Primjene Dirichletovog principa

Leoni, Danijel

Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku
Preddiplomski studij Matematika

Danijel Leoni

Primjene Dirichletovog principa

Završni rad
Rijeka, srpanj 2020.

Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku
Preddiplomski studij Matematika

Danijel Leoni

Primjene Dirichletovog principa

Mentor: dr. sc. Marina Šimac
Kolegij: Kombinatorika

Završni rad
Rijeka, srpanj 2020.

Sadržaj

1 Uvod

Dirichleov princip ili Princip golubinjaka (engl. *Pigeonhole principle*) vrlo je koristan kombinatorni princip kojeg je prvi jasno formulirao njemački matematičar G. Lejeune-Dirichlet. Ovaj je princip olakšao dokaze mnogih matematičkih tvrdnji upravo zbog svoje jednostavne primjene. Potreba za korištenje Dirichleovog principa najčešće se pronalazi u slučajevima kada treba pokazati postojanje nekih elemenata s određenim svojstvima, kao npr. da među 13 ljudi sigurno postoje najmanje dvije osobe koje su rođene u istom mjesecu.
Kod uporabe Dirichleovog principa potrebno je odrediti što su predmeti, a što kutije. Pri tome je bitno da predmeta uvijek mora biti više nego kutija. Nadalje, potrebno je odrediti svojstvo po kojem predmete svrstavamo u kutije, te naposlijetku primjeniti Diricleov princip.
Dirichlet je veliki utjecaj, osim u kombinatorici, imao i u teoriji brojeva te se smatra jednim od začetnika te grane matematike. Osim Dirichleovog principa, njegovi najbitniji doprinosi u svijetu matematike su i Dirichleova funkcija, Dirichleova zadaća, Dirichleovi redovi, te još mnogi drugi.

U ovom će se radu iskazati i dokazati tri Dirichletova principa, prikazati njihova primjena u teoriji brojeva i geometriji, te matematičkoj analizi i stvarnom životu.

2 Forme Dirichleovog principa

U ovom poglavlju iskazat ćemo i dokazati forme Dirichleovog principa.

Teorem 1 (Slaba forma Dirichleovog principa)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Ako $n+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda bar jedna kutija sadrži barem 2 predmeta.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da svaka kutija sadrži najviše jedan predmet. Tada slijedi da je najveći broj predmeta $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$, čime dolazimo do kontradikcije s pretpostavkom da $n + 1$ predmet raspoređujemo u kutije. □

Napomena 1. *Dirichleov princip govori o egzistenciji kutije s barem dva predmeta, ali ne govori o načinu kako pronaći tu kutiju.*

Sada ćemo navesti kratki primjer u kojem se koristi slaba forma Dirichleovog principa.

Primjer 1. *Među 13 ljudi uvijek postoji dvoje rođenih u istom mjesecu.*

Rješenje: Kako bi pokazali ovu tvrdnju, primijenit ćemo prethodni teorem. Potrebno je odrediti što su predmeti, a što kutije. Predmeti će biti "objekti" koje imaju određeno svojstvo. U ovom slučaju to će biti ljudi koje "raspoređujemo" u kutije s obzirom na mjesec u kojem su rođeni. Kako kutija, tj. mjeseci u godini ima 12, a ljudi 13, prema Dirichleovom principu slijedi da postoji barem jedan mjesec u kojem je rođeno barem dvoje ljudi.

Teorem 2 (Jaka forma Dirichleovog principa)**.** *Neka su $m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Ako je m predmeta razmješteno u n kutija, onda bar jedna kutija sadrži barem $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmet*[1].

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da svaka kutija sadrži najviše $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor$ predmet. Tada je najveći broj predmeta $n \cdot \lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor \leq n \cdot \frac{m-1}{n} = m - 1$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da m predmeta raspoređujemo u n kutija. □

Napomena 2. *Slaba forma Dirichleovog principa je specijalan slučaj jake forme kada je $m = n + 1$ tj. kada je broj predmeta za jedan veći od broja kutija.*

[1] Oznaka $\lfloor x \rfloor$ predstavlja najveći cijeli broj koji nije veći od x, tj. $\lfloor x \rfloor = max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\}$

Teorem 3 (Opća forma forma Dirichleovog principa)**.** *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$. *Ako je* $r_1 + r_2 + \cdots + r_n - n + 1$ *predmeta razmješteno u* n *kutija* $K_1, K_2, \ldots, K_n$, *onda bar jedna kutija* K_i *sadrži barem* r_i *predmeta, tj. ili* K_1 *sadrži barem* r_1 *predmeta ili* K_2 *sadrži barem* $r_2, \ldots,$ *ili* K_n *sadrži barem* r_n *predmeta.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da svaka kutija K_i sadrži najviše $r_i - 1$ predmet. Tada je ukupan broj predmeta manji ili jednak $(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \cdots + (r_n - 1) = r_1 + r_2 + \cdots + r_n - n$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da raspoređujemo $r_1 + r_2 + \cdots + r_n - n + 1$ predmeta u kutije. $\square$

