da se uvidi velika korist Nash-ova otkrića pa je Nash tek 1994. godine nagrađen Nobelovom nagradom za ekonomiju za svoje otkriće. Uz Nobelovu nagradu, Nash je 2015. godine nagrađen i Abelovom nagradom za svoj doprinos u izučavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U čast Nashu, 2001. godine snimljen je film Genijalni um (engl. A Beautiful Mind) koji je nagrađen filmskom nagradom Oscar za najbolji film i režiju, a nastao je na temelju istoimene knjige Sylvie Nasar, koja govori o Nash-ovom životu i cjeloživotnoj borbi s opakom psihičkom bolešću shizofrenijom.



Fotografija 1: John Forbes Nash Jr

Nash postavlja pitanje možemo li odrediti mješovite strategije za igrača 1 i igrača 2, takve da ukoliko oba igrača odaberu te strategije, nijedan od njih neće profitirati primjenom neke druge strategije?

Da bismo odgovorili na ovo pitanje, moramo se prisjetiti, što su mješovite strategije kako se određuje optimalna mješovita strategija i kako se određuje očekivani ishod igre s obzirom na zadane strategije.

S pojmom mješovite strategije već smo se upoznali u uvodnom dijelu ovog diplomskog rada (vidi definiciju 1.1.2.). Može se uočiti da postoji beskonačno mnogo mješovitih strategija za svakog igrača u igri. Pitamo se, koja je od tih mješovitih strategija najbolja za svakog igrača, to jest koja strategija osigurava najveći dobitak, odnosno najmanji gubitak?

Definicija 2.2.5. Strategije koje prvom igraču osiguravaju maksimalni minimalni dobitak, a drugom igraču minimalni maksimalni gubitak nazivamo **optimalne strategije**[6]. Optimalne strategije označavamo s $\bar{X}$ i $\bar{Y}$.

Dakle, optimalne strategije $\bar{X}$ i $\bar{Y}$ su takve strategije da se u slučaju izbora nekih drugih strategija X i Y, nakon većeg broja odigranih partija neke igre, nalazimo u nepovoljnijoj poziciji u odnosu na situaciju kada koristimo strategije $\bar{X}$ i $\bar{Y}$.

[6] Pronalaženje optimalnih strategija za igrače u pojedinoj igri, kako će biti opisano u algoritmu 2.2.8., povezuje glavni zadatak linearnog programiranja, a to je pronalaženje optimalnog rješenja za neki problem, s teorijom igara.

Prisjetimo se kako se određuje očekivani ishod igre s obzirom na zadane strategije koje igrači primjenjuju u igri.

Definicija 2.2.6. Neka igrač 1 i igrač 2 igraju igru zadanu matricom plaćanja

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix},$$

pri čemu koriste mješovite strategije $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ i $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, redom. **Očekivani ishod igre** za igrača 1 (prosječni dobitak igrača 1 nakon više odigranih partija), s obzirom na navedene strategije označavamo s $E(X, Y)$ i on glasi

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_i y_j\,.$$

Napomena 2.2.7. Na analogan način računamo prosječni dobitak igrača 2 nakon više odigranih partija, samo što unutar matrice plaćanja promatramo one vrijednosti koje odgovaraju dobitcima igrača 2.

Preostaje nam još navesti, kako određujemo optimalne mješovite strategije za svakog igrača. Ako svaki igrač u igri imaju na raspolaganju po dva poteza za odabir, onda za određivanje optimalnih mješovitih strategija igrača može poslužiti sljedeći algoritam.

Algoritam 2.2.8. Neka je zadana 2x2 matrica plaćanja

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \text{tako da vrijedi } p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21} \neq 0\,.$$

Optimalna mješovita strategija[7] **za igrača 1** (koji bira retke matrice plaćanja) je

$$\bar{X} = \left(\frac{p_{22} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}}, \quad \frac{p_{11} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} \right).$$

Optimalna mješovita strategija za igrača 2 (koji bira stupce matrice plaćanja) je

$$\bar{Y} = \left(\frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}}, \quad \frac{p_{11} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} \right).$$

[7] Navedene strategije nastale su kao rezultat grafičkog rješavanja igre. Na temelju grafa se može naći točka koja je najpovoljnija za oba igrača, odnosno prvom igraču maksimizira minimalni mogući dobitak, a drugom igraču minimizira maksimalni mogući gubitak. Više o tome možete pročitati u [10].

Ako igrači u igri imaju na raspolaganju više od dva poteza, onda nije moguće koristiti algoritam 2.2.8. za određivanje njihovih optimalnih mješovitih strategija. Kod igara zadanih s matricama plaćanja većih dimenzija, određivanje optimalne mješovite strategije je zahtjevnije. Kod takvih igara rješavamo pripadni problem linearnog programiranja, koristeći Simpleks metodu za rješavanje problema linearnog programiranja. O tome detaljnije govori osnovni teorem matričnih igara.

Teorem 2.2.9. **(Osnovni teorem matričnih igara)** Svaka matrična igra ima (optimalno) rješenje, odnosno postoje strategije $\bar{X}$ i $\bar{Y}$, za koje vrijedi

$$E(X,\bar{Y}) \leq E(\bar{X},\bar{Y}) \leq E(\bar{X},Y),$$

gdje su X i Y proizvoljne strategije za igrača 1 i igrača 2 redom.

Ovaj teorem nećemo dokazivati[8]. U dokazu ovog teorema opisuje se kako formulirati pripadni problem linearnog programiranja u igrama u kojima igrači imaju na raspolaganju više od dva poteza. Optimalne mješovite strategije za igrače u tim igrama dobivamo rješavanjem pripadnog problema linearnog programiranja primjenom Simpleks metode[9]. U ovom diplomskom radu ćemo promatrati igre u kojima igrači imaju na raspolaganju točno dva poteza.

Sada imamo sve što nam je potrebno da uvedemo pojam Nash-ove ravnoteže i da razmotrimo njenu primjenu u igri iz primjera 2.2.4..

Definicija 2.2.10. U igrama s 2 igrača, uređeni par strategija (X_0, Y_0) nazivamo **Nash-ova ravnoteža** ako igrač 1 odabire strategiju X_0, a igrač 2 odabire strategiju Y_0, koja predstavlja najbolji mogući odabir u odnosu na odabir strategije prvog igrača u igri[10].

Dakle, ukoliko bi se neki igrač odlučio promijeniti svoju strategiju tijekom igre, to mu neće omogućiti veći dobitak, u odnosu na odabir strategije kojom je uspostavljena Nash-ova ravnoteža, tako dugo dok i drugi igrač ne promijeni svoju strategiju.

[8] Dokaz osnovnog teorema matričnih igara možete pronaći u [5].

[9] U ovom diplomskom radu nećemo detaljnije proučavati navedeni problem linearnog programiranja i njegovo rješavanje Simpleks metodom. Zbog zahtjevnosti i velike mogućnosti pogrešaka prilikom primjene Simpleks metode, danas se navedeni problem rješava uz potporu računala. Više o tome možete pročitati u [6].

[10] Navedena definicija lako se generalizira i na slučaj kada imamo n igrača. U tom slučaju bi promatrali uređenu n-torku strategija $(X_1, \dots, X_n)$, a igrač j bi odabrao strategiju X_j, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, koja bi predstavljala najbolji mogući odabir u odnosu na odabir strategija ostalih igrača u igri.

Prisjetimo se primjera 2.2.4. u kojem je igra bila zadana matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (4,8) & (2,0) \\ (6,2) & (0,8) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Najprije promatramo samo one dobitke koje se odnose na igrača 2. Dakle, promatramo druge koordinate unutar uređenih parova koji predstavljaju isplate za igrača 2 u matrici plaćanja. Koristeći algoritam 2.2.8., možemo odrediti da u tom slučaju za igrača 1 optimalna mješovita strategija glasi $X_0 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$. Bez obzira na to koju strategiju odabere igrač 2, a kao primjer za razmatranje možemo uzeti da strategija za igrača 2 glasi npr. $Y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, koristeći definiciju 2.2.6. dobivamo da će očekivani ishod igre za igrača 2 biti $E(X,Y) = \frac{32}{7}$. Strategiju X_0 zovemo **ravnotežnom strategijom** igrača 1, a ona ima svojstvo da osigurava igraču 2 očekivani dobitak od $\frac{32}{7}$, bez obzira na to za koju strategiju se igrač 2 odlučio.

Promotrimo sada samo one isplate koje se odnose na igrača 1. Dakle, promatramo prve koordinate unutar uređenih parova koji predstavljaju isplate za igrača 1 u matrici plaćanja. Koristeći algoritam 2.2.8. možemo odrediti da u tom slučaju za igrača 2 optimalna mješovita strategija glasi $Y_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Bez obzira na to koju strategiju odabere igrač 1, a kao primjer za razmatranje možemo uzeti da strategija za igrača 1 glasi npr. $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, koristeći definiciju 2.2.6. dobivamo da će očekivani ishod igre za igrača 1 biti $E(X,Y) = 3$. Strategiju Y_0 zovemo **ravnotežnom strategijom** igrača 2, a ona ima svojstvo da osigurava igraču 1 očekivani dobitak od 3 bez obzira na to za koju strategiju se igrač 1 odlučio.

Ako oba igrača prihvaćaju navedene ravnotežne strategije X_0 i Y_0, onda nijedan od njih neće moći osigurati veći dobitak ukoliko se odluči odigrati neku drugu strategiju, tako dugo dok strategija drugog igrača u igri ostaje nepromijenjena. Dakle, ako igrač 1 odigra svoju ravnotežnu strategiju X_0, igrač 2 neće nikako moći povećati svoj očekivani dobitak od $\frac{32}{7}$ bez obzira na to za koju strategiju se odlučio. Analogno vrijedi i za obrnutu situaciju. Naime, ako igrač 2 odigra svoju ravnotežnu strategiju Y_0, igrač 1 neće nikako moći povećati svoj očekivani dobitak od 3 bez obzira na to za koju strategiju se odlučio. Na ovaj način smo pronašli jedan par ravnotežnih strategija za uspostavu Nash-ove ravnoteže u primjeru 2.2.4.

Dakle, ravnotežne strategije omogućuju igračima u igri da njihovim odigravanjem „zamrznu" očekivani dobitak protivničkog igrača na točno određenoj vrijednosti, a da taj igrač pritom nikako neće moći povećati navedeni očekivani dobitak, bez obzira na to koju strategiju odlučio odigrati u igri. Pritom je bitno naglasiti da ravnotežne strategije, igračima koji ih odigraju, neće predstavljati i njihove optimalne strategije u igri zato što nisu promatrali svoje isplate u igri, nego su promatrali isplate protivničkog igrača.

Nakon što smo promotrili primjer 2.2.4., postavlja se pitanje, postoje li u svakoj igri parovi ravnotežnih strategija? Nash je 1950. godine, u svojoj disertaciji na Sveučilištu Princeton, dokazao da svaka igra s dva igrača ima najmanje jedan par ravnotežnih strategija, bez obzira na to je li riječ o čistim strategijama ili mješovitim strategijama[11].

Kada bismo u svakoj igri mogli iskoristiti ideju Nash-ove ravnoteže, to bi uvelike olakšalo rad s igrama s nenul sumom. Nažalost, postoje igre u kojima korištenje Nash-ove ravnoteže nije najsretnije rješenje za igrače. Jedan takav primjer smo upravo razmotrili, a da toga do sada možda nismo bili svjesni. Riječ je o igri iz primjera 2.2.4. Do Nash-ove ravnoteže došli smo tako da je svaki igrač promatrao isplate drugog igrača. Dakle, svaki od igrača je ignorirao svoje vlastite isplate, kako bi ujednačio isplate drugog igrača. Ako promotrimo konačnu isplatu za igrače, koju smo dobili na taj način, ona će iznositi (3, 4.57), odnosno dobitak za igrača 1 će iznositi 3, a dobitak za igrača 2 će iznositi 4.57, što se za oba igrača može činiti malim dobitkom. Naime, oba igrača bi mogla dobiti povoljnije isplate ako bi obratili pozornost na svoje vlastite isplate. Promotrimo zato sljedeći primjer.

Primjer 2.2.11. Neka je igra zadana matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Igrač 2} \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & \quad s_2 \end{array} \\ \text{Igrač 1} & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (6,6) & (-2,10) \\ (10,-2) & (0,0) \end{bmatrix} \end{array}.$$

U ovoj igri, igrači opet mogu iskoristiti svoje dominantne strategije. Primijetimo da će u tom slučaju, igrač 1 preferirati odabir poteza r_2 u odnosu na odabir poteza r_1, a igrač 2 će preferirati odabir poteza s_2 u odnosu na odabir poteza s_1. Nash-ova ravnoteža u ovom primjeru prati dominantne strategije i kao takva predstavlja najjaču moguću vrstu Nash-ove ravnoteže,

[11] U ovom diplomskom radu, nećemo se baviti proučavanjem Nash-ova dokaza o postojanju Nash-ove ravnoteže u igrama. Razlog tome je što se zahtijeva uvođenje niza novih pojmova i teorema na koje se pritom treba pozivati da bi se dokaz u potpunosti razumio. Detaljnije o tome možete pročitati u izvoru [10].

odnosno jaču od one dobivene korištenjem mješovitih strategija kao što smo vidjeli u igri iz primjera 2.2.4. U ovom primjeru je Nash-ova ravnoteža uspostavljena parom ravnotežnih strategija $X_0 = (0,\ 1)$ za igrača 1 i $Y_0 = (0,\ 1)$ za igrača 2, u skladu s time što su igrači koristili dominantne strategije. U tom slučaju isplata bi bila $p_{22} = (0,0)$, odnosno nijedan igrač ne bi bio na dobitku. Kao i u primjeru 2.2.4. tako i u ovom primjeru, oba igrača neće biti zadovoljni isplatom dobivenom korištenjem ravnotežnih strategija. Naime, igrači bi bili zadovoljniji isplatom $p_{11} = (6,6)$, koja bi obojici osigurala dobitak 6. ◄

Dakle, opet smo se našli u situaciji u kojoj postoji bolja isplata za igrače, u odnosu na onu koju su dobili uspostavom Nash-ove ravnoteže. Međutim, postoje i igre u kojima postoji više Nash-ovih ravnoteža, ovisno o paru ravnotežnih strategija koje promatramo. Promotrimo to u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2.12. Neka je igra zadana matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & \quad s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (5,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,5) \end{bmatrix}. \end{array}$$

U ovoj igri postoje dva para ravnotežnih strategija. Prvi par ravnotežnih strategija predstavlja uređeni par (X_0, Y_0), gdje je $X_0 = Y_0 = (1,0)$. U tom slučaju isplata bi bila $p_{11} = (5,0)$, a predstavlja najpovoljniju isplatu za igrača 1, zato što mu osigurava najveći mogući dobitak koji može ostvariti u ovoj igri, a to je 5. Drugi par ravnotežnih strategija predstavlja uređeni par $(X_0{}', Y_0{}')$, gdje je $X_0{}' = Y_0{}' = (0,1)$. U tom slučaju isplata bi bila $p_{22} = (0,5)$. Ona predstavlja najpovoljniju isplatu za igrača 2, zato što mu osigurava najveći mogući dobitak koji može ostvariti u ovoj igri, a to je 5. Ako bi oba igrača koristila strategije kako bi dobili najpovoljnije isplate za sebe, odnosno ako bi igrač 1 koristio strategiju X_0, a igrač 2 koristio strategiju $Y_0{}'$, onda bi isplata bila $p_{11} = (0,0)$. S tom isplatom ne bi bio zadovoljan nijedan od igrača jer u tom slučaju nijedan igrač nije na dobitku u odnosu na isplate koje dobivamo uspostavom Nash-ove ravnoteže.◄

Dakle, u primjeru 2.2.12. imamo dvije Nash-ove ravnoteže koje nisu međusobno ekvivalentne, pa nisu ni međusobno razmjenjive, zato što nisu jednako povoljne za oba igrača u igri. U takvim situacijama nije u potpunosti razjašnjeno koju bi Nash-ovu ravnotežu igrači trebali postići.

