Plohe u dodatnoj nastavi matematike

Matković, Samanta

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Diplomski studij Matematika i informatika (smjer nastavnički)

Samanta Matković

Plohe u dodatnoj nastavi matematike

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2022.

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Diplomski studij Matematika i informatika (smjer nastavnički)

Samanta Matković

Plohe u dodatnoj nastavi matematike

Mentor: doc. dr. sc. Milena Sošić

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2022.

Sadržaj

Sažetak

U ovom radu ukratko ćemo ponoviti pojam realne funkcije realne varijable i njezinog grafa te načine zadavanja krivulja u ravnini. Objasniti ćemo zadavanje krivulje eksplicitnom, implicitnom, vektorskom jednadžbom te parametarskim jednadžbama. Objasniti ćemo pojam regularne krivulje u ravnini te navesti primjere regularnih i neregularnih krivulja. Nakon toga definirati ćemo plohe u trodimenzionalnom prostoru te zadavanje tih ploha eksplicitnom, implicitnom, vektorskom jednadžbom i parametarskim jednadžbama. Kao i kod krivulja u ravnini, objasniti ćemo pojam regularne plohe u prostoru te navesti primjere regularnih i neregularnih ploha, Također, objasniti ćemo zadavanje krivulja u trodimenzionalnom prostoru kao presjek dviju ploha u trodimenzionalnom prostoru. Navedene sadržaje prikazati ćemo grafički pomoći alata Geogebra.

Ključne riječi

Krivulja, ploha, ravnina, trodimenzionalan prostor, parametarske jednadžbe, eksplicitna jednadžba, implicitna jednadžba, tangenta, tangencijalna ravnina, vektorska jednadžba

1. Uvod

Na početku ovog rada objasnit ću pojmove funkcije i realne funkcije realne varijable i grafa funkcije.

Definicija 1.1

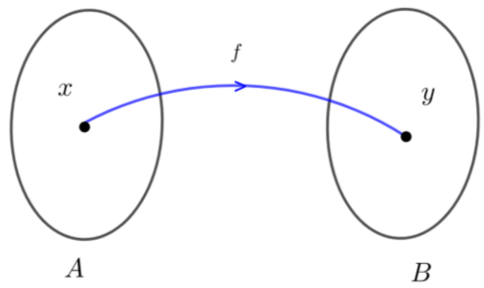
Neka su A i B neprazni skupovi. Funkcija ili preslikavanje iz skupa A u skup B je svako pravilo f po kojem se svakom elementu $x \in A$ pridružuje jedinstveni element $y \in B$. Pritom se koriste oznake

$$f: A \to B, y = f(x),$$

gdje se x naziva nezavisna varijabla ili argument funkcije, a y zavisna varijabla. Skup A nazivamo domenom ili područjem definicije funkcije f, a skup

$$f(A) = \{y \in B \mid y = f(x),\ \ x \in A\}$$

nazivamo skup funkcijskih vrijednosti ili slikom funkcije f. Skup B nazivamo kodomenom funkcije f. Pritom je $f(A) \subseteq B$.



Slika 1. Preslikavanje sa skupa A u skup B

Definicija 1.2

Skup A je podskup skupa $\mathbb{R}$ ako i samo ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa $\mathbb{R}$ i pišemo $A \subseteq \mathbb{R}$.

Primjeri podskupova skupa realnih brojeva su intervali.

- Zatvoreni interval ili segment $[a, b]$ realnih brojeva je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a \leq x \leq b$ i pišemo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- Otvoreni interval $\langle a, b \rangle$ realnih brojeva je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x < b$ i pišemo $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

- Poluotvoreni interval $\langle a, b]$ ili $[a, b\rangle$ realnih brojeva je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x \leq b$ i pišemo $\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$ ili $a \leq x < b$ i pišemo $[a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$.

Definicija 1.3

Funkciju kojoj su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva nazivamo realnom funkcijom realne varijable i pišemo $f: I \to \mathbb{R}$ gdje je $I \neq \emptyset, I \subseteq \mathbb{R}$.

Graf funkcije $f: I \to \mathbb{R}$ označavamo s Γ_f i definiramo kao skup svih uređenih parova $(x, f(x))$ takvih da je x iz domene funkcije f, a $f(x)$ iz skupa funkcijskih vrijednosti funkcije f i pišemo:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x) \mid x \in I\}.$$

2. Krivulje u ravnini

2.1. Načini zadavanja krivulje u ravnini

Graf realne funkcije realne varijable nazivamo krivuljom u ravnini. Krivulju u ravnini možemo zadati eksplicitnom ili implicitnom jednadžbom, ali i parametarskim jednadžbama i kažemo da je:

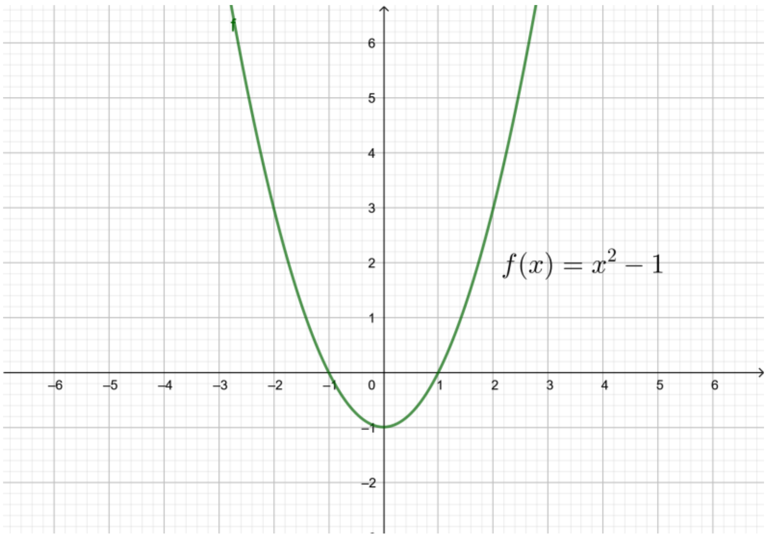
1) $y = f(x)$ eksplicitna jednadžba,
2) $F(x, y) = 0$ implicitna jednadžba,
3) $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ parametarske jednadžbe

krivulje u ravnini.

Primijetimo da u eksplicitnoj jednadžbi $y = f(x)$ varijabla y zavisi o nezavisnoj varijabli x iz domene funkcije f, stoga kažemo da je y zavisna varijabla, a x nezavisna varijabla. U implicitnoj jednadžbi su varijable x i y ravnopravne. Pri prijelazu s implicitne jednadžbe na eksplicitnu jednadžbu najčešće se uzima da je y zavisna, a x nezavisna varijabla. No, moguće je odabrati i da je x zavisna varijabla o nezavisnoj varijabli y te tada pišemo $x = g(y)$. Jednadžbom $F(x, y) = 0$ nije uvijek zadana samo jedna funkcija, već ih može biti zadano više, vidi primjer 2.2. U parametarskim jednadžbama krivulje u ravnini su obje varijable x i y zavisne o nezavisnoj varijabli t koju nazivamo parametrom. Time su x i y realne funkcije realne varijable.

Primjer 2.1

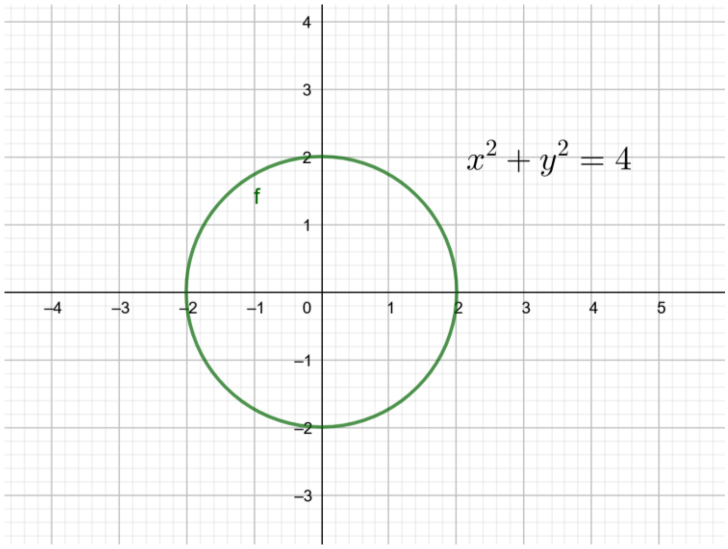
Graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ je parabola čija je eksplicitna jednadžba oblika $y = x^2 - 1$, a njezina implicitna jednadžba je $x^2 - y - 1 = 0$.



Slika 2. Graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 1$

Primjer 2.2

Implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 - 4 = 0$ zadana je kružnica sa središtem u ishodištu $(0,0)$ pravokutnog koordinatnog sustava ravnine polumjera 2. Primijetimo da su ovom jednadžbom eksplicitno zadane dvije funkcije $f_{1,2}(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2,2]$ od kojih svaka od njih predstavlja po jednu polukružnicu, gornju $y = \sqrt{4 - x^2}$ i donju $y = -\sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2,2]$, ali isto tako i dvije funkcije $g_{1,2}(y) = \pm\sqrt{4 - y^2}$, $y \in [-2,2]$, gdje je $x = \sqrt{4 - y^2}$ desna, a $x = -\sqrt{4 - y^2}$ lijeva polukružnica za svaki $y \in [-2,2]$.



Slika 3. Kružnica zadana implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 = 4$

Primjer 2.3

Parametarske jednadžbe kružnice sa središtem u ishodištu polumjera 2 (vidi primjer 2.2) su:

$$\begin{matrix} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{matrix} \quad t \in [0,2\pi\rangle \subseteq \mathbb{R}.$$

2.2. Vektorska jednadžbe krivulje u ravnini

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i neka je $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^2$ vektorska funkcija dana vektorskom jednadžbom

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}, t \in I$$

koju ponekad zapisujemo u obliku $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, gdje su $x, y: I \to \mathbb{R}$ realne funkcije realne varijable koje imaju neprekidne derivacije svakog reda na I. Tada skup točaka $T\big(x(t), y(t)\big),\ t \in I$ nazivamo krivuljom u ravnini kojoj je $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$ vektorska jednadžba, za svaki $t \in I$. Pritom je svakom radijvektoru $\vec{r}(t)$ jednoznačno pridružena točka $(x(t), y(t))$. Skup svih točaka $(x(t), y(t))$ nazivamo krivuljom.

Neka je $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}, t \in I$ vektorska jednadžba krivulje u ravnini, tada su njezine pripadne parametarske jednadžbe oblika $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Primjer 2.4

Vektorska jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu polumjera 2 je:

$$\vec{r}(t) = 2(\cos t, \sin t) = 2\cos t\,\vec{\imath} + 2\sin t\,\vec{\jmath},$$

$t \in [0,2\pi\rangle$, vidi primjer 2.3.

2.3. Jednadžba tangente na krivulju

U nastavku ćemo zapisati jednadžbu tangente na krivulju u točki te krivulje te navesti primjere regularnih i neregularnih krivulja.

Neka je $f: I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ realna funkcija realne varijable koja je derivabilna[1] u točki (x_0, y_0). Jednadžba pravca kojemu je k koeficijent smjera i koji sadrži točku $T(x_0, y_0)$ je

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Ako je pravac tangenta na krivulju Γ_f zadane eksplicitnom jednadžbom $y = f(x)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$, onda vrijedi $k = f'(x_0)$. Dakle, jednadžba tangente u točki $T_0(x_0, y_0)$ krivulje Γ_f zadane eksplicitnom jednadžbom $y = f(x)$ za svaki $x \in I$ glasi:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Ako je $f'(x_0) = 0$, onda je jednadžba tangente $y = y_0$, što se grafički interpretira da je tangenta u točki $T_0(x_0, y_0)$ krivulje Γ_f paralelna s x-osi.

Neka su $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I_t \subseteq \mathbb{R}$ parametarske jednadžbe krivulje Γ_f koje dobivamo iz eksplicitne jednadžbe $y = f(x), x \in I$ tako da x i y proglasimo realnim funkcijama realne varijable $t \in I_t \subseteq \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},$$

stoga je jednadžba tangente u točki (x_0, y_0) krivulje Γ_f zadane parametarskim jednadžbama $x = x(t), y = y(t),\ t \in I_t \subseteq \mathbb{R}$ oblika

---

[1] Kažemo da je funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $c \in I = \langle a, b\rangle$ ako funkcija $x \mapsto \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ $(x \neq c, x \in I)$ ima limes u točki c. Realan broj $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ zove se derivacija funkcije f u točki c i označava $f'(c)$ ili $\frac{df(c)}{dx}$.

$$y - y_0 = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x_0)$$

koju možemo pisati u obliku

$$y - y_0 = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}(x - x_0), \tag{2}$$

pri čemu je $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0), \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0)$.