3 Primjena u teoriji Brojeva

Primjer 2. *Zadano je 100 realnih brojeva čija suma je jednaka nuli. Promatrajući sume od po dva različita elementa, vrijedi da je barem 99 takvih suma nenegativno.*

Dokaz. 1 Označimo s $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{100}$ zadane realne brojeve čija je suma jednaka 0. Razlikujemo dva slučaja.
i) Pretpostavimo prvo da vrijedi $a_{50} + a_{99} \geq 0$. Tada je $0 \leq a_{50} + a_{99} \leq a_{51} + a_{99} \leq a_{52} + a_{99} \leq \cdots \leq a_{100} + a_{99}$, što daje 51 nenegativnu sumu. S druge strane, za i takav da je $50 \leq i \leq 100$ vrijedi $0 \leq a_i + a_{99} \leq a_i + a_{100}$, čime je određeno još 49 nenegativnih suma $a_{50}+a_{100}$,$a_{51}+a_{100}$,$\ldots$,$a_{98}+a_{100}$. Na navedeni način određeno je 100 nenegativnih suma, čime je tvrdnja dokazana.
ii) Pretpostavimo sada da vrijedi $a_{50} + a_{99} < 0$. Tada je:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{49} + a_{51} + \cdots + a_{98} + a_{100} > 0. \tag{1}$$

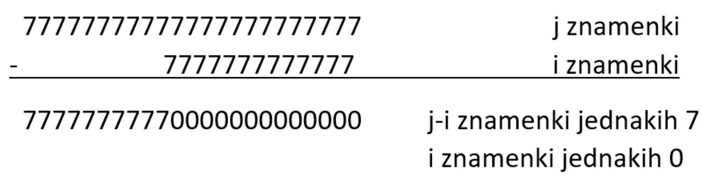
Tvrdimo da su sve sume $a_i + a_{100}$ nenegativne za $i \in \{1, \ldots, 99\}$. Da bi dokazali navedenu tvrdnju, dovoljno je pokazati da je $a_1 + a_{100} \geq 0$. Kako je $0 > a_{50} + a_{99} \geq a_{49} + a_{98} \geq a_{48} + a_{97} \geq \cdots \geq a_2 + a_{51}$, izraz na lijevoj strani nejednakosti (1) se može zapisati kao suma od $a_1 + a_{100}$ i 48 negativnih brojeva. Zbog toga je $a_1 + a_{100} > 0$, iz čega direktno slijedi dokaz. □

Dokaz. 2 Promatrajmo kružni turnir[2] od $2n$ timova u kojem će se svaka runda sastojati od n utakmica. Kako svaki tim igra sa svim ostalim protivnicma na turniru, ukupno će se odigrati $2n-1$ rundi. U promatranom slučaju, zadano je 100 timova koji će odigrati 99 rundi, pri čemu će u svakoj rundi biti odigrano 50 utakmica. Zamijenimo timove brojevima $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{100}$. Nadalje, zamijenimo 50 utakmica u jednoj rundi s 50 sumi a_i+a_j. Kako svaki tim igra u svakoj rundi, suma promatranih 100 brojeva u svakoj rundi je 0. Nadalje, vrijedi da u svakoj rundi mora postojati barem jedna nenegativna suma, jer bi u suprotnome suma svih elemenata bila negativna. Time je dokazano da postoji barem 99 nenegativnih suma. □

[2]Kružni turnir je natjecanje u kojem svaki od timova igra točno jednom sa svakim preostalim protivnikom na natjecanju.

Primjer 3. *Postoji element među prvih 2020 elemenata niza 7,77,777,7777, … koji je djeljiv s 2020.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da ne postoji element niza koji je djeljiv s 2020. Promotrimo prvih 2020 elemenata danog niza i podijelimo ih s 2020. Prema pretpostavci slijedi da niti jedan element nije djeljiv s 2020, pa će mogući ostatci biti iz skupa $\{1,2,3,\ldots,2019\}$. Kako je ukupni broj ostataka 2020 (jedan za svaki element), a mogućih vrijednosti ima 2019, prema Dirichleovom principu slijedi da postoje barem dva elementa koji imaju jednak ostatak pri dijeljenju s 2020. Označimo ta dva elementa s a_i i a_j, $i, j \in \mathbb{N}$, te bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $i < j$. Kako a_i i a_j imaju jednak ostatak pri dijeljenju s 2020, postoje k_i,$k_j \in \mathbb{N}_0$ i $r \leq 2019$ takvi da vrijedi $a_i = 2020k_i + r$ i $a_j = 2020k_j + r$. Tada je $a_j - a_i = 2020(k_j - k_i)$, iz čega slijedi da je njihova razlika dijeljiva s 2020. Ovdje dokaz nije gotov jer razlika $a_j - a_i$ ne mora nužno biti element niza. Uočimo da vrijedi



Slika 1: Razlika brojeva a_j i a_i

što znači da $a_j - a_i$ sadrži $j - i$ znamenaka jednakih 7 te i znamenaka jednakih 0. Sada je $a_j - a_i = a_{j-i}10^i$, te kako 10^i nije dijeljivo s 2020, slijedi da 2020 mora dijeliti a_{j-i}, čime je tvrdnja dokazana. □

Generalizacija prethodne tvrdnje dana je u sljedećem teoremu, kojeg navodimo bez dokaza (dokaz analogan).