Kad bi obje uspostavljene Nash-ove ravnoteže bile jednako povoljne za oba igrača, onda bi nam bilo svejedno za koju ćemo se odlučiti, odnosno te Nash-ove ravnoteže bi bile međusobno razmjenjive i ekvivalentne. Promotrimo to u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2.13. Neka je igra zadana matricom plaćanja

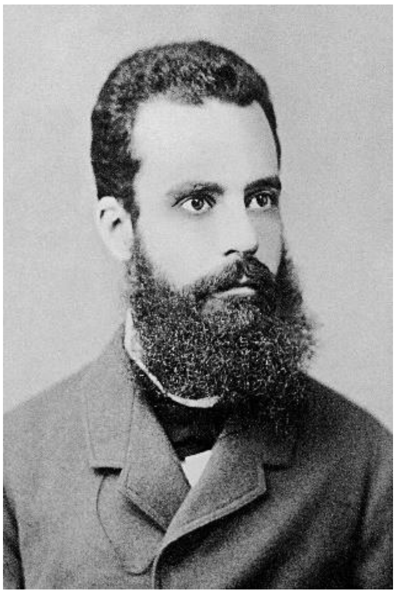
$$\begin{array}{ccc} & & Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (5,5) & (5,5) \\ (1,0) & (0,1) \end{bmatrix}. \end{array}$$

U ovoj igri postoje dva para ravnotežnih strategija. Prvi par ravnotežnih strategija predstavlja uređeni par (X_0, Y_0), gdje je $X_0 = Y_0 = (1,0)$. U tom slučaju isplata bi bila $p_{11} = (5,5)$, a predstavlja najpovoljniju isplatu i za igrača 1 i za igrača 2, zato što im osigurava najveći mogući dobitak koji mogu ostvariti u ovoj igri, a to je 5. Drugi par ravnotežnih strategija predstavlja uređeni par $(X_0{}', Y_0{}')$, gdje je $X_0' = (1,0)$, a $Y_0{}' = (0,1)$. U tom slučaju isplata bi bila $p_{12} = (5,5)$. Ona također predstavlja najpovoljniju isplatu i za igrača 1 i za igrača 2, zato što im osigurava najveći mogući dobitak koji mogu ostvariti u ovoj igri, a to je 5. Možemo primijetiti da su isplate koje smo dobili uspostavom Nash-ovih ravnoteža ekvivalentne, odnosno jednako povoljne za oba igrača u igri. Dakle, igračima je svejedno koju Nash-ovu ravnotežu postignu prilikom igranja ove igre jer će u oba slučaja ostvariti najveći mogući dobitak koji mogu dobiti u ovoj igri, pa zaključujemo da su ove Nash-ove ravnoteže međusobno razmjenjive.◄

Ukoliko bi igračima u primjeru 2.2.12. dozvolili komunikaciju i suradnju, igrači bi se mogli dogovoriti da u slučaju višestrukog ponavljanja igre naizmjenično odaberu parove ravnotežnih strategija i da tako oba igrača budu na dobitku. No, kako igrači u nekooperativnim igrama nisu u mogućnosti komunicirati ni surađivati, ne postoji generalni savjet kako postupiti u ovom slučaju.

Djelomično rješenje problema s kojima smo se susreli, a u kojima se nalaze povoljnije isplate od onih koje predlaže Nash-ova ravnoteža, nudi talijanski ekonomist Pareto.

Vilfredo Federico Pareto (1848. – 1923.) bio je talijanski sociolog, ekonomist i filozof, koji se na području ekonomije i matematike istaknuo s nekoliko važnih doprinosa, kao što su njegova studija o raspodjeli dobitaka i analiza individualnih izbora. Nama je, u kontekstu teorije igara i nekooperativnih igara s nenul sumom, od posebne važnosti Paretov princip i Paretova optimalnost o kojima detaljnije govorimo u ovom diplomskom radu.



Fotografija 2: Vilfredo Federico Pareto

Pareto predlaže da ne bismo trebali prihvaćati isplatu, ukoliko postoji neka druga isplata koja će biti bolja za sve. Prihvatimo li tu misao dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 2.2.14. Isplata u igri nije Pareto optimalna ako postoji isplata koja bi obojici igrača omogućila veći dobitak ili bi jednom od igrača omogućila isti dobitak, a drugom igraču veći dobitak. Kažemo da je isplata u igri **Pareto optimalna**, ako ne postoje druge bolje isplate od nje.

Napomena 2.2.15. Riječ optimalan u definiciji 2.2.14. ne znači ujedno i najbolji, nego je bitno da isplata nije inferiorna u odnosu na druge isplate. Općenito, igre mogu imati više Pareto optimalnih isplata što ćemo vidjeti malo dalje u pojedinim primjerima.

Drugim riječima, Paretovu ideju možemo izreći na sljedeći način:

PARETOV PRINCIP: Da bi isplata bila prihvatljiva kao rješenje igre, isplata bi trebala bili Pareto optimalna.

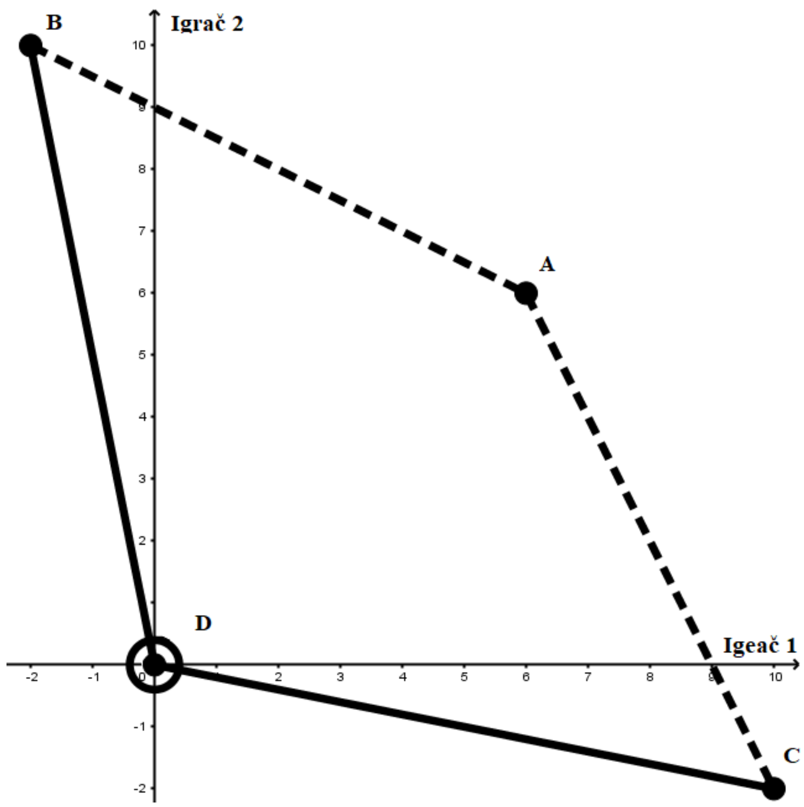
Promotrimo li igru iz primjera 2.2.11. zadanu matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igra\check{c}\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & \quad s_2 \end{array} \\ Igra\check{c}\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (6,6) & (-2,10) \\ (10,-2) & (0,0) \end{bmatrix}, \end{array}$$

možemo uočiti da jedino isplata $p_{22} = (0,0)$ nije Pareto optimalna. Naime, postoji isplata $p_{11} = (6,6)$ koja omogućuje bolje dobitke za oba igrača. Što se tiče ostalih isplata u toj igri, dakle, isplate $p_{11} = (6,6), p_{12} = (-2,10)$ i $p_{21} = (10,-2)$ su sve Pareto optimalne, odnosno ni za jednu od navedenih isplata ne možemo pronaći drugu isplatu u igri koja bi omogućavala bolje dobitke za oba igrača ili za barem jednog od igrača, a da pritom drugi igrač nije na gubitku.

Paretov princip bazira se na grupnoj racionalnosti. U primjeru 2.2.11. koji smo prethodno prokomentirali, grupna racionalnost, na kojoj se bazira Paretov princip, sukobljava se s individualnom racionalnošću na kojoj se bazira korištenje dominantnih strategija. Ovaj sukob predstavlja jedan od temeljnih problema u teoriji igara s nenul sumom i detaljnije ćemo ga razraditi u poglavlju 2.3. ovog diplomskog rada, na primjeru dileme zatvorenika, u kojem ćemo promotriti u kakav sukob dolaze individualni i grupni interesi igrača.

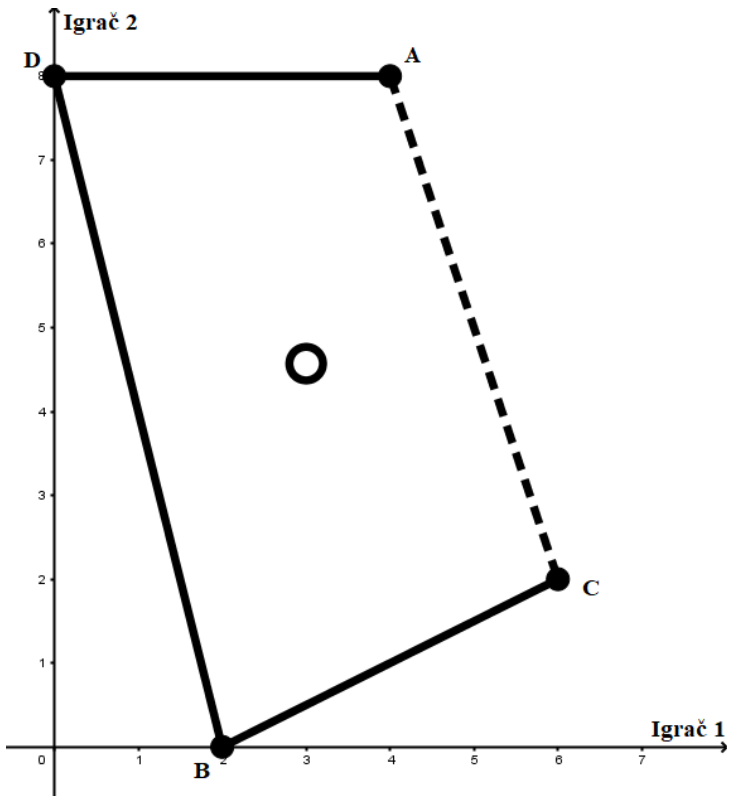
Da bismo olakšali određivanje Pareto optimalnih isplata, možemo ih prikazati u koordinatnoj ravnini, tako da nam os apscisa predstavlja vrijednosti dobitaka za igrača 1, a os ordinata vrijednosti dobitaka za igrača 2. Točke u koordinatnoj ravnini će predstavljati isplate za igrače onako kako se javljaju i u matricama plaćanja te ćemo ih povezati dužinama kako bismo dobili mnogokut. Dobiveni mnogokut naziva se **mnogokutom plaćanja za igru**. Kružić na grafu će predstavljati isplate koje su dobivene uspostavom Nash-ove ravnoteže, a isprekidane dužine će povezivati i predstavljati Pareto optimalne isplate.



Slika 1: Prikaz mnogokuta plaćanja za igru iz primjera 2.2.11.

Promotrimo detaljnije Sliku 1. Pareto optimalne isplate nalaze se na „sjeveroistočnim“ rubovima mnogokuta. Možemo primijetiti da su Pareto optimalni ishodi povezani isprekidanom dužinom. Točke A, B, C i D predstavljaju isplate iz matrice plaćanja iz primjera 2.2.11. Koordinate točke A predstavljaju isplatu $p_{11} = (6, 6)$. Koordinate točke B predstavljaju isplatu $p_{12} = (-2, 10)$. Koordinate točke C predstavljaju isplatu $p_{21} = (10, -2)$. Koordinate točke D predstavljaju isplatu $p_{22} = (0, 0)$. Također, možemo primijetiti da je točka D „zaokružena“, pri čemu kružić predstavlja isplatu dobivenu uspostavom Nash-ove ravnoteže.

Ovakvi grafički prikazi pomažu nam vizualizirati problem s kojim se suočavamo prilikom određivanja Pareto optimalnih isplata. Zbog toga je posebno zanimljivo promotriti kako bi izgledao mnogokut plaćanja za igru iz primjera 2.2.4. u kojem smo do Nash-ove ravnoteže došli korištenjem mješovitih strategija, što prikazuje slika 2.



Slika 2: Prikaz mnogokuta plaćanja za igru iz primjera 2.2.4.

Prisjetimo se da smo za igru iz primjera 2.2.4. već ustanovili da Nash-ova ravnoteža ne daje jako dobru isplatu za igrače u igri. Promotrimo li Sliku 2. možemo vidjeti zašto je to tako. Naime, vidimo da bi se odabirom isplate $p_{11} = (4, 8)$, koju na slici predstavlja vrh mnogokuta A, oba igrača našla u puno boljoj situaciji u odnosu na situaciju u kojoj se nalaze nakon uspostave Nash-ove ravnoteže.

Nakon što smo i grafički predočili probleme s kojima se suočavamo u nekooperativnim igrama s nenul sumom, još jasnije vidimo da nailazimo na velike probleme primjenom Nash-ove ravnoteže. Isplate i ishodi igara dobiveni uspostavom Nash-ove ravnoteže su poželjni, zato što su stabilni i zato što postoje u svakoj igri, ali vidjeli smo da često tako dobivene isplate nisu Pareto optimalne. Zbog toga se javlja potreba da se u igrama s nenul sumom pozabavimo i strategijama koje će igračima omogućiti maksimiziranje vrijednosti isplata i u najgorem mogućem slučaju. Riječ je o takozvanim minimaks, odnosno maksimin, strategijama, koje su česte u teoriji igara sa sumom nula[12].

Definicija 2.2.16. Neka je zadana igra s matricom plaćanja

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}.$$

Označimo s $\min_j p_{ij}$ najmanji element u i-tom retku, a sa $\max_i p_{ij}$ najveći element u j-tom stupcu. Najveći element među $\min_j p_{ij},\ j \in \{1, \dots, n\}$, zovemo **maksimin** i označavamo s $\max_i(\min_j p_{ij})$ te on osigurava najmanje taj dobitak za igrača 1, bez obzira na to koju strategiju odabere igrač 2. Najmanji element među $\max_i p_{ij},\ i \in \{1, \dots, m\}$, zovemo **minimaks** i označavamo s $\min_j(\max_i p_{ij})$ te on osigurava najmanji gubitak za igrača 2, bez obzira na to koju strategiju odabere igrač 1.