2.4. Regularne i neregularne krivulje u ravnini

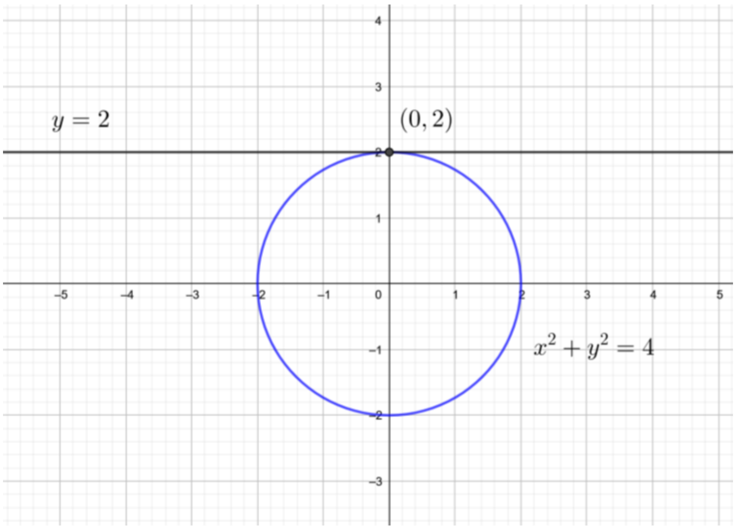
Kažemo da je krivulja u ravnini regularna ako je svaka njezina točka regularna, odnosno ako možemo konstruirati jedinstvenu tangentu u svakoj točki te krivulje. To znači da ta krivulja nema niti jednu singularnu točku kao što je šiljak, dvostruka točka ili izolirana točka.

Primjer 2.5

Krivulja iz primjera 2.2, odnosno kružnica sa središtem u ishodištu polumjera 2 je regularna krivulja jer možemo konstruirati jedinstvenu tangentu u svakoj točki te kružnice.

Konkretno, znamo da točka $(0,2)$ pripada kružnici sa središtem u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava ravnine polumjera 2, stoga odredimo jednadžbu tangente u točki $(0,2)$. Iz $x^2 + y^2 - 4 = 0$ slijedi $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, pri čemu točka $(0,2)$ pripada gornjoj polukružnici $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Derivacija prvog reda funkcije f je $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, odakle proizlazi da je $f'(0) = 0$, stoga jednadžba tangente u točki $(0,2)$ na zadanu kružnicu glasi $y - 2 = 0$, odnosno $y = 2$.

Prikažimo grafički u Geogebri. Najprije nacrtamo kružnicu $x^2 + y^2 - 4 = 0$ i označimo točku $(0,2)$, a nakon toga odabiremo opciju *Tangente* te kliknemo na točku $(0,2)$ i kružnicu koju smo nacrtali, čime dobivamo traženu tangentu te vidimo na slici 4 da je njezina jednadžba $y = 2$ koju smo prethodno izračunali.



Slika 4. Tangenta na kružnicu u točki (0,2)

Primjer 2.6

Odredimo sada jednadžbu tangente na krivulju zadanu parametarskim jednadžbama

$$x = 2\cos t \quad y = \sin t\,, \qquad t \in [0,2\pi\rangle$$

u točki $x_0 = 1,\ y_0 > 0$. Primijetimo da iz zadanih parametarskih jednadžbi slijedi da je $\cos t = \frac{x}{2}$ i $\sin t = y$, stoga kvadriranjem, a potom zbrajanjem[2] dobivamo jednadžbu $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$ koja je ujedno kanonska jednadžba elipse kojoj je velika poluos $a = 2$ i mala poluos $b = 1$. Iz parametarskih jednadžbi za $x_0 = 1$ slijedi $1 = 2\cos t_0$, odnosno $\cos t_0 = \frac{1}{2}$ iz čega dobivamo $(t_0)_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3}$. Primjenom uvjeta $y_0 > 0$ proizlazi da je $t_0 = \frac{\pi}{3}$, stoga je $y_0 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Odredimo li derivacije prvog reda parametarskih jednadžbi elipse :

$$\dot{x} = -2\sin t\,, \qquad \dot{y} = \cos t,$$

tada dobivamo da je:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\cos t}{2\sin t}\,,$$

odnosno za $t_0 = \frac{\pi}{3}$ slijedi da je

$$\dot{x}_0 = \dot{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}, \qquad \dot{y}_0 = \dot{y}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

[2] gdje se koristi poznati trigonometrijski identitet $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

stoga je:

$$\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6},$$

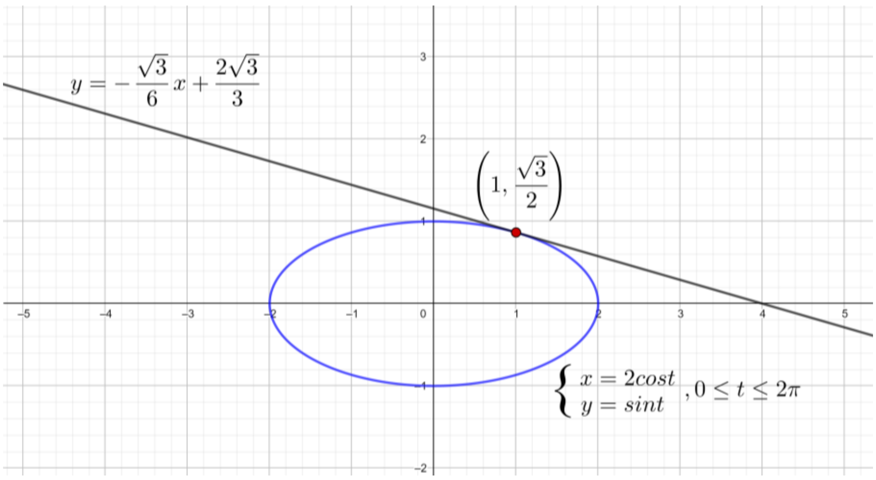
što uvrštavanjem u jednadžbu (2) povlači da je

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(x-1).$$

Time je jednadžba tangente na elipsu zadanu parametarskim jednadžbama $x = 2\cos t$, $y = \sin t,\ t \in [0,2\pi\rangle$ u točki $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ oblika

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Prikažimo grafički u Geogebri. Najprije nacrtamo krivulju (elipsu) upisom u prostor za unos *Krivulja(2cos(t),sin(t),t,0,2pi)* i nacrtamo točku $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, a nakon toga odabiremo opciju *Tangente* te kliknemo na točku i elipsu. Dobivamo tangentu, vidi sliku 5, čija je jednadžba $y = -0.29x + 1.15$, odnosno $y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ kao što smo i prethodno izračunali.



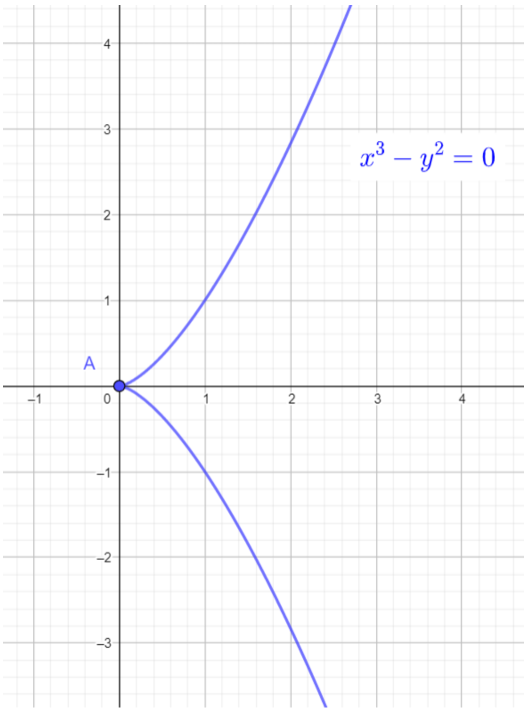
Slika 5. Tangenta na elipsu

U slijedećem primjeru navest ćemo neke neregularne krivulje.

Primjer 2.7

a) Semikubna parabola izražava se jednadžbom $x^3 - y^2 = 0$. Ovom jednadžbom eksplicitno su zadane dvije funkcije $f_{1,2}(x) = \pm\sqrt{x^3}$, $x \in [0, +\infty\rangle$, ali i slijedeća funkcija $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$, $y \in \mathbb{R}$. Zadana semikubna parabole može se izraziti slijedećim parametarskim jednadžbama:

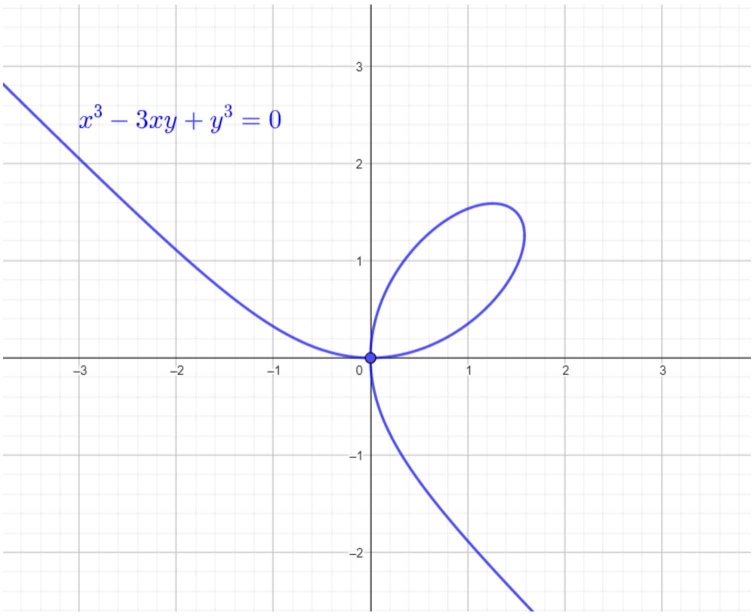
$$\begin{matrix} x = t^2 \\ y = t^3 \end{matrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$



Slika 6. Semikubna parabola

Pokazuje se da se u točki $(0,0)$ ne može konstruirati jedinstvena tangenta na zadanu semikubnu parabolu, već da u njoj postoji beskonačno mnogo tangenti. Time točku $(0,0)$ nazivamo singularnom točkom, odnosno šiljkom zadane semikubne parabole.

b) Jednadžbom $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ zadaje se Descartesov list, prikazan na slici 7.
U točki $(0,0)$ Descartesovog lista postoje dvije tangente, stoga je $(0,0)$ singularna točka koju još nazivamo i dvostrukom točkom.



Slika 7. Descartesov list

2.5. Krivulje s prekidom

Definicija 2.1

Neka je zadana funkcija $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in I, I \subseteq \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna u točki x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

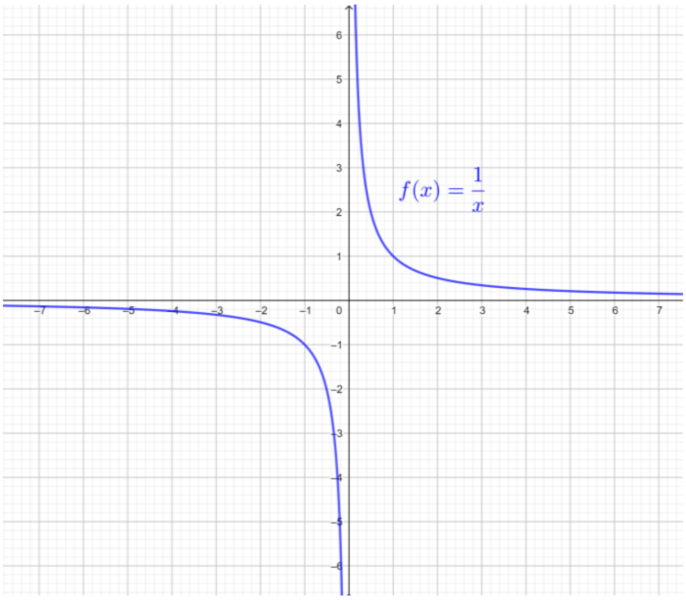
Ako funkcija nije neprekidna u točki $x_0 \in I$ kažemo da ona ima prekid u točki $x_0 \in I$.