Teorem 4. *Postoji element među prvih $n, n \in \mathbb{N}$, elemenata niza $\overline{a}, \overline{aa}, \overline{aaa}, \overline{aaaa}, \ldots$ ($a \in \{1, \ldots, 9\}$) koji je djeljiv s n.*

Teorem 5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada među $n + 2$ pozitivna cijela broja uvijek postoje dva čija je suma ili razlika djeljiva s $2n$.*

Dokaz. Promotrimo ostatke pri dijeljenju svakog danog cijelog broja s $2n$ te njima suprotne ostatke (razlika broja $2n$ i promatranog ostatka). Uočimo da ako cijeli broj nije kongruentan s 0 ili n pri dijeljenju s $2n$, onda su njegov ostatak i njemu suprotni ostatak dva različita cijela broja. Razlikujemo dva

moguća slučaja.
(i) Ako su barem dva od zadanih cijelih brojeva djeljivi s $2n$, ili ako barem dva od zadanih cijelih brojeva imaju ostatak n pri djeljenju s $2n$, onda su razlika i suma ta dva broja djeljiva s $2n$, i tvrdnja je dokazana.
(ii) Ako postoji najviše jedan cijeli broj koji je djeljiv s $2n$, i ako postoji najviše jedan koji ima ostatak n pri djeljenju s $2n$, onda postoji najmanje n cijelih brojeva koji nemaju navedeno svojstvo. Uzimajući u obzir ostatke i njima suprotne ostatke, ukupno je određeno $2n$ brojeva. Oni su različiti od 0 i n, zbog čega slijedi da je ostalo $2n-2$ mogućnosti. Prema Dirichelovom principu zaključujemo da tada moraju postojati (barem) dva jednaka broja među njima, čime je dokazana tvrdnja. □

Primjer 4. *Skup M sadrži devet pozitivnih cijelih brojeva, od kojih niti jedan nema prostog djelitelja većeg od 6. Tada M sadrži dva elementa čiji je produkt potpun kvadrat nekog cijelog broja.*

Dokaz. Svaki element skupa M se može zapisati u obliku $2^i 3^j 5^k$, gdje su $i, j, k \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, elemente skupa M (predmeti) možemo razvrstati u 8 klasa (kutija) ovisno o parnosti njihovih eksponenata i, j, k. Po Dirichelovom principu, postoje barem dva elementa iz M koji će biti u istoj klasi. Označimo: $x = 2^{i_1} 3^{j_1} 5^{k_1}$ i $y = 2^{i_2} 3^{j_2} 5^{k_2}$, $i_1, i_2, j_1, j_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. Slijedi da je $xy = 2^{i_1+i_2} 3^{j_1+j_2} 5^{k_1+k_2}$. Kako su i_1 i i_2, j_1 i j_2, te k_1 i k_2 iste parnosti, slijedi da je njihov zbroj paran broj. Iz toga slijedi da je umnožak xy potpun kvadrat broja $2^a 3^b 5^c$, pri čemu je $a = i_1 + i_2, b = j_1 + j_2, c = k_1 + k_2$ □

Primjer 5. *Neka je M skup koji se sastoji od 2003 prirodnih brojeva, od kojih niti jedan nema prostog djelitelja većeg od 24. Tada skup M sadrži 4 elementa čiji je produkt jednak četvrtoj potenciji nekog cijelog broja.*

Dokaz. Elementi skupa M mogu imati 9 različitih prostih djelitelja 2,3,5,7,11, 13,17,19,23. Klasificirajmo elemente skupa M po parnosti eksponenata njihovih 9 pozitivnih prostih djelitelja. Ovakva klasifikacija daje $2^9 = 512$ klasa. Prema Dirichletovom principu sigurno postoje dva elementa u jednoj takvoj klasi. Promatrane elemente uklonimo iz skupa M, a njihov produkt dodamo u novi skup M'. Uočimo da će svi elementi skupa M', prema načinu kako je definiran skup M', biti kvadrati. Ponavljamo postupak dok ne ostanu nikoja dva elementa skupa M u istoj klasi. U konačnici, u skupu M će ostati najviše 511 elemenata, što znači da smo "izbacili" najmanje 1492 elementa skupa M. Nadalje, M' će imati najmanje 746 elementa, koji su svi kvadrati cijelih brojeva.
Sada klasificirajmo elemente skupa M' prema ostacima prilikom dijeljenja eksponenata prostih brojeva manjih od 24, s 4. Kako su elementi skupa M'