Dakle, igrač 1 nastoji sebi osigurati najveći minimalni dobitak, bez obzira na to kako postupa igrač 2. Igrač 1 bira najmanje elemente u svakom retku, a potom od svih njih bira onaj najveći. S druge strane, igrač 2 također želi sebi osigurati najveći mogući dobitak, odnosno najmanji maksimalni gubitak, bez obzira na to kako postupa igrač 1. Igrač 2 bira najveće elemente u svakom stupcu, a potom od svih njih bira onaj najmanji[13].

Pokušajmo sada za igru iz primjera 2.2.4., koja je zadana matricom plaćanja

[12] Kao što smo do sada vidjeli, u ovom diplomskom radu se bavimo pronalaženjem optimalnih rješenja kako bismo za oba igrača osigurali optimalni dobitak, što nas opet dovodi u kontakt s linearnim programiranjem. Dakle, linearno programiranje i teorija igara se uvelike isprepliću i nadopunjuju.

[13] Ova definicija je primjenjiva u igrama sa sumom nula. Međutim. ako izdvojeno promatramo samo isplate koje se odnose na igrača 1, odnosno igrača 2, a ne uređene parove, takve igre možemo tretirati kao igre sa sumom nula.

$$\begin{array}{ccc} & & \quad Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (4,8) & (2,0) \\ (6,2) & (0,8) \end{bmatrix}, \end{array}$$

odrediti povoljniji ishod igre, u odnosu na onaj koji smo dobili uspostavom Nash-ove ravnoteže. Promotrimo najprije igru sa stanovišta igrača 1. Dakle, gledamo samo prve koordinate u uređenim parovima matrice plaćanja, koji se odnose na isplate igrača 1. Kako bi igrač 1 maksimizirao minimalni dobitak, koristeći se definicijom 2.2.16. može ustanoviti da mu je najmanji element u prvom retku 2, a najmanji element u drugom retku 0. Kako je $2 > 0$, igrač 1 će kao maksimin dobiti 2, odnosno doći će do zaključka da treba odabrati potez r_1 jer će na taj način osigurati dobitak čija je vrijednost najmanje *2*.

Definicija 2.2.17. U igrama s nenul sumom, optimalna strategija za igrača 1 u odnosu na njegove isplate naziva se **razborita strategija igrača 1**. Ishod igre u tom slučaju naziva se **sigurnosni nivo igrača 1**.

Dakle, odabirom svoje razborite strategije, igrač 1 osigurava da će dobiti najmanje onaj dobitak koliko iznosi njegov sigurnosni nivo. U slučaju iz primjera 2.2.4 razborita strategija igrača 1 je $X = (1,0)$, a sigurnosni nivo igrača 1 iznosi *2*. Definicija za igrača 2 je analogna.

Za razliku od igrača 1, razborita strategija za igrača 2 je mješovita strategija, koju dobivamo koristeći algoritam 2.2.8. i ona glasi $Y = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$, a njegov sigurnosni nivo, po definiciji 2.2.6. iznosi $\frac{32}{7}$. Ukoliko oba igrača odaberu svoje razborite strategije u igri, ishod igre će biti $E(X,Y) = \frac{4}{7}(4,8) + \frac{3}{7}(2,0) = (\frac{22}{7}, \frac{32}{7})$. Dakle, dobitak za igrača 2 odgovara vrijednosti njegovog sigurnosnog nivoa, odnosno $\frac{32}{7}$. S druge strane dobitak $\frac{22}{7}$ za igrača 1 je bolji od njegova sigurnosnog nivoa koji iznosi 2, jer je $\frac{22}{7} > 2$. Primijetimo da dobiveni ishod igre nije Pareto optimalan, zato što postoji isplata $p_{11} = (4,8)$ koja omogućuje bolje dobitke za oba igrača u odnosu na isplatu $(\frac{22}{7}, \frac{32}{7})$, koja nije dobivena ni uspostavom Nash-ove ravnoteže.

Ukoliko igrač 2 očekuje da će igrač 1 odabrati svoju razboritu strategiju $X = (1,0)$, igrač 2 ne bi trebao odabrati svoju razboritu strategiju $Y = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$, nego bi trebao odabrati čistu strategiju $Y = (1,0)$. Na taj način bi sebi osigurao dobit čija je vrijednost 8. Analogno vrijedi i za igrača 1. Ukoliko igrač 1 očekuje da će igrač 2 odabrati svoju razboritu strategiju $Y = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$, igrač 1 može izračunati očekivane ishode igre s obzirom na svoje poteze te će dobiti, za odabir poteza $r_1: \frac{4}{7} \cdot 4 + \frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{22}{7}$, a za odabir poteza $r_2: \frac{4}{7} \cdot 6 + \frac{3}{7} \cdot 0 = \frac{24}{7}$. Na temelju dobivenih rezultata, zaključujemo da bi igrač 1 trebao odabrati čistu strategiju $X = (0,1)$. Na taj način bi sebi osigurao dobit, čija je vrijednost $\frac{24}{7}$.

U ovom razmatranju vidjeli smo da za svakog od igrača postoji optimalna strategija kao odgovor na razboritu strategiju drugog igrača. Takva strategija naziva se kontra-razborita strategija.

Definicija 2.2.18. U igrama s nenul sumom, **igračeva kontra-razborita strategija** je njegov najbolji odgovor na razboritu strategiju njegova protivnika.

Sada ćemo razmotriti i usporediti sve kombinacije strategija za igrača 1 i igrača 2 te isplate koje se dobivaju za svaku pojedinu kombinaciju tih strategija za promatranu igru iz primjera 2.2.4. Pogledajmo Tablicu 1.

Strategija igrača 1	Strategija igrača 2	Isplata igrača 1	Isplata igrača 2
razborita	razborita	3.14	4.57
razborita	kontra-razborita	4	8
kontra-razborita	razborita	3.42	4.57
kontra-razborita	kontra-razborita	6	2

Tablica 1: Odnosi između razboritih i kontra-razboritih strategija u igri iz primjera 2.2.4.

Na temelju Tablice 1 vidimo da je za igrača 1 najpovoljnija situacija ona u kojoj bi oba igrača odabrala kontra-razborite strategije. U tom slučaju, igrač 1 bi ostvario dobitak 6. Za igrača 2 najpovoljnija situacija je ona situacija, u kojoj bi igrač 1 odabrao razboritu strategiju, na koju bi onda igrač 2 odgovorio kontra-razboritom strategijom. U tom slučaju, igrač 2 bi ostvario dobitak 8. Uviđamo da je ova logika o razboritim i kontra-razboritim strategijama jako nestabilna i da se zapravo temelji na spekulacijama i predviđanjima poteza koje će povući drugi igrač u igri, a to je poprilično teško predvidjeti i jako je rizično.

Iz svega što smo do sada razmotrili, mogli smo se uvjeriti da stvari koje savršeno funkcioniraju u igrama sa sumom nula, nažalost, u nekooperativnim igrama s nenul sumom stvaraju ozbiljne probleme. Nažalost, nismo u mogućnosti dati neki generalni savjet, koji bi mogli primijeniti u svim nekooperativnim igrama s nenul sumom. Najbolje što možemo zaključiti sadržano je u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.2.19. **Igra za dva igrača ima rješenje u strogom smislu** ako

1. postoji bar jedna Nash-ova ravnoteža, koja je Pareto optimalna, ili
2. ako postoji više Pareto optimalnih Nash-ovih ravnoteža, koje su sve ekvivalentne i međusobno razmjenjive.

Dakle, za nekooperativne igre s dva igrača, koje su rješive u strogom smislu, preporučujemo kao savjet odabir onih strategija koje uspostavljaju Pareto optimalne Nash-ove ravnoteže ili međusobno ekvivalentne i razmjenjive Pareto optimalne Nash-ove ravnoteže.

Do sada smo promatrali samo one nekooperativne igre s nenul sumom, u kojima su igrači svoje poteze povlačili istovremeno i mogli smo zaključiti da ne postoji neka strategija koja bi generalno vrijedila za sve takve igre.

Promotrimo sada još nekoliko primjera malo drugačijih nekooperativnih igara s nenul sumom. U sljedećim primjerima, igrači svoje poteze ne povlače istovremeno, nego jedan igrač ima mogućnost povući svoj potez prije drugog igrača. U skladu s time, razmotrit ćemo koje su prednosti i mane igrača koji prvi povlači svoj potez, odnosno igrača koji drugi povlači svoj potez.

U sljedećem primjeru promotrit ćemo situaciju u kojoj bi oba igrača htjela da njihov suparnik prvi povuče potez jer bi tako sebi povećali dobitak.

Primjer 2.2.20. Neka je igra zadana matricom plaćanja[14]

$$\begin{array}{ccc} & & Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (6,-6) & (0,0) \\ (-2,2) & (8,-8) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Korištenjem optimalnih strategija iz algoritma 2.2.8. možemo uvidjeti da je optimalna strategija za igrača 1 strategija $\bar{X} = (\frac{5}{8}, \frac{3}{8})$, a za igrača 2 strategija $\bar{Y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Očekivani ishod igre, s obzirom na strategije $\bar{X}$ i $\bar{Y}$, iznosi $E(\bar{X}, \bar{Y}) = (3, -3)$. Na ovaj način, vidimo da je igrač 1 na dobitku, a igrač 2 na gubitku ukoliko se potezi u igri povlače istovremeno. Međutim, ukoliko igrač 1 prvi povlači potez, tada igrač 2 ima sljedeće mogućnosti:

[14] Primijetimo da je ovako zadana igra ujedno i igra sa sumom nula, zato što dobitak jednog igrača direktno predstavlja gubitak drugog igrača, odnosno zbroj dobitaka oba igrača jednak je nuli. Međutim, sada se nećemo na to obazirati, samo ćemo napomenuti da zaključci izvedeni iz ovog primjera vrijede za sve igre sa sumom nula.

- ako igrač 1 odabere potez r_1, igrač 2 može odabrati potez s_2 i tako će dobitak biti 0 za oba igrača, odnosno nijedan od njih neće biti na dobitku,
- ako igrač 1 odabere potez r_2, igrač 2 može odabrati potez s_1 i tako će dobitak za igrača 2 biti 2, a za igrača 1 će biti -2, odnosno igrač 2 će biti na dobitku, a igrač 1 na gubitku.

Vidimo da je privilegija da prvi povuče svoj potez igrača 1 stajala njegova očekivanog dobitka. Naime, umjesto očekivanog dobitka 3, očekuje ga dobitak 0 ili još gori dobitak -2. U ovom slučaju vidimo da igranje prvog poteza igraču 1 samo nanosi štetu, dok igrač 2 ima mogućnost da svoj očekivani gubitak od -3 pretvori u dobitak od 2.

Ako bi igrač 2 isto prvi povukao potez, tada igrač 1 ima sljedeće mogućnosti:

- ako igrač 2 odabere potez s_1, igrač 1 može odabrati potez r_1 i tako će dobitak za igrača 1 biti 6, a za igrača 2 će biti -6, odnosno igrač 1 će biti na dobitku, a igrač 2 na gubitku,
- ako igrač 2 odabere potez s_2, igrač 1 može odabrati potez r_2 i tako će dobitak za igrača 1 biti 8, a za igrača 2 će biti -8, odnosno igrač 1 će biti na dobitku, a igrač 2 na gubitku.

Vidimo da privilegija da prvi povuče svoj potez igraču 2 donosi još veći gubitak od njegova očekivanog dobitka. Naime, umjesto očekivanog gubitka -3, očekuje ga gubitak -6 ili još gori gubitak -8. U ovom slučaju vidimo da igranje prvog poteza igraču 2 nanosi još veću štetu, dok igrač 1 ima mogućnost da svoj očekivani dobitak od 3 pretvori u dobitak od 6 ili čak dobitak od 8. Iz ovih razmatranja, zaključujemo da u ovoj igri oba igrača preferiraju da njihov suparnik povuče prvi potez. ◄

U sljedećem primjeru promotrit ćemo situaciju u kojoj bi oba igrača htjela prvi povući svoje poteze jer bi tako sebi osigurali najveći mogući dobitak.

Primjer 2.2.21. Neka je igra zadana matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & \quad s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (2,2) & (1,3) \\ (3,1) & (0,0) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Ukoliko igrač 1 prvi odabere potez r_2, igraču 2 je u najboljem interesu odabrati potez s_1 i tako će oba igrača biti na dobitku. U tom slučaju će igrač 1 ostvariti dobitak 3, a igrač 2 dobitak 1. Ukoliko igrač 2 prvi odabere potez s_2, igraču 1 je u najboljem interesu odabrati potez r_1 i opet će oba igrača biti na dobitku. U tom slučaju će igrač 2 ostvariti dobitak 3, a igrač 1 dobitak 1. Na ovaj način igrač koji prvi povlači potez osigurava da će dobiti svoj željeni i najbolji mogući dobitak u igri, odnosno da će mu dobitak biti 3. Možemo zaključiti da u ovoj igri oba igrača preferiraju prvi povući svoje poteze, jer im to osigurava najbolji mogući dobitak u igri. ◄

U sljedećem primjeru promotrit ćemo situaciju u kojoj bi oba igrača htjela da jedan od njih uvijek prvi povlači svoje poteze, zato što bi tako sebi osigurali optimalni mogući dobitak s kojim bi oba igrača bila zadovoljna.

Primjer 2.2.22. Neka je igra zadana matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Igrač}\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & \quad s_2 \end{array} \\ \textit{Igrač}\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (4,5) & (6,3) \\ (3,4) & (5,6) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Primijetimo da bi u ovoj igri, za igrača 1, bilo najbolje da iskoristi dominantnu strategiju $X = (1, 0)$, jer je strategija odabira poteza r_1 dominantna u odnosu na strategiju odabira poteza r_2. U slučaju da se potezi povlače istovremeno, isplata dobivena uspostavom Nash-ove ravnoteže bi bila $p_{11} = (4, 5)$, ali ta isplata nije Pareto optimalna jer postoji isplata $p_{22} = (5, 6)$ koja obojici igrača osigurava veći dobitak od ispate $p_{11} = (4, 5)$. Ukoliko bi igrač 2 prvi povlačio potez, isplata bi i dalje bila $p_{11} = (4, 5)$. Naime, ako bi igrač 2 odabrao potez s_1, igrač 1 će odabrati potez r_1 te će isplata opet biti $p_{11} = (4, 5)$. S druge strane ako bi igrač 2 odabrao potez s_2, igrač 1 će ponovno odabrati potez r_1 te će isplata biti $p_{12} = (6, 3)$, a to igraču 2 nikako ne odgovara jer je na gubitku u odnosu na isplatu koju dobiva uspostavom Nash-ove ravnoteže. Zbog toga bi igrač 2, u slučaju da je on taj koji povlači prvi potez, razumno uvijek birao potez s_1 koji mu osigurava isplatu $p_{11} = (4, 5)$ dobivenu uspostavom Nash-ove ravnoteže.