Funkcija je neprekidna na skupu $S \subseteq I$ ako je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in S$.

Navedimo nekoliko primjera krivulja koje imaju prekid u točki.

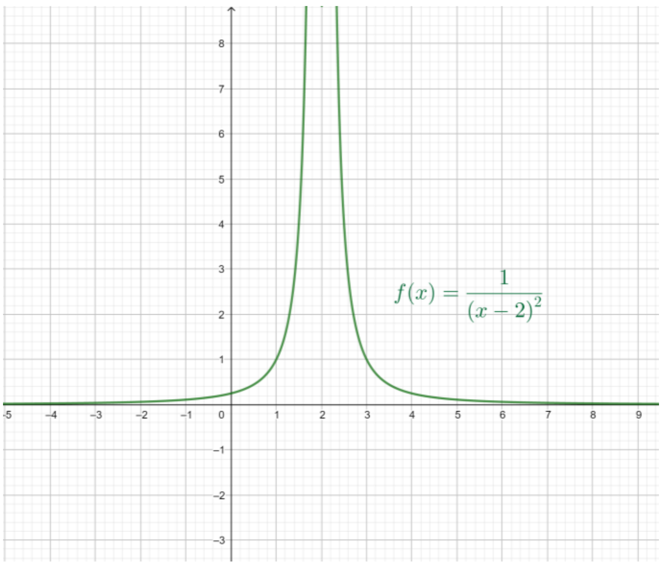
Primjer 2.8

a) Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ nije definirana u točki $x = 0$, ona ima prekid u toj točki, što proizlazi iz poznatog svojstva da nazivnik razlomka mora biti različit od nule. Na slici 8 vidimo da je funkcija f neprekidna za svaki $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Kažemo da je $x = 0$ vertikalna asimptota grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$. Ako x teži prema nuli slijeva, onda funkcijske vrijednosti $f(x)$ teže u $-\infty$, a ako x teži prema nuli zdesna, onda funkcijske vrijednosti $f(x)$ teže u $+\infty$. Ako x teži u $+\infty$, onda funkcijske vrijednosti $f(x)$ ″padaju″ prema nuli, a ako x teži prema $-\infty$ onda funkcijske vrijednosti $f(x)$ ″rastu″ prema nuli, odnosno ne postoji $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ takav da je $f(x) = 0$, stoga pravac $y = 0$ nazivamo horizontalnom asimptotom grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$.



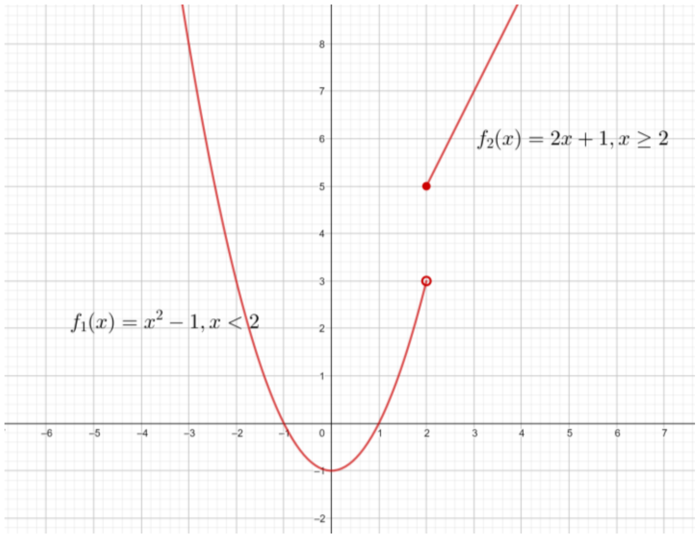
Slika 8. Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

b) Analogno kao pod a), funkcija $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ nije definirana u točki $x = 2$, odnosno ona ima prekid u toj točki. Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ prikazan je na slici 9. U ovom slučaju je pravac $x = 2$ vertikalna asimptota dane krivulje. Kada x teži prema dva, bilo slijeva ili zdesna, funkcijske vrijednosti $f(x)$ teže u $+\infty$.



Slika 9. Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

c) Funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2 \\ 2x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$ ima prekid u točki $x = 2$. Funkcija f je definirana u točki $x = 2$ jer vrijedi $f(2) = 5$, ali ima i prekid u toj točki. Na slici 10. možemo uočiti da što je x bliži broju 2 s lijeve strane, to je funkcijska vrijednost $f(x)$ bliža broju 3. Ako promatramo s desne strane, što je x bliži broju 2, to je funkcijska vrijednost $f(x)$ bliža broju 5.



Slika 10. Graf funkcije $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2 \\ 2x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

3. Plohe u trodimenzionalnom prostoru

U ovom poglavlju definirat ćemo realne funkcije dviju realnih varijabli i njihov graf. Također ćemo opisati načine zadavanje plohe u trodimenzionalnom prostoru i odgovarajuće jednadžbe tangencijalnih ravnina u proizvoljnoj točki plohe.

3.1. Realna funkcija dviju varijabli

Definicija 3.1

Neka su A, B i C neprazni skupovi. Funkcija ili preslikavanje iz skupa $A \times B$ u skup C je svako pravilo f po kojem se svakom uređenom paru $(x, y) \in A \times B$ pridružuje jedinstveni element $z \in C$. Pritom se koriste oznake

$$f: A \times B \to C, \qquad z = f(x, y),$$

gdje se x i y nazivaju nezavisne varijable ili argumenti funkcije f, a z zavisna varijabla. Skup $A \times B$ nazivamo domenom ili područjem definicije funkcije f, a skup

$$f(A \times B) = \{z \in C \mid z = f(x,y),\ \ x \in A, y \in B\}$$

nazivamo skupom funkcijskih vrijednosti ili slikom funkcije f. Skup C nazivamo kodomenom funkcije f.

Definicija 3.2

Neka je $P_0 = (x_0, y_0)$ neka fiksna točka u ravnini $\mathbb{R}^2$ i neka je $r > 0$ pozitivan realan broj. Skup

$$K(P_0, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 | d(P, P_0) < r\}$$

svih točaka $P = (x,y) \ \in \mathbb{R}^2$ za koje vrijedi $d(P, P_0) < r$ naziva se otvoreni krug sa središtem u točki P_0 polumjera r.

Definicija 3.3

Za skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da je otvoren skup u prostoru $\mathbb{R}^2$ ako se oko svake njegove točke $P_0 \in \Omega$ može opisati otvoreni krug sa središtem u točki P_0 polumjera r koja je sadržana u skupu Ω.

Navedimo nekoliko primjera otvorenih skupova u $\mathbb{R}^2$.

- Otvoreni krug $K(P_0, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | d((x,y),(x_0,y_0)) < r\}$ je otvoreni skup u $\mathbb{R}^2$.
- Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da je $a < b,\ c < d$. Otvoren pravokutnik $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, c < y < d\}$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^2$, jer za svaku točku $P_0 \in I$ možemo odabrati proizvoljni polumjer $r > 0$ takav da je otvoren krug sa središtem u točki P_0 polumjera r sadržan u pravokutniku I.

Definicija 3.4

Neka je $\Omega \neq \emptyset,\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$otvoren skup. Tada funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazivamo realnom funkcijom dviju realnih varijabli, ako za svaki $(x,y) \in \Omega$ postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $z = f(x,y)$.

Graf funkcije $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ označavamo s M i definiramo kao skup svih uređenih trojki $(x, y, f(x,y))$ takvih da je (x,y) iz domene funkcije f, a $f(x,y)$ iz skupa funkcijskih vrijednosti funkcije f i pišemo:

$$M = \{(x, y, f(x,y) \mid (x,y) \in \Omega\}.$$

Skup M nazivamo dvodimenzionalnom plohom u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$ ili kraće plohom u $\mathbb{R}^3$.

3.2. Načini zadavanja plohe u prostoru

Ponovimo, graf realne funkcije dviju realnih varijabli nazivamo plohom u trodimenzionalnom prostoru. Plohe u trodimenzionalnom prostoru možemo zadati eksplicitnom ili implicitnom jednadžbom, ali i parametarskim jednadžbama i kažemo da je:

1) $z = f(x, y)$ eksplicitna jednadžba,
2) $F(x, y, z) = 0$ implicitna jednadžba,
3) $x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \quad (u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ (U otvoren skup) parametarske jednadžbe

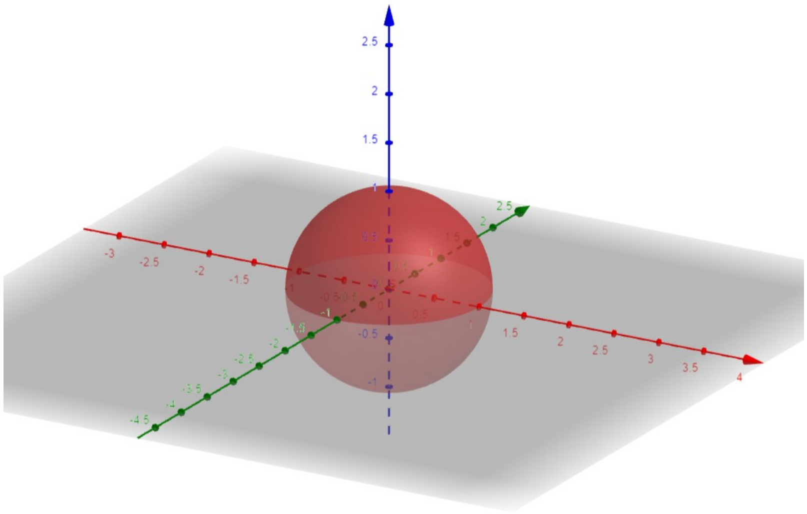
plohe u trodimenzionalnom prostoru.

Slično kao i kod jednadžbi krivulje u ravnini, u eksplicitnoj jednadžbi plohe $z = f(x, y)$ varijabla z zavisi o nezavisnim varijablama x i y iz domene funkcije f, stoga kažemo da je z zavisna varijabla, a x i y nezavisne varijable. U implicitnoj jednadžbi su varijable x, y i z ravnopravne. Pri prijelazu s implicitne jednadžbe na eksplicitnu jednadžbu najčešće se uzima da je z zavisna, a x i y nezavisne varijable. Jednadžbom $F(x, y, z) = 0$ nije uvijek zadana samo jedna funkcija, već ih može biti zadano više, vidi primjer 3.1. U parametarskim jednadžbama krivulje u ravnini su sve tri varijable x, y i z zavisne o nezavisnim varijablama u i v koje nazivamo parametrima. Time su x, y i z realne funkcije dviju realnih varijabli.

Primjer 3.1

Implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ zadana je sfera sa središtem u točki (0,0,0) (ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava prostora) polumjera 1. Primijetimo da su ovom jednadžbom eksplicitno zadane dvije funkcije $f_{1,2}(x, y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$ od kojih svaka od njih predstavlja po jednu polusferu, gornju $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ i donju $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, ali i dvije funkcije $g_{1,2}(x, z) = \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2}$, $x^2 + z^2 \leq 1$, gdje je $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ desna, a $x = -\sqrt{1 - x^2 - z^2}$ lijeva polusfera te dvije funkcije $h_{1,2}(y, z) = \pm\sqrt{1 - y^2 - z^2}$, $y^2 + z^2 \leq 1$ gdje je $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ prednja, a $x = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$ stražnja polusfera zadane sfere.