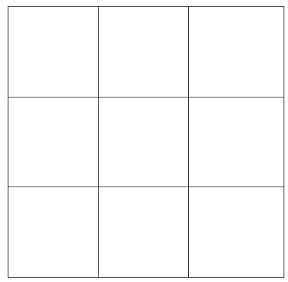
sve potpuni kvadrati brojeva, svi ti eksponenti su parni brojevi, što znači da su njihovi ostatci pri dijeljenju s 4 ili 0 ili 2. Sjetimo se, ovakva klasifikacija stvara samo 512 klasa. Vrijedi: postoje dva elementa skupa M' u istoj klasi, koje ćemo označiti s u i v. Tada je umnožak uv četvrta potencija nekog cijelog broja, te kako su u i v produkti dva elementa skupa M, slijedi tvrdnja. $\square$

Napomena 3. *U prijašnjem primjeru nije se mogla koristiti metoda iz primjera 4. Naime, kada bi takvu metodu koristili, naišli bi na problem. Elementi skupa M mogu imati 9 različitih prostih djelitelja 2,3,5,7,11,13,17,19,23. Kada bi elemente skupa M razvrstali s obzirom na ostatke prilikom dijeljenja eksponenata prostih brojeva manjih od 24, dobili bi podjelu na* $4^9 > 2003$ *klasa. Prema tome, ne bismo mogli zaključiti o egzistenciji klase koja sadrži dva elementa skupa M, a pogotovo za 4.*
Da bi produkt četiri cijela broja bio jednak četvrtoj potenciji nekog broja, nije nužno da eksponenti u rastavu na proste faktore promatranih brojeva imaju jednak ostatak pri dijeljenju s 4. Na primjer, 1,1,2,8 nemaju to svojstvo, ali je njihov produkt četvrta potencija broja 2: $2^4 = 16$.

4 Primjena u geometriji

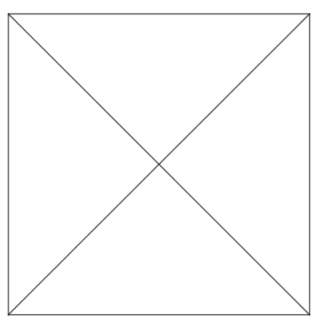
Primjer 6. *Deset točaka je dano u kvadratu stranice duljine 1 cm. Tada vrijedi:*
(i) Postoje dvije točke koje su međusobno udaljene za manje od 0.48 cm.
(ii) Postoje tri točke koje se mogu obuhvatiti kružnicom radijusa duljine 0.5 cm.

Dokaz. Dokažimo prvo (i). Podijelimo jedinični kvadrat na 9 sukladnih kvadrata stranice duljine $\frac{1}{3}$ cm kao što je prikazano na slici.



Slika 2: Podjela jediničnog kvadrata na 9 dijelova

Kako je 10 točaka raspoređeno u 9 manjih kvadrata, po Dirichleovom principu slijedi da će postojati barem jedan manji kvadrat koji sadrži barem dvije točke. Najveća moguća udaljenost među tim točkama unutar spomenutog kvadrata jednaka je duljini dijagonale tog kvadrata. Iz činjenice da je stranica duljine $\frac{1}{3}$ cm, te koristeći Pitagorin poučak, slijedi da je najveća udaljenost tih točaka $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm ≈ 0.47 cm < 0.48 cm. Dakle, vrijedi (i).
Pokažimo sada (ii). Podijelimo jedinični kvadrat dijagonalama na 4 sukladna jednakokračna trokuta kao što je prikazano na slici.



Slika 3: Podjela jediničnog kvadrata na 4 djela

Prema Dirichleovom principu slijedi da barem jedan od četiri dobivena trokuta sadrži barem 3 točke. Nadalje, kako bismo pokazali da se te tri točke mogu obuhvatiti kružnicom radijusa duljine 0.5 cm, potrebno je dokazati da se trokut može upisati u takvu kružnicu, tj. da je duljina radijusa opisane kružnice tog trokuta manja ili jednaka 0.5 cm. Duljinu radijusa opisane kružnice dobivamo iz formule:

$$R = \frac{abc}{4P}, \tag{2}$$

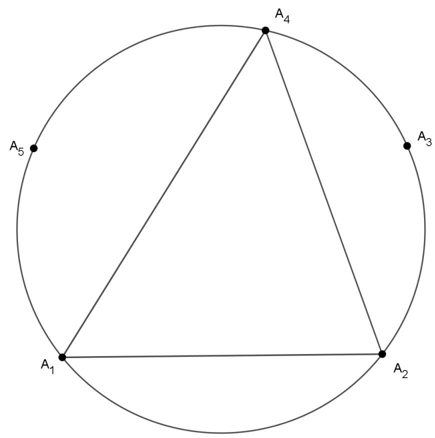
gdje je R duljina radijusa kružnice, a, b, c duljine stranice trokuta i P površina trokuta. Kako je $abc = \frac{1}{2}$ cm i $P = \frac{1}{4}$ cm^2, uvrštavanjem u izraz (2) slijedi $R = \frac{\frac{1}{2}}{4\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ cm, čime je tvrdnja dokazana. □