Pretpostavimo sada da igrač 1 prvi povlači potez. Ukoliko igrač 1 odabere potez r_1, igrač 2 će odabrati potez s_1 te će isplata opet biti $p_{11} = (4, 5)$. Ukoliko igrač 1 odabere potez r_2, igrač 2 će odabrati potez s_2 te će isplata biti $p_{22} = (5, 6)$. Kako igrač 1 više preferira dobitak 5 od dobitka 4, odabrat će potez r_2, što će osigurati Pareto optimalnu isplatu $p_{22} = (5, 6)$. Na taj način, igrač 1 će pomoći obojici igrača, te će oba igrača preferirati da igrač 1 uvijek prvi povlači potez u ovoj igri. ◄

Ovime smo došli do kraja razmatranja teorije o nekooperativnim igrama za dva igrača s nenul sumom. Prije nego što krenemo proučavati kooperativne igre za dva igrača s nenul sumom, u poglavlju 2.3. osvrnut ćemo se na primjenu nekooperativnih igara za dva igrača s nenul sumom promatrajući probleme i primjere iz svakodnevnog života.

2.3. Primjena nekooperativnih igara s nenul sumom

Nekooperativne igre s nenul sumom imaju široku primjenu u brojnim problemima i primjerima iz svakodnevnog života. Neki od tih primjera su:

- Izvođenje sedmeraca u rukometnoj utakmici, gdje igrač i vratar ne komuniciraju, nego vratar nastoji pronaći način kako da obrani udarac, a igrač nastoji postići pogodak. Pritom igrač može odigrati lom, pucati od poda itd., a vratar može iskoračiti naprijed, ostati unutar vratnica itd.
- Igra kamen-škare-papir, gdje igrači ne komuniciraju, nego nastoje nadmudriti jedan drugoga kako bi pobijedili[15], a pritom pokazuju simbole za kamen, škare ili papir. Pri tome kamen pobjeđuje škare, škare pobjeđuju papir, a papir pobjeđuje kamen.
- Igra s poklapanjem novčića, gdje igrači ne komuniciraju, nego stavljaju istovremeno novčiće na stol i nastoje ih osvojiti. Ovisno o tome jesu li novčići pali na „pismo“ ili „grb“, igrači osvajaju novčiće.
- Igra borba spolova, gdje su žena i muž odlučili večer provesti zajedno, ali ne mogu odlučiti npr. koji će film zajedno gledati, Titanic ili Rocky.
- Šah, gdje se na temelju naizmjenično povučenih poteza može promatrati koji je igrač u prednosti ovisno o povlačenju prvog poteza, odnosno igranja s bijelim figurama[16].

Pored svih navedenih problema i mnogih drugih, uvjerljivo je najpoznatiji problem, s kojem se susrećemo kod nekooperativnih igara za dva igrača s nenul sumom, „Dilema zatvorenika“ koju ćemo detaljnije proučiti.

1950. godine američki matematičari Melvin Dresher i Merrill Flood zajednički su razvili posebnu igru, kao primjer igre s nenul sumom, koja ima jedinstveno uspostavljenu Nash-ovu ravnotežu, a koja nije Pareto optimalna. Kasnije je kanadski matematičar Albert William Tucker, za potrebe izlaganja primjera dileme zatvorenika, osmislio priču koja odgovara situaciji u igri te na taj način pridonio popularizaciji te igre.

Melvin Dresher (1911.-1992.) je bio američki matematičar podrijetlom iz Poljske koji je, uz američkog matematičara Merrilla Meeksa Flooda, zaslužan za razvoj posebnog modela u

[15] Postoji puno različitih primjera igara koje su slične ovoj igri, kao što su npr. igra par-nepar, igra sik-sak-suk itd.

[16] U šahu su pojedini velemajstori, ovisno o strategijama koje su primjenjivali, pretežno pobjeđivali ako bi odigrali prvi potez i tako nametnuli svoj stil igre, odnosno ako bi prepustili protivniku da odigra prvi potez i vrebali njegove potencijalne greške tijekom igre.

teoriji igara, koji zovemo Dilema zatvorenika. 1951. godine Dresher je objavio knjigu pod nazivom „Matematika igara i strategija: Teorija i primjena“ u kojoj su izložene njegove spoznaje na području teorije igara.

Merill Meeks Flood (1908.-1991.) bio je američki matematičar koji je, uz američkog matematičara Melvina Dreshera, radio na razvoju modela Dileme zatvorenika. Uz to, radio je i na mnogim problemima kao što su npr. Problem trgovačkog putnika i Hitchcock-ov problem transporta, a bavio se i proučavanjem teorije igara te izučavanjem teorija o donošenju odluka.

Albert William Tucker (1095.-1995.) bio je kanadski matematičar koji se bavio proučavanjem kombinatorne topologije, teorije igara i nelinearnog programiranja. Ističe se po osmišljavanju priče o dilemi zatvorenika zahvaljujući kojoj je ta igra postala možda i najpopularnija i najpoznatija u teoriji igara. Osim toga, Trucker je sudjelovao i u istraživanju protuzračnih sustava i proširivanju teorije linearnog i nelinearnog programiranja.

Primjer 2.3.1. (Dilema zatvorenika) Policija je uhitila dvojicu osumnjičenika za zločin, koje je po dolasku u policijsku stanicu pojedinačno ispitala, tako da zatvorenici nisu mogli međusobno ni komunicirati, ni surađivati. Tužitelj je svakom od zatvorenika rekao sljedeće:

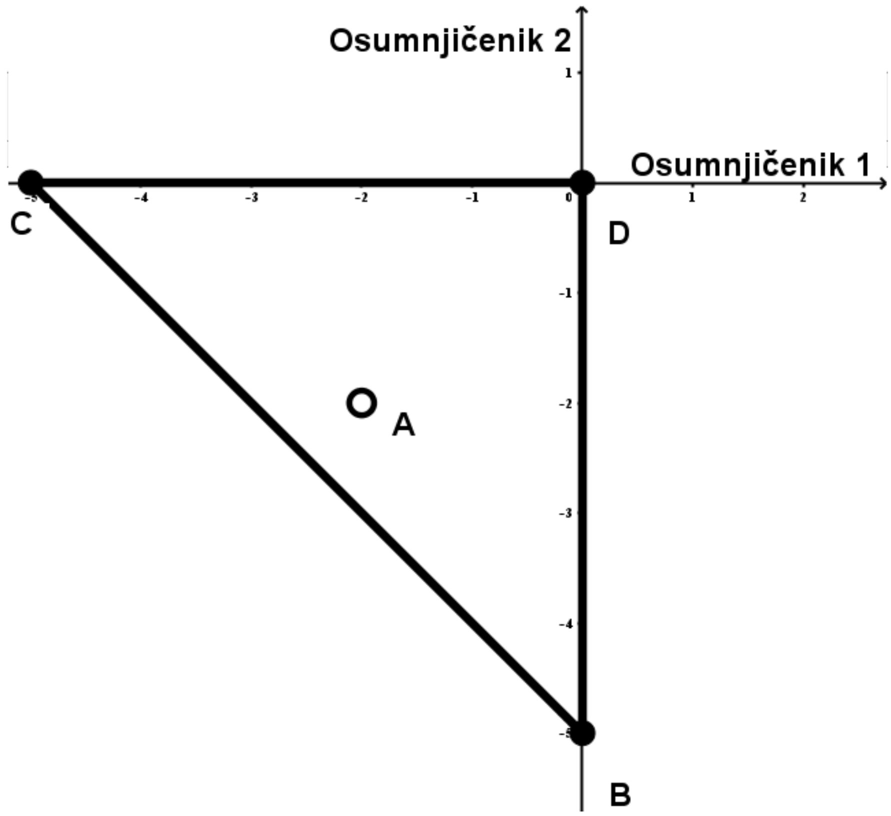
1. „Ukoliko jedan od vas prizna da ste sudjelovali u zločinu, a drugi ne, onda će onaj koji je priznao sudjelovanje u zločinu biti nagrađen tako što će mu se kazna umanjiti za 2 godine u odnosu na onu kaznu koja je propisana zakonom, a onaj koji nije priznao sudjelovanje u zločinu dobit će kaznu veću za 3 godine u odnosu na onu koja je propisana zakonom.“

2. „Ukoliko obojica priznate da ste sudjelovali u zločinu, obojica ćete biti kažnjeni svaki pojedinačno s propisanom kaznom od 2 godine zatvora.“

S druge strane, kako policija nema čvrste dokaze protiv osumnjičenika, postoji i treća mogućnost, a ta je da oba osumnjičenika budu oslobođena zbog nedostatka dokaza, ako obojica budu šutjeli. No, tužitelj to nije rekao osumnjičenicima kako bi od njih pokušao izvući priznanje. Navedeni problem predstavljen je matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Osumnjičenik } 2 \\ & & \begin{array}{cc} \text{priznaje} & \text{ne priznaje} \end{array} \\ \text{Osumnjičenik } 1 & \begin{array}{c} \text{priznaje} \\ \text{ne priznaje} \end{array} & \begin{bmatrix} (-2,-2) & (0,-5) \\ (-5,0) & (0,0) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Razmotrimo li u ovom primjeru dominantne strategije možemo primijetiti da, za obojicu osumnjičenika, dominantna strategija preferira priznavanje u odnosu na šutnju. Dakle, za osumnjičenika 1, dominantna strategija glasi $X = (1, 0)$, a za osumnjičenika 2 glasi $Y = (1, 0)$. Ako oba igrača odaberu svoje dominantne strategije, dobili smo, kao rezultat uspostavljene Nash-ove ravnoteže, isplatu $p_{11} = (-2, -2)$. Odmah možemo primijetiti da ova isplata nije Pareto optimalna, zato što je za obojicu igrača bolja isplata $p_{22} = (0, 0)$, koja ujedno predstavlja i jedinu Pareto optimalnu isplatu u ovoj igri, što pokazuje i slika 3.



Slika 3: Prikaz mnogokuta plaćanja za dilemu zatvorenika

Razmotrimo sada kako je došlo do ove situacije. Naime, obojica osumnjičenika razmišljaju na isti način: „Ako ja ne priznam sudjelovanje u zločinu, mogu izaći na slobodu, pod uvjetom da ni moj kolega ne prizna sudjelovanje u zločinu. Međutim, kako ja mogu vjerovati da me kolega neće izdati pa ću u tom slučaju završiti u zatvoru narednih 5 godina. S druge strane, ako ja priznam da smo obojica sudjelovali u zločinu, bit ću nagrađen tako što će me pustiti bez kazne, a ako i moj kolega prizna sudjelovanje u zločinu, dobivamo najviše po 2 godine zatvora svaki, a to je puno bolje od 5 godina zatvora.“

Upravo zbog takvog načina razmišljanja, koje se u ovom slučaju poklapa i s uspostavljenom Nash-ovom ravnotežom i dominantnim strategijama, oba osumnjičenika se odlučuju na priznavanje krivnje, te obojica gube dvije godine života u zatvoru. ◄

Primjer 2.3.1. je tipičan primjer u kojem se sukobljavaju individualna racionalnost, koja proizlazi iz dominantnih strategija i kolektivna racionalnost, koja proizlazi iz Paretova principa. Oba osumnjičenika se vode individualnom racionalnošću, pri čemu slijede svoje vlastite najbolje interese, koji na kraju rezultiraju lošijim izborom za obojicu osumnjičenika.

Ovaj problem najlakše bismo riješili ako bi dopustili osumnjičenicima suradnju, no to nije dopušteno. S druge strane, problem je moguće riješiti tako da oba igrača budu oslobođena, onda kada postoji mogućnost predviđanja što bi drugi osumnjičenik mogao učiniti. U tom slučaju, zapravo se baziramo na međusobnom poznavanju načina razmišljanja i međusobnom povjerenju među osumnjičenicima. No, kako je teško predvidjeti što će netko učiniti i koliko se nekome može vjerovati, nije se dobro upuštati u takvo razmatranje.

Nažalost, kako smo već ranije ustanovili, u nekooperativnim igrama za dva igrača s nenul sumom, ne možemo dati generalni savjet za rješavanje problema. Zbog toga, ni kod dileme zatvorenika ne možemo doći do neke pouzdane strategije koja bi uvijek rezultirala najboljim ishodom igre za oba igrača u igri ako igrači međusobno ne surađuju[17].

Postavlja se pitanje, zašto je dilema zatvorenika toliko poznata i važna? Odgovor na ovo pitanje leži u tome što postoje mnoge situacije, u svakodnevnom funkcioniranju svijeta oko nas, kojima se u pozadini krije isti problem kao i u dilemi zatvorenika.

Mnogi od primjera, kojima se u pozadini skriva isti problem kao u dilemi zatvorenika, vezani su uz ekonomiju kao npr. situacija u kojoj se dva trgovačka lanca natječu za kupce pa razmišljaju o tome kako ih zadržati i steći nove, a da pritom i dalje budu na dobitku. Lanac može sniziti cijene proizvoda da bude konkurentniji. Kako i drugi trgovački lanac razmišlja na isti način, oba snižavaju cijene, a rezultat je podjednak broj kupaca uz niži prihod. Ovaj primjer detaljnije ćemo razmotriti nakon što proučimo kooperativne igre za dva igrača s nenul sumom.

Postoje i drugi primjeri, kao što je utrka u naoružavanju, kao npr. nekad između SSSR-a i SAD-a, a danas između Sjeverne Koreje i Južne Koreje, u kojem opet može doći do istog scenarija kao i u prethodno opisanom primjeru, odnosno zemlje zapadaju u začarani krug gomilanja oružja.

[17] Postoje pokušaji da se problem dileme zatvorenika riješi, no i dalje su svi ti pokušaji, u najboljem slučaju, samo djelomično korisni i ne možemo ih generalno primijeniti na problem. Jedan od najpoznatijih pokušaja je bio pokušaj nazvan TIT FOR TAT. U ovom diplomskom radu nećemo detaljnije proučavati taj pokušaj, a više o tome možete pročitati u izvoru [5].

2.4. Kooperativne igre s nenul sumom

Do sada smo se bavili samo onim igrama u kojima suradnja i komunikacija među igračima nisu bile dozvoljene. U ovom dijelu diplomskog rada promatramo igre s drugačijeg gledišta. Naime, igračima će biti dozvoljena međusobna komunikacija i suradnja.

Za početak ćemo proučavati situacije u kojima je igračima komunikacija dozvoljena prije nego što krenu povlačiti svoje poteze. U tim situacijama, igračima su na raspolaganju prijetnje i obećanja, koje upućuju jedan drugome prije početka igre. Nakon što se krenu povlačiti potezi, vidjet će se koliko povjerenja možemo imati u igrače, s obzirom na to što su se dogovorili, odnosno obećali ili zaprijetili da će učiniti, prije početka igre. Naime, igrači mogu i prekršiti dana obećanja[18] ako smatraju da će im to biti od koristi.

Najprije ćemo definirati što ćemo smatrati prijetnjom, a što ćemo smatrati obećanjem.

Definicija 2.4.1. Izjava prije početka igre se smatra **prijetnjom** ako:

- igrač kaže drugom igraču da će povući određeni potez kao reakciju na njegov potez,
- igračev potez će biti štetan po drugog igrača,
- igračev potez će biti štetan i po njega.