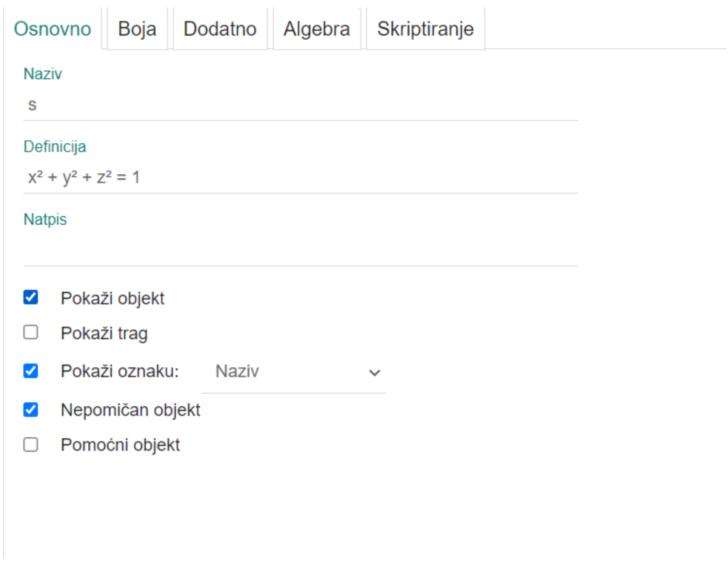
Pri crtanju ploha u trodimenzionalnom prostoru u Geogebri najprije trebamo odabrati opciju 3D grafika. Nakon toga, u traci za unos u Geogebri upisujemo jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nakon čega dobivamo slijedeću sferu prikazanu na slici 11.



Slika 11. Prikaz sfere u Geogebri

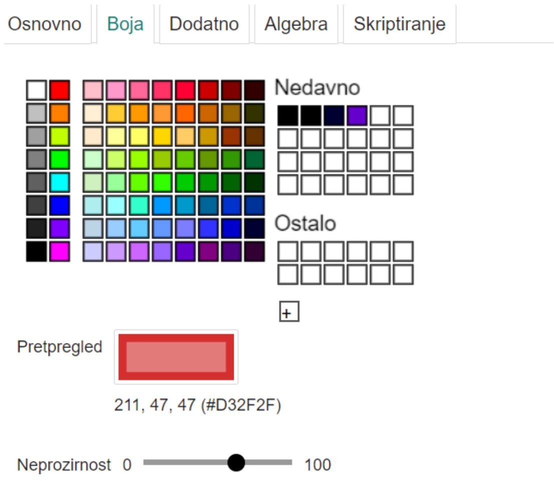
Desnim klikom na sferu ili na jednadžbu sfere možemo uređivati prikazanu sferu. Pritom su ponuđene slijedeće mogućnosti uređivanja, odnosno postavke:

a) općenito: postavke vezane uz naziv, definiciju i prikaz objekta;



Slika 12. Postavke Geogebre: Općenito

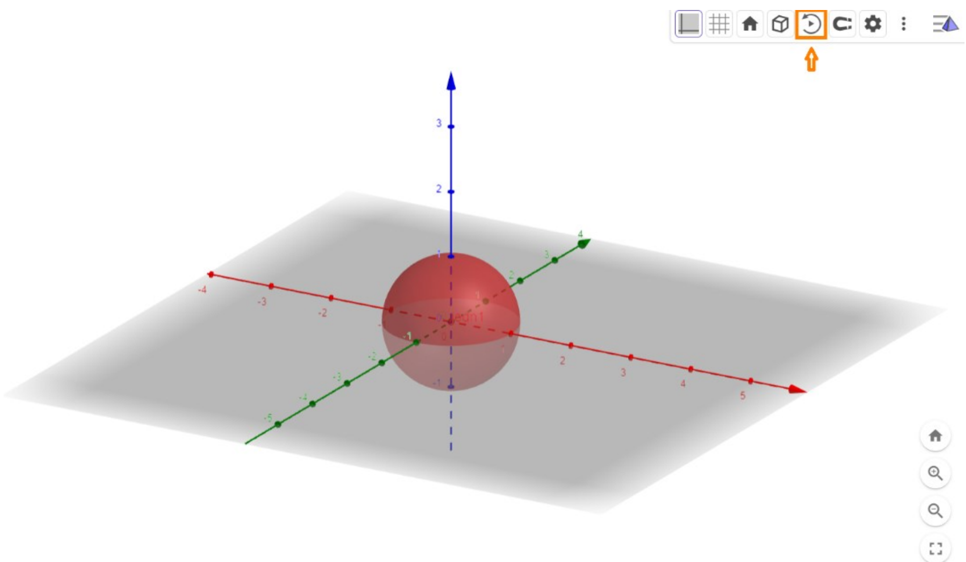
b) boja: postavke vezane uz boju objekta i prozirnost;



Slika 13.Postavke Geogebre: Boja

c) dodatno: postavke vezane uz uvjet prikaza objekta, dozvolu odabira objekta, položaj objekta itd.;
d) algebra: postavka vezana uz odabir prikaza jednadžbe objekta;
e) skriptiranje: jedna ili više naredbi koje se izvršavaju jedna po jedna; izvršenje se može pokrenuti pri kliku na objekt, pri ažuriranju određenog objekta ili globalnim JavaScriptom.

Dobivenu sferu u prostoru možemo rotirati klikom na gumb *Pokretanje ili zaustavljanje rotacije pogleda* koji se nalazi u gornjem desnom kutu, vidi sliku 14.



Slika 14. Rotacija objekta u Geogebri

Najčešće se iz eksplicitne jednadžbe plohe $z = f(x, y)$ prelazi na njezine odgovarajuće parametarske jednadžbe tako da nezavisne varijable x i y proglasimo parametrima u i v pri čemu je zavisna varijabla z realna funkcija dviju realnih varijabli u i v i pišemo:

$$x = u, y = v, z = f(u, v).$$

U alatu Geogebra, ploha se može zadati njezinom implicitnom ili eksplicitnom jednadžbom, ali i njezinom parametarskim jednadžbama.

Primjer 3.2

Parametarske jednadžbe sfere sa središtem u ishodištu polumjera 1 su

$$\begin{aligned} x &= \sin u \cos v \\ y &= \sin u \sin v \\ z &= \cos u \end{aligned}$$

za $u \in \langle 0, \pi \rangle, v \in \langle 0,2\pi \rangle$, vidi primjer 3.1.

Za prikaz plohe zadane parametarskim jednadžbama, koristimo funkciju *Ploha(<izraz>, <izraz>, <izraz>, <varijabla 1>, <početna vrijednost>, <završna vrijednost>, <varijabla 2>, <početna vrijednost>, <završna vrijednost>),* stoga za prikaz sfere sa središtem u ishodištu polumjera 1 upisujemo $Ploha(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u, u, 0, pi, v, 0{,}2\, pi)$.

3.3. Regularne i neregularne plohe u prostoru

U prethodnom poglavlju odredili smo jednadžbu tangente u točki krivulje u ravnini. Za plohu određuje se jednadžba tangencijalne ravnine u proizvoljnoj točki te plohe u trodimenzionalnom prostoru.

Kažemo da je ploha u trodimenzionalnom prostoru regularna ako je svaka njezina točka regularna, odnosno ako u svakoj točki te plohe možemo konstruirati jedinstvenu tangencijalnu ravninu, što ima za posljedicu da ta ploha nema niti jednu singularnu točku.

Definicija 3.3

Neka je funkcija $f: \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (Ω otvoren neprazan skup) derivabilna[3] u točki (x_0, y_0), onda postoje parcijalne derivacije $f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ i

[3] Kažemo da je funkcija $f: \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki (x_0, y_0) otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ako postoji polinom $(t, s) \to At + Bs$ $(A, B \in \mathbb{R})$ takav da je $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$.

$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ u točki (x_0, y_0) pa jednadžba tangencijalne ravnine na plohu zadanu eksplicitnom jednadžbom $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0, z_0) glasi

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \tag{3}$$

gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Ako je regularna ploha zadana implicitnom jednadžbom $F(x, y, z) = 0$, onda je u svakoj njezinoj točki (diralištu) (x_0, y_0, z_0) jednadžba tangencijalne ravnine oblika:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \tag{4}$$

gdje je $F_x = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}, F_z = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}$.

Da bi ploha zadana implicitnom jednadžbom bila regularna u svakoj svojoj točki (x_0, y_0, z_0) mora barem jedna od parcijalnih derivacija F_x, F_y ili F_z biti različita od nule, odnosno za regularnu točku plohe je zadovoljen uvjet

$$F_x^2(x_0, y_0, z_0) + F_y^2(x_0, y_0, z_0) + F_z^2(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Suprotno tome, svaka točka za koju vrijedi

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = F_y(x_0, y_0, z_0) = F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

singularna je točka te plohe, vidi primjer 3.5.

Primjer 3.3

Eksplicitnom jednadžbom $z = x^2 + y^2$ zadana je ploha koju nazivamo paraboloid. Odredimo jednadžbu tangencijalne ravnine na zadani paraboloid u točki $T_0(1, -2,\ z_0)$.

Budući da je točka T_0 na paraboloidu, proizlazi da vrijedi $z_0 = 1 + (-2)^2 = 5$, odakle slijedi da točka T_0 ima koordinate $x_0 = 1, y_0 = -2, z_0 = 5$ i pišemo $T_0(1, -2, 5)$. Izračunamo li parcijalne derivacije prvog reda funkcije $f(x) = x^2 + y^2$, dobivamo:

$$f_x(x, y) = 2x, \qquad f_y(x, y) = 2y.$$

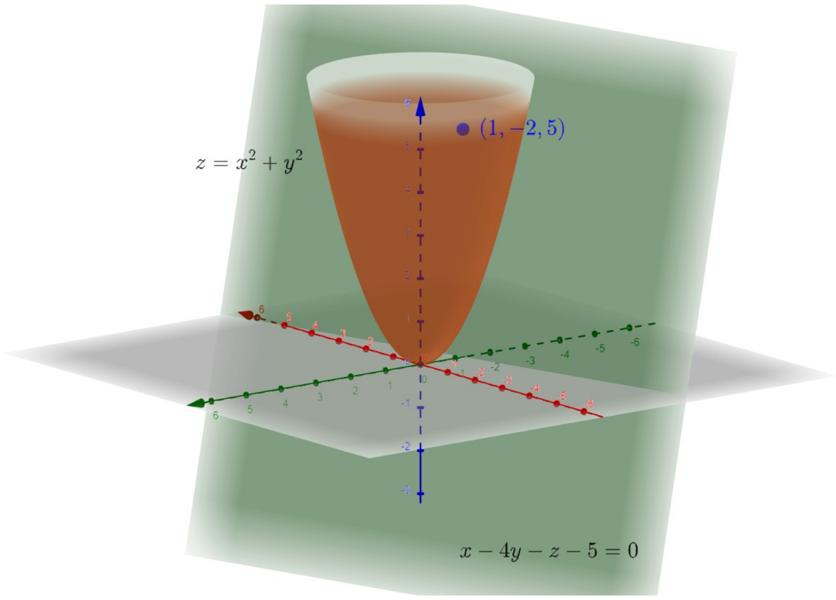
Tada je $f_x(1, -2) = 2$ i $f_y(1, -2) = -4$, stoga primjenom formule (3) dobivamo

$$2(x - 1) + (-4)(y + 2) - (z - 5) = 0,$$

odakle proizlazi da je

$$2x - 4y - z - 5 = 0$$

jednadžba tangencijalne ravnine na paraboloid $z = x^2 + y^2$ u točki $(1, -2, 5)$, vidi sliku 15.



Slika 15. Tangencijalna ravnina na paraboloid $z = x^2 + y^2$ *u točki* $(1, -2{,}5)$

Primjer 3.4

Odredimo jednadžbu tangencijalne ravnine na sferu iz primjera 3.1 zadanu implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ u točki $T_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z_0\right)$, gdje je $z_0 > 0$. Odredimo najprije koordinatu z_0 točke T_0. Budući da je točka T_0 ujedno i točka sfere, tada njezine koordinate moraju zadovoljavati implicitnu jednadžbu te sfere. Time je $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$, odnosno $z_0 = \pm\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$. Nadalje, iz početnog uvjeta da je $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$ proizlazi da je $z_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, a iz uvjeta $z_0 > 0$ slijedi da je $z_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, odnosno provedbom racionalizacije nazivnika, dobivamo $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Time je $T_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tražena točka na zadanoj sferi. Izračunavanjem parcijalnih derivacija prvog reda

$$F_x(x, y, z) = 2x, \qquad F_y(x, y, z) = 2y, \qquad F_z(x, y, z) = 2z,$$

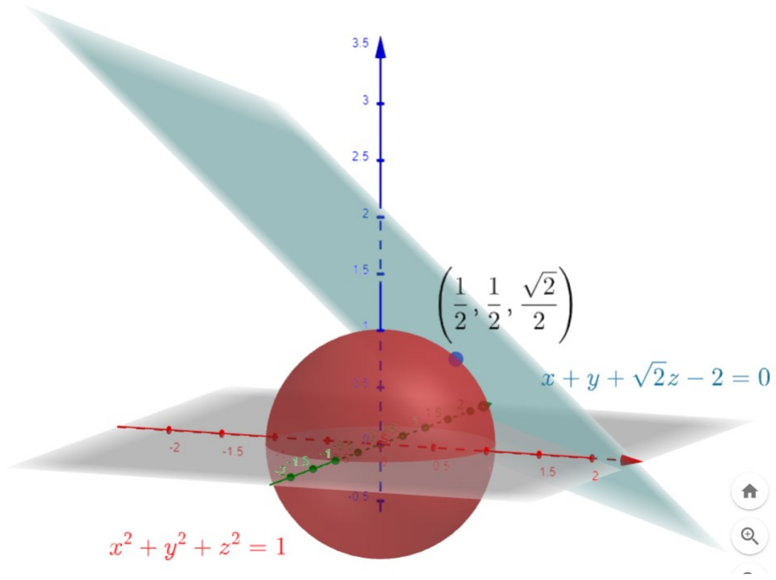
dobivamo da su njihove vrijednosti u točki T_0 dane sa $F_x\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$, $F_y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$ i $F_z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$, stoga primjenom formule (4) slijedi:

$$x - \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} + \sqrt{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Sređivanjem dobivene jednadžbe proizlazi da je

$$x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$$

jednadžba tangencijalne ravnine na sferu sa središtem u ishodištu polumjera 1, zadane implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ u točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, vidi sliku 16.

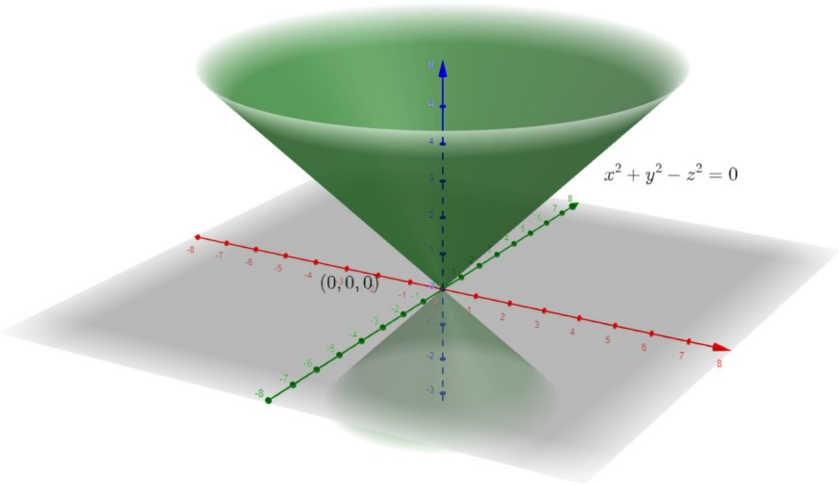


Slika 16. Tangencijalna ravnina na sferu $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ u točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Navedimo jedan primjer plohe koja ima singularnu točku.

Primjer 3.5

Promotrimo sada konus drugog reda zadanog implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ prikazanog na slici 17.



Slika 17. Konus zadan jednadžbom $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Na slici 17. vidljivo je da je vrh tog konusa, odnosno točka (0,0,0) jedina njegova singularna točka u kojoj nije definirana tangencijalna ravnina. Preostale točke konusa su regularne, odnosno u svakoj od njih postoji jedinstvena tangencijalna ravnina, što se dokazuje na slijedeći način.

Izračunavanjem parcijalnih derivacija prvog reda

$$F_x(x, y, z) = 2x, \qquad F_y(x, y, z) = 2y, \qquad F_z(x, y, z) = -2z,$$

i njihovim izjednačavanjem s nulom proizlazi

$$F_x(x, y, z) = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

$$F_y(x, y, z) = 0 \;\Rightarrow 2y = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$$

$$F_z(x, y, z) = 0 \;\Rightarrow\; -2z = 0 \;\Rightarrow\; z = 0$$

odakle slijedi da je točka (0,0,0), odnosno ishodište pravokutnog koordinatnog sustava prostora jednina točka u kojoj sve tri parcijalne derivacije iščezavaju što ima za posljedicu da je (0,0,0) jednina singularna točka zadanog konusa. S druge strane, uvrštavanjem točke (0,0,0) u jednadžbu (4) tangencijalne ravnine dobivamo da je $0 = 0$, što se geometrijski interpretira da u točki (0,0,0) postoji beskonačno mnogo tangencijalnih ravnina, stoga je točka (0,0,0) šiljak konusa.

3.4. Vektorska jednadžba plohe

U nastavku ćemo povezati parametarske jednadžbe plohe s njenom odgovarajućom vektorskom jednadžbom i istaknuti uvjet regularnosti za vektorski i parametarski zapis plohe.

Kao što smo već naveli, $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v), (u,v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ (U otvoren neprazan podskup od $\mathbb{R}^2$) su parametarske jednadžbe plohe u trodimenzionalnom prostoru. Neka je $\vec{r}: U \to \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija zadana vektorskom jednadžbom

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{\imath} + y(u,v)\vec{\jmath} + z(u,v)\vec{k}, \tag{5}$$

$(u,v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ koja ima neprekidna derivacije svakog reda na U. Tada skup svih točka $T\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in U$ u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$ nazivamo plohom. Uočimo da je vektorska jednadžba (5) plohe u trodimenzionalnom prostoru direktno povezana s parametarskim jednadžbama plohe oblika $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$, gdje su x, y i z realne funkcije dviju realnih varijabli u i v takvih da je $(u,v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Ploha zadana vektorskom jednadžbom (5) je regularna ako ispunjava uvjet regularnosti $\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v) \neq \vec{0}$ (koji ponekad kraće zapisujemo u oblik $\vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq \vec{0}$) za svaki $(u,v) \in U$. Pritom je:

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = (y_u z_v - z_u y_v)\vec{\imath} + (z_u x_v - x_u z_v)\vec{\jmath} + (x_u y_v - y_u x_v)\vec{k},$$

gdje je $x_u = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, x_v = \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, y_u = \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, y_v = \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, z_u = \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}, z_v = \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}$.

Pritom je $\vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq \vec{0}$ ako je barem jedan od izraza $y_u z_v - z_u y_v$ ili $z_u x_v - x_u z_v$ ili $x_u y_v - y_u x_v$ različit od nule, što ima za posljedicu da se u svakoj točki te plohe može postaviti jedinstvena tangencijalna ravnina.

Ako postoji $(u_0, v_0) \in U$ takav da je $\vec{r_u}(u_0, v_0) \times \vec{r_v}(u_0, v_0) = \vec{0}$, onda kažemo da u točki $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ ne postoji jedinstvena tangencijalna ravnina i tu točku nazivamo singularnom točkom plohe.

Uvjet regularnosti plohe zadane vektorskom jednadžbom (5) može se izraziti uvjetom: $|\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v)| \neq 0$, za svaki $(u,v) \in U$, gdje je

$$|\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v)| = \sqrt{(y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2}.$$

Primjer 3.6

Pokažimo da je ploha zadana vektorskom jednadžbom $\vec{r}(u,v) = (u, v, \cos u \cos v)$, $(u,v) \in [-\pi,\pi] \times [0,2\pi]$ regularna.
Iz dane vektorske jednadžbe $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ proizlazi da su njezine parcijalne derivacije prvog reda oblika:

$$\vec{r_u}(u,v) = (1,0,-\sin u \cos v), \qquad \vec{r_v}(u,v) = (0,1,-\cos u \sin v).$$

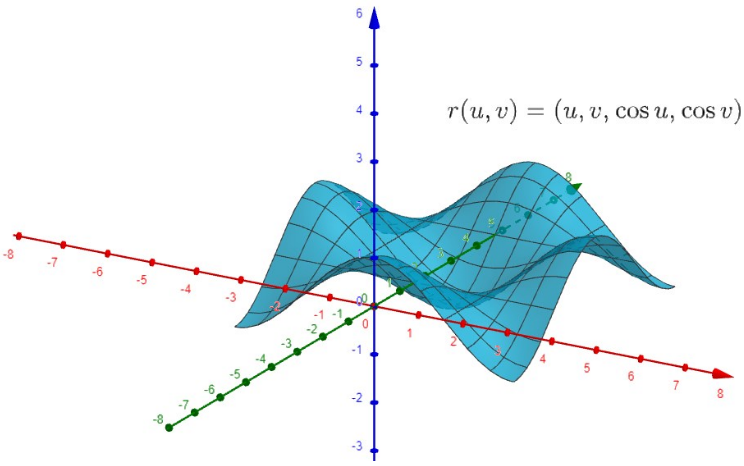
stoga je

$$\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v) = \sin u \cos v \, \vec{i} + \cos u \sin v \, \vec{j} + \vec{k},$$

odnosno

$$|\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v)| = \sqrt{\sin^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + 1}.$$

Time vrijedi $|\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v)| \neq 0$ za svaki $(u,v) \in [-\pi,\pi] \times [0,2\pi]$, odnosno zadana ploha regularna je u svakoj svojoj točki. Prikaz plohe u Geogebri može se vidjeti na slici 18.



Slika 18. Ploha zadana vektorskom jednadžbom $\vec{r}(u,v) = (u, v, \cos u \cos v)$

Primjer 3.7

Pokažimo da konus zadan vektorskom jednadžbom $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u \sin v, u)$ nije regularan u svakoj svojoj točki.

Iz dane vektorske jednadžbe $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ proizlazi da su njezine parcijalne derivacije prvog reda oblika:

$$\vec{r_u}(u,v) = (\cos v, \sin v, 1), \qquad \vec{r_v}(u,v) = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

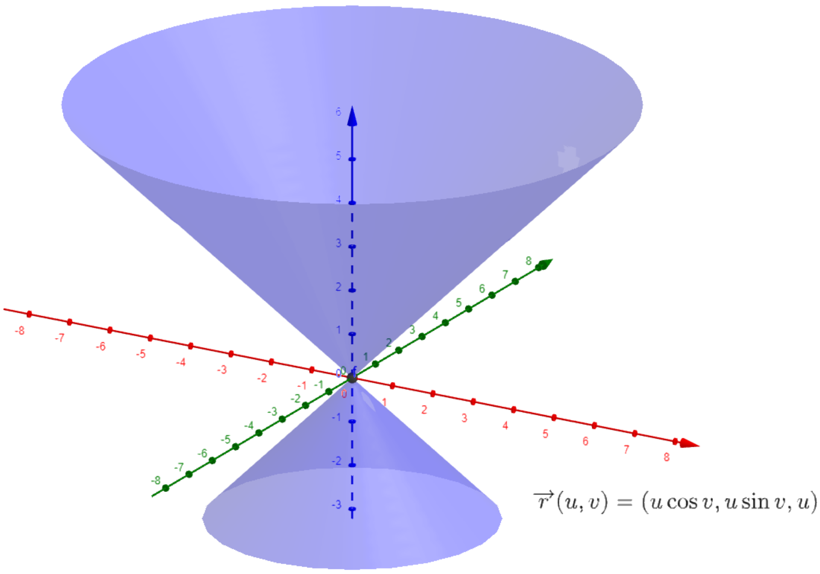
stoga je

$$\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v) = -u\cos v\,\vec{\imath} - u\sin v\,\vec{\jmath} + u\vec{k},$$

odnosno

$$|\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v)| = \sqrt{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v + u^2} = u\sqrt{2}.$$

Time $|\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v)| = 0$ povlači da je $u = 0$, stoga zaključujemo da su sve točke konusa za koje je $u = 0$ i $v \in [0,2\pi]$ singularne točke zadanog konusa te da u tim točkama nije definirana jedinstvena tangencijalna ravnina. Primijetimo da za $u = 0$, $v \in [0,2\pi]$ dobivamo točku $(0,0,0)$ jer $\vec{r}(0,v) = (0,0,0)$, vidi sliku 19.



Slika 19. Konus zadan vektorskom jednadžbom $\vec{r}(u,v) = (u\cos v\,, u\sin v\,, u)$

3.5. Plohe s prekidom

Definicija 3.4

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \Omega \neq \emptyset$, otvoren skup u $\mathbb{R}^2$ i neka je $P_0(x_0,y_0) \in \Omega$ proizvoljna točka. Za funkciju $f: \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna u točki P_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaku točku $P(x,y) \in \Omega$ vrijedi

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2 \quad \Rightarrow \quad |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

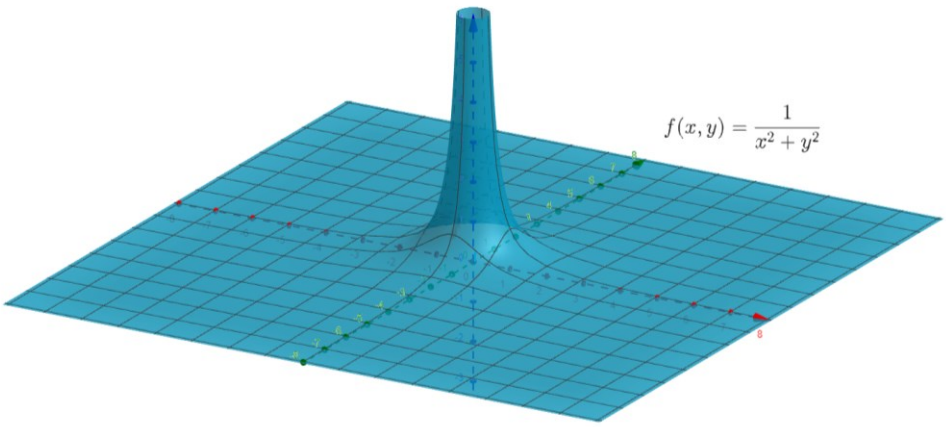
Funkcija f je neprekidna na skupu Ω ako je neprekidna u svakoj točki tog skupa.

Kažemo da funkcija f ima prekid u točki $P_0(x_0,y_0) \in \Omega$ ako nije neprekidna u toj točki.

Primijetimo da su sve plohe navedene u prethodnim primjerima neprekidne u svim svojim točkama, stoga ćemo u nastavku navesti nekoliko primjera ploha koje imaju prekid.

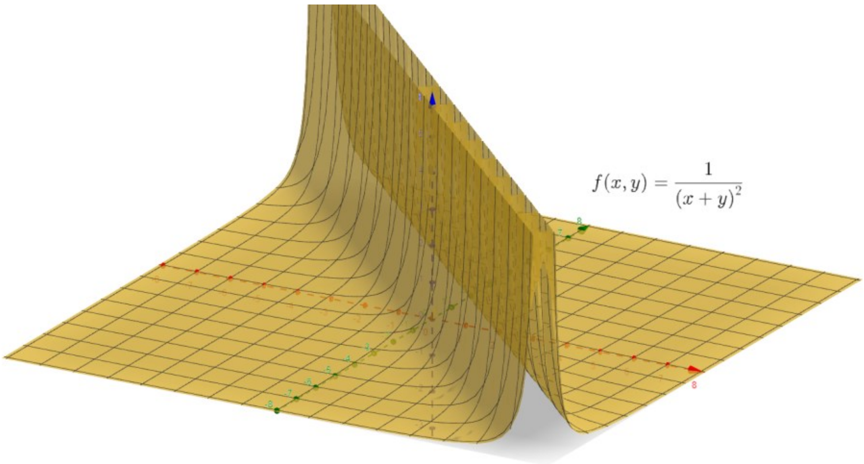
Primjer 3.8

a) Ploha zadana eksplicitnom jednadžbom $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ ima prekid za $(x_0, y_0) = (0,0)$, odnosno u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava prostora $\mathbb{R}^3$, što proizlazi iz uvjeta da nazivnik razlomka mora biti različit od nule. Dakle, iz $x^2 + y^2 \neq 0$ slijedi da sve točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ moraju biti različite od točke $(0,0)$, što povlači da je zadana ploha definirana za sve točke iz skupa $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
Ploha je neprekidna u svim svojim točkama osim u ishodištu $(0,0,0)$ gdje ima prekid. Pritom kažemo da je ishodište točka prekida zadane plohe, vidi sliku 20.



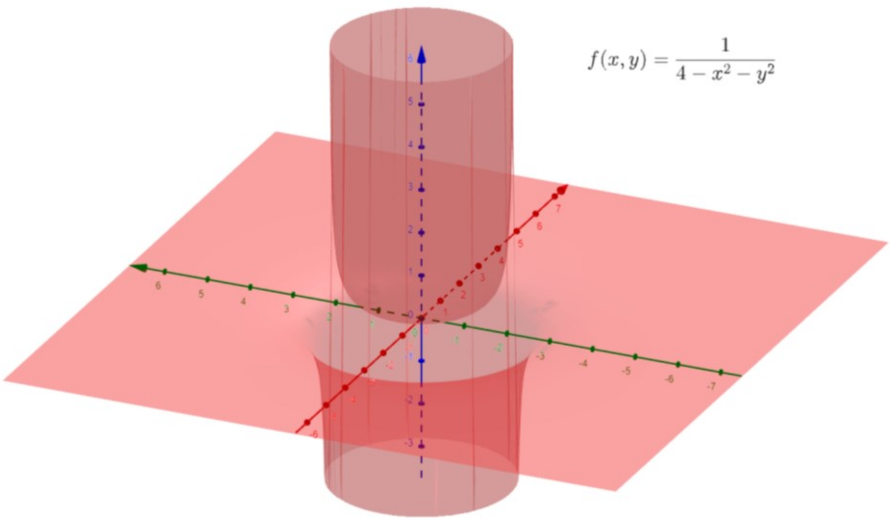
Slika 20. Graf funkcije $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

b) Neka je zadana ploha eksplicitnom jednadžbom $z = \frac{1}{(x+y)^2}$. Analogno, kao u prethodnom primjeru iz uvjeta $(x + y)^2 \neq 0$ slijedi $x + y \neq 0$ odnosno $y \neq -x$, što povlači da je zadana ploha definirana u svim točkama ravnine $\mathbb{R}^2$ osim u onim točkama te ravnine koje ujedno pripadaju pravcu $y = -x$, stoga je zadana ploha definirana za sve točke iz skupa $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y = -x\}$. Također, ploha je i neprekidna u svim svojim točkama (x, y, z) za koje je $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y = -x\}$ te ona ima prekid u onim točkama prostora $\mathbb{R}^3$ za koje je $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y = -x\}$. Drugim riječima, ploha ima prekid u svim točkama za koje vrijedi da točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ujedno pripadaju pravcu $y = -x$.



Slika 21. Graf funkcije $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$

c) Neka je zadana ploha eksplicitnom jednadžbom $z = \frac{1}{4-x^2-y^2}$. Kao i u prethodnim primjerima iz uvjeta $4 - x^2 - y^2 \neq 0$ slijedi $x^2 + y^2 \neq 4$, što povlači da je zadana ploha definirana u svim točkama ravnine $\mathbb{R}^2$ osim u onim točkama te ravnine koje ujedno pripadaju kružnici $x^2 + y^2 = 4$, stoga je zadana ploha definirana za sve točke iz skupa $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 4\}$. Drugim riječima, ploha ima prekid u svim točkama za koje vrijedi da točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ujedno pripadaju kružnici $x^2 + y^2 = 4$ sa središtem u ishodištu polumjera 2. Također, ploha je i neprekidna u svim svojim točkama (x,y,z) za koje je $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 4\}$ te ona ima prekid u onim točkama prostora $\mathbb{R}^3$ za koje je $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 4\}$.

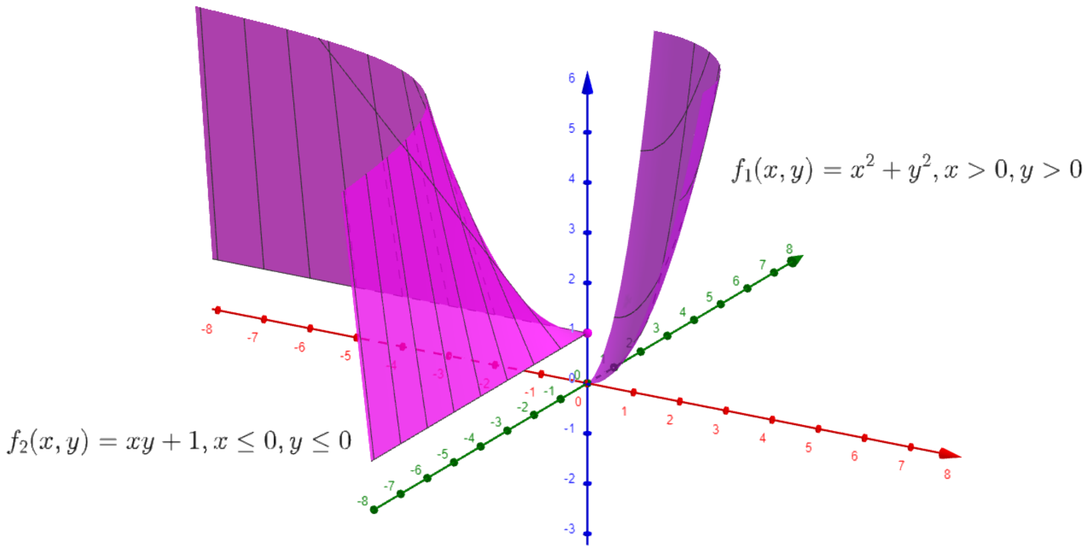


Slika 22. Graf funkcije $f(x,y) = \frac{1}{4-x^2-y^2}$

Navedimo da za većinu ploha vrijedi da je njihovo prirodno područje definicije ujedno i njihovo područje neprekidnosti, ali to općenito ne mora vrijediti, što ćemo argumentirati u slijedećem primjeru.

Primjer 3.9

Ploha zadana eksplicitnom jednadžbom $z = \begin{cases} x^2 + y^2, & x > 0, y > 0 \\ xy + 1, & x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$ ima prekid u točki $(x_0, y_0) = (0,0)$, odnosno u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava prostora $\mathbb{R}^3$. Ploha je definirana u točki $(x_0, y_0) = (0,0)$ jer vrijedi $z_0 = f(0,0) = 1$, ali ima i prekid u toj točki. Na slici 22 možemo uočiti da je ploha definirana za sve točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i neprekidna je u svim svojim točkama osim u točki $(x_0, y_0) = (0,0)$ gdje ima prekid. Pritom kažemo da je ta točka ujedno točka prekida zadane plohe.



Slika 23. Ploha zadana eksplicitnom jednadžbom $z = \begin{cases} x^2 + y^2, & x > 0, y > 0 \\ xy + 1, & x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$

4. Krivulje u trodimenzionalnom prostoru

Najprije ćemo definirati krivulje u trodimenzionalnom prostoru kao presjek dviju ravnina, stoga će se eksplicitne (implicitne) jednadžbe krivulja zadavati kao sustav odgovarajućih eksplicitnih (implicitnih) jednadžbi ploha, a potom ćemo objasniti parametarske i vektorsku jednadžbu krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$.

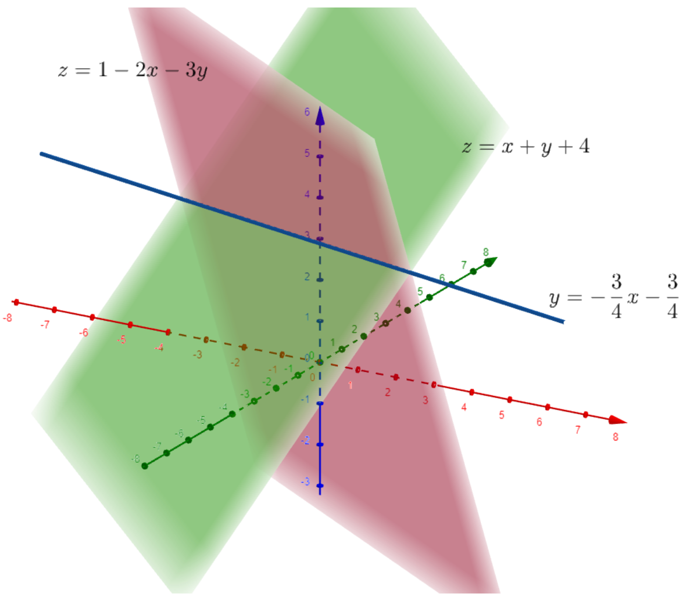
4.1. Implicitna i eksplicitna jednadžba krivulje u prostoru

Neka su zadane dvije plohe u trodimenzionalnom prostoru implicitnim jednadžbama $F(x,y,z)=0$ i $G(x,y,z)=0$. Sustavom jednadžbi $F(x,y,z)=0$ i $G(x,y,z)=0$ tih dviju ploha zadaje se krivulja u trodimenzionalnom prostoru, što se geometrijski interpretira da je krivulja presjek onih dviju ploha u trodimenzionalnom prostoru koje su zadane implicitnim jednadžbama $F(x,y,z)=0$ i $G(x,y,z)=0$.

Isto vrijedi za plohe zadane eksplicitnom jednadžbom, odnosno ako su dvije plohe u trodimenzionalnom prostoru zadane eksplicitnim jednadžbama $z=f(x,y)$ i $z=g(x,y)$, onda se sustavom jednadžbi $z=f(x,y)$ i $z=g(x,y)$ tih dviju ploha zadaje krivulje u trodimenzionalnom prostoru. Pritom je rješenje sustava jednadžbi ujedno jednadžba dane krivulje, vidi primjere 4.1, 4.2 i 4.3.

Primjer 4.1.

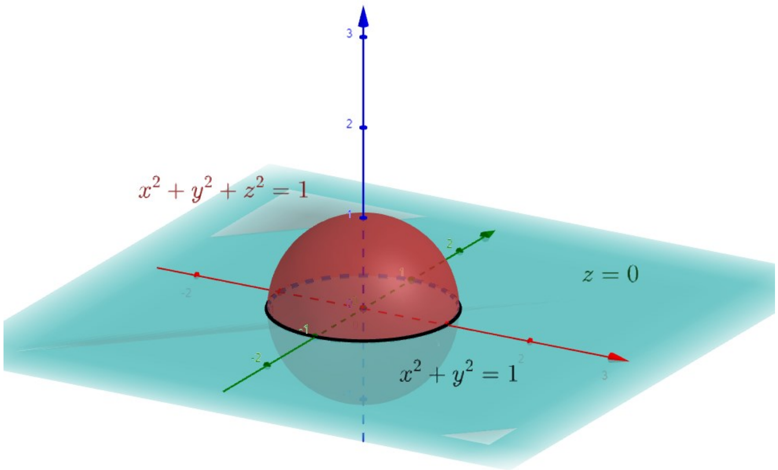
Neka su zadane dvije plohe slijedećim eksplicitnim jednadžbama $z=1-2x-3y$ i $z=x+y+4$, vidi sliku 24. Rješavanjem danog sustava metodom komparacije proizlazi $1-2x-3y=x+y+4$, odakle slijedi da je $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ iz čega proizlazi da je pravac predočen eksplicitnom jednadžbom $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ presjek zadanih ploha.



Slika 24. Presjek ploha zadanih jednadžbama $z=1-2x-3y$ i $z=x+y+4$

Primjer 4.2.

Neka je zadana sfera[4] implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ i xy ravnina jednadžbom $z = 0$. Tada je njihov presjek kružnica u trodimenzionalnom prostoru čija se jednadžba dobiva rješavanjem sustava jednadžbi $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, z = 0$. Primijetimo da za $z = 0$ iz jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ proizlazi $x^2 + y^2 = 1$ što je ujedno tražena jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu polumjera 1, vidi sliku 25.



Slika 25. Kružnica $x^2 + y^2 = 1$ kao presjek sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i xy-ravnine $z = 0$

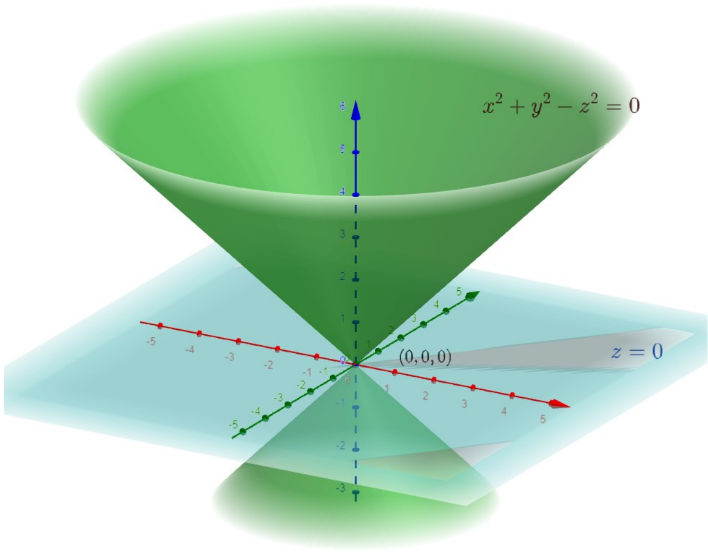
Primjer 4.3

Neka je zadan konus drugog reda implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. U nastavku ćemo izračunati i pomoću Geogebre prikazati presjek tog konusa i ravnine zadane slijedećom jednadžbom, ako je:

- $z = 0$ (xy ravnina)

  Dokažimo da je točka $(0,0,0)$ presjek zadanog konusa i xy ravnine (zadane jednadžbom $z = 0$) rješavanjem sustava jednadžbi $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z = 0$. Za $z = 0$ iz jednadžbe $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ proizlazi $x^2 + y^2 = 0$, odakle slijedi da je $x = 0$ i $y = 0$. Time je ishodište $(0,0,0)$ traženi presjek, što se može vidjeti i na slici 26.

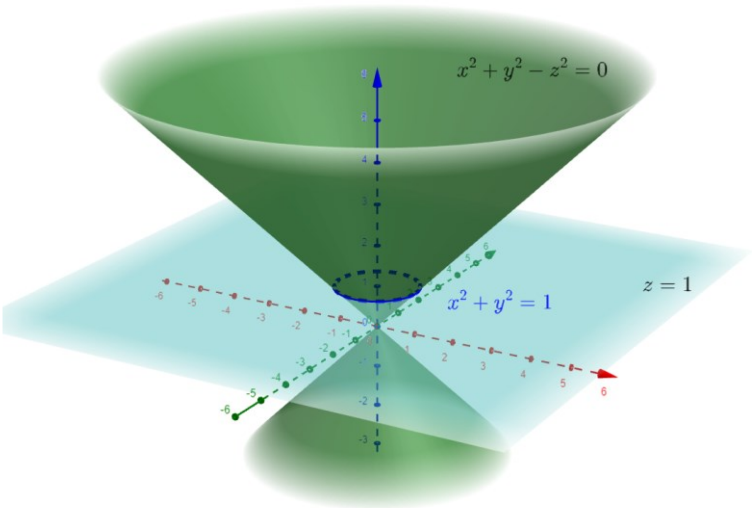
[4] Zadana sfera ima središte u ishodištu, a polumjer joj je jednak 1. Takvu sferu nazivamo jediničnom sferom sa središtem u ishodištu.



Slika 26. Presjek $x^2 + y^2 - z^2$*=0 i* $z = 0$

- $z = k,\ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (ravnina paralelna s xy ravninom koja sadrži točku $(0,0,k)$)

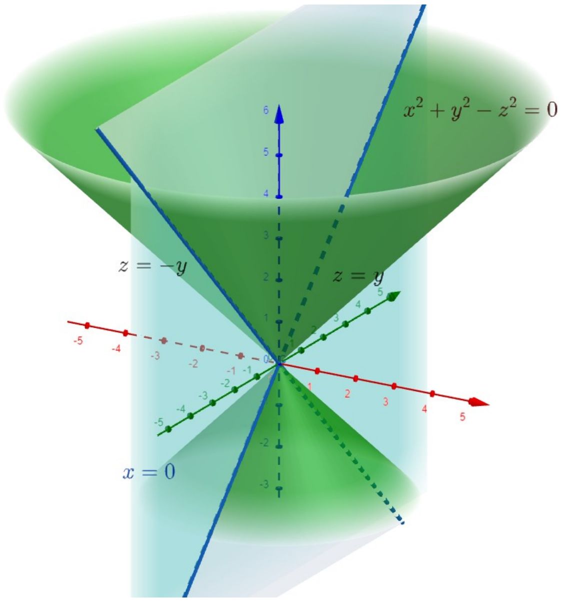
  Presjek konusa zadanog implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i ravnine zadane jednadžbom $z = k, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ je kružnica sa središtem u ishodištu polumjera k čija je jednadžba rješenje sustava jednadžbi $x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = k$. Pritom za $z = k$ iz jednadžbe $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ proizlazi $x^2 + y^2 = k^2$, odnosno implicitna jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu polumjera k. Na slici 27 prikazan je presjek konusa i ravnine $z = 1$, stoga je u ovom slučaju traženi presjek zapravo kružnica sa središtem u ishodištu polumjera jedan, a njezina implicitna jednadžba je oblika $x^2 + y^2 = 1$.



Slika 27. Presjek $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ *i* $z = 1$

- $x = 0$ (yz ravnina)

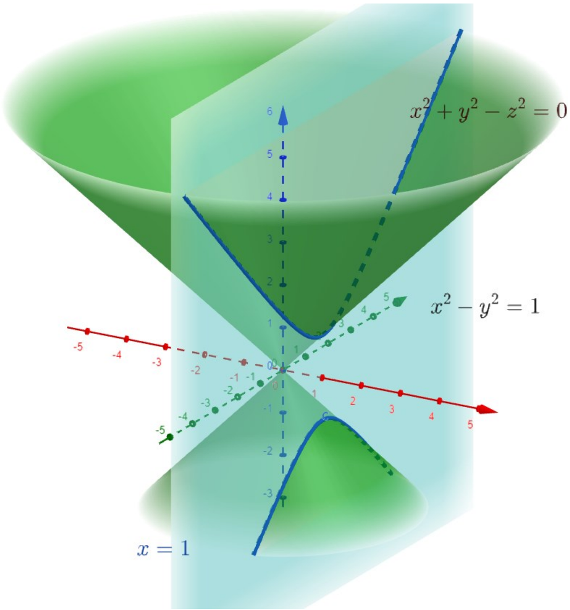
  Odredimo sada presjek zadanog konusa i yz ravnine (zadane jednadžbom $x = 0$). Rješavanjem sustava jednadžbi $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x = 0$, metodom supstitucije iz jednadžbe $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ za $x = 0$ proizlazi $y^2 - z^2 = 0$, odnosno $z = -y$ ili $z = y$. Time su pravci dani jednadžbama $z = -y$ i $z = y$ presjek konusa i yz ravnine. Uočimo da se dobiveni pravci sijeku u ishodištu $(0,0,0)$ pravokutnog koordinatnog sustava, vidi sliku 28.



Slika 28. Presjek $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i $x = 0$

- $x = k, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (ravnina paralelna s yz ravninom koja sadrži točku $(k, 0,0)$)

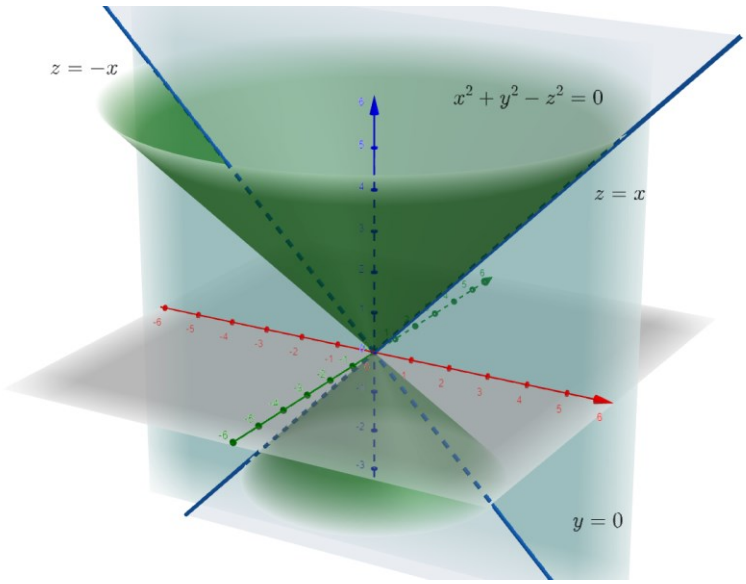
  Presjek konusa zadanog implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i ravnine zadane jednadžbom $x = k, , k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ je hiperbola čija se jednadžba dobiva iz rješenja sustava jednadžbi $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x = k$. Primijetimo da za $x = k$ iz jednadžbe $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ proizlazi $y^2 - z^2 = -k^2$, odnosno $\frac{z^2}{k^2} - \frac{y^2}{k^2} = 1$, što je ujedno jednadžba hiperbole u yz ravnini. Na slici 29 prikazan je presjek konusa i ravnine $x = 1$, stoga je u ovom slučaju traženi presjek zapravo hiperbola dana jednadžbom $z^2 - y^2 = 1$.