Primjer 7. *Obojimo sve točke s cjelobrojnim koordinatama u koordinatnom sustavu jednom od 6 boja. Tada postoji pravokutnik čiji su vrhovi obojani istom bojom.*

Dokaz. Kako postoji samo konačan broj mogućnosti za obojati svaku točku, onda postoji i konačan broj F mogućnosti za obojati cjelobrojne točke kvadrata dimenzije 7×7. $F + 1$ kvadrata dimenzija 7×7 posložimo tako da imaju zajedničku stranicu i budu "jedan iznad drugoga". Prema Dirichleovom principu, dva od tih kvadrata moraju biti jednako obojani. To znači da ako prvi kvadrat ima dvije točke $T_1(x_1, y)$ i $T_2(x_2, y)$ $(x_1, x_2, y \in \mathbb{Z})$ koje su obojane istom bojom, onda će drugi kvadrat sadržavati točke $T_3(x_1, y + n)$ i $T_4(x_2, y + n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ obojane tom istom bojom. Točke T_1, T_2, T_3 i T_4 određuju pravokutnik čiji su vrhovi obojani istom bojom. Dirichleov princip osigurava egzistenciju točaka T_1 i T_2, čime je tvrdnja dokazana. □

Primjer 8. *Sve dijagonale baze deveterostrane piramide, kao i svi pobočni bridovi piramide, obojani su u dvije boje: crnu i plavu (stranice baze nisu obojane spomenutim bojama). Tada postoji trokut određen promatranim dužinama čije su stranice obojane istom bojom.*

Dokaz. Izračunajmo prvo broj obojanih dužina. Kako u piramidi postoji 9 pobočnih bridova, a baza sadrži $\frac{9(9-3)}{2} = 27$ dijagonala, slijedi da je ukupno $27 + 9 = 36$ obojanih dužina. Nadalje, prema Dirichleovom principu (dužine su predmeti, a boje kutije) zaključujemo da je najmanje $\lfloor \frac{36-1}{2} \rfloor + 1 = 18$ dužina obojano istom bojom. Kako je 9 pobočnih bridova obojano u 2 boje, prema Dirichleovom principu slijedi da je najmanje 5 od njih obojano istom bojom. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su ti pobočni bridovi obojani plavom bojom i označimo ih s $\overline{SA_1}, \overline{SA_2}, \overline{SA_3}, \overline{SA_4}$ i $\overline{SA_5}$, pri čemu je S vrh piramide, a A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5 vrhovi baze koje su krajnje točke pobočnih bridova obojanih u plavu boju.



Slika 4: Točke A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5

Uočimo da je barem jedna dužina određena s tih pet točaka dijagonala baze. Neka je to $\overline{A_1A_2}$. Tada su $\overline{A_2A_4}$ i $\overline{A_4A_1}$ također dijagonale baze. Time je određen trokut $A_1A_2A_4$. Razlikujemo 2 slučaja:
(i) Sve stranice trokuta $A_1A_2A_4$ su obojane crnom bojom. Time je dokazano da postoji trokut čije su sve stranice obojane istom bojom (crnom).
(ii) Pretpostavimo da postoji stranica trokuta, npr. $\overline{A_1A_2}$ koja je obojana plavom bojom. Tada su dužine $\overline{SA_1}, \overline{SA_2}$ i $\overline{A_1A_2}$ obojane plavom bojom, te čine traženi trokut. □

Primjer 9. *Sto točaka je dano u kocki stranice duljine 1 cm. Tada postoje 4 točke koje čine tetraedar čiji je volumen najviše* $\frac{1}{99}$

Dokaz. Podjelimo kocku na 33 prizmi ravninama koje su paralelne bazi i čija je međusobna udaljenost $\frac{1}{33}$. Prema Dirichleovom principu slijedi da mora postojati barem jedna prizma koja sadrži 4 točke. Volumen tetraedra razapetog s te 4 točke je najviše $\frac{1}{33}$ prizme, čime je tvrdnja dokazana. □

Primjer 10. *Neka je dan konveksni* [3] *mnogokut s parnim brojem stranica. Tada postoji dijagonala mnogokuta koja nije paralelna niti jednoj njegovoj stranici.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji konveksni mnogokut s parnim brojem stranica takav da je svaka dijagonala paralelna