Dakle, izjava koju smatramo prijetnjom ima negativne posljedice za oba igrača te obojici nanosi štetu. Sve ovisi o tome kako će drugi igrač protumačiti prijetnju i hoće li je shvatiti ozbiljno ili kao pokušaj blefiranja, a ovisi i o tome hoće li igrač ostvariti svoju prijetnju.

Definicija 2.4.2. Izjava prije početka igre se smatra **obećanjem** ako:

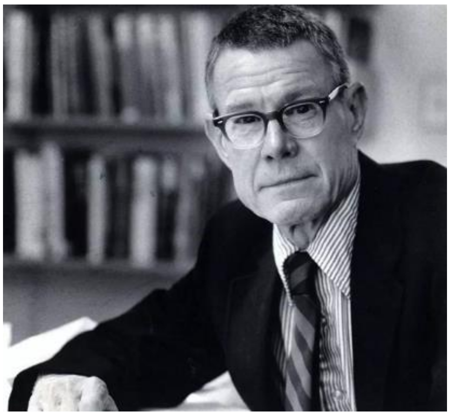
- igrač kaže drugom igraču da će povući određeni potez kao reakciju na njegov potez,
- igračev potez će biti koristan za drugog igrača,
- igračev potez će biti štetan po njega.

Dakle, izjava koju smatramo obećanjem ima pozitivne posljedice za suparničkog igrača, ali ima negativne posljedice po igrača koji daje obećanje. Naravno, ne zaboravimo da igrač uvijek može prekršiti svoje obećanje, a pitanje je vjeruje li drugi igrač u dano obećanje.

[18] Ovakve situacije predstavljaju granični slučaj između nekooperativnih i kooperativnih igara. Kod nekooperativnih igara, igrači nisu ni surađivali, ni komunicirali, a ovdje ipak postoji mogućnost dogovora prije igre koji se može, ali i ne mora poštovati. Zbog toga smo, u ovom diplomskom radu, igre u kojima prije povlačenja poteza možemo dati obećanja ili prijetnje uvrstili u kooperativne igre.

Razmatranjem navedenih vrsta izjava, ali i drugih strategija koje se mogu primijeniti u konfliktnim i natjecateljskim situacijama posebno se bavio američki ekonomist Schelling.

Thomas Crombie Schelling (1921.-2016.) bio je američki ekonomist koji se istaknuo mnogim svojim radovima, kao što su „The Strategy of Conflict“ iz 1960. godine, „Arms and Influence“ iz 1966. godine i „Micromotives and Macrobehavior“ iz 1978. godine. Zbog svoga doprinosa razmatranju sukoba i suradnje u teoriji igara, Schelling je 2015. godine nagrađen i Nobelovom nagradom za ekonomiju.



Fotografija 3: Thomas Crombie Schelling

Promotrimo sada primjer u kojem se javlja izjava koju ćemo interpretirati kao prijetnju.

Primjer 2.4.3. Neka je igra dana matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Igrač 2} \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \text{Igrač 1} & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (6,4) & (4,6) \\ (3,2) & (2,3) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Pretpostavimo da igrač 2 prvi povlači svoj potez, a da igrač 1 prije toga izjavljuje: „Ako odabereš potez s_2, ja ću odabrati potez r_2.“ Kao što vidimo, ova izjava predstavlja prijetnju. Koristeći definiciju 2.4.1. vidimo da je potez igrača 1 potencijalna reakcija na potez igrača 2, a da je štetan za oba igrača. Naime, u slučaju da igrač 1 zaista odabere potez r_2, kao isplatu dobivamo $p_{22} = (2,3)$, što je lošija isplata u odnosu na isplatu $p_{12} = (4,6)$, koju bi dobili da je igrač 1 odabrao potez r_1. Igrač 2 potom razmatra i druge mogućnosti. Ukoliko zaista odabere potez s_2 i igrač 1 ostvari svoju prijetnju, igrač 2 neće biti najzadovoljniji isplatom. Zbog toga razmatra odabir poteza s_1. U tom slučaju isplata može biti $p_{11} = (6,4)$, koja je za igrača 2 ipak povoljnija od isplate $p_{22} = (2,3)$, jer mu omogućava veći dobitak, pa odabire potez s_1. Na ovaj način igrač 1, koristeći prijetnju, može utjecati na ishod igre i osigurati sebi najveći mogući dobitak. ◄

Dakle, u ovom primjeru smo vidjeli kako igrač 1, svojevrsnim ultimatumom, može prisiliti igrača 2 da odabere po sebe štetniji potez, a da pritom igrač 1 ostvari ono što je u njegovom najboljem interesu, odnosno da dobije najveći mogući dobitak koji može dobiti u igri. Naravno, to će se ostvariti samo ako je prijetnja igrača 1 uvjerljiva, odnosno ako igrač 2 povjeruje da će igrač 1 zaista ostvariti svoju prijetnju. Međutim, postavlja se pitanje moralnosti prijetnji u teoriji igara, kao i pitanje koliko su prijetnje isplative, s obzirom na to da mogu nanijeti značajnu štetu onome igraču koji je uputio prijetnju ako ta prijetnja ne bude shvaćena ozbiljno.

U sljedećem primjeru se javlja izjava koju ćemo interpretirati kao obećanje, jer prijetnja neće biti učinkovita kao sredstvo dogovora.

Primjer 2.4.4. Neka je igra dana matricom plaćanja

$$\begin{array}{cc} & Igrač\ 2 \\ & \begin{array}{cc} \quad s_1 & \quad\quad s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (5,5) & (-2,7) \\ (7,-2) & (0,0) \end{bmatrix}. \end{array}$$

U ovoj igri prijetnja neće biti korisna. Ukoliko, kao i u prethodnom primjeru 2.4.3., igrač 2 povlači prvi potez, igraču 1 bi, zbog dominacije, bilo najbolje odabrati potez r_2, koji je štetan za igrača 2. Dakle, igrač 1 nema na raspolaganju mogućnost prijetnje kojom bi nanio još veću štetu igraču 2, nego što bi to učinio samo izborom poteza r_2 i tako ga prisilio da promijeni svoju odluku. S druge strane, igrač 1 može utjecati na odluku igrača 2 tako što mu kaže: „Ako odabereš potez s_1, onda ću ja odabrati potez r_1." Ova izjava predstavlja obećanje. Koristeći definiciju 2.4.2. vidimo da je potez igrača 1 potencijalna reakcija na potez igrača 2, a da je štetan za igrača 1, a koristan za igrača 2. Naime, u slučaju da igrač 1 zaista odabere potez r_1, kada igrač 2 odabere potez s_1 kao isplatu dobivamo $p_{11} = (5,5)$, koja igraču 1 osigurava manji dobitak, a igraču 2 veći dobitak u odnosu na isplatu $p_{21} = (7,-2)$, koju bi dobili da je igrač 1 odabrao potez r_2. Ukoliko igrač 2 zaista povjeruje igraču 1 i odabere potez s_1, onda ćemo vidjeti da će oba igrača biti na dobitku, zato što će isplata biti $p_{11} = (5,5)$. S druge strane, ako igrač 2 odabere potez s_2, onda će igrač 1, kako bi izbjegao gubitak od -2, odabrati potez r_2 i isplata će biti $p_{22} = (0,0)$, odnosno nijedan igrač neće biti na dobitku. Zbog toga, igrač 2 ipak odlučuje povući potez s_1 i tako osigurati dobitak 5 za oba igrača. Na ovaj način, igrač 1, koristeći obećanje, može utjecati na ishod igre i osigurati sebi relativno dobar dobitak, koji je istovremeno prihvatljiv i za igrača 2. ◄

U ovom primjeru smo vidjeli kako igrač 1 i igrač 2 zapravo pronalaze svojevrsno kompromisno rješenje, koje je povoljno za oba igrača. Kompromis je postignut obećanjem igrača 1, koje je utjecalo na odabir poteza igrača 2. Naravno, to će se ostvariti samo ako je obećanje igrača 1 uvjerljivo i pouzdano, odnosno ako ga ne prekrši.

U primjeru 2.4.4. možemo vidjeti da igrač 1 ima korist i ako prekrši obećanja, ako igrač 2 u njega povjeruje. Naime, kršenjem obećanja igrač 1 bi imao još veću dobit od 7, što je za njega bolja dobit od one koju bi dobio ostvarivanjem obećanja, ali bi time naštetio igraču 2, čija bi dobit u tom slučaju bila -2 i izgubio bi njegovo povjerenje za buduće igre.

Primjer 2.4.4. i kompromis koji igrači postižu bio bi idealan kao rješenje problema 2.3.1. u kojem smo govorili o dilemi zatvorenika, pod uvjetom da osumnjičenici vjeruju jedan drugome i da prije odluke razmisle o zajedničkoj koristi, odnosno da obojica šute i ne priznaju sudjelovanje u zločinu.

U sljedećem primjeru proučit ćemo igru u kojoj ćemo kombinirati obećanje i prijetnju, zato što samo davanje obećanja, odnosno sama prijetnja neće imati učinka, ali u kombinaciji daju određene rezultate.

Primjer 2.4.5. Neka je igra dana matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (5,5) & (2,7) \\ (6,0) & (0,4) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Primijetimo da je u ovoj igri igraču 2 zbog dominacije povoljnije birati potez s_2, koji je za igrača 1 jako loš izbor, pa njegova prijetnja „ako odabereš potez s_2, onda ću ja odabrati potez r_2“ neće imati posebnog efekta na igrača 2. S druge strane, ako igrač 1 obeća igraču 2 „ako odabereš potez s_1, ja ću odabrati potez r_1“, ta izjava također neće imati posebnog efekta na igrača 2. Naime, igraču 2 je, zbog dominacije, gotovo svejedno hoće li igrač 1 odabrati potez r_1 ili r_2. U svakom od ta dva slučaja, igraču 2 je isplativije odabrati potez s_2. No, igrač 1 može iskoristiti kombinaciju navedene prijetnje i navedenog obećanja. U tom slučaju igrač 2 ima samo dva izbora. Ako igrač 2 odabere potez s_2, igrač 1 će odabrati potez r_2 i isplata će biti $p_{22} = (0,4)$. S druge strane, ako igrač 2 odabere potez s_1, igrač 1 će odabrati potez r_1 i isplata će biti $p_{11} = (5,5)$, a to je ipak bolja isplata, koja igraču 2 osigurava dobitak 5, u odnosu na isplatu $p_{22} = (0,4)$, koja igraču 2 osigurava dobitak 4, pa će se igrač 2 ipak odlučiti za odabir poteza s_1. Dakle, igrač 1, koristeći se istovremeno i obećanjem i prijetnjom, može utjecati na ishod igre i osigurati sebi povoljan dobitak 5, koji je istovremeno prihvatljiv i za igrača 2. ◄

U ovom primjeru, kao i u primjeru 2.4.4., smo vidjeli kako igrač 1 i igrač 2 opet dolaze do kompromisa, koji je povoljan za oba igrača. Kompromis je postignut kombinacijom istovremenog obećanja i prijetnje igrača 1, što je utjecalo na odabir poteza igrača 2. To će se ostvariti samo ako su obećanje i prijetnja igrača 1 uvjerljivi.

U teoriji primjene obećanja i prijetnji, kao sredstava komunikacije među igračima, ima dosta manjkavosti. Prije svega tu je problem (ne)povjerenja među igračima, ali i tvrdoglavosti pojedinih igrača, koji nisu spremni na kompromise ovakve vrste, zato što ih koštaju maksimalnog mogućeg dobitka u igri. Naravno, u slučaju da se sve navedene igre igraju više puta zaredom, moguće je puno lakše uspostaviti povjerenje među igračima, zato što će im biti u cilju da njihove prijetnje, odnosno njihova obećanja, imaju utjecaj na postizanje kompromisnog rješenja.

Do sada smo promatrali granični slučaj kooperativnih igara, u kojem je bila dozvoljena komunikacija među igračima, korištenjem prijetnji i obećanja, s ciljem da se postigne određeni kompromis među igračima. Promotrimo sada igre u kojima igrači imaju neograničenu komunikaciju i suradnju. Igračima je sada dozvoljeno da prije igre detaljno rasprave o mogućim ishodima igre i da zajednički odluče o razumnom i prihvatljivom ishodu igre i kako ga ostvariti, a da oba igrača nakon igre budu zadovoljna tim ishodom igre.

Promotrimo jedan primjer u kojem ćemo ravnomjerno podijeliti profit među igračima.

Primjer 2.4.6. Neka je igra dana matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & \quad s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (4,12) & (20\ 10) \\ (8,16) & (0,0) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Jedan od mogućih savjeta igračima bi bio da odaberu isplatu s najvećim mogućim ukupnim dobitkom i da taj ukupni dobitak podijele ravnomjerno. U ovoj igri, igrač 1 može odabrati potez r_1, a igrač 2 potez s_2. U tom slučaju dobivamo isplatu $p_{12} = (20, 10)$ koja osigurava ukupni dobitak igrača 30. Igrači bi potom podijelili ukupni dobitak tako da svaki igrač dobije 15. ◄

U primjeru 2.4.6. vidjeli smo situaciju u kojoj igrači dijele profit na jednake dijelove. To zovemo **egalitarni prijedlog**. Ovaj model ima dvije mane. Prva mana je ta što ne možemo, tek tako, zbrojiti dobitke u svim situacijama, zato što to ponekad jednostavno nema smisla.

Naime, postavlja se pitanje zašto bi igrač 1 dio svog osiguranog dobitka od 20 poklonio igraču 2? Druga mana je da egalitarni prijedlog zanemaruje dosad razmatrane strategije. Naime, u primjeru 2.4.6. kod igrača 2 postoji dominacija, odnosno za njega je bolji odabir poteza s_1 u odnosu na odabir poteza s_2. Zbog toga, igrač 2 može smatrati da nije pošteno da on napusti svoju superiorniju poziciju.

Dakle, potrebno je pronaći arbitražnu odluku, koja će uključivati strateške nejednakosti i jamčiti pravednost za oba igrača u igri. 1944. godine, austrijsko-američki ekonomist Morgenstern i američko-mađarski matematičar von Neumann, došli su do jedne od prvih ideja kako bi mogli riješiti taj problem.

Oskar Morgenstern (1902.-1977.) bio je austrijsko-američki ekonomist i jedan od začetnika teorije igara, uz mađarsko-američkog matematičara von Neumanna. Prije Hitlerove okupacije Austrije, odlazi u SAD. Radio je na Sveučilištu Princeton, gdje je upoznao von Neumanna i zajedno s njim objavio knjigu „Theory of Games and Economic Behavior".

John von Neumann (1903.-1957.) bio je mađarsko-američki matematičar i jedan od najvažnijih matematičara svoga vremena te začetnik teorije igara, uz ekonomista Oskara Morgensterna. U području matematike, osim teorije igara, proučavao je i topologiju, geometriju, algebru i statistiku. Što se tiče teorije igara bitno je istaknuti njegovu i Morgenstern-ovu knjigu „Theory of Games and Economic Behavior", u kojoj opisuju primjenu teorije igara u ekonomiji.

