

Digrafovi i turniri

Vretenar, Daniela

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:196:267723>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku
Preddiplomski sveučilišni studij Matematika

Daniela Vretenar

Digrafovi i turniri

Završni rad

Rijeka, srpanj 2022.

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku
Preddiplomski sveučilišni studij Matematika

Daniela Vretenar

Digrafovi i turniri

Završni rad

Mentor: dr. sc. Ana Grbac

Rijeka, srpanj 2022.

Sažetak

U ovom radu dane su osnovne definicije i teoremi vezani za digrafove i turnire te ukratko njihova primjena. Na početku uvodimo temeljne pojmove, a zatim je naglasak na osnovnim svojstvima turnira i na koji ih način prepoznajemo. Tu nam je najbitniji teorem koji govori da svaki turnir ima usmjereni Hamiltonov put. Zatim uvodimo k -partitne turnire i pokazujemo dva teorema vezana za njih. U nastavku se upoznajemo s vektorima uspjeha i matricama susjedstva te ih konstruiramo uz pomoć primjera. Za kraj dajemo par primjena digrafova i turnira i detaljnije pokazujemo uporabu njihovih svojstava na primjeru autobusnih linija. Objašnjavamo kako konstruirati rang-liste natjecanja i kako napraviti sortiranje poslova uporabom turnira.

Ključne riječi: digraf, turnir, povezanost digrafa, Hamiltonov diput, k -partitni turnir, vektor uspjeha, matrica susjedstva digrafa

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Digrafovi	2
2.1	Dišetnje, diputovi i povezanost digrafova	4
3	Turniri	7
3.1	k-partitni turniri	9
3.2	Vektori uspjeha	12
3.3	Matrica susjedstva digrafa	16
4	Primjena digrafova i turnira	19
5	Zaključak	23

1 Uvod

Teorija grafova vrlo je primjenjiva grana matematike i često se koristi u fizici, arhitekturi, telekomunikaciji, elektrotehnici, kemiji, genetici, ekonomiji i drugima. Također je usko povezana s drugim granama matematike kao što su kombinatorika, topologija i vjerojatnost. Obratimo li malo pažnju, mnogo stvari oko nas može se opisati primjenom teorije grafove.

Najprije je potrebno razumijeti što je graf i za što se koristi, a kasnije ćemo dati i cijelu definiciju grafa. Graf si možemo predočiti kao više skupina objekata koje zovemo vrhovima koji su međusobno povezani linijama (najčešće na temelju nekog zajedničkog svojstva) koje nazivamo bridovima. Standardni primjer koji se koristi u telekomunikacijama je da za vrhove uzmemo stupove, a bridovi su onda telefonski kablovi koji se protežu između tih stupova. Takvim predočavanjem se zapravo pojednostavljuje konstrukcija i organizacija telekomunikacijskih mreža. Na sličan se način opisuju i prometne veze, kemijske veze među atomima u kemiji, organizacija poslova, itd.

Osim "običnih" grafova, od velike su nam važnosti i usmjereni grafovi (kod kojih bridove možemo promatrati kao strelice između vrhova) jer se oni često koriste u protoku informacija odnosno veza u računalnim programima, a kako znamo da se tehnologija sve više razvija tako se i potreba za usmjerenim grafovima povećava.

U skladu s time, tema ovog završnog rada bit će bolje upoznavanje teorije grafova, specifičnije proučavanje usmjerenih grafova (ili digrafova) s naglaskom na posebne vrste digrafova - turnire. U prvom ćemo dijelu najprije uvesti neke početne pojmove i definicije vezane za grafove i digrafove te ćemo zatim u drugom poglavlju detaljnije proučavati turnire i k-partitne turnire. Uvest ćemo pojmove vektora uspjeha i matrice susjedstva kao bitna svojstva koje digrafovi i turniri imaju. U zadnjem poglavlju reći ćemo nešto o primjeni usmjerenih grafova i turnira te na kraju donijeti neki zaključak o njihovoj upotrebi.

2 Digrafovi

Definicija 2.1. Graf G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ koja se sastoji od nepraznog skupa $V(G)$ čiji su elementi vrhovi od G , skupa $E(G)$ disjunktne s $V(G)$ čiji su elementi bridovi od G i funkcije incidencije ψ_G koja svakom bridu pridružuje par (ne nužno različitih) vrhova od G . U slučaju da je taj par vrhova neuređen, onda govorimo o neusmjerenom grafu G . U suprotnom, ako svakom bridu pridružimo uređeni par vrhova od G , onda govorimo o *usmjerenom grafu* (*digrafu*).

Napomena 2.2. Kod usmjerenih grafova uređene parove (u, v) nazivamo *lukovima* ili *usmjerenim bridovima*, a skup svih lukova označavamo $A(G)$ (iz engleskog naziva *arc*).

(u, v) možemo kraće pisati uv i označava da luk uv kreće od vrha u prema vrhu v i incidentan je sa vrhovima u i v . Vrh u je tada početni, a v krajnji vrh luka uv . S druge strane, ako imamo luk vu , on označava da se luk kreće od vrha v prema vrhu u i također je incidentan sa vrhovima u i v , ali je tada vrh v početni, a vrh u krajnji vrh luka vu . Time možemo uočiti da nam je kod usmjerenih grafova bitna orijentacija lukova (što možemo zaključiti i iz uređenosti tih vrhova kod funkcije incidencije) od čega dolazi i naziv usmjereni grafovi.

Definicija 2.3. Neka je D usmjereni graf. Za luk uv digrafa D , v se naziva *izlazni susjedni vrh* (eng. *outneighbor*) vrha u , a u *ulazni susjedni vrh* (eng. *inneighbor*) vrha v . S $N_D^+(u)$ označavamo skup svih izlaznih susjednih vrhova vrha u u digrafu D , dok s $N_D^-(u)$ označavamo skup ulaznih susjednih vrhova vrha u u D .

Stupanj ili *valencija* vrha $v \in V(D)$ je broj lukova incidentnih s njim. S $d_D^+(v)$ (ili $d^+(v)$) označavamo broj lukova koji izlaze iz vrha v i nazivamo ga *izlazni stupanj* vrha v (eng. *outdegree*).