Slika 29. Presjek $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ *i* $x = 1$

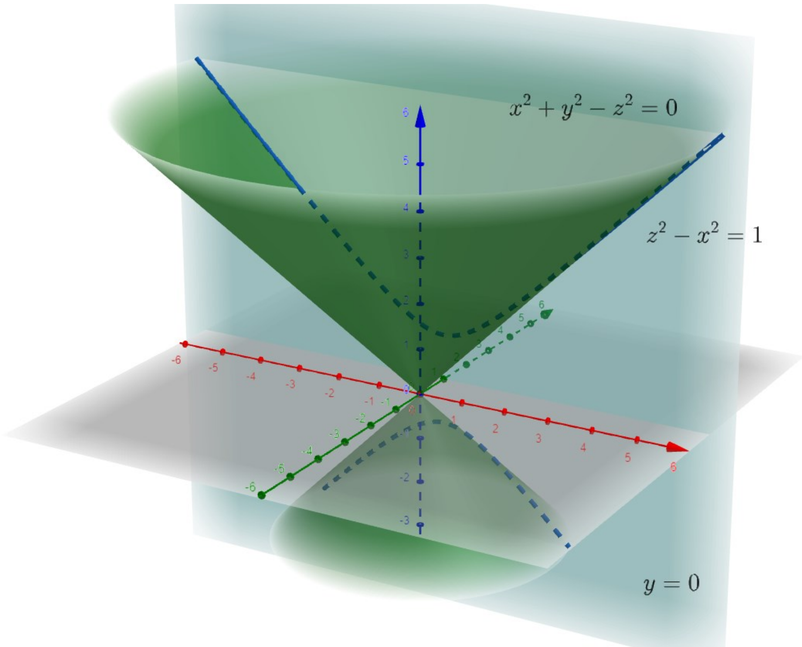
- $y = 0$ (xz ravnina)

  Odredimo presjek zadanog konusa i xz ravnine (zadane jednadžbom $y = 0$). Analogno prethodno navedenom, rješavanjem sustava $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ y = 0,$ metodom supstitucije iz jednadžbe $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ za $y = 0$ proizlazi $x^2 - z^2 = 0$, odnosno $z = x$ ili $z = -x$. Time su pravci dani jednadžbama $z = x$ i $z = -x$ presjek konusa i xz ravnine. Dobiveni pravci sijeku se u ishodištu $(0,0,0)$, pravokutnog koordinatnog sustava, vidi sliku 30.



Slika 30. Presjek $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ *i* $y = 0$

- $y = k, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (ravnina paralelna s xz ravninom koja sadrži točku $(0, k, 0)$)
  Presjek konusa zadanog implicitnom jednadžbom $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i ravnine zadane jednadžbom $y = k, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ je hiperbola čija se jednadžba dobiva iz rješenja sustava jednadžbi $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x = k$. Primijetimo da za $y = k$ iz jednadžbe $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ proizlazi $x^2 - z^2 = -k^2$, odnosno $\frac{z^2}{k^2} - \frac{x^2}{k^2} = 1$ što je ujedno jednadžba hiperbole u xz ravnini. Na slici 31 prikazan je presjek konusa i ravnine $y = 1$, stoga je u ovom slučaju tražen presjek hiperbola, a njezina implicitna jednadžba je oblika $z^2 - x^2 = 1$.



Slika 31. Presjek $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i $y = 1$

4.2. Parametarske i vektorska jednadžba krivulje u prostoru

Osim implicitnom i eksplicitnom jednadžbom, krivulje u prostoru možemo zadati i parametarskim jednadžbama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}$, odnosno pripadnom vektorskom jednadžbom $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}, t \in I$. Krivulja u trodimenzionalnom prostoru zadana vektorskom jednadžbom je regularna ako je $|\vec{r}\,'(t)| \neq 0$ za svaki $t \in I$ što je ekvivalentno uvjetu da za svaki $t \in I$ je $\dot{x}(t) \neq 0$ ili $\dot{y}(t) \neq 0$ ili $\dot{z}(t) \neq 0$.

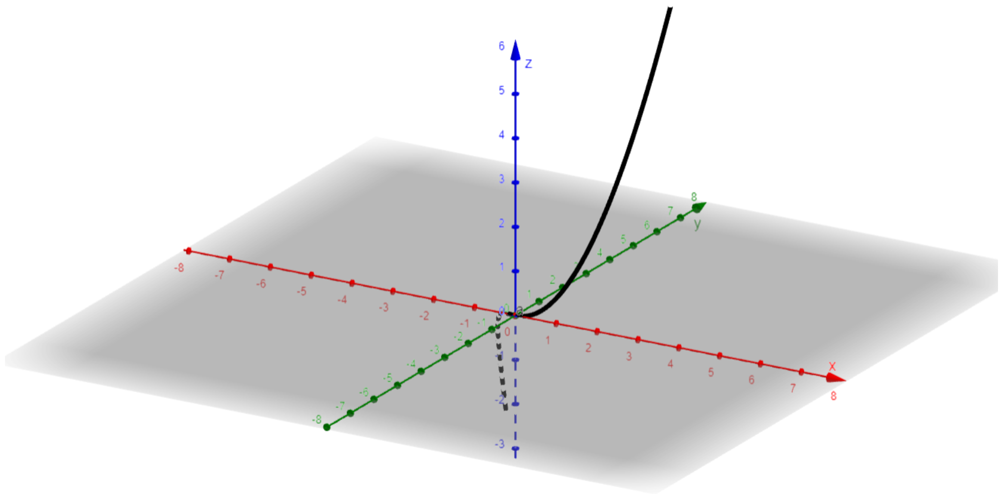
Primjer 4.4

Neka je zadana krivulja Γ u trodimenzionalnom prostoru parametarskim jednadžbama

$$x = t$$
$$y = t^2$$
$$z = t^3$$

za svaki $t \in \mathbb{R}$. Podsjetimo se da danim parametarskim jednadžbama krivulje Γ odgovara slijedeća vektorska jednadžba $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + t^3\vec{k},\ t \in \mathbb{R}$.

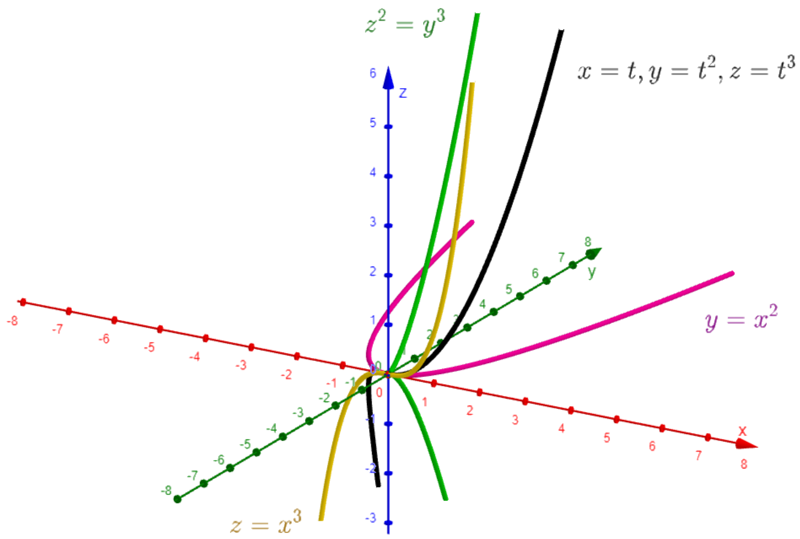
Za grafički prikaz ove krivulje koristit ćemo se alatom Geogebra koji nam pruža mogućnost prikaza krivulje zapisane parametarskom jednadžbom, pri čemu koristimo naredbu *Krivulja(<izraz>, <izraz>, <varijabla>, <početna vrijednost>, <krajnja vrijednost>)* koju upisujemo u *Traku za unos*. U našem slušaju u traku za unos upisujemo *Krivulja(t , t^2, t^3, t, -10,10)* i dobivamo slijedeći graf prikazan na slici 32.



Slika 32. Krivulja u prostoru zadana parametarskim jednadžbama $x = t, y = t^2, z = t^3$

Ova krivulja Γ je posebno zanimljiva zbog njezinih presjeka s koordinatnim ravninama. Konkretno, presjek krivulje Γ i ravnine xy je parabola $y = x^2$, što proizlazi iz parametarskih jednadžbi $x = t,\ y = t^2,\ z = 0$, iz kojih eliminacijom parametra t slijedi da je $y = x^2$. Analogno, presjek krivulje Γ i ravnine xz je kubna parabola $z = x^3$. Navedena jednadžba proizlazi iz parametarskih jednadžbi $x = t, y = 0, z = t^3$ iz kojih se eliminira parametar t. Nadalje, presjek krivulje Γ i ravnine yz je semikubna parabola dana jednadžbom $z^2 = y^3$ koju dobivamo eliminacijom parametra t iz parametarskih jednadžbi $x = 0, y = t^2, z = t^3$.

Na slici 33 ružičastom je bojom prikazan presjek krivulje Γ i xy-ravnine (parabola), žutom bojom presjek te krivulje i xz-ravnine (kubna parabola) i zelenom bojom presjek te krivulje i yz-ravnine (semikubna parabola).



Slika 33. Presjeci krivulje zadane parametarskim jednadžbama $x = t, y = t^2, z = t^3$ s koordinatnim ravninama

Provjerimo regularnost ove krivulje. Podsjetimo se da je vektorska jednadžba krivulje Γ oblika

$$\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + t^3\vec{k}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

stoga izračunavanjem derivacije prvog reda

$$\vec{r}'^{(t)} = \vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

proizlazi da je $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \neq 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, što povlači da je krivulja regularna u svakoj svojoj točki. To znači da možemo konstruirati jedinstvenu tangentu u svakoj njezinoj točki.

Zaključak

U ovom radu ukratko smo ponovili pojam realne funkcije realne varijable i njezinog grafa, odnosno krivulje koju možemo zadati eksplicitnom, implicitnom, parametarskim ili vektorskom jednadžbom. Definirali smo pojam tangente na krivulju te naveli primjere krivulja koje su regularne te one koje to nisu. Također smo definirali pojam neprekidnosti funkcije i naveli primjere funkcija koje imaju prekid. U trećem poglavlju smo analizirali zadavanje ploha u trodimenzionalnom prostoru eksplicitnom, implicitnom, parametarskim i vektorskom jednadžbom, na analogan način kao i krivulje u ravnini te na taj način povezali ta dva pojma, odnosno krivulju u ravnini i plohu u trodimenzionalnom prostoru. Također smo definirali i pojam tangencijalne ravnine na plohu u točki te plohe. U slijedećem poglavlju proučavali smo krivulje u trodimenzionalnom prostoru te objasnili način zadavanja krivulja u prostoru pomoću parametarskih jednadžbi, ali i kao presjek dviju ploha u trodimenzionalnom prostoru zadanih implicitnim ili eksplicitnim jednadžbama. Svaki primjer grafički smo prikazali pomoću alata Geogebra. Alat Geogebra uvelike je pridonio zornom prikazu svih spomenutih funkcija i njihovih svojstava.

Popis literature

[1] P. Javor, Matematičku analiza 2, Element, Zagreb, 2000.

[2] P. Javor, Uvod u matematičku analizu, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[3] S. Kurepa, Matematička analiza (funkcije jedne varijable, funkcije više varijabli), Tehnička knjiga, Zagreb, 1970-1971.

[4] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, New York, 1976.

[5] Jadranka Mičić Hot, Funkcije više varijabli, preuzeto s https://www.fsb.unizg.hr/matematika/download/digitalniUdz.pdf (kolovoz 2022.)

[6] Geogebra, preuzeto s https://www.geogebra.org/classic (kolovoz 2022.)

[7] Šime Ungar, Matematička analiza 3, Zagreb. 2014., preuzeto s https://www.mathos.unios.hr/~djankov/realna/analiza3_internet.pdf (kolovoz 2022.)

Popis priloga