Fotografija 4: John von Neumann

Von Neumann i Morgenstern tvrde da svako razumno arbitražno rješenje u igri s nenul sumom treba biti:

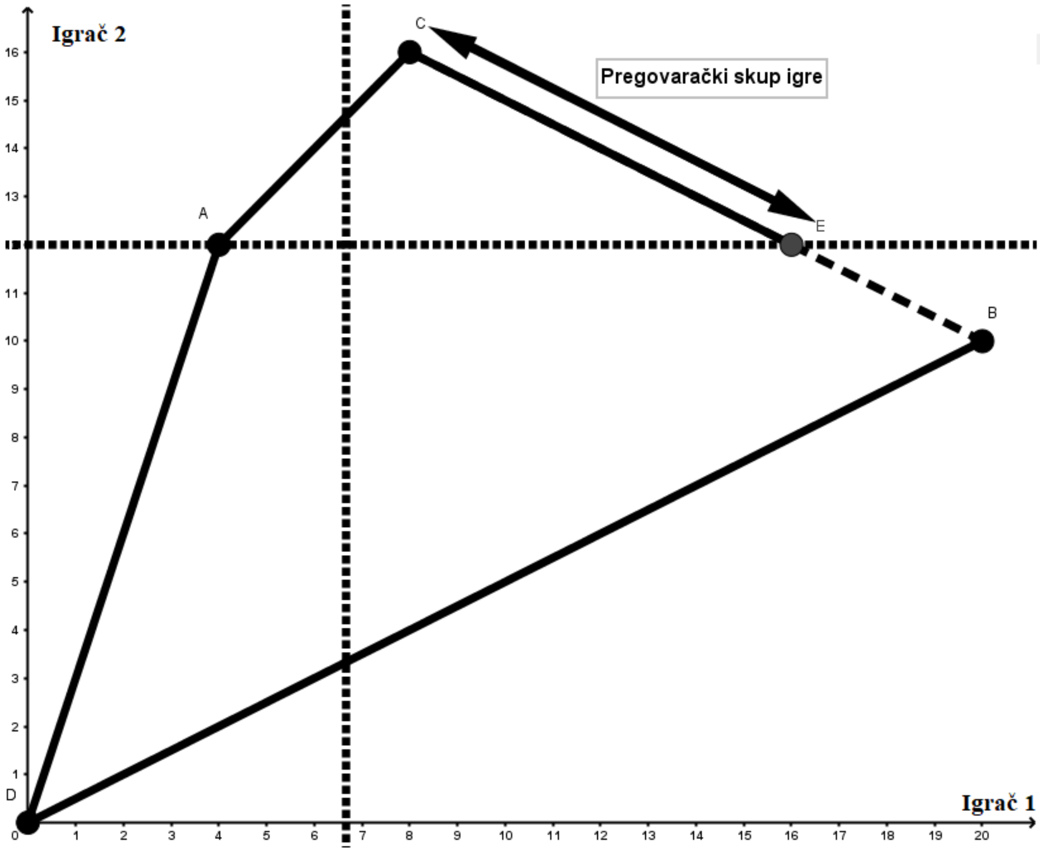
1. Pareto optimalno. Ne smije postojati ishod igre koji je bolji za obojicu igrača ili bolji za jednog igrača, pri čemu je jednako dobar za drugog igrača.
2. Treba biti veće ili jednako od sigurnosnog nivoa za oba igrača. Nijedan igrač ne bi trebao biti prisiljavan prihvatiti manji dobitak od onog koji može dobiti u nekooperativnoj igri.

Definicija 2.4.7. Skup ishoda igre koji zadovoljavaju navedena dva uvjeta naziva se **pregovarački skup igre**.

U igri iz primjera 2.4.6. zadanoj matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igrač\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ Igrač\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (4,12) & (20\ 10) \\ (8,16) & (0,0) \end{bmatrix}, \end{array}$$

razborita strategija za igrača 1 je mješovita strategija $X = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ pa sigurnosni nivo za igrača 1 iznosi $\frac{20}{3}$, a razborita strategija za igrača 2 je, kao što smo već ranije spomenuli, dominantna strategija $Y = (1, 0)$ pa sigurnosni nivo za igrača 2 iznosi 12. Promotrimo li sliku 4 i mnogokut plaćanja za igru iz primjera 2.4.6., možemo vidjeti da su Pareto optimalni ishodi sadržani na dužini, koja je određena krajnjim točkama $B(20, 10)$ i $C(8, 16)$. Pregovarački skup igre predstavlja skup točaka dužine, koja je određena krajnjim točkama $C(8, 16)$ i $E(16, 12)$. Točka E je dobivena kao sjecište pravca $y = 12$, koji predstavlja sigurnosni nivo igrača 2, i dužine $\overline{BC}$, koja predstavlja skup Pareto optimalnih ishoda. Primijetimo da korištenjem ovog recepta, zadovoljavamo i stratešku prednost igrača 2, koji je u ovoj igri koristio dominantnu strategiju $Y = (1, 0)$, koja mu preporučuje da odabere potez s_1. To vidimo iz toga što, u tom slučaju, igrač 2 bira između isplate $p_{11} = (4, 12)$, koju na slici 4 predstavlja točka A, i isplate $p_{21} = (8, 16)$, koju na slici 4 predstavlja točka C, a koja ujedno pripada pregovaračkom skupu igre. Na ovaj način smo igračima suzili izbor ishoda igre na pregovarački skup igre, koji bi u pregovorima bili prihvatljivi obojici igrača.



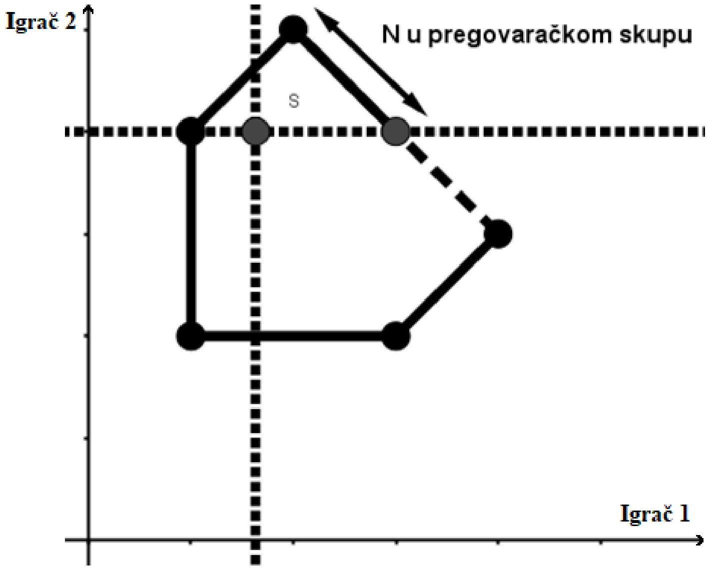
Slika 4: Prikaz mnogokuta plaćanja za igru iz primjera 2.4.6.

Dobiveni pregovarački skup igre daje samo jedan niz razumnih rješenja za igru iz primjera 2.4.6. Pritom se ne specificira koja je točka iz pregovaračkog skupa najpošteniji i najpravedniji ishod igre. Postavlja se pitanje možemo li iz tog skupa izabrati jednu točku koja bi predstavljala najpošteniji i najpravedniji ishod igre za oba igrača?

1950. godine ideju za rješenje ovog problema predlaže, već ranije spomenuti, američki matematičar Nash. Nash je razmatrao generalni problem. Pretpostavimo da dva igrača imaju na raspolaganju skup ishoda igre, koji u koordinatnoj ravnini tvore vrhove konveksnog mnogokuta. Igrači se nastoje dogovoriti oko jednog od tih ishoda u skupu. Ukoliko se igrači dogovore, dobit će jedan zadani ishod u mnogokutu koji se naziva **status quo točka**. Postavlja se pitanje kako će igrači odabrati pošten ishod, odnosno točku, za dogovor?

Generalna metoda za rješavanje ovog problema mora uzeti bilo koji konveksni mnogokut u ravnini, koji unutar sebe sadrži status quo točku S, i generirati u tom mnogokutu točku N koja predstavlja rješenje. Ta metoda je poznata pod nazivom **Nash-ova arbitražna shema.** Nash je uveo 4 aksioma, za koja je vjerovao da ih razumna arbitražna shema mora zadovoljavati.

Aksiom 2.4.8. **(Racionalnost)** Točka N, koja predstavlja arbitražno rješenje igre, treba biti sadržana u pregovaračkom skupu igre.



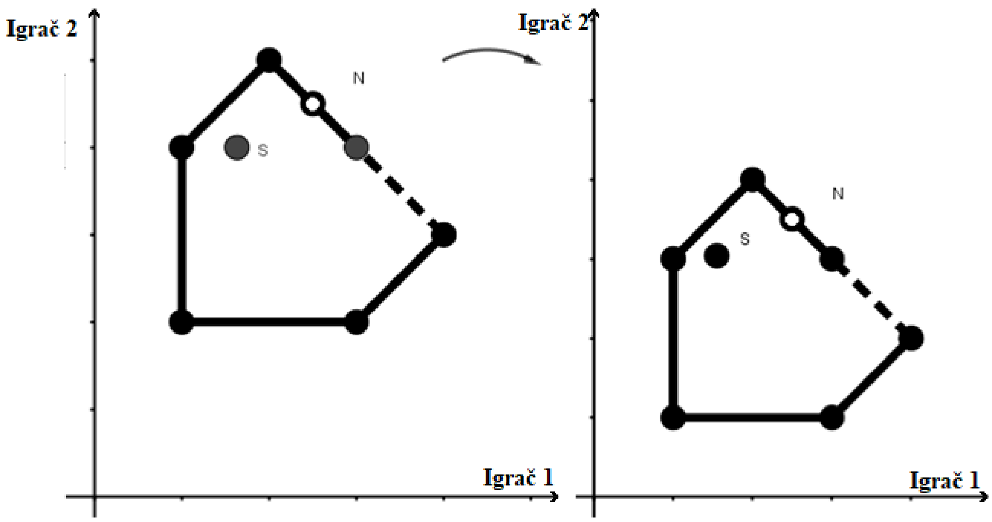
Slika 5: Grafički prikaz aksioma 2.4.8.

Prije uvođenja sljedećeg aksioma prisjetit ćemo se definicije afine funkcije.

Definicija 2.4.9. **Afina funkcija** je preslikavanje kojim nekom realnom broju x pridružujemo realni broj $f(x)$, pri čemu je $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Graf afine funkcije predstavlja pravac $y = ax + b$.

Aksiom 2.4.10. **(Invarijanta u odnosu na afina preslikavanja)** Ako su ishodi, reprezentirani točkama u mnogokutu plaćanja, preslikani afinom funkcijom, onda se i točka rješenja N treba preslikati tom istom afinom funkcijom.



Slika 6: Grafički prikaz aksioma 2.4.10.

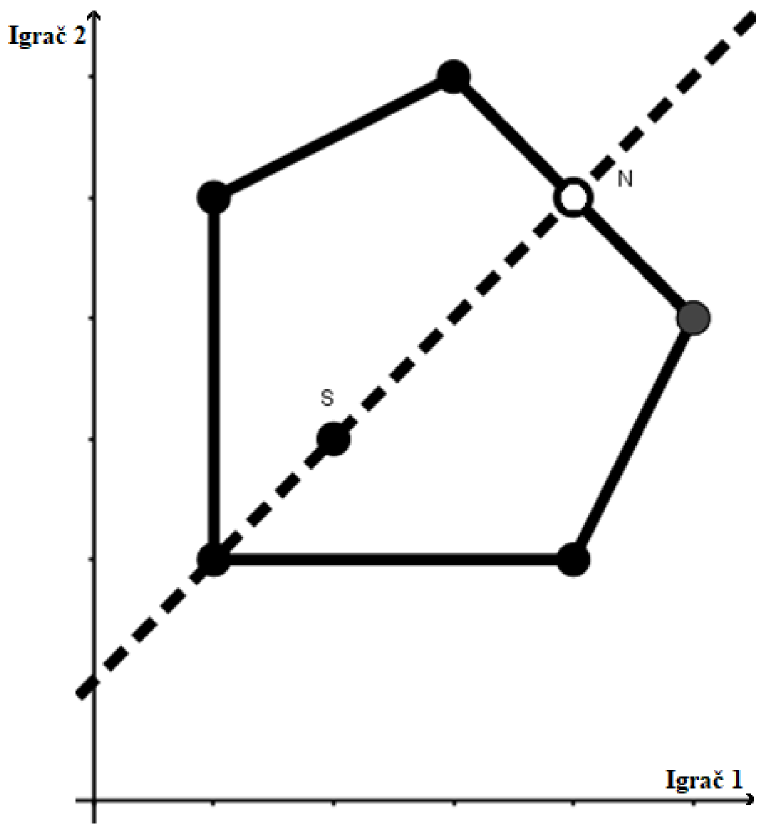
Prije uvođenja sljedećeg aksioma prisjetit ćemo se pojma simetrije s obzirom na pravac i definicije koeficijenta smjera pravca.

<u>**Definicija 2.4.11.**</u> Kažemo da su točke T i T' **simetrične** s obzirom na neki pravac p ako je dužina $\overline{TT'}$ okomita na pravac p i ako pravac p sadrži polovište dužine $\overline{TT'}$.

<u>**Definicija 2.4.12.**</u> Preslikavanje ravnine koje preslikava svaku točku te ravnine u njoj simetričnu točku s obzirom na neki pravac p, naziva se **simetrijom s obzirom na pravac** p.

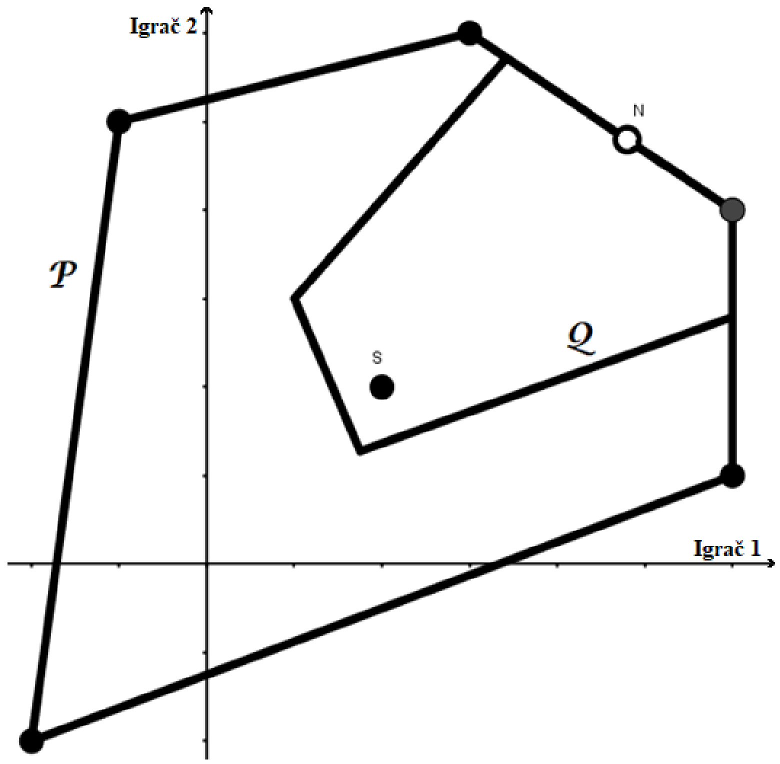
<u>**Definicija 2.4.13.**</u> Neka je pravac p zadan jednadžbom $y = ax + b$. Broj a nazivamo **koeficijentom smjera** pravca p.