[3] mnogokut je konveksan ako je mjera svakog njegovog unutarnjeg kuta manja od 180^o

nekoj od stranica. Označimo s $2k$, za $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$ broj stranica mnogokuta. Tada je broj njegovih dijagonala jednak $\frac{2k(2k-3)}{2} = 2k^2 - 3k = 2k(k-2) + k$. Vrijedi:

$$\lfloor \tfrac{(2k(k-2)+k-1)}{2k} \rfloor + 1 = \lfloor \tfrac{(k-2)+(k-1)}{2k} \rfloor + 1 = (k-2) + \lfloor \tfrac{(k-1)}{2k} \rfloor + 1 = k - 1,$$

pri čemu je korišteno svojstvo $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n, n \in \mathbb{N}$. Dakle, prema Dirichleovom principu postoji najmanje $k-1$ dijagonala $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$ koje su paralelne istoj stranici a. Tako dobivamo k međusobno paralelnih dužina $a, d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$ čije krajnje točke su različiti parovi vrhovi mnogokuta. Kako je samo jedna od tih dužina stranica mnogokuta, te kako je mnogokut konveksan, postojanje takvih dužina je nemoguće, čime dolazimo do kontradikcije. $\square$

5 Ostale primjene

5.1 Matematička analiza

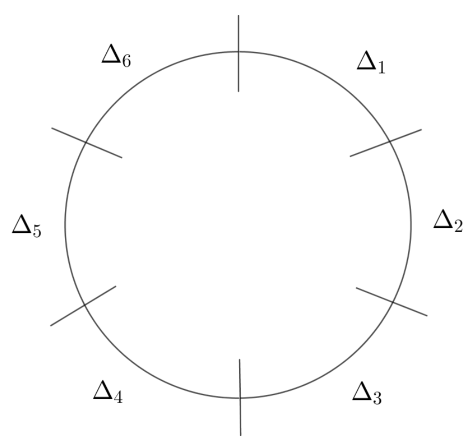
Teorem 6. *Neka je* $\alpha \in \mathbb{R}, \frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *jedinična kružnica u kompleksnoj ravnini, a* $f : S^1 \to S^1$ *rotacija u pozitivnom smjeru za kut mjere* α. *Tada je skup* $P = \{f^n(z) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, *gdje je* $z \in S^1$, *gust na* S^1. *Pritom je* $f^0(z) = z$, $f^1(z) = f(z)$, $f^2(z) = f(f(z))$, $f^3(z) = f(f(f(z))), \dots,$ *i općenito* $f^{n+1}(z) = f(f^n(z))$.

Prije samog dokaza navodimo definiciju gustog skupa.

Definicija 1. *Skup* $P \subset S^1$ *je gust na* S^1 *ako u svakom otvorenom luku duljine* $\varepsilon > 0$ *postoji točka iz* P.

Opisno govoreći, teorem kaže da rotiramo li neku točku u pozitivnom smjeru za kutove mjera $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$, onda se ovako dobivene točke nalaze "gotovo svuda" na kružnici. Očito da to neće biti tako ako je $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. Npr. ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a $z = 1$, onda je skup $P = \{f^n(z) | n \in \mathbb{N}_0\} = \{1, i, -1, -i\}$.

Dokaz. Podijelimo kružnicu S^1 na n sukladnih lukova $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ duljine $\frac{2\pi}{n}$, kao što je prikazano na slici.



Slika 5: Podjela kružnice S^1 na šest sukladnih lukova

Promatrajmo skup točaka $\{z, f(z), \dots, f^n(z)\}$. Tu se zaista radi o $n + 1$ različitih točaka, jer ako je npr. $f^k(z) = f^l(z), 0 \leq k < l \leq n$, onda, budući da je rotacija f očito bijekcija, slijedi da je $f^{l-k}(z) = z$. Svaku točku na S^1 možemo napisati u obliku $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Stoga je

$f^{l-k}(z) = e^{i(\varphi+(l-k)\alpha)}$, pa postoji $r \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi + 2r\pi = \varphi + (l-k)\alpha$, te je $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, točke $z, f(z), \ldots, f^n(z)$ su sve različite, pa prema Dirichleovom principu postoje dvije od njih koje pripadaju luku Δ_k. Neka su to $f^i(z), f^j(z), j > i$. Neka je $d = j - i \in \mathbb{N}$. Kut mjere $d\alpha$ je udaljenost između $f^i(z), f^j(z)$, pa je $d\alpha < \frac{2\pi}{n}$. U nizu točaka $z, f^d(z), f^{2d}(z), f^{3d}(z), \ldots$, svake dvije su jednako udaljene, i to za $d\alpha < \frac{2\pi}{n}$. Neka je sada $\varepsilon > 0$ i neka je n odabran tako da je $\frac{2\pi}{n} < \varepsilon$. Ako uzmemo ε-okolinu bilo koje točke na S^1 (tj. otvoreni luk sa središtem u toj točki duljine ε), onda postoji točka $f^{sd}(z)$ koja je u toj okolini. To znači da je skup P gust na S^1. □

5.2 Primjena u svakodnevnom životu

Primjer 11. *Šahovski turnir ima n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sudionika u kojem svaka dva igrača međusobno igraju točno jednom. Tada u svakom trenutku postoje dva igrača koja su odigrala isti broj partija.*

Dokaz. Uočimo prvo da je u promatranom trenutku igrač mogao odigrati $0, 1, 2, \ldots, n-1$ partija, što je ukupno n mogućnosti. Kako je na turniru n sudionika, na prvi pogled bi se dalo zaključiti kako se u ovom slučaju ne može primjeniti Dirichleov princip. Kada bi postojao igrač, označimo ga s A, koji je završio svih $n-1$ partija, onda ne bi postojao igrač koji je odigrao 0 partija, jer je svaki igrač odigrao s igračem A. Iz toga zaključujemo da se 0 i $n-1$ ne mogu istovremeno pojaviti u broju odigranih partija. Stoga je broj mogućnosti za broj odigranih partija u promatranom trenutku jednak $n-1$ (to su sljedeći slučajevi: $0, 1, \ldots, n-2$ ili $1, 2, \ldots, n-1$ odigranih partija). Kako je n sudionika na turniru, po Dirichleovom principu slijedi da u bilo kojem trenutku postoje 2 igrača koji imaju jednak broj odigranih partija. □

Primjer 12. *Prošle sezone u košarkaškoj prvoj ligi svaki je tim igrao u prosjeku s 18 različitih protivnika. Tada postoji grupa od nekoliko timova takvih da je svaki od tih timova igrao s najmanje 10 drugih timova iz te grupe.*

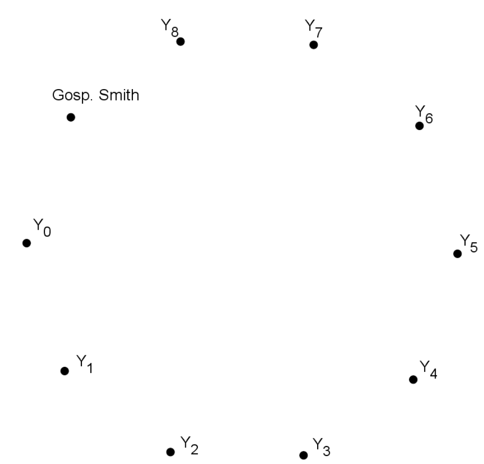
Dokaz. Promotrimo tim T koji je igrao s najviše 9 protivnika. Ako takav tim ne postoji, onda je tražena grupa cijela košarkaška prva liga. Kako promatramo samo broj protivnika (a ne i broj utakmica), možemo pretpostaviti da su svaka dva tima igrala najviše jednom. Prosječnih 18 utakmica znači da je m timova u ligi zajedno odigralo $9m$ utakmica (jer su za igru potrebna 2 tima). Izostavimo li T, ostaje $m-1$ timova, koji su odigrali ukupno najmanje $9m-9$ utakmica. To znači da su preostali timovi odigrali najmanje 18 utakmica u prosjeku protiv ostalih timova.

Ponovimo postupak te pronađemo tim iz preostale grupe koji je odigrao najviše 9 utakmica i izostavimo ga. Kako je broj timova konačan, postupak će se zaustaviti nakon konačno mnogo koraka. Jedini način kako se to može dogoditi je da postoji grupa u kojoj ne možemo eliminirati niti jedan tim, tj. da je svaki tim te grupe odigrao najmanje 10 utakmica protiv ostalih u grupi. □

5.3 Dirichleov princip i teorija grafova

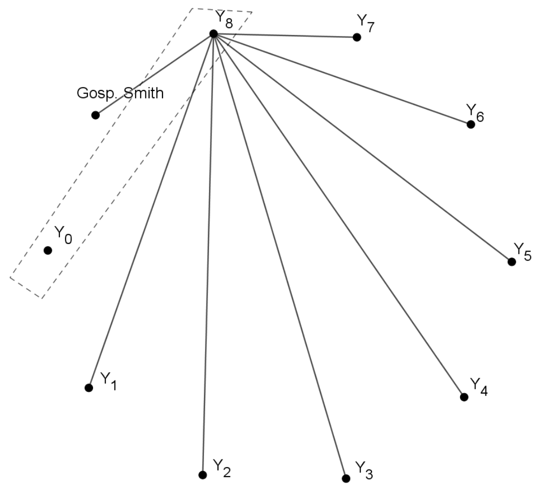
Primjer 13. *Gospodin i gospođa Smith su pozvali 4 para u njihovu kuću. Neki od gostiju su bili poznanici gospodina Smitha, a ostali gospođe Smith. Kada su gosti stigli, ljudi koji su se međusobno poznavali su se rukovali, dok su se ostali samo pozdravili. Kada su svi sjeli za stol, gospodin Smith je rekao: "Kako interesantno. Ako izostavite mene, ne postoje dvije osobe koje su se rukovale jednak broj puta." Koliko se puta rukovavala gospođa Smith?*

Dokaz. Naizgled ovo pitanje djeluje nerješivo s obzirom na mali broj informacija koje su dane, ali primjenom Dirichleovog principa te korištenjem grafova, na ovo se pitanje može odgovoriti. Kako je u kući 8 gostiju te gospođa Smith, te kako se nikoje dvije osobe nisu rukovale jednak broj puta, mogući broj rukovanja je: 0,1,2,3,4,5,6,7,8. Označimo s Y_i osobu koja se rukovala i puta. Konstruirajmo graf na slijedeći način:



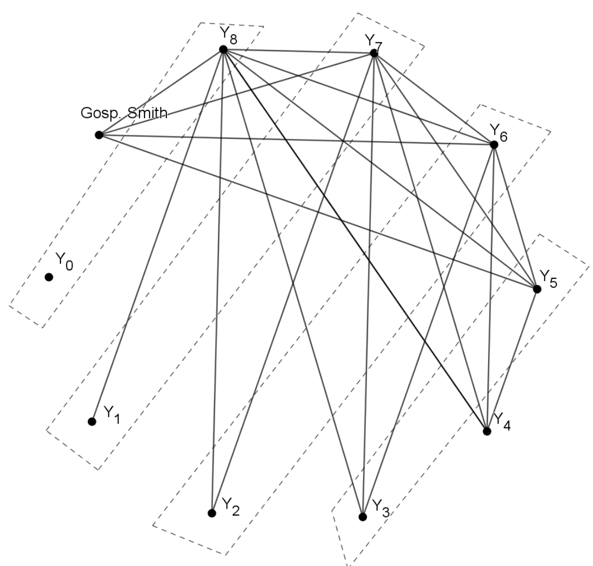
Slika 6: Raspored osoba po broju rukovanja

Uočimo da se osoba Y_8 nije rukovala samo s Y_0, kao ni itko drugi. Iz toga možemo zaključiti da su osobe Y_8 i Y_0 supružnici. Na grafu ćemo to označiti na sljedeći način.



Slika 7: Y_8 i Y_0 su supružnici

Pokušajmo sada naći supružnika osobe Y_7. Uočimo da se osoba Y_7 nije rukovala s 2 osobe, od kojih je jedna Y_0. Kako se osoba Y_1 rukovala s Y_8 i ni s kim drugim, zaključujemo da su Y_7 i Y_1 supružnici. Ponavljajući postupak dolazimo do zaključka da su Y_6 i Y_2 te Y_5 i Y_3 parovi te dobijemo graf koji prikazuje parove supružnika:



Slika 8: Gospođa Smith se rukovala 4 puta

Jedino osoba Y_4 nije pridružena svom supružniku, iz čega zaključujemo da to mora biti gospođa Smith, odnosno da se gospođa Smith rukovala 4 puta. $\square$

Napomena 4. *Prethodni primjer vrijedi i u slučaju kad je pozvano* $n, n \in \mathbb{N}$ *parova. U tom bi se slučaju gospođa Smith rukovala* n *puta. Dokaz takve generalizirane tvrdnje je analogan dokazu iz prethodnog primjera.*

Popis slika

Literatura

[1] Andžans, A. i Johannesson B., *Dirichlet Principle Part I.*, Riga, 2005, pp 1-80, online: http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2015/11/Dirihlee_1.pdf

[2] Bankov, K., *Applications of the pigeon-hole principle*, The Mathematical Gazette, Vol. 79, No. 485, 1995, pp. 286-292

[3] Bona, M., *A Walk Through Combinatorics-An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Department of Mathematics University of Florida USA, 2006

[4] Cvitković, M., *Kombinatorika-zbirka zadataka*, Element Zagreb, 1994, Zagreb

[5] Goranko, V., The Pigeon-hole principle, online: https://olympiadtraining.files.wordpress.com/2014/10/1php-notes-only.pdf

[6] Guo, P., Yu Q., Wang Y. i Gong Y., *Pigeonhole Principle: the real life applications and mathematical investigation*, 2013, online: https://www.academia.edu/3249779/Pigeonhole_Principle_Real_Life_Applications_and_Mathematical_Investigation

[7] Kurnik, Z., *Pierre Gustave Lejeune Dirichlet i njegov princip*, Matematika škola-časopis za nastavu matematike, No. 28, 2004, pp 100-104

[8] Meizzhou, H., Swee Hee, E.K., Swee, K.C., Kuan, H.W., *Applications of the Pigeonhole Principle*, River Valley High School, 2003, online: https://www.coursehero.com/file/14749081/Applications-of-Pigeonhole-Principle/

[9] Shi, P., The Pigeonhole principle-Simple but immensely powerful, Department of Matematics, Duke University, 2009, online: http://faculty.marshall.usc.edu/Peng-Shi/math149/talk_pigeonhole.pdf