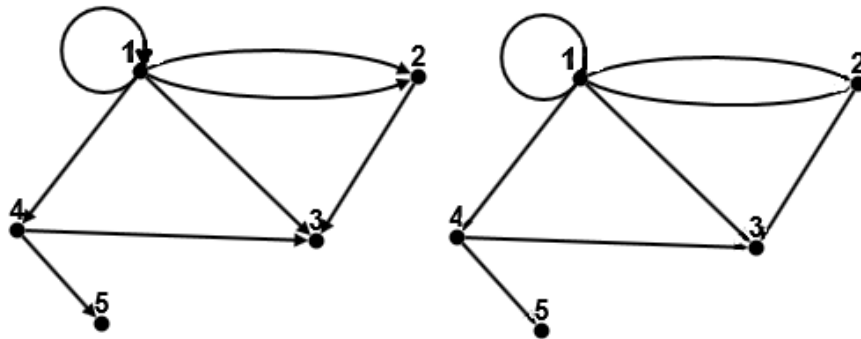
S $d_D^-(v)$ (ili $d^-(v)$) označavamo broj lukova koji ulaze u vrh v i zovemo ga *ulazni stupanj* vrha v (eng. *indegree*). *Minimalni* (*maksimalni*) *izlazni stupanj* digrafa

D je minimalni (maksimalni) od svih izlaznih stupnjeva vrhova iz D i označavamo ga $\delta^+(D)$ ($\Delta^+(D)$). Minimalni (maksimalni) ulazni stupanj digrafa D je minimalni (maksimalni) od svih ulaznih stupnjeva vrhova iz D i označavamo ga $\delta^-(D)$ ($\Delta^-(D)$).

Pokažimo gornje definicije na primjeru.

Primjer 2.4. Na Slici 1 vrijedi $N_D^+(1) = \{1, 2, 3, 4\}$ i $N_D^-(1) = \{1\}$. Dalje vrijedi $d^+(1) = 5^1$, $d^+(2) = 1$, $d^+(3) = 0$, $d^+(4) = 2$, $d^+(5) = 0$ te $d^-(1) = 1$, $d^-(2) = 2$, $d^-(3) = 3$, $d^-(4) = 1$, $d^-(5) = 1$.

Možemo primijetiti ako zbrojimo ulazni i izlazni stupanj pojedinog vrha, dobivamo stupanj toga vrha. Primjerice $d(1) = 6$ što je jednako $d^+(1) + d^-(1) = 5 + 1 = 6$.



Slika 1: Digraf i pripadni graf

Može se primijetiti da zbrajanjem svih ulaznih (izlaznih) stupnjeva digrafa dobivamo broj lukova toga digrafa što nam govori i sljedeći teorem.

¹Petlju računamo i u ulazni i u izlazni stupanj toga vrha pošto ona ulazi i izlazi u isti vrh

Teorem 2.5. Za svaki digraf D vrijedi

$$\sum_{v \in V(D)} d^-(v) = \sum_{v \in V(D)} d^+(v) = |A(D)|.$$

Svakom digrafu D možemo pridružiti graf G (ili $G(D)$ ako želimo naglasiti o kojem digrafu je riječ) s istim skupom vrhova tako da svakom luku iz D pridružimo brid iz G s istim krajevima (odnosno dobivamo graf brisanjem strelica iz D). Taj graf G se zove *pripadni graf* digrafa D (primjer pripadnog grafa možemo vidjeti na Slici 1).

S druge strane možemo svakom grafu G definirati digraf D tako da specificiramo svakom bridu iz G poredak njegovih krajeva (dakle razlikujemo bridove uv i vu). Ta specifikacija naziva se *orijentacija na G* , a D se naziva *pridruženi digraf* grafa G .

Većina definicija koje vrijede za grafove mogu se na sličan način definirati i za digrafove, pazeći naravno na orijentaciju.

Definicija 2.6. Luk koji je incidentan samo s jednim vrhom zove se *petlja*. Digraf je *jednostavan* ako nema petlje i nikoja dva luka ne spajaju isti par vrhova. Jednostavan digraf u kojemu je svaki par vrhova spojen lukom zove se *potpuni digraf*. *Prazan digraf* je digraf bez lukova.

Definicija 2.7. Digraf D' je *poddigraf* digrafa D ako vrijedi $V(D') \subseteq V(D)$, $A(D') \subseteq A(D)$ i $\psi_{D'}$ je restrikcija od ψ_D na $A(D')$.

2.1 Dišetnje, diputovi i povezanost digrafova

Definicija 2.1.1. *Usmjerena šetnja (dišetnja)* digrafa D je konačan niz vrhova i lukova $v_0 a_1 v_1 \dots a_n v_n$ gdje je a_i luk jednak $v_{i-1} v_i$, $i = 1, \dots, n$. Ovu dišetnju označavamo i (v_0, v_n) -dišetnja. *Duljina dišetnje* je broj lukova u dišetnji. Dišetnja je *zatvorena* ako je $v_0 = v_n$. *Usmjerena staza (distaza)* je dišetnja u kojoj su svi lukovi međusobno različiti (vrhovi se mogu ponavljati). *Usmjereni put (diput)* je

distaza u kojoj su svi vrhovi različiti. *Usmjereni ciklus (diciklus)* je zatvorena dišetnja u kojoj su svi vrhovi osim prvog i zadnjeg različiti. Za diciklus duljine k kažemo da je k -*diciklus* (ili *usmjereni k -ciklus*). Digraf je *acikličan* ako ne sadrži diciklus.

Definicija 2.1.2. Vrh v se može doseći u digrafu D iz vrha u ako postoji usmjereni (u, v) -put u D . Dva vrha digrafa D su *dipovezana* ako se jedan može doseći iz drugoga u D .

Definicija 2.1.3. Dipovezanost je relacija ekvivalencije na $V(D)$. Ako su V_1, V_2, \dots, V_w klase ekvivalencije, onda se poddigrafovi inducirani tim klasama zovu *dikomponente* digrafa D . Ako digraf D ima točno jednu komponentu povezanosti, odnosno ako su mu svaka dva međusobno različita vrha dipovezana, onda kažemo da je *dipovezan, jako povezan* ili *jak digraf* (eng. *strong digraph*). Digraf D je *slabo povezan* ako je pripadni graf povezan.

Može se primjetiti sa Slike 1 da digraf ne mora biti dipovezan iako je njegov pripadni graf povezan. Dakle, vidimo da je pripadni graf povezan jer ima jednu komponentu povezanosti, ali digraf nije dipovezan. Na primjer, ne postoji $(3, 2)$ -diput, tj. vrhovi 3 i 2 nisu dipovezani.

Definicija 2.1.4. *Striktни digraf* je digraf bez petlji i kojemu nikoja dva luka s istim krajevima nemaju istu orijentaciju.

Definicija 2.1.5. Digraf D je *simetričan* ako uvijek kada je uv luk u D , tada je i vu luk u D .

Definicija 2.1.6. *Usmjereni Hamiltonov put* je diput koji sadrži sve vrhove digrafa točno jednom. *Usmjereni Hamiltonov ciklus* je diciklus koji sadrži sve vrhove digrafa točno jednom osim početka i kraja (odnosno to je zatvoren Hamiltonov diput). Za digraf kažemo da je *Hamiltonov* ako sadrži usmjereni Hamiltonov

ciklus.

Definicija 2.1.7. *Usmjerena Eulerova staza* digrafa D je distaza koja sadrži svaki luk točno jednom. *Usmjerena Eulerova tura* je zatvorena distaza koja prolazi svakim lukom točno jednom.

3 Turniri

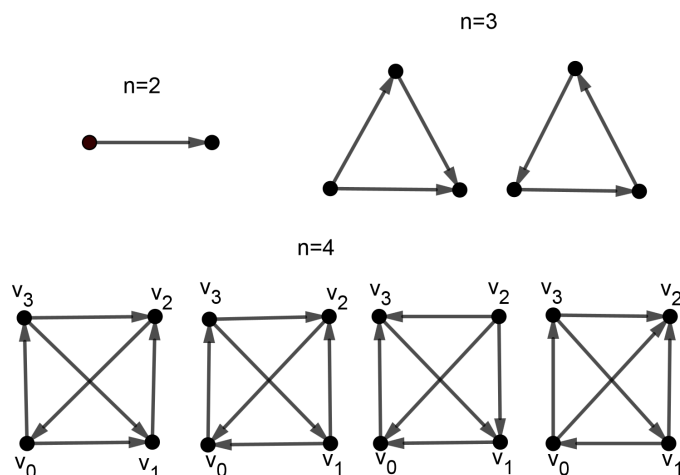
Definicija 3.1. *Turnir* je digraf kojemu je pripadni graf potpun.

Napomena 3.2. Često se u definicijama spominje da je turnir digraf kojemu je pripadni graf jednostavan i potpun, ali iz Definicije 2.6. možemo vidjeti da se jednostavnost podrazumijeva kada definiramo potpunost digrafa.

Napomena 3.3. Naziv turnir dolazi upravo od pojma turnira koji nam je poznat iz sporta, odnosno iz tzv. "round-robin" turnira gdje svaki igrač igra protiv svakog drugog igrača točno jednom i uvijek je netko pobjednik. Primjerice, na turniru sudjeluje n timova te će svaki od tih timova igrati protiv svakog od preostalih $n - 1$ timova. Također ne postoje neriješeni rezultati, što znači da u svakoj utakmici postoji pobjednički tim. Prikaz takvog natjecanja može se prikazati grafom s n vrhova i lukovima (u, v) koji predstavljaju pobjedu tima u nad timom v .

Primjer 3.4. Na Slici 2 imamo prikaz turnira s 2, 3 i 4 vrha. Ako bismo promatrali vrhove kao timove, tada je to prikaz turnira u kojem nastupaju 2, 3 i 4 tima te su prikazane sve moguće kombinacije rezultata tog turnira.

Želimo li sada rangirati popis timova po broju pobjeda možemo brojati broj lukova koji izlaze iz svakog vrha, odnosno izračunati izlazni stupanj $d_D^+(v)$ vrha v koji nam govori o broju pobjeda tog tima. Drugi način je pronaći usmjereni Hamiltonov put tako da pratimo put strelica i svaki prethodni vrh u tom diputu je pobjednik nad sljedećim vrhom u tom diputu.



Slika 2: Turniri s 2, 3 i 4 vrha

Dolazimo do prvog teorema vezanog za turnire.

Teorem 3.5. (Redei) Svaki turnir sadrži usmjereni Hamiltonov put.

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po broju vrhova turnira.

(B.I.) Za turnire s 2, 3 i 4 vrha možemo vidjeti direktno sa Slike 2.

(P.I.) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n vrhova, tj. da turnir s n vrhova sadrži usmjereni Hamiltonov put.

(K.I.) Neka je T turnir s $n+1$ vrhova v_0, v_1, \dots, v_n . Trebamo pokazati da T sadrži usmjereni Hamiltonov put. Maknemo li v_0 iz T dobivamo turnir $T - v_0$ s n vrhova v_1, \dots, v_n . Po pretpostavci indukcije, taj turnir sadrži usmjereni Hamiltonov put $v_1 \dots v_n$. Sada možemo razlikovati 2 slučaja:

1^o Kada je v_0v_1 luk u T , tada je $v_0v_1 \dots v_n$ usmjereni Hamiltonov put u T .

2^o Kada je v_1v_0 luk u T , možemo uzeti da je v_i prvi vrh u diputu za kojeg je luk v_0v_i u T . Tada je luk $v_{i-1}v_0$ u T pa je $v_1v_2 \dots v_{i-1}v_0v_{i+1} \dots v_n$ usmjereni Hamiltonov put. Ako takav v_i ne postoji, tada je $v_1 \dots v_nv_0$ usmjereni Hamiltonov put u T .

U svim slučajevima dobivamo usmjereni Hamiltonov put pa zaključujemo da tvrdnja teorema vrijedi.

□

Navodimo teorem čiji dokaz možete pronaći u [1] i [5].

Teorem 3.6. (*Moon*) Svaki vrh dipovezanog turnira T s n vrhova, $n \geq 3$, je sadržan u nekom usmjerenom k -ciklusu, za $k = 3, \dots, n$. Drugim riječima, svaki dipovezan turnir sadrži k -diciklus, $k = 3, \dots, n$.

Napomena 3.7. Turnir T iz Teorema 3.6. nazivamo pancikličkim (eng. vertex-pancyclic) jer sadrži cikluse svih duljina od 3 do n .

Kao posljedicu ovog teorema imamo da je svaki dipovezan (jako povezan) turnir Hamiltonov (sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus) pa kao poopćenje vrijede sljedeći teoremi.

Teorem 3.8. Turnir je dipovezan ako i samo ako sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus.

Teorem 3.9. Svaki turnir ima neparan broj Hamiltonovih diputeva.

3.1 k -partitni turniri

Definicija 3.1.1. Graf je k -partitan, $k \geq 1^2$, ako se skup vrhova može podijeliti na k disjunktних podskupova V_1, V_2, \dots, V_k tako da vrhovi iz istog podskupa V_i , $i = 1, \dots, k$, nisu međusobno susjedni. k -partitan graf je *potpun* ako je svaki vrh iz podskupa V_i susjedan sa svakim vrhom koji nije iz skupa V_i , $i \in \{1, \dots, k\}$. k -partitni turnir je orijentirani potpuni k -partitni graf.

Napomena 3.1.2. Skupove V_1, V_2, \dots, V_k često nazivamo i *partitnim skupovima* grafa.

Pokazat ćemo dva teorema vezana uz karakterizaciju k -partitnih turnira koji sadrže 3-cikluse.

²za $k = 1$ dobivamo prazan graf

Teorem 3.1.3. k -partitni turnir T , $k \geq 3$, sadrži usmjereni 3-ciklus ako i samo ako postoji usmjereni ciklus u T koji sadrži vrhove najmanje tri partitna skupa.

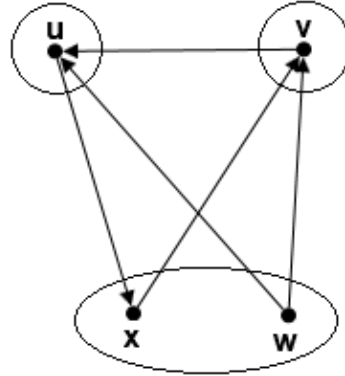
Dokaz. \Rightarrow Pretpostavimo da T sadrži usmjereni 3-ciklus. Po definiciji k -partitnog turnira znamo da tada vrhovi tog diciklusa moraju pripadati trima različitim partitnim skupovima (jer vrhovi u istim partitnim skupovima nisu susjedni). Dakle, T sadrži diciklus čiji su vrhovi u najmanje tri partitna skupa.

\Leftarrow Pretpostavimo da T sadrži usmjereni ciklus kojem pripadaju vrhovi iz najmanje tri partitna skupa i da je C takav diciklus najmanje moguće duljine. Tada postoje tri uzastopna vrha x, y, z iz C koji pripadaju različitim partitnim skupovima X, Y, Z iz T . Moramo pokazati da je C usmjereni 3-ciklus. Kako su x i z iz različitih partitnih skupova k -partitnog turnira T , tada u T postoji ili luk xz ili luk zx (zbog potpunosti). Ako postoji luk zx , tada je $xyzx$ usmjereni 3-ciklus. Ako postoji luk xz , tada je $C' = (C - y) + xz$ usmjereni ciklus duljine za jedan manje od C . Tada po pretpostavci za ciklus C možemo zaključiti da C' sadrži vrhove iz samo dva partitna skupa X i Z (jer smo izbacili y). Neka je u vrh iz C' koji slijedi odmah nakon z u C' . Tada je $u \in X$ (jer je $z \in Z$). Ako je uy luk u T , tada je $yzuy$ usmjereni 3-ciklus koji sadrži vrhove iz tri partitna skupa od T . Ako uy nije luk u T , tada zbog potpunosti od T vrijedi da je yu luk u T . Promatramo $C'' = (C - z) + yu$. C'' je usmjereni ciklus koji je kraći od C i sadrži još barem jedan vrh osim x, y i u . Sljedbenik od u u C'' pripada Z pa tada C'' sadrži vrhove iz tri partitna skupa od T . Tu dolazimo do kontradikcije s izborom od C (odnosno minimalnošću od C) jer smo pronašli ciklus istih svojstava kao C , ali manje duljine. Time zaključujemo da yu nije luk u T što dovodi do kontradikcije s činjenicom da T mora biti potpun k -partitan graf. Time je pokazana tvrdnja.

□

Primjer 3.1.4. Na Slici 3 možemo vidjeti 3-partitni turnir. On sadrži usmjereni 3-ciklus $vuxv$. Po Teoremu 3.1.3. taj turnir bi trebao imati usmjereni ciklus koji sadrži vrhove najmanje tri partitna skupa. Njegovi partitni skupovi su $\{u\}$, $\{v\}$, $\{x, w\}$ i ciklus $vuxv$ sadrži vrhove iz različitih partitnih skupova pa vrijedi

tvrdnja teorema. Možemo vidjeti da vrijedi i obrat.



Slika 3: 3-partitni turnir

Teorem 3.1.5. Neka je T k -partitni turnir, $k \geq 3$. Tada svaki vrh koji se nalazi u usmjerenom ciklusu iz T mora pripadati usmjerenom 3-ciklusu ili usmjerenom 4-ciklusu.

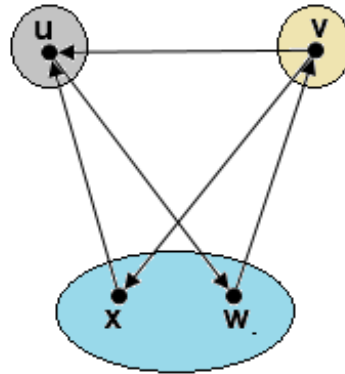
Dokaz. Neka je C usmjereni ciklus najkraće duljine u T koji sadrži neki proizvoljan vrh u . Pretpostavimo da C nije usmjereni 3-ciklus. Pokazat ćemo da tada u pripada usmjerenom 4-ciklusu. Neka su u, x, y, z redom vrhovi iz C .

Ako je uy luk u T , tada je $C' = (C - x) + uy$ usmjereni ciklus u T koji sadrži u i za jedan je kraće duljine od C . Tu dolazimo do kontradikcije s minimalnošću od C .

Ako uy nije luk u T , a yu je luk u T , tada je $uxyu$ usmjereni 3-ciklus koji sadrži u . Tu dolazimo do kontradikcije s činjenicom da usmjereni ciklus koji sadrži u nije 3-ciklus. Dakle, ni yu nije luk u T . Tada zbog potpunosti slijedi da u i y moraju pripadati istom partitnom skupu. Slijedi da u i z moraju pripadati različitim partitnim skupovima od T . Ako je uz luk u T , tada je $C'' = (C - \{x, y\}) + uz$ usmjereni ciklus koji sadrži u i kraće je duljine od C . To je opet kontradikcija s minimalnošću od C pa dobivamo da ni uz nije luk u T . Ako je zu luk u T imamo da je $uxyzu$ usmjereni 4-ciklus koji sadrži u i to je ciklus koji smo tražili.

□

Teorem 3.6. ne vrijedi za dipovezane k -partitne turnire. Kontraprimjer je Slika 4 jer primjerice vrh x ne pripada niti jednom usmjerenom 3-ciklusu.



Slika 4: dipovezan 3-partitan turnir

3.2 Vektori uspjeha

Definicija 3.2.1. *Uspjeh* vrha v je vrijednost izlaznog stupnja vrha v i označava se s_v ili $s(v)$. Za vrhove v_1, \dots, v_n turnira T , niz (s_1, \dots, s_n) (ili $(s(v_1), \dots, s(v_n))$) zove se *vektor uspjeha* turnira T .

Napomena 3.2.2. Uspjeh vrha v zapravo predstavlja broj igrača koje je igrač v pobijedio, dok vektor uspjeha predstavlja niz s brojem pobjeda svakog igrača ostvarenih u turniru gdje svaki igrač igra protiv svakog od preostalih igrača. Tada uspjeh vrha v može biti broj od 0 (kada igrač nikoga nije pobijedio) do $|V(T)| - 1$ (kada je igrač pobijedio svakog preostalog igrača), gdje je $|V(T)|$ broj vrhova u turniru T .

Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete da niz brojeva bude vektor uspjeha nekog turnira T .

Teorem 3.2.3. (Landau) Niz nenegativnih brojeva s_1, \dots, s_n , $0 \leq s_i \leq n - 1$, u nepadajućem poretku je vektor uspjeha turnira T ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^p s_i \geq \binom{p}{2}, \quad 1 \leq p \leq n,$$

s jednakošću kada je $p = n$.

Primjer 3.2.4. Na Slici 2 možemo vidjeti istinitost ovog teorema. Naime, za turnire s brojem vrhova $n = 2$ primjenom teorema dobivamo da suma elemenata vektora uspjeha mora biti $\binom{2}{2} = 1$. Tada je pripadni vektor uspjeha jednak $(0, 1)$, što se može očitati direktno na slici. Na Slici 2 možemo isčitati da su vektori uspjeha za $n = 3$ jednaki $(0, 1, 2)$ i $(1, 1, 1)$. Dakle, suma elemenata jednaka je 3 što dobivamo i prethodnim teoremom ($\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$). Za $n = 4$ pripadni vektori uspjeha su $(0, 1, 2, 3)$, $(1, 1, 2, 2)$, $(0, 2, 2, 2)$ i $(1, 1, 1, 3)$.

Napomena 3.2.5. Vektor uspjeha ne mora određivati samo jedan turnir. Primjerice, postoje dva turnira čiji je vektor uspjeha jednak $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ što možemo vidjeti na Slici 5.

Definicija 3.2.6. Uređena trojka (u, v, w) vrhova turnira T naziva se *tranzitivna trojka* ako vrijedi da su uv i vw lukovi u T , tada je uw također luk u T .

Teorem 3.2.7. Ukupan broj tranzitivnih trojki u turniru T sa vektorom uspjeha (s_1, \dots, s_n) jednak je

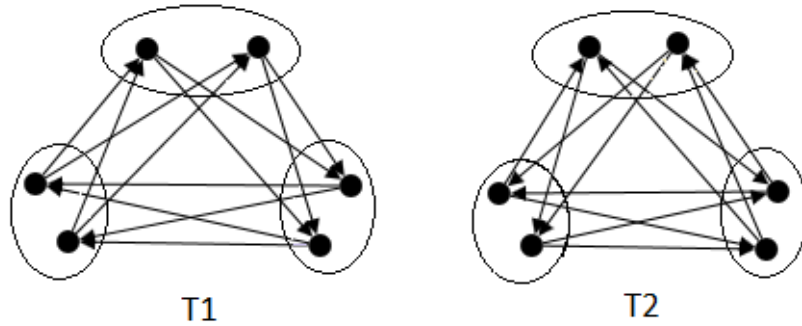
$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i(s_i - 1)}{2} = \sum_{i=1}^n \binom{s_i}{2}.$$

Napomena 3.2.8. Tranzitivne trojke su nam bitne kod određivanja broja usmjerenih 3-ciklusa. Broj usmjerenih 3-ciklusa u turniru T s n vrhova dobiva se oduzimanjem ukupnog broja tranzitivnih trojki vrhova iz T od ukupnog broja

trojki vrhova iz T . Time se dobiva da je ukupan broj 3-diciklusa u T jednak

$$\binom{n}{3} - \sum_{v \in V(T)} \binom{s_v}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \sum_{v \in V(T)} \frac{s_v(s_v-1)}{2}.$$

Primjer 3.2.9. Dakle, vektor uspjeha određuje broj 3-diciklusa turnira. Slika 5 pokazuje kako ova tvrdnja ne mora vrijediti za k -partitne turnire. Naime, prikazani 3-partitni turniri imaju vektor uspjeha $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$, ali turnir T1 ima osam usmjerenih 3-ciklusa, dok turnir T2 ima pet usmjerenih 3-ciklusa.



Slika 5: 3-partitni turniri vektora uspjeha $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$

Sljedeći teorem daje nam formulu za izračunavanje broja usmjerenih 3-ciklusa u k -partitnom turniru.

Teorem 3.2.10. Neka je T k -partitni turnir, $k \geq 3$, s partitnim skupovima V_0, V_1, \dots, V_{k-1} . Tada je broj usmjerenih 3-ciklusa u T dan s

$$\sum_{0 \leq i < j < l \leq k-1} |V_i| |V_j| |V_l| - \sum_{v \in V(T)} \sum_{i < j} O_i(v) O_j(v),$$

gdje je $O_i(v)$ broj izlaznih susjednih vrhova od v u skupu V_i .

Dokaz. Neka je S skup trojki vrhova iz T tako da svaki od vrhova pripada

razliĉitim partitnim skupovima. Neka je $N = |S|$. Tada vrijedi

$$N = \sum_{0 \leq i < j < l \leq k-1} |V_i| |V_j| |V_l|.$$

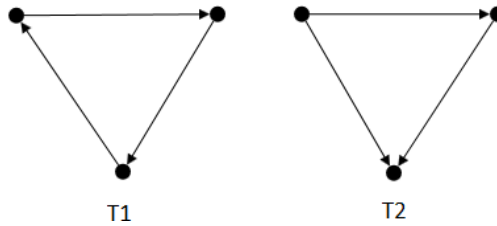
Svaka orijentacija trokuta daje usmjereni 3-ciklus ili tranzitivnu trojku. Zato je broj usmjerenih 3-ciklusa jednak $N - N_1$, gdje N_1 oznaĉava broj tranzitivnih trojki u T . Takoĉer vrijedi da je trojka vrhova tranzitivna ako i samo ako jedan od vrhova ima lukove prema preostala dva vrha u toj trojki. Broj takvih trojki kojima neki vrh v moŹe pripadati je $\sum_{i < j} O_i(v) O_j(v)$. Kako je v proizvoljan vrh iz T , slijedi $\sum_{v \in V(T)} \sum_{i < j} O_i(v) O_j(v)$. Dakle, broj usmjerenih 3-ciklusa u turniru T je

$$N - N_1 = \sum_{0 \leq i < j < l \leq k-1} |V_i| |V_j| |V_l| - \sum_{v \in V(T)} \sum_{i < j} O_i(v) O_j(v).$$

□

Primjer 3.2.11. Primjenom ovog teorema dobivamo da je broj usmjerenih 3-ciklusa u 3-partitnom turniru jednak $|V_0| |V_1| |V_2| - \sum_{i=0}^2 \sum_{v \in V_i} O_{i+1}(v) O_{i+2}(v)$, gdje je $\sum_{i=0}^2 \sum_{v \in V_i} O_{i+1}(v) O_{i+2}(v)$ broj tranzitivnih trojki tog turnira te se indeksi uzimaju modulo 3.

Primjer 3.2.12. Slika 6 daje primjere 3-partitnih turnira za koje vrijede da turnir T1 sadrŹi 3-dicikluse, ali nema tranzitivnih trojki, dok turnir T2 nema 3-diciklusa, ali sadrŹi tranzitivne trojke.



Slika 6: 3-partitni turniri sa i bez tranzitivnih trojki

3.3 Matrica susjedstva digrafa

Definicija 3.3.1. *Matrica susjedstva* (eng. adjacency matrix) digrafa D na skupu vrhova $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$ je $n \times n$ matrica $A(D) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj lukova u D s početkom u v_i i krajem u v_j .

Napomena 3.3.2. Za matricu susjedstva neusmjerenih grafova općenito vrijedi $A = A^T$, gdje je A^T transponirana matrica matrice A .

Primjer 3.3.3. Promatrajući Sliku 1 možemo isčitati pripadnu matricu susjedstva za zadani digraf. Ona je oblika

$$A(D) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Može se uočiti kako suma svakog retka te matrice daje izlazni stupanj pojedinih vrha tog digrafa. Primjerice, u Primjeru 2.4. rekli smo da je izlazni stupanj vrha 1 jednak 5. Ako iz matrice susjedstva zbrojimo vrijednosti prvog retka dobivamo također 5, znači prvi redak predstavlja izlazne lukove iz vrha 1. Slično se može primijetiti da je suma svakog stupca jednaka ulaznom stupnju tog pripadnog vrha.

Napomena 3.3.4. Kada govorimo o turnirima, tada se obično na pozicijama

matrice susjedstva stavlja $a_{ij} = 1$ ako je igrač x_i pobijedio igrača x_j ³ i $a_{ij} = 0$ ako je igrač x_i izgubio protiv igrača x_j . Time dobivamo matricu ispunjenu nulama i jedinicama. Iz Primjera 3.3.3. znamo da nam suma svakog retka daje izlazni stupanj vrha. Prema tome, po Definiciji 3.2.1., to je ujedno i uspjeh tog vrha. Nadalje, sve te sume daju vektor uspjeha zadanog turnira te ga često označujemo s R . Po Teoremu 3.2.3. vrijedi da je suma svih elemenata u matrici turnira veličine n jednaka $\binom{n}{2}$.

Napomena 3.3.5. Klasa svih matrica susjedstva turnira kojima je vektor uspjeha R označava se $\tau(R)$.

Mogu se promatrati turniri gdje svaki igrač igra p igara protiv svakog preostalog igrača. Matrica susjedstva takvog turnira naziva se matrica p -turnira (eng. *p-tournament matrix*) i zadovoljava jednakost $a_{ij} + a_{ji} = p$ za $1 \leq i < j \leq n$. Suma elemenata takve matrice jednaka je

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} + a_{ji} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} p = p \binom{n}{2}.$$

Element a_{ij} predstavlja broj igara u kojima je igrač x_i pobijedio igrača x_j . Klasa matrica p -turnira sa vektorom uspjeha R označava se $\tau(R; p)$.

Općenitije možemo definirati matricu P -turnira (P je nenegativan cijeli broj) koja će biti gornje-trokutasta matrica s nulama na glavnoj dijagonali, a p_{ij} je broj igara koje će se odigrati između igrača x_i i igrača x_j . Tada suma elemenata matrice zadovoljava

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} + a_{ji} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij},$$

a klasa takvih matrica označava se $\tau(R; P)$.

³Razlog tome je što svaki igrač može igrati najviše jedanput protiv drugog igrača.

Drugi način označavanja matrice susjedstva turnira je da se podaci ubacuju ovisno o sustavu

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{ako igrač } i \text{ pobijedi igrača } j \\ -1 & \text{ako igrač } i \text{ izgubi od igrača } j \\ 0 & \text{ako } i = j \end{cases} \quad (1)$$

Uloga matrice susjedstva je prikazati rezultat turnira, odnosno dati rang-listu igrača koji sudjeluju u turniru. Te rang-liste određuju koji je igrač bio najjači na turniru i pomažu u predviđanju tko bi mogao pobijediti u idućem turniru.

4 Primjena digrafova i turnira

Digrafovi se mogu upotrebljavati kada želimo planirati vožnje jednosmjernim ulicama. Ako reprezentiramo dijelove grada vrhovima i jednosmjerne ulice kojima prolazimo da dođemo iz jednog dijela grada u drugi s usmjerenim bridovima, dobit ćemo usmjereni graf. Kako vožnja jednosmjernim ulicama nije najidealnije rješenje i najčešće se ne događa u stvarnosti, nećemo je objašnjavati, ali postoji problem vrlo sličan ovome. To je problem mreže javnog prijevoza, odnosno transportne mreže.

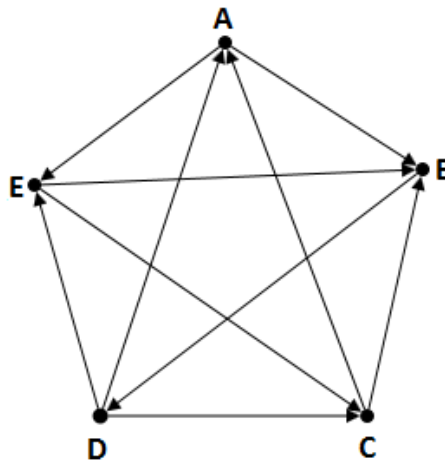
Promatramo li linijski prijevoz nekog grada, na primjer linije autobusa, tada možemo za vrhove grafa uzeti stanice na kojima se autobusi zaustavljaju, a za lukove uzeti usmjerene puteve kojima autobus dođe od jedne stanice na drugu i dobivamo digraf. Radi jednostavnosti uzet ćemo linije s 5 stanica (Slika 7). Želimo da nam autobusi imaju mogućnost iz svake stanice doći na svaku od preostalih stanica i svaki autobus ima svoju liniju tako da se ne vraćaju istim putem na prethodnu stanicu.

Ovdje smo taj problem predočili turnirom s 5 vrhova (možemo primijetiti kada maknemo orijentacije, njegov pripadni graf je potpun). Iz svakog vrha možemo doći do nekog od preostalih vrhova. Primjerice, iz stanice A imamo direktan (A,B)-diput, (A,C)-diput je npr. ABDC, (A,D)-diput je npr. ABD, (A,E)-diput je direktan ili možemo npr. ABDE. Dakle, ne moraju postojati jedinstveni diputevi od jedne stanice do druge, ali naravno da ako tražimo najkraći diput, odnosno onaj koji nam je najefikasniji i najisplativiji, uzet ćemo onaj direktan, dok ove duže diputeve prolazimo ako prije moramo obići neke druge stanice ili ako nam je direktan diput radi nečega prepriječen.

U digrafu možemo pronaći i dicikluse. Primjerice, prvi autobus kreće sa stanice A, ide na stanicu B pa D, onda E pa C i može se vratiti u A. Time smo pokazali da postoji usmjereni Hamiltonov ciklus ABDECA u tom digrafu pa po Teoremu 3.8. digraf je dipovezan. Također ga možemo promatrati kao dipovezan 5-partitni turnir gdje svaka stanica pripada jednom partitnom skupu i sve stanice su međusobno povezane lukovima. Povezanost tih partitnih skupova omogućuje

veći stupanj povezanosti linija što omogućava i veću cirkulaciju putnika, odnosno što je više stanica povezano, to putnici imaju veću mogućnost prelaženja s jedne stanice na drugu, s jedne linije na drugu pa je prijevoz učinkovitiji.

Naravno, sve ima svoje nedostatke pa ako imamo tako gusto povezane linije dolaskom nekog problema teže ćemo pronaći rješenje jer imamo više bitnih točaka. Primjerice, ako se odvijaju neki radovi ili se dogodila neka nesreća na putu od jedne stanice na drugu, dolazi do privremene nedostupnosti te stanice pa moramo pronaći neki drugi prelazak između tih stanica ili je moramo isključiti iz linije čime nam se put mijenja. Današnje planiranje mreža javnog prijevoza uglavnom su orijentirane na visoku povezanost, a manje na slabe točke te organizacije.



Slika 7: linije 5 autobusnih stanica

Digrafovi se koriste i kod definiranja logičkog slijeda obavljanja nekog zadatka, odnosno kada nam je bitno koji korak zadatka ćemo obaviti ranije od ostalih. Tada će se zadatak razlomiti na više koraka kod kojeg na idući korak možete ići samo ako ste obavili neki nužni prethodni korak. Na primjer, kod izrade nekog kolača najprije moramo izlomiti jaje u posudu, a tek onda ga izmiksati. Kod modeliranja, vrhovima digrafa pridružuju se prirodni brojevi (koji će biti različiti za sve vrhove) tako da za luk $v_i v_j$ prirodni broj pridružen v_i bude manji od onog pridruženog v_j . Može se uočiti da je ovo moguće napraviti samo ako je digraf acikličan. Tada svaki vrh predstavlja neki korak zadatka i njegovim rješavanjem prelazi se na idući korak numeriran sljedećim prirodnim brojem.

Usmjereni aciklički grafovi (eng. directed acyclic graph - DAG) imaju važnu ulogu u znanstvenim i računalim primjenama, od biologije (gdje se koriste za proučavanje evolucije, raspored obiteljskih stabala i epidemiologiji) do modeliranja informacija i programiranju (npr. pokazivači). Općenito, DAG ima topološko uređenje, tj. vrhovi su "posloženi" linearno tako da se ne pojavljuju ranije od onih vrhova koji su krajnji vrhovi lukova koje izlaze iz tog vrha. Primjerice, proračunska tablica može se modelirati kao DAG tako da vrhovi budu ćelije, a lukovi se konstruiraju kad god formula u nekoj ćeliji koristi vrijednost iz druge ćelije. Sve su popularniji u zdravstvu kod proučavanja uzročnih posljedica i nuspojave.⁴

Turniri se koriste kod rasporeda rezultata, odnosno ako se odvija neka utakmica ili turnir, oni nam olakšavaju stvaranje poretka pobjednika. Kako smo rekli u Primjeru 3.4., možemo ih poredati po iznosu izlaznog stupnja i time dobiti broj pobjeda pojedinog igrača ili ako nam nije bitan broj bodova onda je dovoljno konstruirati Hamiltonov diput i dobiti redoslijed igrača u poretku pobjednika prema gubitniku.

Primjerice, zamislimo da želimo napraviti rang-listu sudionika na nekom matematičkom turniru. Neka je Slika 7 prikaz jednog takvog turnira u kojem sudjeluje pet timova. Tražimo li Hamiltonov diput, možemo na primjer uzeti AECBD. Tada je tim A pobjednik nad timom E, E je pobjednik nad C, itd. Nedostatak ove metode je što nam ona ne daje potpuni uvid u ostale rezultate, odnosno ne znamo koliko je zapravo pobjeda imao pojedini tim. Također, turnir može imati više Hamiltonovih puteva, npr. EBDCA.

Promatramo li redom uspjehe pojedinog tima, dobivamo za zadani turnir vektor uspjeha $(2, 1, 2, 3, 2)$. Nedostatak ove metode je što ovaj vektor uspjeha ne razlikuje timove koji imaju isti uspjeh, primjerice timove A, C i E tretira kao jednake neovisno o tome što je možda netko od njih pobjedio tim s većim uspjehom od drugih. Da bi se taj nedostatak popravio, cilj je konstruirati niz vektora uspjeha

⁴Detaljnije o tome možete pronaći u [8].

koji će u svakom idućem koraku umjesto uspjeha tima napraviti sumu uspjeha timova koje je pobedio. Za naš turnir idući vektor uspjeha je $s_2 = (3, 3, 3, 6, 3)$ jer za uspjeh tima A stavi sumu uspjeha timova koje je A pobedio. Znači A je pobedio timove B i E čiji su uspjesi 1 i 2 pa je njegov uspjeh jednak 3. Analogno se dobiva i za ostale timove. Nastavimo li ovaj postupak, iz vektora uspjeha početak će nam se isticati onaj uspjeh koji pripada timu koje će "zauzeti" prvo mjesto. Detaljniji opis ove metode možete pronaći u [2].

Još jedna primjena turnira je kod sortiranja poslova. Zamislimo da imamo stroj koji mora obaviti 5 različitih poslova. Nakon svakog obavljenog posla stroj se mora pripremiti za rad idućeg posla. Vrijeme te pripreme bit će označen s t_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, $i \neq j$. Treba pronaći odgovarajući niz obavljanja poslova tako da stroj gubi najmanje moguće vremena za pripremu. Jedna od metoda za rješavanje ovog problema je da se konstruira digraf s 5 vrhova tako da vrijedi da sadrži luk $v_i v_j$ ako i samo ako $t_{ij} \leq t_{ji}$, $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, $i \neq j$. Tada će taj graf biti turnir i moći ćemo pronaći usmjereni Hamiltonov put koji će nam dati traženi niz poslova. Okrenemo li taj niz da ide suprotnim redoslijedom, dobili bismo najgori mogući rezultat.

Osim spomenutog, usmjereni grafovi mogu služiti kao model za analizu protoka robe od proizvođača do potrošača, npr. prijenos artikala u trgovini, prijenos signala u radiostanicama, protok vode u cijevima, itd. Za takve simulacije koriste se posebni digrafovi koji imaju dodatna svojstva i strukture - mreže. Više o tome može se pročitati u [9] i [6].

5 Zaključak

Potreba za digrafoima (i općenito za grafovima) je vrlo velika jer olakšava prikazivanje i organizaciju rješavanja nekog problema pa se mogu primijeniti u raznim aspektima svakodnevnog života i organizaciji poslova. Bitni su nam kada poredak rada nekog procesa uvelike utječe na rezultate pa se zato puno koriste u optimizaciji. Također postoje posebni digrafovi koji zbog svojih svojstava imaju razvijenu cijelu svoju teoriju i vrlo su primjenjivi, a nazivamo ih mreže. Primjena turnira je postala sve zastupljenija pa se zbog toga i cijela teorija proučavanja i rada s turnirima i digrafoima i dalje razvija.

Popis slika

1	Digraf i pripadni graf	3
2	Turniri s 2, 3 i 4 vrha	8
3	3-partitni turnir	11
4	dipovezan 3-partitan turnir	12
5	3-partitni turniri vektora uspjeha $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$	14
6	3-partitni turniri sa i bez tranzitivnih trojki	16
7	linije 5 autobusnih stanica	20

Literatura

- [1] Balakrishnan V. K., Ranganathan K., *A Textbook of Graph Theory*, Springer, New York, 2012., 37-47. URL: <http://meskc.ac.in/wp-content/uploads/2018/12/A-Textbook-of-Graph-Theory-R.-Balakrishnan-K.-Ranganathan.pdf> (25.2.2022.)
- [2] Bondy J. A., Murty U. S. R., *Graph Theory with Applications*, Elsevier Science Publishing Co., New York, 5. izdanje, 1982., 171-189. URL: <https://www.zib.de/groetschel/teaching/WS1314/BondyMurtyGTWA.pdf> (6.7.2022.)
- [3] Chen I., *Tournament Matrices*, Free Software Foundation, 2014., URL: <http://buzzard.ups.edu/courses/2014spring/420projects/math420-UPS-spring-2014-chen-tournament-matrices.pdf> (1.7.2022.)
- [4] Geogebra, URL: <https://www.geogebra.org/classic?lang=en> (12.3.2022.)
- [5] Harray F., *Graph Theory*, Addison-Wesley series in mathematics, Addison-Wesley, 1969., 198-213.
- [6] Mihaljević M., *Primjena teorije grafova u proučavanju mreža javnog prijevoza*, Dabar, Zagreb, 2019., URL: <https://repositorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf3A8402/datastream/PDF/view> (8.7.2022.)
- [7] Pirzada S., Naikoo T. A., *Score sets in k -partite tournaments*, Journal of Applied Mathematics and Computing, 2006., 237-240.
URL: https://www.researchgate.net/publication/225414075_score_sets_in_k-partite_tournaments (28.6.2022.)
- [8] Tennant P. W. G., Murray E. J. i dr., *Use of directed acyclic graphs (DAGs) to identify confounders in applied health research: review and recommendations*, International Journal of Epidemiology, 2020. URL: <https://academic.oup.com/ije/article/50/2/620/6012812> (7.7.2022.)

- [9] Veljan D., *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001., 1. izdanje, 235-359.
- [10] Wolfram, URL: <https://mathworld.wolfram.com/Tournament.html> (27.6.2022.)
URL: <https://mathworld.wolfram.com/ScoreSequence.html> (28.6.2022)
URL: <https://mathworld.wolfram.com/TournamentMatrix.html> (1.7.2022.)