<u>**Aksiom 2.4.14.**</u> **(Simetričnost)** Ukoliko je mnogokut plaćanja simetričan s obzirom na pravac, čiji je koeficijent smjera jednak 1 i koji sadrži status quo točku *S*, onda arbitražno rješenje *N* mora biti sadržano na tom pravcu.



Slika 7: Grafički prikaz aksioma 2.4.14.

<u>**Aksiom 2.4.15.**</u> **(Nezavisnost nevažnih alternativa)** Pretpostavimo da je *N* arbitražno rješenje za mnogokut $\mathcal{P}$, sa status quo točkom *S*. Pretpostavimo da je $\mathcal{Q}$ mnogokut, koji sadrži točke *S* i *N*, a koji je sadržan unutar mnogokuta $\mathcal{P}$. Tada je točka *N* također arbitražno rješenje za mnogokut $\mathcal{Q}$ sa status quo točkom *S*.



Slika 8: Grafički prikaz aksioma 2.4.15.

Navedena četiri aksioma nam uvelike pomažu u određivanju arbitražnog rješenja problema. Aksiom 2.4.8. nam jasno kaže da se arbitražno rješenje mora nalaziti unutar pregovaračkog skupa igre, što je sasvim razumno očekivati jer su ishodi iz pregovaračkog skupa igre prihvatljivi za oba igrača. Aksiom 2.4.10. govori o očuvanju položaja točke rješenja, u odnosu na ostatak mnogokuta plaćanja, ukoliko se taj mnogokut preslika afinom funkcijom. Aksiom 2.4.14. omogućava pravednost i nediskriminaciju u specijalnom slučaju simetričnosti. Aksiom 2.4.15. je nešto kompliciraniji. Nash ga objašnjava na sljedeći način: Pretpostavimo da mnogokut $\mathcal{P}$ predstavlja skup mogućih rješenja igre i da je točka S status quo točka. Igrači su se složili da točka N predstavlja najpoštenije moguće rješenje igre. Pretpostavimo sada da su neki ishodi unutar mnogokuta $\mathcal{P}$ proglašeni kao nemogući pa je skup mogućih rješenja reduciran i predstavljen mnogokutom $\mathcal{Q}$ koji sadrži status quo točku S i točku N. Tada je točka N, koja je proglašena najpoštenijim rješenjem u $\mathcal{P}$, i u $\mathcal{Q}$ poštenije rješenje od svih ostalih[19].

[19] Pojedini matematičari se nisu slagali s Nash-ovim objašnjenjem i smatraju da je aksiom 2.4.15. diskutabilan. Naime, oni smatraju da točka N neće nužno biti najpoštenije rješenje u slučaju kada se promijeni početni mnogokut, u kojem je točka N najpoštenije rješenje. U ovom diplomskom radu nećemo se baviti tim teorijama i tim razmatranjima iako smo u matematici svjedoci da se često javljaju neslaganja među razmišljanjima pojedinih matematičara, kao npr. i kod slučaja petog Euklidovog postulata u geometriji, koji je također bio izvor prepirki.

Ako prihvaćamo navedena četiri Nash-ova aksioma kao uvjete koje mora zadovoljavati arbitražna shema, tada je Nash-ovim teoremom arbitražna shema potpuno određena. No, prije navođenja i dokaza Nash-ova teorema prisjetimo se nekih geometrijskih pojmova koji će nam trebati u dokazu.

Definicija 2.4.16. Skup točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti r_1 i r_2 od zadanih fiksnih točaka F_1 i F_2 konstantna naziva se **hiperbola**. Točke F_1 i F_2 nazivamo **fokusima ili žarištima hiperbole.**

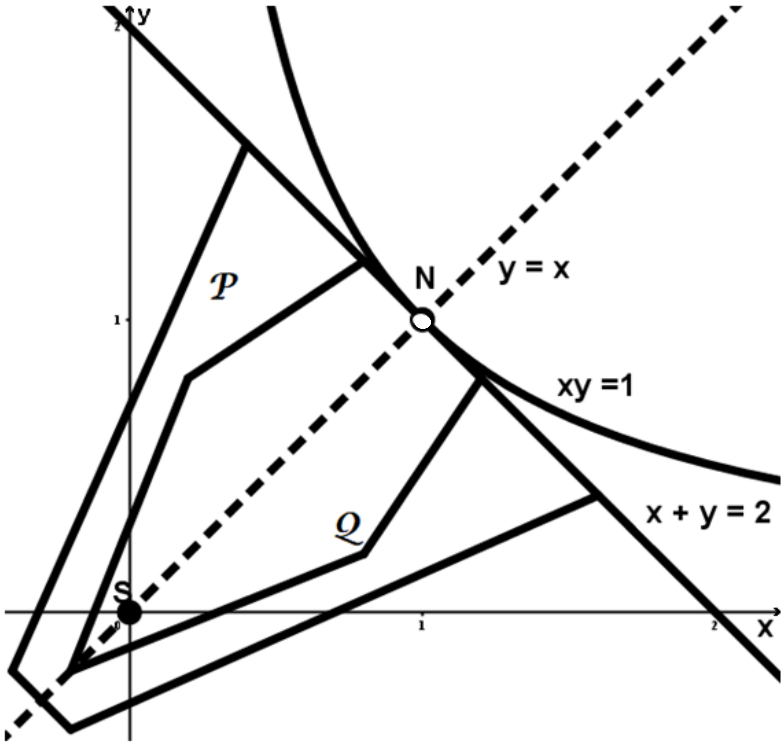
Definicija 2.4.17. **Tangenta** hiperbole je pravac koji s hiperbolom ima samo jednu zajedničku točku.

Sada možemo iskazati i dokazati Nash-ov teorem.

Teorem 2.4.18. **(Nash-ov teorem)** Postoji jedinstvena arbitražna shema koja zadovoljava aksiome 2.4.8., 3.4.10., 2.4.14. i 2.4.15., a to je sljedeća: Ako je $S = (x_0, y_0)$ status quo točka, onda je u mnogokutu $\mathcal{P}$ arbitražno rješenje točka $N = (x, y)$, koja maksimizira produkt $(x - x_0)(y - y_0)$, pri čemu je $x \geq x_0$ i $y \geq y_0$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{Q}$ proizvoljni mnogokut sa status quo točkom $S = (x_0, y_0)$. Neka je $N = (x, y)$, $x \geq x_0$, $y \geq y_0$, točka u $\mathcal{Q}$ koja maksimizira produkt $(x - x_0)(y - y_0)$. Želimo pokazati da bilo koja arbitražna shema koja zadovoljava aksiome 2.4.8., 3.4.10., 2.4.14. i 2.4.15.. mora rezultirati točkom *N* kao rješenjem situacije.

Koristeći aksiom 2.4.10., najprije oduzimamo x_0 od svih vrijednosti x i y_0 od svih vrijednosti y, tako da status quo točka poprimi koordinate $(0, 0)$. Zatim, množimo x i y vrijednosti pozitivnim realnim brojevima, tako da točka *N* poprimi koordinate $(1,1)$. Tada, uzevši u obzir da smo maksimizirali produkt *N*, zaključujemo da cijeli mnogokut $\mathcal{Q}$ leži na ili ispod grane hiperbole $xy = 1$ prikazane na slici 9. Kako je grana hiperbole koju promatramo konveksna, a mnogokut $\mathcal{Q}$ konveksan mnogokut, $\mathcal{Q}$ mora ležati na ili ispod tangente na hiperbolu u točki $(1, 1)$, koju predstavlja pravac $x + y = 2$. Mnogokut $\mathcal{Q}$ možemo smjestiti unutar mnogokuta $\mathcal{P}$, kojemu tangenta na hiperbolu sadrži „sjeveroistočni" rub i koji je simetričan s obzirom na pravac $x = y$. (Pogledajte sliku 9.). Sada iz aksioma 2.4.8. i 2.4.14. slijedi da rješenje arbitražnog problema $(P, S = (0,0))$ mora biti *N*, a iz aksioma 2.4.15. slijedi da i rješenje arbitražnog problema $(Q, S = (0,0))$ mora biti *N*. □



Slika 9: Dokaz Nash-ova teorema

Promotrimo sada na jednom primjeru kako se tvrdnja navedenog teorema primjenjuje u konkretnoj situaciji.

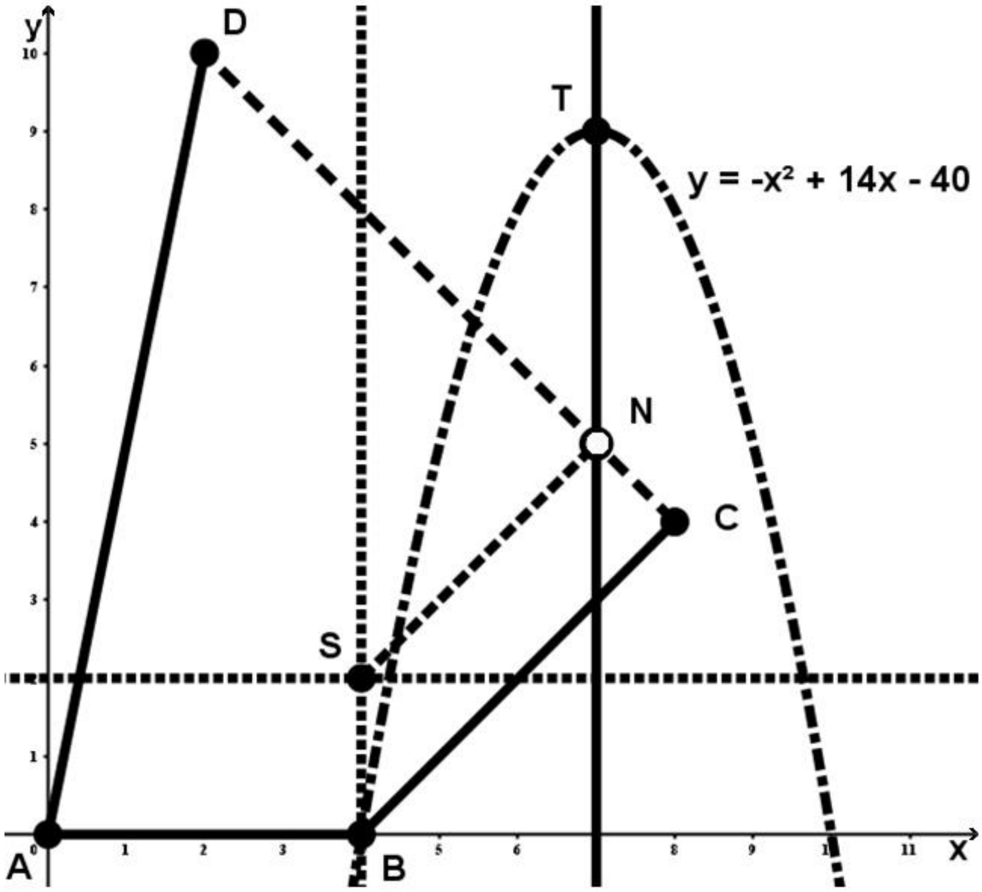
Primjer 2.4.19. Pretpostavimo da se igrač 1 i igrač 2 moraju dogovoriti oko isplata $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (8, 4)$, $D = (2, 10)$ ili neke kombinacije ovih isplata. Brojevi u svakoj isplati predstavljaju dobitke za igrača 1 i za igrača 2. Ukoliko se igrači ne dogovore, isplata će biti $S = (4, 2)$. Što bi u ovoj situaciji preporučio neutralni arbitrator ako bi koristio Nash-ovu arbitražnu shemu?

Promotrimo sliku 10. Znamo da točka N mora biti sadržana u pregovaračkom skupu igre, koji predstavlja dužina s krajnjima točkama $(4, 8)$ i $(8, 4)$. Točka N maksimizira produkt $(x - 4)(y - 2)$. Budući da je pregovarački skup igre sadržan na pravcu $y = 12 - x$, $(4 \leq x \leq 8)$, izraz koji moramo maksimizirati je

$$(x - 4)(12 - x - 2) = (x - 4)(10 - x) = -x2 + 14x - 40.$$

Dobiveni izraz predstavlja kvadratnu funkciju. Prisjetimo se da ova kvadratna funkcija predstavlja jednadžbu parabole. S obzirom na to da je vodeći koeficijent uz x^2 negativan, parabola dana ovom kvadratnom funkcijom ima otvor prema dolje, što znači da u točki tjemena T postiže svoju maksimalnu vrijednost. Dakle, trebamo odrediti koordinatu x tjemena parabole, koja je dana navedenom kvadratnom jednadžbom, kako bismo došli do prve koordinate točke

N. Koristeći formulu za određivanje koordinate x tjemena parabole, $x = \frac{-b}{2a}$, dobivamo da je točka N točka čije su koordinate $x = 7$ i $y = 12 - x = 12 - 7 = 5$. Dakle, arbitar bi, kao rješenje ovog arbitražnog problema, trebao predložiti kombinaciju isplata C i D: $\frac{5}{6}C + \frac{1}{6}D$. ◀



Slika 10: Rješenje primjera 2.4.19.

Možemo zaključiti da arbitražno rješenje uvelike ovisi o status quo točki. Mi smo do sada, uglavnom, tu točku određivali tako što smo koristili sigurnosne nivoe za svakog igrača. Međutim, Nash razmatra i mogućnost da igrači, kako bi utjecali na arbitražno rješenje, tijekom igre mogu koristiti i prijetnje. Tako npr. jedan igrač može reći: „Ukoliko pregovori propadnu, ja ću odigrati ovu strategiju i povući ovaj potez, a to će biti jako loše za tebe." Status quo točka bi, u tome slučaju, bila određena tako što bi se morao u obzir uzeti ishod igre kada bi se prijetnja ostvarila. S obzirom na to, svaki igrač može iskoristiti prijetnju kako bi poboljšao svoju situaciju u igri. Odrediti optimalnu strategiju s obzirom i na prijetnje, može biti jako nezahvalan posao, pun zamki. Takva strategija se obično određuje tako da se igra s nenul sumom svede na igru sa sumom nula, pri čemu se gledaju razlike izvedene iz originalne igre s nenul sumom. Promotrimo to na jednom primjeru.

Primjer 2.4.20. Neka je igra zadana matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igra\check{c}\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ Igra\check{c}\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (1{,}6) & (5\ 5) \\ (2,8) & (0,0) \end{bmatrix}. \end{array}$$

U svakoj isplati oduzimamo dobitak igrača 2 od dobitka igrača 1 i dobivamo igru sa sumom nula, danu matricom plaćanja

$$\begin{array}{ccc} & & Igra\check{c}\ 2 \\ & & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ Igra\check{c}\ 1 & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Primijetimo da ova igra ima sedlo -5. Sedlo predstavlja vrijednost koja je istovremeno najmanja u retku u kojem se pojavljuje i najveća u stupcu u kojem se pojavljuje. Budući da oba igrača preferiraju istu dominantnu strategiju, tj. $X = Y = (1, 0)$, Nash bi kao status quo točku u ovoj igri odabrao točku $S = (1, 6)$. ◄

Bitno je naglasiti da postoje različite vrste igara i da će u nekima optimalno biti korištenje mješovitih strategija kako bi se došlo do status quo točke. Osim toga, postoje i igre, poput igre iz primjera 2.4.6., u kojima određeni igrač ima superiorniju poziciju u odnosu na drugog igrača pa i to može utjecati na određivanje status quo točke i arbitražno rješenje. Dakle, cijela Nash-ova arbitražna shema ovisi o tome kako ćemo odrediti status quo točku, a to nažalost može ovisiti o puno faktora, koje treba uzeti u obzir[20].

Ovime smo došli do kraja razmatranja teorije o kooperativnim igrama za dva igrača s nenul sumom. Osvrnut ćemo se još na primjenu kooperativnih igara za dva igrača s nenul sumom promatrajući probleme i primjere iz svakodnevnog života.

[20] Ne treba smetnuti s uma da igrači ne moraju prihvatiti arbitražno rješenje i da pregovori mogu propasti. Osim toga, postoje i druga rješenja, osim Nash-ove arbitražne sheme, kako bi se riješili problemi s kojima smo se susretali u ovom poglavlju, no mi se time nećemo baviti.

2.5. Primjena kooperativnih igara s nenul sumom

Postoji jako puno situacija, primjera i problema iz realnog svijeta u kojima su primjenjive kooperativne igre s nenul sumom. Neke od tih situacija i primjera su:

- Odgoj djece, gdje roditelj ili nastavnik može djeci obećati nekakvu nagradu ukoliko djeca izvrše svoje obaveze, odnosno u suprotnom zaprijetiti djeci kaznom,
- Pregovori sindikata i vlade, gdje vlada, davanjem obećanja, sprječava potencijalni štrajk kojim sindikati prijete u slučaju neispunjenja njihovih zahtjeva,
- Otmice, gdje otmičari i policija pregovaraju kako bi se sačuvali životi talaca, a s druge strane kako bi se otmičaru ispunili njegovi zahtjevi, koji su obično traženi uz prijetnju smrću taocima, dok policija daje razna obećanja otmičaru kako bi spasila taoce,
- Natjecanje dviju kompanija koje nude npr. telekomunikacijske usluge, kako bi obje kompanije uspostavile maksimalnu moguću dobit, a da nijedna od njih ne propadne,
- Arbitražna odluka oko graničnog spora među državama, gdje bi države pregovarale oko rješenja graničnog spora, na temelju nekog pregovaračkog skupa mogućih rješenja koja treba razmotriti.

Promotrimo sada detaljnije jedan primjer, u kojemu ćemo primijeniti termine i pojmove kojima smo se bavili u prethodnom poglavlju.

Primjer 2.5.1. (Konkurencija na tržištu) Promatramo situaciju u kojoj se dva trgovca natječu oko zarade u svojim trgovačkim lancima. Svaki trgovac mora odlučiti hoće li pokrenuti promotivnu kampanju za svoj trgovački lanac. Tako npr. njihovi lanci mogu nuditi kupcima besplatne proizvode, ili proizvode sa sniženom cijenom, ili nagradne igre s novčanim dobicima. Ukoliko bi samo jedan trgovački lanac proveo takvu promotivnu kampanju, njegovo poslovanje bi se moglo značajno poboljšati. S druge strane, ukoliko oba trgovačka lanca pokrenu promotivne kampanje u isto vrijeme, neće biti posebnog efekta. Dakle, svaki trgovac mora donijeti odluku hoće li ili neće pokrenuti promotivnu kampanju.

Veći od dvoje trgovaca je formulirao problem u terminima teorije igara za dva igrača na sljedeći način: Iz prošlih faktura, trgovac zna da njegov posao čini 60% od ukupnog fiksnog poslovanja, a posao njegovog konkurenta čini 40% od ukupnog fiksnog poslovanja. Ukoliko trgovac pokrene promotivnu kampanju, njegovo poslovanje raste na 90% ako istovremeno njegov konkurent ne pokrene promotivnu kampanju. U obrnutoj situaciji, ako konkurent pokrene promotivnu kampanju, onda poslovanje konkurenta raste na 70%. Ukoliko oboje pokrenu promotivnu kampanju istovremeno, omjer poslovanja i dalje ostaje 60:40, ali s manjim prihodom za oba trgovca. Naime, veći trgovac je uračunao sve troškove koje ima oko nabave proizvoda, propagandnog djelovanja itd. Kada se sve to uzme u obzir, dobivamo sljedeću tablicu plaćanja, pri čemu je svaka isplata izražena u tisućama eura.

	Nema promocije	Promocija
Nema promocije	(60, 40)	(40, 70)
Promocija	(90, 20)	(50, 30)

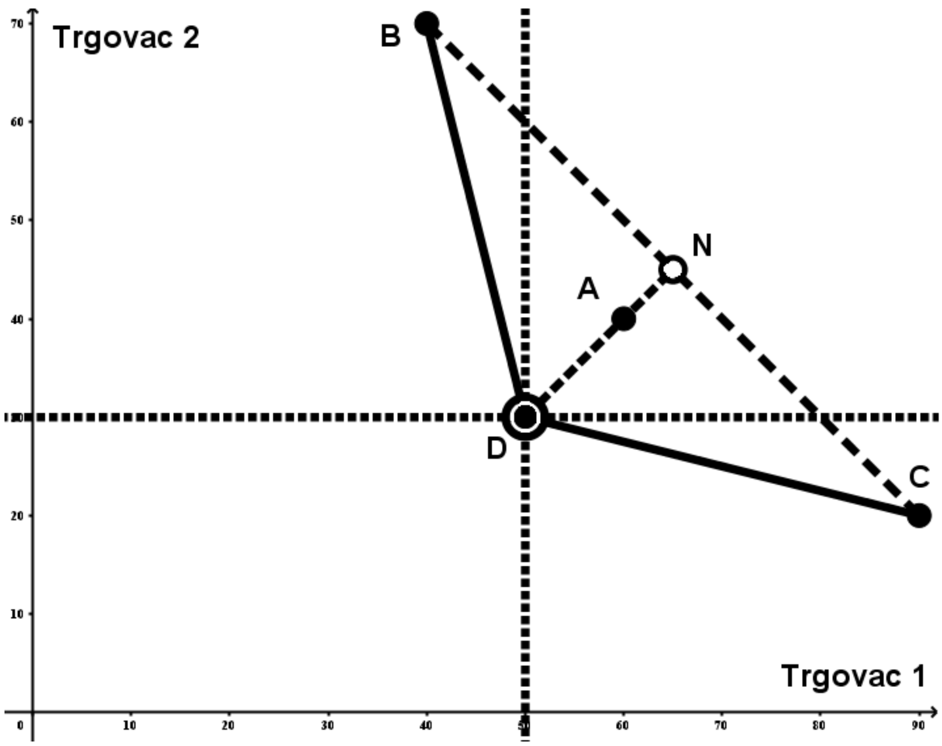
Tablica 2: Tablica isplata za primjer 2.5.1.

Ukoliko trgovac 1 pokrene promotivnu kampanju, a trgovac 2 ne, onda ne samo da privlači kupce i zaradu od toga trgovca, nego i od drugih manjih, nezavisnih trgovaca i pritom se njegov profit povećava za 30 tisuća eura, a profit trgovca 2 se smanjuje za 20 tisuća eura. Slična situacija se događa ukoliko trgovac 2 pokrene promotivnu kampanju, a trgovac 1 ne. Tada se profit trgovca 2 povećava za 30 tisuća eura, a profit trgovca 1 se smanjuje za 20 tisuća eura. U slučaju da oba trgovca pokrenu promotivnu kampanju, zbog njenih troškova, svaki od trgovaca gubi po 10 tisuća eura, zato što ih ne može nadoknaditi od manjih trgovaca.

Primijetimo da se radi o igri za dva igrača s nenul sumom, koja predstavlja isti tip igre kao i dilema zatvorenika. Primijetimo da u oba trgovca, odabir „promocijske" strategije dominira i da postoji samo jedan par ravnotežnih strategija, a to je (X, Y), pri čemu je $X = Y = (0, 1)$, a njemu odgovara isplata $(50, 30)$, koja ujedno predstavlja i sigurnosne nivoe za trgovce (Pogledajte sliku 11).

Ukoliko trgovci ne bi surađivali, kao i u dilemi zatvorenika, to bi im se obilo o glavu, no kako ovi trgovci nisu ljuti rivali, postoji mogućnost suradnje među njima. Ukoliko bi se mogli dogovoriti da oba ne idu u promociju, vidjeli bi da im je to isplativije. No, ukoliko jedan od trgovaca uvjeri drugoga da ne ide u promotivnu kampanju, to njemu može donijeti veliku korist.

Promotrimo sada pregovarački skup ove igre (pogledajte sliku 11). Pregovarački skup ove igre je dužina s krajnjim točkama, čije su koordinate $(80,30)$ i $(50,60)$. Primijetimo da se isplata $(60, 40)$, predstavljena točkom A na slici 11, ne nalazi u tom skupu. Nash-ova arbitražna shema bi kao arbitražno rješenje dala točku $N = (65, 45)$, koja ujedno predstavlja polovište dužine, koja predstavlja pregovarački skup igre.



Slika 11: Rješenje primjera 2.5.1.

Da bi ostvarili opisano arbitražno rješenje, trgovci moraju ući u ozbiljnije pregovore, dogovarajući promotivne kampanje u predstojećim razdobljima, ali ne kao natjecanje jedan protiv drugog. U tom slučaju, oba trgovačka lanca ostvaruju veći profit na štetu manjih trgovaca. ◄

Primjer 2.5.1. ostavlja mogućnost malim trgovcima da se udruže i pokrenu kontra-kampanju protiv dva velika trgovačka lanca, ali u tom slučaju ulazimo u teoriju igara s *n* igrača, ovdje konkretno tri, i pritom uviđamo kako se primjeri koji reprezentiraju ljudsko djelovanje mogu jako lako zakomplicirati. No, to je možda tema za neki drugi diplomski rad.

3. ZAKLJUČAK

Unutar teorije igara, ističe se teorija igara s nenul sumom. Vidjeli smo da igre sa sumom nula možemo smatrati posebnim slučajem igara s nenul sumom. Proučavali smo razne strategije, koje smo primjenjivali na problemima koje smo susretali. Krenuli smo od jednostavnijih načina rješavanja problema, kao što je korištenje dominacije pa preko složenijih strategija, poput razboritih i kontra-razboritih strategija te došli do Nash-ove arbitražne sheme, koja nam daje najpoštenija i najpravednija rješenja za sve igrače u igrama. Svim navedenim načinima rješavanja problema trudili smo se naći optimalno rješenje za igrače u igri, pri čemu smo se stalno susretali s pojmovima iz linearnog programiranja i tako uvidjeli veliku povezanost linearnog programiranja i teorije igara.

Igre s nenul sumom smo podijelili na nekooperativne igre s nenul sumom i kooperativne igre s nenul sumom. Osim detaljnijeg proučavanja strategija za rješavanje igara, bitno je naglasiti činjenicu da su situacije i igre s kojima smo se pritom susretali prisutne svuda oko nas. Uz neke od najpoznatijih problema, poput dileme zatvorenika, mogli smo vidjeti da se rješenja brojnih drugih problema baziraju na spoznajama iz teorije igara s nenul sumom i traže donošenje odluka, koje je najlakše donijeti koristeći koncepte iz teorije igara s nenul sumom.

Nakon svih razmatranja u ovom diplomskom radu, vidjeli smo da je teorija igara jedna mlada grana matematičke znanosti, ali je zahvaljujući velikim matematičarima, poput Nasha, von Neumanna, Morgensterna, Pareta, Schellinga i drugih, postala jako važna prilikom rješavanja raznih problema koji se javljaju u životu. S obzirom na sve navedeno, smatram da će se teorija igara i njene spoznaje još mnogo koristiti u budućnosti.

POPIS LITERATURE

1) E. Amann, W. Leininger: *EinFührung in die Spieltheorie*, Lehrstuhl Wirtschaftstheorie Universität Dortmund, Dortmund, 2007.

2) R. Avenhaus, F. Lehmann, A. Wölling: *Anwendungen der Spieltheorie,* INSTITUT FÜR ANGEWANDTE SYSTEMFORSCHUNG UND OPERATIONS RESEARCH (IASFOR), München, 1997.

3) B. Dakić, N. Elezović: *Matematika 2: udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazije* (1. i 2. dio), Element, Zagreb, 2009.

4) K. Horvatić: *Linearna algebra I, II, III,* Sveučilište u Zagrebu, Matematički odjel, Zagreb, 1995.

5) A. Jurasić: *Linearno programiranje (materijali s predavanja)*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2018.

6) G. E. Keough, P. R. Thie: *An Introduction to Linear Programming and Game Theory*, Wiley, New Jersey, 2008.

7) D. Palman: *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

8) M. Radoš: *Teorija igara i primjene u ekonomiji (završni rad)*, Sveučilište u Rijeci, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2018.

9) N. Sarapa: *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

10) P. D. Straphin: *Game Theory and Strategy,* The Mathematical Association of America, 1993.

POPIS IZVORA

1) *Albert William Tucker*, INFORMS, URL: https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Biographical-Profiles/Tucker-Albert-W (20.2.2020.)

2) *Melvin Dresher*, Wikipedija (2018.) URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Melvin_Dresher (20.2.2020.)

3) *Merrill Meeks Flood*, INFORMS, URL: https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Biographical-Profiles/Flood-Merrill-M (20.2.2020.)

4) W. Poundstone: *John von Neumann*, Encyclopedia Britannica (2020.) URL: https://www.britannica.com/biography/John-von-Neumann (22.2.2020.)

5) L. F. Seltzer: *The Prisoner's Dilemma and the „Virtues“ of Tic for Tat*, Psychology Today, (2016.) URL: https://www.psychologytoday.com/us/blog/evolution-the-self/201607/the-prisoner-s-dilemma-and-the-virtues-tit-tat (20.2.2020.)

6) The Editors of Encyclopaedia Britannica: *John Nash*, Encyclopedia Britannica (2019.) URL: https://www.britannica.com/biography/John-Nash (17.2.2020.)

7) The Editors of Encyclopaedia Britannica: *Oskar Morgenstern*, Encyclopedia Britannica (2020.) URL: https://www.britannica.com/biography/Oskar-Morgenstern (22.2.2020.)

8) The Editors of Encyclopaedia Britannica: *Thomas Crombie Schelling*, Encyclopedia Britannica (2019.) URL: https://www.britannica.com/biography/Thomas-Schelling (21.2.2020.)

9) The Editors of Encyclopaedia Britannica: *Vilfredo Pareto*, Encyclopedia Britannica (2019.) URL: https://www.britannica.com/biography/Vilfredo-Pareto (18.2.2020.)

10) A. Xin Jiang, K. Leyton-Brown: *A Tutorial on the Proof of the Existance of Nash Equilibria*, Department of Computer Science, University of Brittish Columbia, URL: https://www.cs.ubc.ca/~jiang/papers/NashReport.pdf (18.2.2020.)

POPIS PRILOGA:

POPIS FOTOGRAFIJA:

POPIS SLIKA: