

Uloga matematičkih definicija u razumijevanju matematičkih koncepata

Sedlaček, Valentina

Master's thesis / Diplomski rad

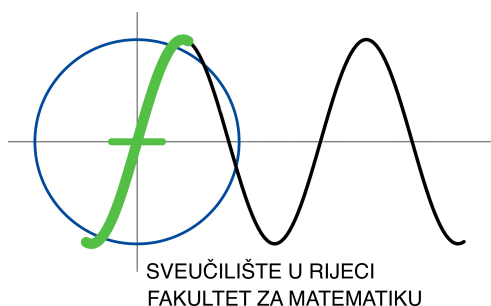
2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:196:592812>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-19**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



Sveučilište u Rijeci – Fakultet za matematiku
Diplomski sveučilišni studij Matematika – smjer nastavnički

Valentina Sedlaček

**Uloga matematičkih definicija u razumijevanju matematičkih
koncepta**

Diplomski rad
Rijeka, veljača 2023.

Sveučilište u Rijeci – Fakultet za matematiku
Diplomski sveučilišni studij Matematika – smjer nastavnički

Valentina Sedlaček

**Uloga matematičkih definicija u razumijevanju matematičkih
koncepta**

Mentor: dr. sc. Sanja Rukavina

Diplomski rad
Rijeka, veljača 2023.

Sadržaj

1. UVOD	1
2. MATEMATIČKI KONCEPTI.....	2
3. FORMIRANJE MATEMATIČKIH POJMOVA.....	4
3.1. Matematički pojam	4
3.2. Definicija pojma	7
3.3. Čimbenici koji utječu na proces usvajanja matematičkih pojmova	9
4. PRIKAZ NEKIH ISTRAŽIVANJA.....	13
4.1. Istraživanja provedena na uzorku učenika srednjih škola	14
4.2. Istraživanja provedena na uzorku studenata matematike	16
5. STAVOVI NASTAVNIKA MATEMATIKE	22
5.1. Istraživanje provedeno tehnikom ankete na uzorku od 49 nastavnika Matematike	22
5.2. Istraživanje provedeno tehnikom intervjua na uzorku od 4 nastavnika Matematike	30
6. ZAKLJUČAK	38
7. LITERATURA.....	40
8. POPIS SLIKA	42

SAŽETAK

Učenici u nastavi Matematike tijekom osnovne i srednje škole usvajaju matematičke pojmove. Pojmovi se usvajaju od jednostavnih k složenijima, ali i postupno u tri etape: zapažanje, predodžba o pojmu, formiranje i usvajanje pojma. Za usvajanje pojma uglavnom je neizostavna i definicija pojma. Često nakon izrečene definicije pojma učenici na nastavi rješavaju odgovarajuće zadatke. Proces formiranja novog pojma, teoreme, zadatke i rješavanje matematičkih problema ubrajamo u matematički koncept. Cilj je ovog rada pokazati kakva je povezanost matematičkog koncepta s definicijom pripadnog pojma. Jedan od najvažnijih matematičkih pojmova jest pojam funkcije. U ovom ćemo radu najveći dio pozornosti posvetiti pojmu funkcije, tj. povezanosti matematičkog koncepta funkcije s definicijom pojma funkcije. Preciznije: mogu li učenici koji ne poznaju definiciju pojma funkcije ispravno riješiti zadatak, odnosno slijedi li iz poznavanja definicije pojma funkcije ispravno rješavanje zadataka ili možda ne?

Ključne riječi: matematički koncepti, matematički pojam, definicija pojma, pojam funkcije

1. UVOD

Već u predškolskoj dobi učenici uče prebrojavati. Prebrojavanje se usvaja pomoću predmeta iz svakodnevnog života: bombonima, olovkama, lopticama, igračkama. Dakle, u toj dobi matematika se temelji na intuitivnom zapažanju konkretnih primjera. U nižim razredima osnovne škole učenici upoznaju i usvajaju osnovne matematičke pojmove: broj, zbroj, razliku, trokut, kvadrat, pravokutnik, opseg, površinu, volumen. U višim razredima osnovne škole to se znanje nadopunjuje i proširuje. Često se usvajanje novih matematičkih pojmova tijekom nastave temelji na primjerima iz svakodnevnog života, a učenici potom usvajaju definiciju promatranog matematičkog pojma. Nakon usvajanja pojma i definicije učenici većinom rješavaju zadatke. Time smo opisali najčešći redoslijed usvajanja matematičkih koncepata: primjer iz svakodnevnog života → definicija pripadnog matematičkog pojma → rješavanje odgovarajućih matematičkih problema (zadataka).

Nastava Matematike uključuje mnogo matematičkih pojmova. Jedan je od najvažnijih pojam funkcije. Funkcije, između ostalog, susrećemo u ovisnosti plaćenog iznosa i broja kupljenih artikala ili plaćenog iznosa i količine (m^3) potrošene vode, u bankarstvu, ekonomiji, farmaciji, građevini, prehrambenoj industriji. Dakle, uočavamo da funkcije imaju primjenu u važnim granama ljudske djelatnosti. Prema Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije (u nastavku Kurikulum), učenici u 7. razredu osnovne škole usvajaju pojam linearne ovisnosti. Preciznije, učenici se tada postupno pripremaju za uvođenje pojma funkcije koji se usvaja kasnije u srednjoj školi. No čine to nesvjesno jer pojam funkcije tada ne spominju. Upravo u 2. razredu srednje škole učenici usvajaju pojam funkcije. Pogledamo li kronološki usvajanje pojedinih vrsta funkcija tijekom srednje škole, uočavamo sljedeće: već u 1. razredu srednje škole učenici usvajaju pojam linearne funkcije. Kasnije, u 2. i 3. razredu srednje škole učenici usvajaju kvadratnu, eksponencijalnu, logaritamsku funkciju te trigonometrijske funkcije.

Cilj je ovog rada istražiti povezanost matematičkih koncepata i definicija matematičkih pojmova, s naglaskom na pojam funkcije. Preciznije: mogu li učenici koji ne znaju definiciju pojma funkcije ispravno riješiti matematički zadatak, odnosno slijedi li iz poznavanja definicije pojma funkcije ispravno rješavanje zadataka ili možda ne?

2. MATEMATIČKI KONCEPTI

Matematički koncept spoznaja je o povezanosti određenih matematičkih znanja (Simon, 2020, prema Simon, 2017). Preciznije, prema navedenom autoru, teme koje se tek usvajaju u nastavi Matematike trebaju biti povezane s prethodno naučenim. Štoviše, to je u skladu s načelima nastave Matematike, posebice s načelom postupnosti, povezanosti i sustavnosti.

Nastava Matematike u osnovnim i srednjim školama uključuje obradu i usvajanje nastavnih tema, odnosno sadržaja. Matematički koncepti usvajaju se u okviru odgovarajućih matematičkih sadržaja. Nastavnik, kao moderator nastavnog sata, odabirom primjera, sredstava i načina poučavanja ostvaruje obradu nastavnih sadržaja. Usvajanje novog matematičkog koncepta najčešće započinje primjerom iz kojeg učenici na nastavnikov poticaj uočavaju neka svojstva, odnosno obilježja te na temelju toga donose određene zaključke. Tako koncipirani primjeri obično sadrže probleme iz svakodnevnog života bliske učenicima i njima se potiče motivacija za usvajanje novih sadržaja. Prikazi problema iz svakodnevnog života i mogućnost rješavanja problema na različite načine potiču i kreativnost kod učenika (Cotić i Felda, 2011). Također, u uvodnom primjeru mogu se pojaviti teme koje povezuju Matematiku s drugim nastavnim predmetom, na primjer Fizikom ili Geografijom. Zatim se u nastavi obično definira promatrani pojam. Nadalje, osim zadataka često se tijekom nastave navode određena svojstva promatranog pojma, ponekad teoremi, tj. karakterizacije vezane uz definiciju pojma. Nakon spomenutog, uglavnom se u nastavi rješavaju problemi odnosno zadatci. Time smo opisali tijek uvođenja novih matematičkih znanja, tj. matematičkih koncepata. Dakle, matematički koncept uključuje proces formiranja određenog matematičkog pojma, rješavanje odabranih zadataka te iskazivanje i dokazivanje teorema vezanih uz promatrani pojam. Uočavamo da svaki korak usvajanja novog matematičkog koncepta uključuje povezivanje s prethodno naučenim.

Navedeni tijek uvođenja novog matematičkog koncepta može isključivati definiciju pojma ako je riječ o pojmu koji se ne definira. Na primjer, pojam točke ili skupa. No takvi matematički koncepti nisu predmet istraživanja ovog rada.

Pogledajmo na konkretnom primjeru uvođenje koncepta eksponencijalne funkcije u 3. razredu gimnazije. Prema Varošaneć (2020), koncept eksponencijalne funkcije uvodi se primjerom u kojem se proučava i analizira povećanje broja bakterije *Escherichije coli* tijekom vremena. U ovom primjeru povezuju se teme iz Matematike s temom iz Biologije. U primjeru se iznosi podatak da je pri temperaturi od 37 °C potrebno 20 minuta za udvostručavanje broja bakterija. Od učenika se očekuje da pronađu funkciju koja povezuje vrijeme s brojem bakterija. U raspravi

s nastavnikom učenici dolaze do tražene funkcije $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$, gdje je N_0 početni broj bakterija, a t vrijeme u minutama nakon početka proučavanja. Zatim se prirodno nameće potreba za definiranjem promatranog pojma, eksponencijalne funkcije, što se i čini nakon proučavanja primjera. Obično pri usvajanju pojedinih vrsta funkcija nakon izrečene definicije slijedi zadatak u kojem treba izračunati vrijednost funkcije za dane argumente funkcije. Takav redoslijed usvajanja koncepta pojavljuje se i u izdvojenom udžbeniku. Nadalje, navode se svojstva i grafički prikaz eksponencijalne funkcije. Zatim slijedi više raznovrsnih zadataka kako bi se spomenuti matematički sadržaj što bolje usvojio. Opisani postupak uočavamo u mnogim udžbenicima iz matematike. U udžbeniku *Matematika 2* autora Gusić i sur. (2008) izdvojit ćemo zadatak sličan onima koje uočavamo među zadacima s državne mature:

Funkcija $N(x) = 10\,000 \cdot 2^x$ pokazuje broj bakterija u uzorku x sati nakon uzimanja uzorka.

a) Odredite broj bakterija u uzorku 1 sat, 2 sata, 5 sati nakon uzimanja uzorka.

b) Što pokazuju brojevi $N(0.5)$, $N(1.2)$, $N(-2)$?

3. FORMIRANJE MATEMATIČKIH POJMOVA

Matematika je prije svega znanost, ali i nastavni predmet u osnovnim i srednjim školama. Očekuje se da navedene pojavnosti matematike budu usko povezane, stoga se pitamo kako to postići. Prvi je korak zahtijevanje razumijevanja matematičkih pojmova, odnosno ispravnost i preciznost definiranja matematičkih pojmova.

3.1. Matematički pojam

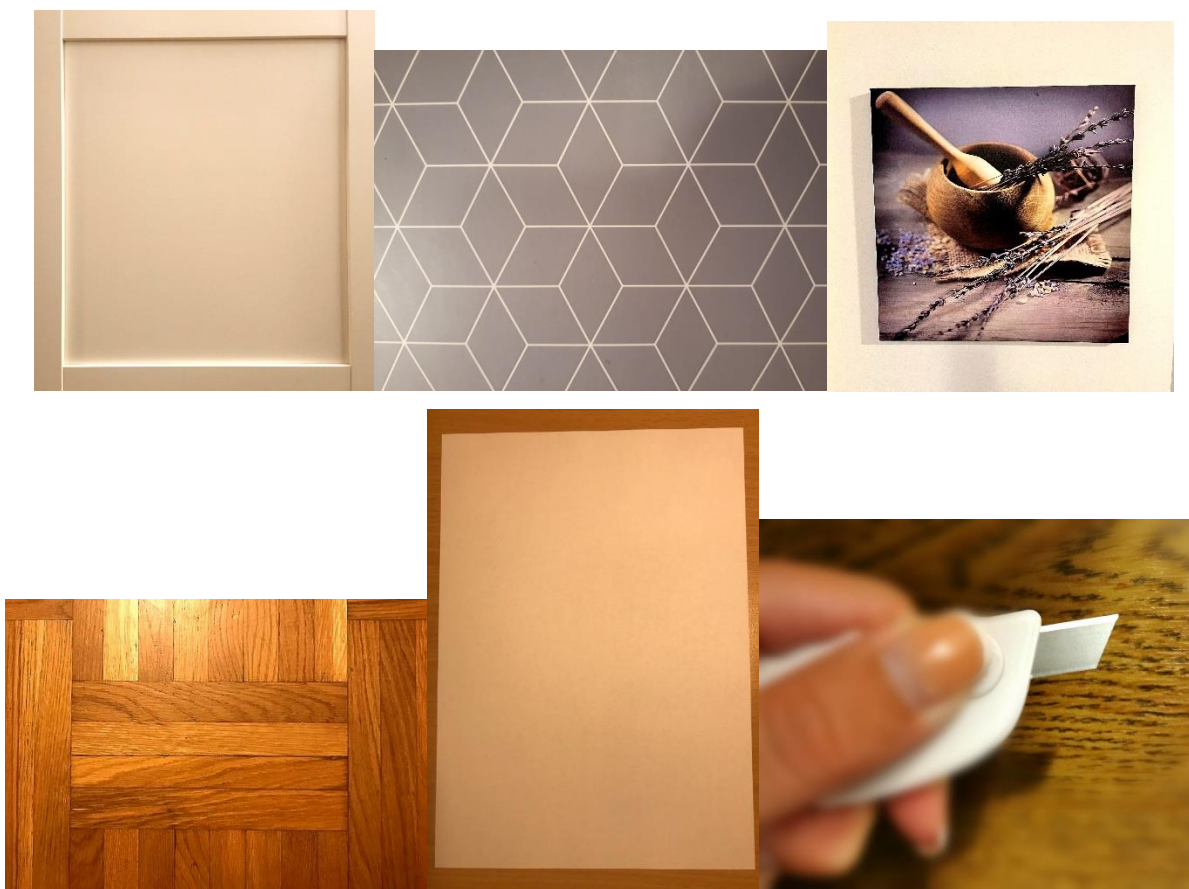
Upitamo li učenike u osnovnoj ili srednjoj školi da nam daju primjer matematičkog pojma, vjerojatno bi velik postotak učenika to ispravno i učinio. Očekujemo da bi neki odgovori bili: pravac, krug, kružnica, piramida, funkcija, jednakostranični trokut. No kada bismo ih upitali da nam pokušaju definirati odabrani matematički pojam, pretpostavljamo da bi većina imala problema. Prema Kurniku (2001), pojam je oblik mišljenja u kojem se odražavaju važna svojstva objekata koji se proučavaju. Na primjer, u 6. razredu osnovne škole svojstvo „broj u brojniku razlomka manji je od broja u nazivniku razlomka” izdvaja prave razlomke u skupu razlomaka. Slično, osobitost jednakostraničnog trokuta u skupu trokuta jest „jednakost duljina svih stranica”. „Četverokutu se može opisati kružnica” osobitost je tetivnog četverokuta u skupu četverokuta u srednjoškolskoj Matematici, kao i „podudaranje početne i završne točke” osobitost nul-vektora u skupu vektora.

Nastavni sadržaji osnovnoškolske i srednjoškolske Matematike uključuju usvajanje raznih matematičkih pojmova. Primjerena kronološka dob za usvajanje nekog pojma pretpostavljena je Kurikulumom nastavnog predmeta Matematika. Tako neke pojmove učenici usvajaju u nižim razredima te kasnije u višim razredima nadopunjuju to znanje, odnosno pojmove dodatno usvajaju. U tom slučaju možemo reći da se pojmovi usvajaju „vertikalno” tijekom godina obrazovanja. Na primjer, pojam paralelograma učenici najprije upoznaju u 6. razredu osnovne škole, nadopunjuju u 7. razredu kada obrađuju konstrukcije mnogokuta, pa tako i paralelograma, do 1. razreda srednje škole kada primjenjuju trigonometrijske omjere za rješavanje problema u planimetriji. S druge strane matematički pojmovi često se usvajaju „horizontalno” tijekom nastavne godine. Kurnik (2001) u svom radu *Matematički pojam* navodi da je takav proces formiranja pojma postupan te da se odvija u tri etape. Prva etapa uključuje zapažanje, tj. promatranje konkretnih objekata i uočavanje važnih svojstava promatranog objekta povezanih s pojmom. Druga etapa uključuje predodžbu o pojmu, tj. uočavanje nečeg općeg i zajedničkog elementima u promatranom skupu. Formiranje i usvajanje pojma treća je

etapa procesa formiranja pojma. Ona uključuje izdvajanje važnog općeg svojstva takvih objekata (Kurnik, 2001). Pogledajmo navedeno na trima primjerima.

Primjer 3.1.

Prva etapa usvajanja pojma paralelograma uključuje opažanje predmeta iz svakodnevnog života koji označavaju paralelogram. Na primjer: papir, pločica, slika, parket, segment vrata ormara, presjek dviju pruga, nož skalpela izvan kućišta i slično.



Slika 1 Predmeti oblika paralelograma: segment vrata ormara, pločica, slika, parket, papir, nož skalpela izvan kućišta

Druga etapa usvajanja pojma paralelograma uključuje uočavanje i isticanje zajedničkih svojstava promatranih objekata: nasuprotne su stranice sukladne, nasuprotne su stranice paralelne, nasuprotni su kutovi sukladni, susjedni su kutovi suplementarni, dijagonale se raspolavljaju. Treća etapa usvajanju pojma paralelograma zahtijeva da se na temelju prvih dviju etapa izdvoji važno svojstvo promatranih objekata. U ovom je slučaju to važno svojstvo

sljedeće: nasuprotne su stranice paralelograma paralelne, iz čega slijedi formalna definicija pojma paralelograma. *Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne naziva se paralelogram.* Nastavnik u trećoj etapi ima ulogu vodiča koji potpitanjima pomaže učenicima uočiti navedene komponente i postupno otkriti formalnu definiciju pojedinog pojma.

Primjer 3.2.

U srednjoškolskoj Matematici pojam krnje piramide u 2. razredu učenike često asocira na neku vrstu nepotpune piramide, dakle pomoću naučenog pojma piramide stvaraju se asocijacije na novi pojam krnje piramide. U raspravi s nastavnikom učenici dolaze do zaključka da su to piramide presječene ravninom. Sve navedeno ubrajamo u prvu etapu usvajanja matematičkog pojma krnje piramide. Ubrajamo li sve piramide presječene ravninom u krnje piramide? Odgovor na to pitanje sadržan je u drugoj etapi usvajanja u kojoj učenici na temelju uočavanja i izdvajanja zaključuju da su krnje piramide samo one dobivene presijecanjem piramide ravninom paralelnom s ravninom baze. Na temelju dobivenih zaključaka izriče se formalna definicija pojma krnje piramide: *Kada piramidu presiječemo ravninom paralelnoj ravninom baze, piramidu smo podijelili na dva dijela: manju piramidu koju zovemo dopunjak i ostatak tijela koji zovemo krnja piramida* (Matić, Barišin, Jukić Matić, Zelčić, Mišurac, Gortan, Vujasin Ilić, Dijanić, 2021).

Primjer 3.3.

Pojam funkcije uvodi se u 1. razredu srednje škole također u tri etape. Uvođenje pojma funkcije najčešće započinje primjerom iz svakodnevnog života. Na primjer, učenici uočavaju povezanost broja kupljenih artikala s plaćenim iznosom za kupljene artikle ili povezanost duljina stranica jednakostraničnog trokuta s pripadajućim opsegom trokuta. Općenitije, učenici uočavaju ovisnost elemenata dvaju skupova. Opisano ubrajamo u prvu etapu usvajanja pojma funkcije. Sljedeća etapa uključuje detaljnije proučavanje spomenute ovisnosti dvaju skupova. Pitanja se sama po sebi nameću: *Mora li svaki element drugog skupa biti pridružen elementu prvog skupa? Može li jedan element drugog skupa biti pridružen dvama elementima prvog skupa? Mogu li dva elementa drugog skupa biti pridružena jednom (istom) elementu prvog skupa? Može li postojati element drugog skupa koji nije pridružen ni jednom elementu prvog skupa?* Odgovori na ta pitanja izdvajaju opće važno svojstvo za pojam funkcije i dovode učenike do treće etape usvajanja pojma funkcije, tj. do definicije pojma funkcije: *Funkcija je uređena trojka (D, K, f) koja se sastoji od nepraznog skupa D koji se naziva domena funkcije,*

nepraznog skupa K koji se naziva kodomena funkcije i pravila f koje svakom elementu x skupa D pridružuje točno jedan element y skupa K tako da je $y = f(x)$.

Sada kada smo naveli način na koji se izgrađuje pojam u matematici, prirodno se nameće potreba navođenja nekih njegovih značajki. Pogledamo li prethodno napisanu definiciju pojma funkcije, uočiti ćemo da smo za pojam funkcije primijenili simbol f i zapis $y = f(x)$. Dakle, formiranje pojma u čovjekovoj spoznaji usko je povezano s izražavanjem tog pojma riječima (najčešće definicijom), zapisom i simbolom (Kurnik, 2001). Također prema Kurnik (2001), teži se k tomu da pojam u matematici ima značajku jednoznačnosti. Drugim riječima, zahtijeva se da jedan pojam u matematici ima samo jedno značenje. Navedeno svojstvo uočavamo i za pojam funkcije čije je jednoznačno značenje upravo sadržano u prethodno napisanoj definiciji. Uz navedene značajke valja spomenuti da svaki pojam ima svoj opseg i sadržaj (Kurnik, 2001).

Definicija 3.1. *Skup svih pojedinačnih objekata ili relacija na koji se može primijeniti jezični izraz pojma naziva se opseg pojma.*

Definicija 3.2. *Skup svih bitnih obilježja koja imaju svi objekti ili relacije iz opsega pojma naziva se sadržaj pojma.*

Primjer 3.4.

Promotrimo pojam *linearna funkcija*. U sadržaj pojma ubrajamo: graf funkcije jest pravac, ima najviše jednu nul-točku. U opseg pojma ubrajamo, primjerice, sljedeće funkcije: $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax$, $a \in R$, $a \neq 0$; identiteta; $f(x) = 2x$.

Pojmove koje vežemo uz opseg pojma, a imaju veliku ulogu pri definiranju pojma, jesu rod i vrsta pojma.

Definicija 3.3. *Ako je opseg O_{p_1} pojma P_1 sadržan u opsegu O_{p_2} pojma P_2 , onda kažemo da je pojam P_2 rod u odnosu na pojam P_1 , a pojam P_1 vrsta u odnosu na pojam P_2 .*

Primjer 3.5.

Pojam *linearna funkcija* vrsta je pojma *funkcija*, dok je *funkcija* rod za pojam *linearna funkcija*.

3.2. Definicija pojma

Logičan završetak procesa formiranja nekog pojma jest izricanje definicije pojma. No postavlja se pitanje: na koji način? Teži se tomu da učenici na temelju činjenica uočenih u procesu formiranja pojma sami izreknu definiciju pojma. Kako to postići? Poznato je da se tijekom

nastavnog procesa, posebice tijekom nastave Matematike, nastoji poticati logičko razmišljanje te razvijati kritičko mišljenje učenika. A upravo se logičko razmišljanje i kritičko mišljenje postižu, između ostalog, pomno odabranim zadacima. Dakle, izabrani zadatci te logičko razmišljanje učenika trebaju dovesti do cilja, odnosno do definiranja novog pojma.

Matematika je egzaktna znanost, a u skladu s tim definicije matematičkih pojmova imaju značajnu ulogu u njezinoj izgradnji. Navedenu činjenicu važno je osvijestiti učenicima tijekom nastave, što podrazumijeva shvaćanje da definicije matematičkih pojmova utjelovljuju bit i potpuno otkrivaju matematički pojam (Edwards i Ward, 2008). Francuski matematičar Jules Henri Poincaré (1854. – 1912.) rekao je: *Znanost je sastavljena od činjenica, kao i kuća od kamenja. Ali, neka hrpa činjenica je znanost ništa više nego što neka hrpa kamenja čini kuću.* (Žubrinić, 2010). Dakle, svi matematički pojmovi ne bi tvorili matematiku bez pripadnih definicija, tvrdnji i dokaza. Za razliku od važnosti definicija u matematici, definicije pojmova koji se koriste u svakodnevnoj komunikaciji često ne naglašavamo (Edwards i Ward, 2008). Na primjer, bez definicija pojmova *stol*, *ormar*, *TV*, *knjiga*, *tramvaj* znamo o čemu je riječ, ali još i važnije – možemo s razumijevanjem primjenjivati navedene pojmove u svakodnevnoj komunikaciji.

Poput pojmova u svakodnevnom životu, u matematici postoje pojmovi koji se ne definiraju. Prema Kurniku (2001), takvi su pojmovi jednostavni i intuitivno jasni, zato se i nazivaju osnovnima. Oni su, na primjer: točka i skup. Možemo primijetiti da, slično kao i kod pojmova iz svakodnevnog života, na sam spomen tih pojmova možemo si predočiti i razumjeti pojedini pojam. Uz osnovne pojmove postoje i izvedeni pojmovi koji se definiraju pomoću osnovnih pojmova ili pomoću nekih prethodno definiranih pojmova (Kurnik, 2001).

Promotrimo još jednom definiciju našeg ključnog pojma rada, pojma funkcije:

Funkcija je uređena trojka (D, K, f) koja se sastoji od nepraznog skupa D koji se naziva domena funkcije, nepraznog skupa K koji se naziva kodomena funkcije i pravila f koje svakom elementu x skupa D pridružuje točno jedan element y skupa K tako da je $y = f(x)$.

Uočimo da prikazana definicija sadrži bitna obilježja pojma funkcije, odnosno definicija je koncipirana nabranjem bitnih obilježja pojma funkcije. Upravo ta bitna obilježja koja ulaze u definiciju pojma moraju biti dovoljna za uvođenje tog pojma, a svako pojedino obilježje mora biti nužno (Kurnik, 2001).

Definicija 3.4. *Nabrajanje nužnih i dovoljnih obilježja pojma povezanih logičkom rečenicom ili simboličkim zapisom nazivamo definicija pojma.*

Osim nabranjem bitnih obilježja pojma, matematički pojmovi mogu se definirati i na sljedeće načine: definicija pomoću najbližeg roda i razlike vrste, induktivna, genetička (opisuje način postanka promatranog pojma), konvencionalna (dogovorna) definicija (Kurnik, 2001).

U procesu formiranja matematičkih pojmova pridaje se pažnja određenim značajkama koje bi trebale ispunjavati definicije matematičkih pojmova. Neke su od tih preporučenih značajki, koje navode Edwards i Ward (2008) u svom radu *The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses*:

- 1) *Hijerarhija*: prema Aristotelu, definicija svakog novog pojma treba biti oblikovana kao specijalan slučaj generaliziranog pojma, odnosno pomoću roda i razlike vrste. Na primjer, kvadrat je četverokut s četirima sukladnim stranicama i jednim pravim kutom. Dakle, rod pojma kvadrat jest četverokut, a razlika vrste činjenica je da kvadrat ima četiri sukladne stranice i jedan pravi kut.
- 2) *Egzistencija*: također prema Aristotelu, zahtijeva se da postoji barem jedan primjer novodefiniranog pojma, odnosno da opseg promatranog pojma nije prazan skup.
- 3) *Ekvivalencija*: ako postoji više definicija pojedinog pojma, zahtijeva se dokazati da su dane definicije ekvivalente.
- 4) *Aklimatizacija*: definicija mora biti prilagođena deduktivnom načinu zaključivanja.
- 5) *Minimalnost*: očekuje se da definicija nekog matematičkog pojma sadrži minimalan broj obilježja potrebnih za ispravno definiranje danog pojma. Na primjer, u definiciji pojma kvadrata dovoljno je zahtijevati jedan pravi kut, a ne sva četiri jer se iz ostalih obilježja danih u definiciji zaključuje da su i ostala tri kuta kvadrata prava.
- 6) *Elegancija*: od dviju ekvivalentnih definicija nekog matematičkog pojma često se izabire ona koja ima manje riječi i simbola, tj. kraće je formulirana i vizualno „ljepše” izgleda.
- 7) *Degeneracija*: ponekad definicija nekog pojma ima za posljedicu nastanak degeneriranih slučajeva koje bi u definicijama nekih pojmova trebalo obuhvatiti, a u nekima ne.

3.3. Čimbenici koji utječu na proces usvajanja matematičkih pojmova

Cilj je nastave Matematike u osnovnim i srednjim školama, između ostalog, usvajanje matematičkih sadržaja propisanih Kurikulumom nastavnog predmeta Matematika. Usvajanje

matematičkih sadržaja jednim dijelom ovisi o nastavnikovu načinu poučavanja. Neispravan koncept može se formirati ako su primjeri koji su učenicima prezentirani jednostavni ili ako nije prikazan dovoljan broj primjera (Gusić, 2016). Na primjer, za funkciju $f(x) = 5$ učenik može reći da nije funkcija jer se s desne strane znaka jednakosti ne nalazi argument x (Gusić, 2016). Također, veliku ulogu imaju predznanja, stavovi i sposobnosti učenika. Poznato je da učenici kao čest argument zašto ne vole matematiku znaju reći „jer se nadovezuje”, odnosno ne možemo usvojiti nova matematička znanja ako prethodna nismo usvojili, što je istina. Uza sve to, već smo naveli da se svaka komponenta usvajanja novog matematičkog koncepta nadovezuje na prethodnu, što još jednom potvrđuje važnost kontinuiranog usvajanja matematičkih sadržaja. Uz predznanja, učenički stavovi utječu na usvajanje matematičkih sadržaja. Naime, učenik koji smatra da ne zna matematiku ili je nije sposoban naučiti ili mu je netko rekao kako je određeni matematički koncept težak, već prije usvajanja stvorit će nevidljivu prepreku u svojoj glavi koju je teže premostiti nego da negativnog stava uopće nije ni bilo. Osim stavova važne su i sposobnosti i predispozicije pojedinog učenika. U rješavanju matematičkog problema matematičke sposobnosti najprije se očituju pri prijevodu jezika zadatka u matematički jezik. Uz navedenu aktivnost poznati ruski metodičar nastave matematike Švarcburd smatra da se matematičke sposobnosti očituju i u sljedećim aktivnostima: razvijanje prostornog predočavanja; sposobnost za odvajanje bitnog od nebitnoga; sposobnost apstrahiranja; sposobnost apstraktnog mišljenja; primjena znanstvenih zaključaka na konkretne sadržaje; sposobnost kritičkog promišljanja i postavljanje novih problemskih zadataka; posjedovanje dovoljno razvijenog i pismenog i usmenog matematičkog izražavanja; posjedovanje dovoljno strpljenja pri rješavanju matematičkih (problemskih) zadataka (Kadum, 2006, prema Švarcburd, 1964).

Na usvajanje matematičkog koncepta – osim predznanja, stavova i sposobnosti učenika te načina poučavanja – utjecaj ima i pristup rješavanju problema. Najčešći model rješavanja matematičkih problema utemeljio je matematičar Polya, a uključuje sljedeće komponente: razumijevanje problema, izradu plana, provedbu plana i osvrt (Juričić Devčić, 2016, prema Polya, 1957). Slično tomu Kurnik (2000) navodi pet koraka svakog matematičkog zadatka: uvjeti, cilj, teorijska osnova, rješavanje, osvrt. Možemo reći da su to ispravni načini pristupa rješavanju matematičkih problema jer uključuju razumijevanje problema, kritičko promišljanje i u skladu s tim rješavanje problema. Slično Vinner (1991) u svom radu *The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics* opisuje poželjne modele rješavanja matematičkog problema. Svaki od modela uključuje definiciju promatranog pojma pa je u skladu s tim

matematički ispravan. Osim definicije pojma ti modeli sadrže i sliku pojma. Slika pojma uključuje ideje i misli koje osobu podsjećaju na spomenuti pojam. Ili možemo reći da je slika pojma nešto neverbalno što je u našem umu povezano s izrečenim pojmom. Vrlo često to može biti i vizualni prikaz, ali i mentalna slika, dojam ili iskustvo koje u našem umu povezujemo s tim pojmom. To najčešće nije definicija tog pojma, čak i ako je taj pojam ima. Na primjer, na pojam kruga prve misli koje se mogu javiti kod osobe jesu predmeti iz svakodnevnog života oblika kruga: kolut sira, sat, *pizza*, tanjur. Dakle, na sam pojam kruga većina osoba neće se sjetiti njegove definicije, već nekih svojstava ili vizualnih slika vezanih uz taj pojam. Slično, na pojam funkcije netko će se prisjetiti izraza „ $y = f(x)$ ” ili nekih vrsta funkcija: linearne, kvadratne, trigonometrijske te pripadnih grafova prije nego definicije pojma funkcije. Dakle, Vinner (1991) navodi modele rješavanja problema koji uključuju definiciju i sliku pojma. Pitamo se sljedeće: ako izostavimo jedno od toga, možemo li sa sigurnošću reći da smo ispravno pristupili rješavanju matematičkog problema, odnosno da smo ispravno riješili matematički problem? Izostavimo li sliku pojma pri rješavanju matematičkih problema, samo smo izostavili vlastite ideje koje bi nam možda pomogle u pristupu rješavanja problema. Drugim riječima, samo primjenjujući definiciju danog pojma, riješili bismo prikazani problem. Time smo ispravno pristupili rješavanju matematičkog problema. Stoga uočavamo, ali i Vinner (1991) navodi da jedan od poželjnih modela rješavanja matematičkih problema ne sadrži sliku pojma. S druge strane, izostavimo li definiciju pojma te, oslanjajući se na nju i primjenjujući isključivo sliku pojma, vjerojatno nećemo ispravno riješiti problem. Pristupaju li učenici u nastavi upravo opisanom načinu rješavanja problema? Prema Vinner (1991) učenici često, iako znaju definiciju pojma, isključuju definiciju pojma te odabiru strategiju rješavanja problema ili zadatka koristeći samo sliku pojma. Strategija rješavanja problema ili zadatka koja uključuje i definiciju pojma vrlo se često pojavljuje kada poznavanje slike pojma nije dovoljno za ispravno rješavanje zadatka. Preciznije, navedeno se događa kada učenici uvide da ne mogu riješiti zadatak ni na jedan način koristeći samo sliku pojma, već moraju upotrijebiti i definiciju pojma. Važno je da nastavnici imaju na umu navedene činjenice kako bi se aktivno posvetili izgradnji slike pojma, odnosno povezivanju matematičkoga gradiva, što zahtijeva i načelo nastave matematike, načelo postupnosti, povezanosti i sustavnosti.

Jedan konkretan primjer ispravnog usvajanja novog matematičkog koncepta uz korištenje definicije pojma navodimo u nastavku. Glavna poveznica definicija matematičkih pojmova i matematičkih problema jest raznovrsnost zadataka te rješavanje problema korištenjem i naglašavanjem definicije pojma. Ideja je tog pristupa u svjesnom odabiru raznovrsnih primjera

i postupaka te pripadna usporedba, konstantno „pozivanje” na definiciju pojma. Također je vrlo važno predstaviti pojedini matematički pojam u kontekstu svakodnevnog života. Razmislimo li, takve načine susrećemo i u nastavi Matematike obrađujući koncept funkcije, na primjer koncept linearne funkcije. Najprije uvodimo koncept linearne funkcije primjerom iz svakodnevnog života, npr.: *Marko, Iva i Ana vlakom su stigli na osječki kolodvor. Budući da kiša neumorno pljušti, do prijatelja Luke dalje će nastaviti taksijem. Početna cijena vožnje (start) iznosi 2 €, a svaki započeti kilometar naplaćuje se 0.5 €. Luka živi 4 kilometara od osječkog kolodvora. Koliko će Marko, Iva i Ana zajedno morati platiti za vožnju taksijem?* (Edutorij, Pojam linearne funkcije.) Nakon objašnjenog primjera i uočavanja bitnih činjenica iz primjera, kada učenici iznose svoje ideje, nastavnik izriče definiciju linearne funkcije. Zatim pojašnjava i zapisuje konkretne primjere linearnih funkcija. Potom najčešće učenici rješavaju zadatke te usvajaju još neke pojmove kao što su: nul-točka funkcije, graf funkcije, nagib pravca, odsječak na osi $\mathcal{Y}$ i slično. Dobar je primjer povezivanja pojmova zadatak u kojem učenici trebaju nacrtati graf zadane linearne funkcije. Nakon što učenici nacrtaju graf, bilo bi dobro pojasniti zašto je to graf te funkcije jer bi se time opet sa zadatkom povezala definicija funkcije, odnosno linearne funkcije, a i učenici bi lakše upamtili jer bi povezali definiciju s vizualnim primjerom. Nadalje, učenici bi mogli uočiti točke presjeka grafa i koordinatnih osi. Tim postupkom povezali bi definiciju s grafičkim prikazom, ali i mogli bi računski izračunati i povezati grafički način s računskim načinom, odnosno analitički i algebarski, čime bi se svakako pojmovi dugoročnije zapamtili. Još je jedan dobar primjer povezivanja analitičkog pristupa s algebarskim pristupom u određivanju sjecišta pravaca gdje učenici mogu nacrtati zadane pravce i očitati s grafa sjecište dobivenih pravaca, a s druge strane to mogu riješiti algebarski rješavajući sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama, čime bi se opet postigao prethodno navedeni cilj.

4. PRIKAZ NEKIH ISTRAŽIVANJA

Matematika kao nastavni predmet ima veliku primjenu u svakodnevnom životu jer su znanja stečena na nastavi Matematike potrebna u svakodnevnim situacijama. Na primjer, učenici bi već u nižim razredima pri odlasku u trgovinu trebali poznavati operacije zbrajanja i oduzimanja prirodnih brojeva. Malo kasnije, u 5. razredu učenici usvajaju decimalne brojeve te operacije s decimalnim brojevima koje susreću kao cijene pojedinih artikala u trgovini. Nešto stariji učenici u istoj bi situaciji trebali moći izračunati kolika je cijena određenog proizvoda nakon sniženja. Također, nepoznavanje pojma površine u odrasloj dobi može dovesti do nesporazuma pri kupnji stana.

Jedan pojam u matematici koji se isto tako vrlo često pojavljuje u situacijama iz svakodnevnog života, makar učenici nerijetko toga nisu svjesni, jest pojam funkcije. Veza između iznosa koji trebamo platiti za određeni broj kilograma kupljenog voća ili cijene benzina i broja litara kupljenog benzina, odnosno postupak određivanja cijene za veću količinu povezan je s pojmom funkcije. Funkcije pronalazimo i u bankarskom sektoru pri obračunavanju kredita i kamata. Funkcije imaju primjenu i u ekonomiji preko funkcije ponude i potražnje, odnosno funkcija prihoda i dobiti (Sruk, 2021). U građevini, na primjer, pri gradnji mostova funkcije imaju važnu ulogu. Farmaceutska i prehrambena industrija bez primjene omjera u proizvodnji lijekova i prehrambenih artikala teško bi funkcionirala. Iz svega navedenog nameće se zaključak da su funkcije vrlo važan pojam koji bi u okviru školske matematike trebalo razumjeti i shvatiti. Prema novom Kurikulumu, linearna funkcija više se ne spominje u osnovnoj školi, ali najbliži pojam tomu koji se obrađuje u 7. razredu jest pojam linearne ovisnosti. Kasnije, tijekom srednje škole učenici usvajaju linearnu funkciju, kvadratnu funkciju, logaritamsku funkciju, eksponencijalnu funkciju te trigonometrijske funkcije. Usvajajući pojedine vrste funkcija, učenici usvajaju i njihove definicije. Neka istraživanja pokazuju da učenici rješavaju zadatke automatizmom, tj. služeći se naučenim postupcima bez teorijske podloge, odnosno bez poznavanja definicije pojma. Tomu u prilog ide i činjenica da je većina školskih zadataka takva da se očekuje njihovo rješavanje primjenom standardnih postupaka. U ovom poglavlju, na temelju prikaza nekih istraživanja, osvrnut ćemo se na upravo spomenuto: kakva je povezanost definicije pojma funkcije s rješavanjem zadataka, tj. mogu li učenici koji ne znaju definiciju pojma funkcije ispravno riješiti matematički zadatak ili, s druge strane, slijedi li iz poznavanja definicije pojma funkcije ispravno rješavanje zadataka. Također ćemo se osvrnuti na istraživanje koje se odnosi na prethodno poglavlje, tj. na sliku i definiciju pojma. Preciznije,

prikazat ćemo istraživanje koje razjašnjava na koji način učenici pristupaju rješavanju problema koristeći sliku pojma, definiciju pojma ili oboje.

4.1. Istraživanja provedena na uzorku učenika srednjih škola

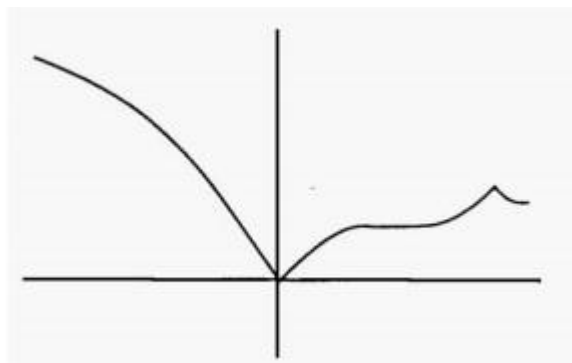
U ovom poglavlju prikazat ćemo dva istraživanja provedena na uzorku učenika srednjih škola.

Prikaz 1. istraživanja:

Vinner (1991) u svom radu navodi sljedeće istraživanje koje je provedeno na uzorku od 147 učenika drugih i trećih razreda srednje škole. Cilj istraživanja bio je razotkriti sliku pojma kod učenika. Postavljena su im sljedeća tri pitanja na koja su trebali odgovoriti *da* ili *ne* te obrazložiti svoje odgovore.

Pitanja:

1. *Postoji li funkcija koja svakom broju različitom od 0 pridružuje njegov kvadrat, a broju 0 pridružuje broj -1 ?*
2. *Postoji li funkcija koja svakom pozitivnom broju pridružuje broj 1, svakom negativnom -1 te broju 0 pridružuje vrijednost 0?*
3. *Postoji li funkcija čiji je graf prikazan na slici 2.?*



Slika 2 Postoji li funkcija čiji je ovo graf? (URL:

https://www.researchgate.net/publication/227282219_The_Role_of_Definitions_in_the_Teaching_and_Learning_of_Mathematics, preuzeto 27. ožujka 2021.)

Postavljeno je i sljedeće pitanje:

4. *Što je, po Vašem mišljenju, funkcija?*

Većina učenika koji su ispravno odgovorili na 4. pitanje, tj. koji su ispravno definirali pojam funkcije, nisu ispravno odgovorili na pitanja 1.–3. Preciznije, samo je trećina učenika koji su ispravno definirali pojam funkcije ispravno odgovorila na pitanja 1.–3. Ni jedan učenik koji nije točno definirao funkciju nije ni točno odgovorio na pitanja 1.–3. Više od polovine ispitanih učenika kao odgovor na 4. pitanje napisalo je ispravnu definiciju funkcije. U ovom istraživanju uočavamo da mnogi učenici poznatu definiciju pojma nisu primijenili kako bi ispravno riješili postavljene zadatke.

Prikaz 2. istraživanja:

Panaoura, Michael-Chrysanthou i Philippou (2016) u svom radu *Teaching the concept of function: Definition and problem solving* navode istraživanje koje je provedeno na uzorku od 756 srednjoškolskih učenika u osam ciparskih škola. Preciznije, 315 učenika pohađalo je 3. razred gimnazije (starost: 15 godina), 258 učenika 4. razred gimnazije (starost: 16 godina), 183 učenika 5. razred gimnazije (starost: 17 godina). Važno je napomenuti da su ispitanici koji su pohađali 5. razred gimnazije bili uključeni u napredni program matematike. Provedba istraživanja uključivala je dva testa s različitim zadacima koje su osmislili istraživači i srednjoškolski nastavnici matematike. Zadatci su bili primjereni 3. razredu srednje škole, a uključivali su definiranje pojma funkcije, prepoznavanja različitih oblika zadavanja funkcije (algebarski, riječima i grafom), ispravno prevođenje iz jednog oblika u drugi te rješavanje zadatka vezanih uz funkcije.

Neki ciljevi ovog istraživanja bili su:

- a) otkriti slijedi li iz poznavanja definicije pojma funkcije ispravno rješavanje zadataka: napisati primjer funkcije, na temelju grafa ili formule prepoznati je li riječ o nekoj funkciji, zapisati funkciju u raznim oblicima
- b) otkriti postoje li razlike u razumijevanju pojma funkcije učenika 3., 4. i 5. razreda srednje škole.

Najprije ćemo se osvrnuti na rezultate koji se odnose na zadatke u kojima su učenici trebali definirati pojam funkcije i napisati primjer funkcije te na temelju grafa ili formule prepoznati je li riječ o nekoj funkciji. Rezultati pokazuju sljedeće: 42.7 % učenika dalo je ispravan primjer iako nisu svi znali definirati pojam funkcije. Najveći broj točnih odgovora dali su učenici 4. i 5. razreda. S druge strane vrlo velik postotak, čak 89.4 % učenika koji su ispravno napisali

definiciju funkcije, dali su i ispravan primjer funkcije. Slično, većina učenika koji su ispravno definirali funkciju znala je riješiti zadane zadatke. Istraživači navode da nije slučajno što učenici koji ispravno definiraju funkciju ispravno riješe zadatak s obzirom na to da matematiku usvajaju onako kako bi trebalo: primjenjujući definicije matematičkih pojmova. Također, istraživači ističu da je učenicima lakše objasniti neki pojam primjerom nego definicijom, što je posljedica nastojanja učitelja da apstraktne pojmove približe učenicima upotrebom primjera. Naravno, opisani način bez definicije pojma nije matematički ispravan.

Uz navedene rezultate istraživanje je pokazalo da je samo 153 učenika, dakle tek 20.2 % učenika, ispravno opisalo postupak kako na temelju grafa odrediti predstavlja li on graf neke funkcije, dok je samo 241 učenik, odnosno njih 31.9 %, dalo ispravan primjer funkcije. Osim toga, kao odgovor na drugi cilj ovog istraživanja, rezultati pokazuju da postoje razlike u razumijevanju pojma funkcije učenika trećih, četvrtih i petih razreda.

4.2. Istraživanja provedena na uzorku studenata matematike

Dosad smo vidjeli istraživanja provedena na uzorku učenika srednje škole. No što ako je uzorak skupina studenata matematike? Očekujemo da će oni biti bolji u poznavanju definicija matematičkih pojmova i da su svjesniji važnosti definicije pojmova u matematičkoj teoriji. Prikažimo to sljedećim trima istraživanjima.

Prema Edwards i Ward (2008), među studentima matematike postoji mišljenje da se matematički problemi, odnosno zadatci i dokazi teorema mogu riješiti, tj. dokazati usvajajući određene definicije pojmova samo učenjem napamet bez razumijevanja. To nas podsjeća na rješavanje zadataka automatizmom u osnovnoj i srednjoj školi, odnosno na učenje konkretnih matematičkih procedura bez razumijevanja teorijske osnove. No postavlja se pitanje, je li dovoljna definicija da bi se zadatak ispravno riješio, tj. ako učenik nije razvio proceduralno znanje, može li samo uz pomoć definicije ispravno riješiti zadatak? Neka istraživanja pokazuju da poznavanje definicije pojma uvijek ne povlači ispravno rješavanje zadataka vezanih uz taj pojam.

Prikaz 1. istraživanja:

U ovom poglavlju prikazat ćemo istraživanje koje je provela profesorica Barbara Edwards s Oregon Universityja na uzorku studenata matematike.

Prema Edwards i Ward (2008) Rasslan i Vinner (1998) proveli su istraživanje na uzorku od 180 izraelsko-arapskih učenika srednjih škola na temu definicije pojma funkcije i slike pojma

funkcije. Istraživanje je pokazalo da je 68 % ispitanih učenika ispravno navelo definiciju funkcije, od čega je njih 36 % tu definiciju ispravno i primijenilo. U tom istraživanju očekivalo se da učenici na temelju definicije pojma funkcije donose različite zaključke. Dakle, uspješnost rješavanja zadataka djelomično je ovisila o učenikovu prisjećanju definicije pojma funkcije.

Profesorica Edwards smatrala je sljedeće: kada bi učenici ispred sebe imali napisanu pripadnu matematičku definiciju prije rješavanja zadataka, odnosno kada se ne bi morali prisjećati, ispravno bi je iskoristili u rješavanju zadataka (Edwards i Ward, 2008). Drugim riječima, takav bi pristup bio mogući dokaz njihova razumijevanja o tome kako bi definicije matematičkih pojmova trebalo koristiti a da su pritom lišeni brige o točnoj formulaciji pojedine definicije. U skladu s tim provela je istraživanje na uzorku od osam studenata. Svrha istraživanja bila je sagledati ulogu definicija matematičkih pojmova iz perspektive studenata matematike, odnosno kakav stav studenti imaju prema definicijama, je li ih potrebno znati kako bi se ovladalo određenim matematičkim konceptima i slično.

U istraživanju, nakon uvođenja definicije zadanog pojma, studenti su dobili zadatke za čije je rješavanje bila potrebna definicija pojma. Dakle, definiciju su tijekom rješavanja zadataka imali na uvid. Jedan od zadataka uključivao je određivanje je li zadana funkcija neprekidna. Ovdje imamo definiciju pojma: definicija neprekidnosti funkcije i matematički koncept: riješiti zadatak primjenjujući definiciju neprekidnosti funkcije. Cilj svakog zadatka bio je uočiti na koji način studenti koriste definiciju nekog pojma, ili ne koriste, za rješavanje danog zadatka. Još jedno pitanje bilo je: *Što je matematika?* Tim je pitanjem istraživač nastojao neizravno dobiti stav ispitanika o definicijama pojmova u matematici.

Istraživanje je pokazalo da su studenti, iako su znali definicije, imali problema u dokazivanju teorema ili rješavanja zadataka, odnosno problem s pripadnim matematičkim konceptom. Rezultati istraživanja utvrdili su da studenti ne koriste definicije na očekivani način. Također, rezultati istraživanja pokazali su da neki studenti ne koriste definicije onako kako bi matematičari trebali. Na primjer, neki od ispitanika vide važnost definicija u matematici, ali kasnije u intervjuu ili u zadacima to neće primijeniti. Važno je napomenuti da su svi studenti prije sudjelovanja u istraživanju položili barem jedan napredni kolegij matematike i da su svi položili sve kolegije upisane u semestru u kojem je bilo provedeno istraživanje. Iz toga autori zaključuju da postoje studenti koji su uspješni i imaju izvrsne ocjene, ali ne razumiju u potpunosti važnost definicije u matematici i nisu ih sposobni primijeniti.

Prikaz 2. istraživanja:

Pitanje koje se samo po sebi nametnulo u prethodnom istraživanju, prema autorima, jest sljedeće: *Jesu li na rezultate istraživanja utjecale činjenice da se studenti s danim definicijama u ovom istraživanju ne susreću prvi put te je li takvo prepoznavanje definicija utjecalo na to da su ispitani studenti netočno tumačili dane definicije i time prouzročili razliku u rezultatima istraživanja?* Navedena pitanja ponukala su profesoricu Barbaru Edwards i profesora Michaela B. Warda s istog sveučilišta na sljedeće istraživanje (Edwards i Ward, 2008).

Istraživanje je provedeno na uzorku studenata matematike upisanih na kolegij Apstraktna algebra. Jedan od spomenutih istraživača upravo je bio profesor na tom kolegiju. U ovom istraživanju odabrane su definicije koje „minimiziraju” prethodnu matematičku povezanost. Preciznije, one definicije koje bi prisilile studente da koriste upravo njih pri rješavanju zadataka s obzirom na to da prisjećanje određenih otprije poznatih matematičkih činjenica vezanih uz danu definiciju ne bi bilo moguće jer ih vrlo vjerojatno u znanju pojedinog studenta nema.

Metodologija istraživanja, tj. ciljevi i tehnika istraživanja bili su jednaki kao u prethodnom istraživanju. Ono što se razlikuje u ovom istraživanju u odnosu na prethodno jesu pitanja sadržana u intervjuu. Naime, budući da je istraživanje provedeno na uzorku studenata koji pohađaju kolegij Apstraktna algebra, pitanja su se odnosila na pojam grupe.

Rezultati istraživanja bili su slični rezultatima prethodnog istraživanja. Naime, autori navode da studenti ne koriste definicije matematičkih pojmova na očekivani način. Autori također zaključuju da neki studenti, iako shvaćaju važnost definicija u matematici, to ne potvrđuju svojim odgovorima. U skladu s navedenim, na temelju rezultata istraživanja autori navode da postoje studenti koji uspješno svladaju nastavno gradivo polaganjem određenog kolegija s visokom ocjenom, ali da neki od njih ne razumiju ulogu matematičkih definicija na matematički prihvatljiv način.

Također Edwards i Ward (2008) navode primjer aktivnosti za studente kako bi lakše i s razumijevanjem usvojili definicije matematičkih pojmova: da se studenti podijele u manje grupe i svakoj se grupi zada zadatak da napiše definiciju određenog matematičkog pojma. Sudionici svake grupe trebaju razmisliti i dogovoriti se oko jedne izabrane definicije. Zatim se predstavljaju definicije pojedine grupe te svi studenti u komunikaciji s nastavnikom argumentiraju zašto je pojedina definicija ispravna ili nije, kako definiciju promijeniti da bude ispravna, kako ispravnu definiciju „ljepše i elegantnije” zapisati i slično. Time se veća

pozornost i vrijeme usmjeravaju na analiziranje definicije pojedinog matematičkog pojma umjesto da se samo zapiše pojedina definicija, čime se učinkovitije usvajaju definicije matematičkih pojmova, ali i važnije – s razumijevanjem.

Prikaz 3. istraživanja:

Ideja za sljedeće istraživanje nastala je dok su Jukić Matić, Kehler-Poljak i Rukavina, autori rada *The Influence of Curriculum on the Concept of Function: An Empirical Study of Pre-Service Teachers*, radili u nastavi. Naime, jedan je autor studirao u Hrvatskoj i predavao na sveučilištu u Njemačkoj te je učio razlike u razumijevanju pojma funkcije koje imaju studenti na njemačkom sveučilištu od poimanja funkcije kako se usvaja u hrvatskom obrazovnom sustavu. Svrha ovog istraživanja bila je sagledati utjecaj kurikuluma na pojam funkcije u obrazovnim sustavima Hrvatske i Njemačke. Pitanja na koja se nastojalo odgovoriti bila su sljedeća:

- 1. Koje su razlike u razumijevanju pojma funkcije (definicije i slike pojma) među studentima nastavničkih smjerova Matematike, koji pohađaju diplomski studij, u Hrvatskoj i Njemačkoj s obzirom na različite obrazovne pristupe?*
- 2. Na koji način obrazovni sustavi Hrvatske i Njemačke utječu na razumijevanje pojma funkcije kod studenata? Odnosno koje su posljedice različitih obrazovnih sustava i načina njihova provođenja u navedenim državama?*

Istraživanje je uključivalo 61 studenta diplomskih studija Matematike iz Njemačke i Hrvatske. Preciznije, 30 je ispitanih studenata iz Njemačke, dok je 31 ispitan student iz Hrvatske. Tim istraživanjem nastojao se dobiti uvid u razumijevanje pojma funkcije ispitanih studenata.

Kronološki slijed usvajanja pojma funkcije tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja u Hrvatskoj već smo naveli. Pogledajmo kako to izgleda u njemačkom obrazovnom sustavu. Naime, njemački učenici prvi se put susreću s pojmom funkcije u osnovnoj školi, gdje funkciju najčešće prikazuju pomoću tabličnog prikaza i dijagrama. Do kraja 8. razreda učenici bi trebali ovladati proporcionalnim i obrnuto proporcionalnim veličinama te linearnom zavisnosti veličina. Također, linearnu funkciju (osim tablicom i dijagramom) zapisuju riječima i algebarski. Naglasak se stavlja na zadatke sa stvarnim problemima, odnosno situacijama iz svakodnevnog života. Na početku srednje škole usvaja se formalna definicija pojma funkcije. U desetom razredu usvajaju se vrste funkcija: eksponencijalna i trigonometrijska.

Istraživanje je bilo provedeno dvjema tehnikama: upitnikom u obliku otvorenih pitanja i intervjuom. Upitnik se sastojao od 4 pitanja koja su osmišljena tako da daju uvid u sliku i definiciju pojma funkcije. Prvo pitanje uključivalo je definiranje pojma funkcije. Na koji bi način studenti objasnili koncept funkcije svojim učenicima sadržaj je drugog pitanja. Treće i četvrto pitanje zahtijevali su od studenata da na temelju grafičkih prikaza i situacija iz svakodnevnog života razluče koji su primjeri funkcija i da to argumentiraju.

Rezultati upitnika pokazuju da je ispravnu definiciju funkcije napisala većina hrvatskih studenata. Gotovo polovina njemačkih studenata dala je ideju definicije funkcije, dok je samo 13 % napisalo ispravnu definiciju. Pokazalo se da su njemački studenti u definiciju funkcije uglavnom uključivali različite primjere jednadžbi ili grafova. Dakle, kako bi definirali pojam funkcije, služili su se idejama koje ih podsjećaju na pojam funkcije, odnosno služili su se slikom pojma funkcije.

Neke od ideja ispitanih studenata kao odgovor na drugo pitanje bile su: pomoću formalne definicije, tablice, jednadžbe, grafa, primjera iz svakodnevnog života i slika. Oko 40 % hrvatskih studenata koristilo bi formalnu definiciju, što je vjerojatno rezultat snažnog utjecaja kurikulumu i zahtjeva sveučilišnog obrazovanja. Istraživanje je pokazalo da bi tek 19 % njemačkih studenata postupilo na isti način.

Treći zadatak upitnika sadržavao je 4 potpitanja. U gotovo svim potpitanjima hrvatski su studenti imali bolje rezultate od njemačkih, osim u zadnjem podzadatku u kojem su rezultati bili podjednaki (oko 32 %).

Rezultati četvrtog pitanja znatno su lošiji od rezultata prethodnih triju pitanja. Podsjetimo se, u četvrtom pitanju, koji je imao dva podzadatka, trebalo je na temelju situacija iz svakodnevnog života opisanog riječima odrediti je li to primjer funkcije ili nije. U prvom podzadatku 13 % njemačkih studenata ispravno je odgovorilo, kao i 17 % hrvatskih. U drugom podzadatku malo su bolji rezultati: 27 % njemačkih studenata i 50 % hrvatskih studenata dalo je ispravan odgovor. Rezultati odgovora na to pitanje pokazali su da su hrvatski studenti uglavnom u svojim objašnjenjima koristili definiciju pojma funkcije. Ispitivači također navode da je iznenađujuće što su njemački studenti imali vrlo malen postotak točnih odgovora na tom pitanju s obzirom na to da su tijekom svojeg srednjoškolskog i fakultetskog obrazovanja usvojili pojam funkcije služeći se mnogim primjerima iz svakodnevnog života.

Komentar:

Rezultati prikazanih istraživanja pokazali su da ispitanici pristupaju matematičkim problemima uglavnom koristeći sliku pojma isključujući njegovu definiciju. S druge strane većina onih koji poznaju definiciju pojma funkcije, a nisu točno odgovorili na ostala pitanja, očito definiciju nisu usvojili s razumijevanjem. Manji broj onih koji su ispravno odgovorili na sva pitanja povezuju ispravnu definiciju pojma funkcije s ispravnom slikom pojma funkcije. Usporedimo li vremenski kontekst u kojem su pojedina istraživanja provedena, uočavamo da uglavnom nema razlika. Slično, usporedimo li ispitanike s obzirom na to koju razinu obrazovanja pohađaju, uočavamo da uglavnom nema razlika. Očekujemo da učenici ne upotrebljavaju definicije matematičkih pojmova na adekvatan način, ali nikako ne očekujemo da studenti matematike, od kojih će neki postati nastavnici matematike, u rješavanju matematičkih problema više koriste sliku pojma nego definiciju pojma. Također, još je veći problem taj što neki studenti nisu spoznali važnost definicija u matematici uopće. Time se otvara novo pitanje stanja obrazovne politike, obrazovnih ciljeva i načina poučavanja. Pitanja obrazovne politike naziru se i u istraživanju u kojem su ispitanici bili studenti iz Hrvatske i Njemačke. Uočavamo da se daje različita važnost definicijama u matematici s obzirom na promatrane zemlje, odnosno pripadne obrazovne politike.

Na kraju, iz svega navedenog zaključujemo da je poznavanje definicije pojma početak usvajanja novog pojma ili koncepta. No nikako ne smijemo izostaviti ni sliku pojma ili koncepta koja ponekad učeniku približava apstraktnu definiciju i pomaže u osmišljavanja postupaka rješavanja matematičkog problema, odnosno zadatka.

5. STAVOVI NASTAVNIKA MATEMATIKE

U dosadašnjem radu prikazali smo i analizirali neka istraživanja vezana uz odnos matematičkih koncepata i definicije pojma na uzorku učenika i studenata matematike, od kojih su neki budući nastavnici matematike. Iako matematičke koncepte i pojmove usvajaju učenici i studenti, je li nam od važnosti stav nastavnika? Itekako, s obzirom na to da stav nastavnika utječe na odabir zadataka i način poučavanja, odnosno na način uvođenja novih matematičkih koncepata i usvajanje definicija matematičkih pojmova. S druge strane nastavnici nam mogu dati uvid u vlastito iskustvo u radu s učenicima fokusirano na našu temu. Prema navedenom, kako bismo dodatno istražili temu i ispitali stav nastavnika, proveli smo sljedeća dva istraživanja.

5.1. Istraživanje provedeno tehnikom ankete na uzorku od 49 nastavnika matematike

Tema istraživanja već je jasna: povezanost matematičkih koncepata s definicijama matematičkih pojmova.

Cilj istraživanja jest utvrditi kakvo je mišljenje nastavnika matematike o povezanosti rješavanja matematičkih zadataka s definicijama matematičkih pojmova, tj. mogu li učenici koji ne znaju definiciju nekog pojma ispravno riješiti matematički zadatak ili, s druge strane, slijedi li iz poznavanja definicije pojma ispravno rješavanje zadataka i ovisi li to o vrsti zadatka. Također, uz navedeno, želimo saznati stavove nastavnika o definicijama matematičkih pojmova u kontekstu važnosti usvajanja istih tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja.

Hipoteze:

1. Pretpostavljamo da većina učenika ne uči definicije matematičkih pojmova s razumijevanjem.
2. Pretpostavljamo da se jednostavni matematički zadatci mogu riješiti bez poznavanja definicije matematičkog pojma.
3. Pretpostavljamo da nastavnici u osnovnim i srednjim školama ne zahtijevaju poznavanje matematičkih definicija.

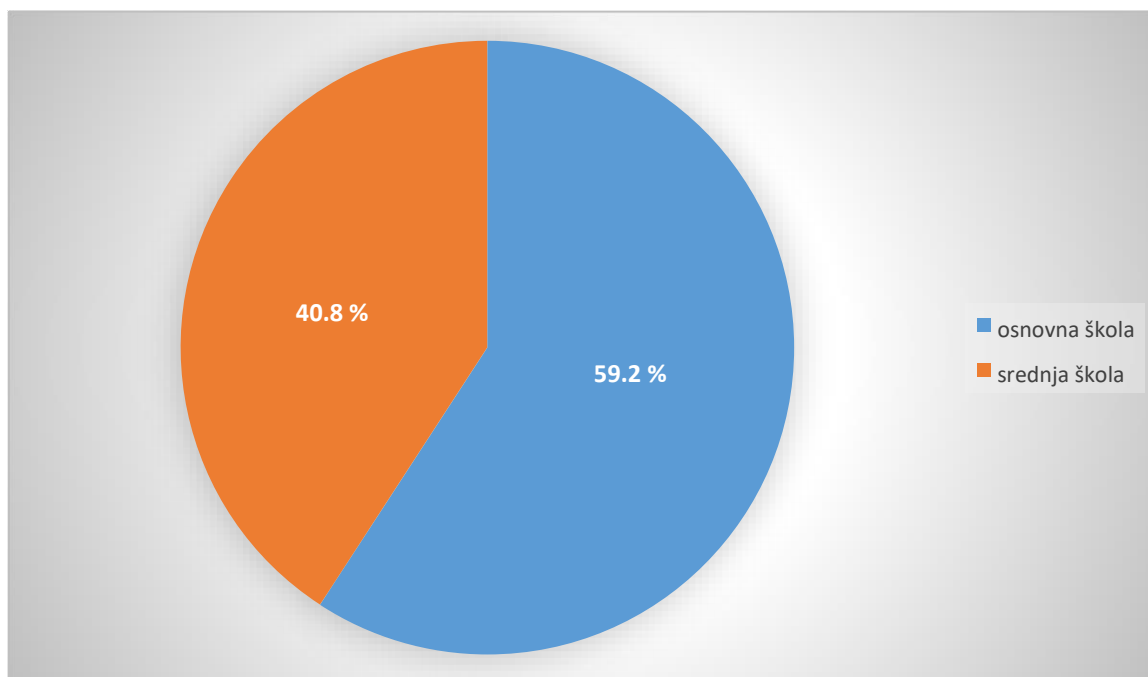
Tehnika istraživanja bila je anketa, odnosno rezultati istraživanja dobiveni su odgovorima na anketna pitanja. Anketa je formirana pomoću programa Google Forms te objavljena u dvjema grupama na društvenoj mreži Facebook, a sudjelovali su nastavnici osnovnih i srednjih škola. Jedna grupa sadržavala je samo nastavnike matematike, dok je druga obuhvaćala i nastavnike

drugih predmeta uz uputu da bi anketu trebali ispuniti isključivo nastavnici matematike. Vremensko razdoblje u kojem je anketa bila dostupna za ispunjavanje bilo je 14 dana.

Anketa je sadržavala sljedeća pitanja:

1. *Radite li u osnovnoj ili srednjoj školi?*
2. *Zahtijevate li da vaši učenici usvoje definicije matematičkih pojmova?*
3. *Usvoje li ih zaista? Kada to najčešće primijetite? U kojim nastavnim aktivnostima?*
4. *Uočavate li u svojem radu pozitivnu ili negativnu povezanost matematičkih koncepata s definicijama matematičkih pojmova? Preciznije, na temelju vlastitog iskustva, smatrate li da učenici mogu ispravno riješiti matematički zadatak samo poznajući definiciju pojma ili, s druge strane, je li učenik sposoban ispravno riješiti matematički zadatak iako nije usvojio definiciju pojma? Imate li konkretan primjer?*
5. *Imate li ideju, savjet, tj. primjer aktivnosti koji se pokazao dobar kako bi učenici lakše, odnosno s razumijevanjem usvojili definicije matematičkih pojmova?*

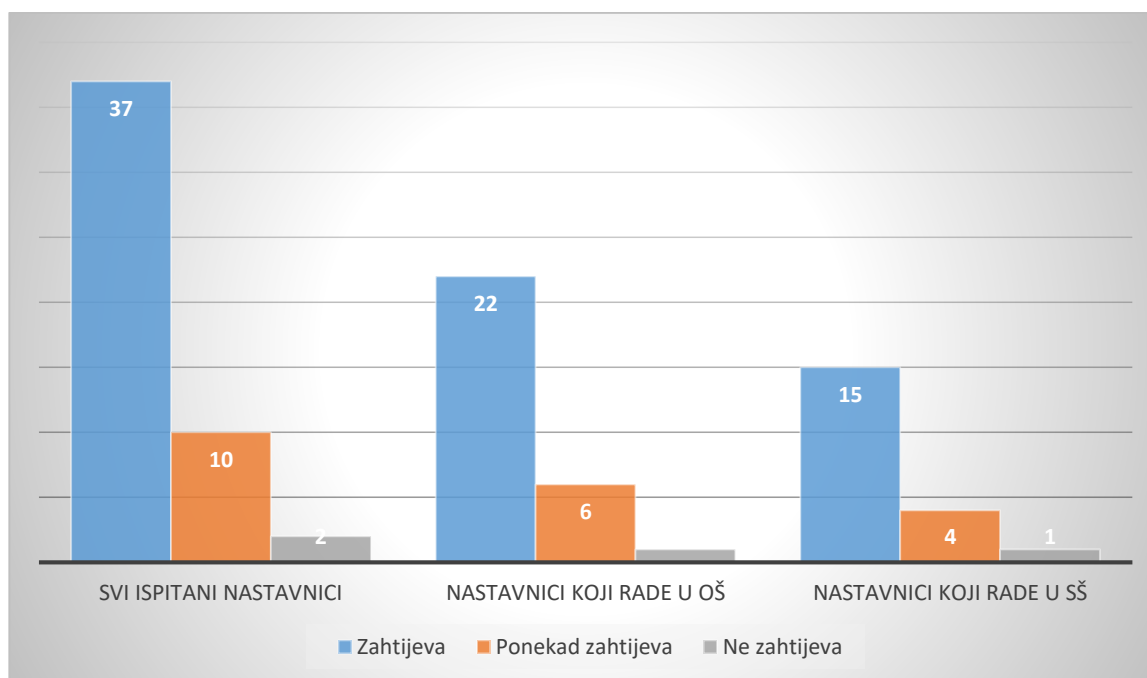
U ovom istraživanju sudjelovalo je 49 nastavnika matematike koji rade u osnovnim i srednjim školama. Preciznije, 29 ispitanih nastavnika radi u osnovnoj školi, što čini 59.2 %, dok 20 ispitanih nastavnika radi u srednjoj školi, što čini 40.8 % svih ispitanih nastavnika.



Slika 3 Raspodjela ispitanih nastavnika prema vrsti škole u kojoj rade

Rezultati istraživanja najprije su analizirani s obzirom na cjelokupni uzorak, a kasnije s obzirom na dvije skupine na koje se dijeli uzorak: nastavnici koji rade u osnovnoj školi i nastavnici koji rade u srednjoj školi. U prvom pitanju tražilo se da ispitanik odgovori radi li u osnovnoj ili srednjoj školi. Kao što smo već naveli, 29 ispitanih nastavnika radi u osnovnoj školi, što čini 59.2 %, dok 20 ispitanih nastavnika radi u srednjoj školi, što čini 40.8 % svih ispitanih nastavnika. Navedeno pitanje pomoći će nam analizirati postoje li razlike u stavovima, iskustvima i mišljenjima nastavnika koji rade u osnovnoj školi u odnosu na nastavnike koji rade u srednjoj školi.

Zahtijevaju li ispitanici nastavnici da njihovi učenici usvoje definicije matematičkih pojmova sadržaj je drugog anketnog pitanja. Rezultati istraživanja pokazali su da 37 (75.5 %) nastavnika zahtijeva da učenici usvoje definicije matematičkih pojmova, 10 (20.4 %) ispitanih nastavnika ponekad zahtijeva da učenici usvoje definicije matematičkih pojmova, dok 2 (4.1 %) ispitana nastavnika ne zahtijevaju da učenici usvoje definicije matematičkih pojmova. Analiziramo li rezultate s obzirom na osnovnu i srednju školu, ovisno o tome u kojoj školi ispitanik radi, dobivamo sljedeće rezultate: od 37 ispitanih nastavnika koji su se izjasnili da zahtijevaju da njihovi učenici usvoje definicije matematičkih pojmova 22 radi u osnovnoj školi, dok njih 15 radi u srednjoj školi. Od 10 ispitanih nastavnika koji se izjasnili da ponekad zahtijevaju da učenici usvoje definicije matematičkih pojmova 6 radi u osnovnoj školi, dok njih 4 radi u srednjoj školi. Svaki od dvoje ispitanih nastavnika koji su se izjasnili da ne zahtijevaju da učenici usvoje definicije matematičkih pojmova rade u različitim vrstama škole – jedan u osnovnoj, drugi u srednjoj školi.

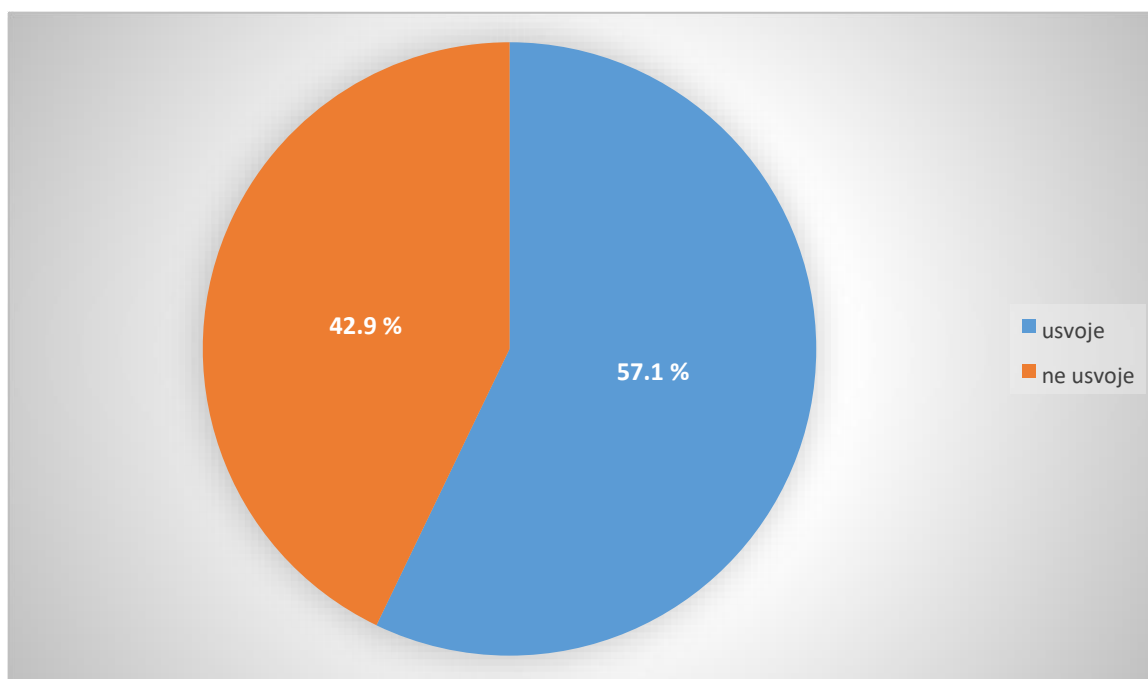


Slika 4 Udio svih ispitanih nastavnika, onih koji rade u osnovnoj i onih koji rade u srednjoj školi, o stavu prema usvajanju definicija matematičkih pojmova

Iz dobivenih rezultata koji se odnose na spomenuto pitanje zaključujemo da većina nastavnika zahtijeva da učenici usvoje definicije matematičkih pojmova neovisno o tome govorimo li o nastavnicima koji rade u osnovnoj ili srednjoj školi. Time je naša hipoteza da nastavnici u osnovnim i srednjim školama ne zahtijevaju poznavanje matematičkih definicija opovrgnuta.

Treće pitanje u anketi zahtijevalo je od ispitanika da navedu usvoje li zaista njihovi učenici definicije matematičkih pojmova i kada to najčešće primijete. Od 49 ispitanih nastavnika 28 nastavnika (57.1 %) navelo je da učenici zaista i usvoje definicije matematičkih pojmova, dok 21 (42.9 %) ispitani nastavnik smatra da učenici ne usvoje definicije matematičkih pojmova. Zanimljivo je spomenuti da 7 nastavnika koji su smatrali da učenici usvoje definicije matematičkih pojmova smatraju da ih usvoje bez razumijevanja, tj. napamet. Dakle, ako učenje bez razumijevanja smatramo neprimjerenim načinom usvajanja nastavnoga gradiva, dolazimo do rezultata da podjednak broj ispitanih nastavnika smatra da učenici usvoje definicije matematičkih pojmova, kao i da ne usvoje. Pojedini nastavnici navode da definicije matematičkih pojmova s razumijevanjem nauče učenici s višom ocjenom iz Matematike, dok ostali ili nauče bez razumijevanja ili uopće ne nauče. Navedeni rezultati dovode nas do očekivanog zaključka: učenici s visokom ocjenom iz Matematike zaista nauče definicije

matematičkih pojmova s razumijevanjem, dok ostali ili nauče napamet ili uopće ne nauče. Time je potvrđena naša hipoteza da većina učenika ne uči definicije matematičkih pojmova s razumijevanjem.



Slika 5 Udio, prema iskustvu ispitanih nastavnika, učenika koji usvoje i ne usvoje definicije matematičkih pojmova

Usporedimo li te rezultate s rezultatima prikazanih istraživanja, dobivamo slične informacije. Naime, u prikazu 1. istraživanja provedenog na uzorku učenika srednjih škola rezultati pokazuju da većina učenika koji su ispravno napisali definiciju zadanog pojma nije bila sposobna riješiti zadatak. Također, samo je trećina učenika koji su točno napisali definiciju zadanog pojma uspješno i riješila zadatak. Time uočavamo da većina učenika također napamet i bez razumijevanja usvaja definicije matematičkih pojmova, ali manji broj učenika i s razumijevanjem, odnosno promatrani uzorak sadrži i učenike koji usvajaju definicije matematičkih pojmova s razumijevanjem, kao i učenike koji ih nauče napamet. Slično dobivamo usporedimo li rezultate s rezultatima istraživanja provedenog na uzorku studenata matematike. Rezultati 3. istraživanja iz prethodnog poglavlja provedenog na uzorku studenata matematike pokazuju da većina njemačkih studenata nije usvojila definiciju zadanog matematičkog pojma.

Zanimljivo je spomenuti da se od 47 nastavnika očitovanih da većinom zahtijevaju da učenici usvoje definicije matematičkih pojmova njih 22 (46.8 %) izjasnilo da učenici zaista i usvoje tražene definicije, dok zanimljivije njih 25 (53.2 %) smatra da učenici tražene definicije ne

usvoje. Postavljaju se pitanja: *Na koji način nastavnici ocjenjuju učenike? Čemu pridaju pažnju pri vrednovanju učenika?* Očito postoje učenici koji nemaju ocjenu nedovoljan iako nisu usvojili sve tražene definicije. Dolazimo do zaključka da se jednostavni zadatci mogu riješiti bez poznavanja matematičkih definicija, odnosno da većina učenika usvaja samo osnovne matematičke procedure, što je vrlo niska razina znanja. Tomu u prilog ide i činjenica da nastavnici u pisane provjere u najvećem postotku uvrštavaju tipove zadataka koje su prošli na nastavnom satu, što se da iščitati iz njihovih odgovora.

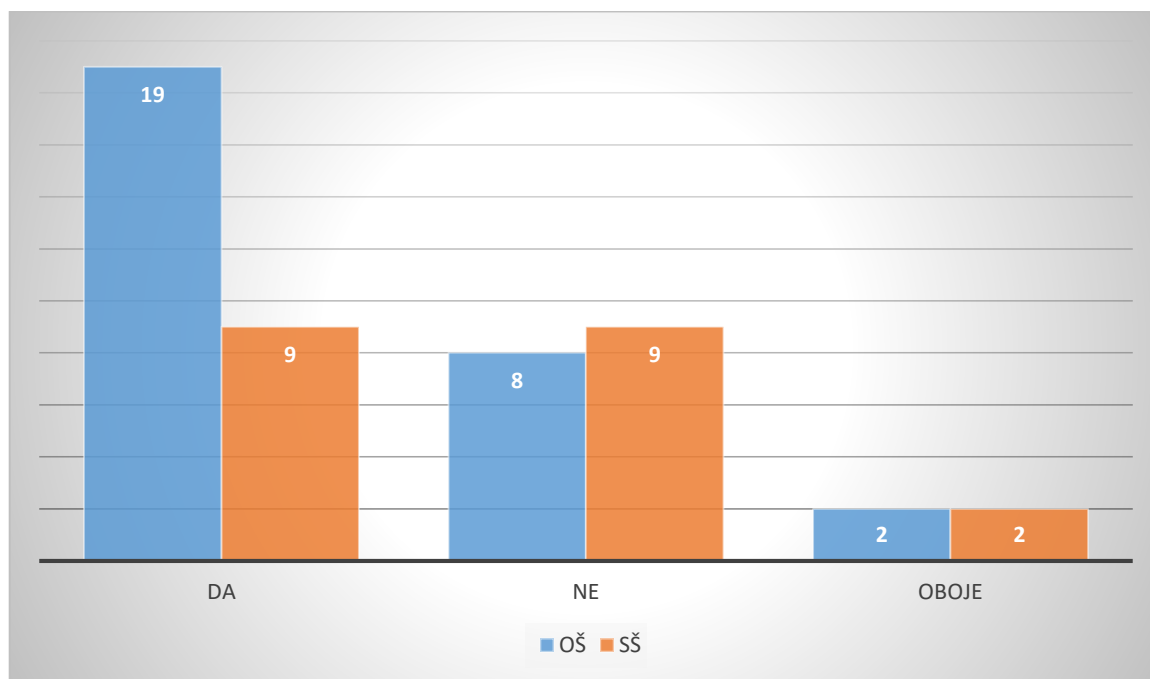
Nadalje, treće pitanje obuhvaćalo je i načine na koje ispitani nastavnici uoče da su učenici usvojili ili nisu usvojili definicije matematičkih pojmova. Od 49 ispitanih nastavnika njih 30 (61.2 %) uočava to u pisanim provjerama znanja, 4 nastavnika (8.2 %) uočavaju pri obradi novih sadržaja kada se ponavljaju ranije usvojene definicije, dok 15 nastavnika (30.6 %) usvajanje ili neusvajanje definicija matematičkih pojmova uočava tijekom usmenog ispitivanja. Većina ispitanih nastavnika uočava usvajanje matematičkih definicija u pisanim provjerama znanja, a već smo naveli da je najveći postotak tipova zadataka u pisanim provjerama upravo onaj koji su prošli na nastavnom satu pa iz toga možemo zaključiti da nastavnici u pisanim provjerama, uz usvojenost definicija, uočavaju usvojenost ili neusvojenost matematičkih procedura.

Usporedimo li dobivene rezultate s rezultatima istraživanja prikazanih u prethodnom poglavlju, dobivamo sljedeće informacije. Iz prikaza 1. istraživanja provedenog na uzorku učenika srednjih škola saznajemo da je istraživanje provedeno u okviru anketnog listića s pitanjima. Dakle, istraživač je iz pisanih odgovora uočio usvoje li učenici ili ne usvoje definicije matematičkih pojmova. S druge strane istraživanje opisano u prikazu 1. istraživanja na uzorku studenata matematike provedeno je tehnikom intervjua pa je istraživač iz usmene komunikacije saznao odgovore na treće pitanje promatranog istraživanja.

U četvrtom pitanju nalazi se bit ovog istraživanja. Od ispitanih nastavnika očekivalo se da povežu i objasne, na temelju svog iskustva, imaju li matematički koncepti i definicije pojmova pozitivnu ili negativnu povezanost. Od 49 ispitanih nastavnika njih se 28 (57.1 %) izjasnilo da je potrebno znanje definicija matematičkih pojmova kako bi se riješio matematički zadatak, 17 nastavnika (34.7 %) navodi da se matematički zadatci mogu riješiti bez poznavanja definicija matematičkih pojmova, dok 4 nastavnika (8.2 %) navode da se, ovisno o nastavnoj temi, mogu dogoditi obje situacije. Primjeri matematičkih koncepata koje navode nastavnici koji smatraju da se zadatci mogu riješiti bez poznavanja definicija matematičkih pojmova sljedeći su: opseg kruga ili kvadrata, Pitagorin poučak, sličnost trokuta. Naime, nastavnici navode da učenici

moгу riješiti zadatak poznajući formulu za opseg kruga ili kvadrata, Pitagorin poučak a da ne znaju što je opseg četverokuta ili ne znaju povezati iskaz Pitagorina poučka s onim što su izračunali. Također, na temelju sličnosti dvaju trokuta, učenik zna izračunati duljinu jedne stranice trokuta iz poznavanja njoj odgovarajuće stranice sličnog trokuta i koeficijenta sličnosti, a odrediti jesu li dva dana trokuta slična ne zna jer ne zna poučke o sličnosti trokuta. Analiziramo li rezultate 4. pitanja na temelju vrste škole u kojoj pojedini ispitanici nastavnici rade, dobivamo sljedeće rezultate: od 28 ispitanih nastavnika koji su se izjasnili da smatraju da je potrebno znanje definicija matematičkih pojmova kako bi se riješio matematički zadatak njih 19 (67.9 %) rade u osnovnoj školi, dok ih 9 (32.1 %) rade u srednjoj školi. Nadalje, od 17 ispitanih nastavnika koji su se izjasnili da se matematički zadatci mogu riješiti bez poznavanja definicija matematičkih pojmova njih 8 (47.1 %) rade u osnovnoj školi, dok ih 9 (52.9 %) rade u srednjoj školi. I na kraju, od 4 ispitana nastavnika koji navode da se, ovisno o nastavnoj temi, mogu dogoditi obje situacije 2 (50 %) nastavnika rade u osnovnoj školi i 2 (50 %) nastavnika rade u srednjoj školi. Analizom rezultata navedenog pitanja možemo zaključiti da većina nastavnika uočava pozitivnu povezanost matematičkog koncepta s definicijom matematičkog pojma. Opet dolazimo do prethodnog zaključka: učenici usvajaju matematičke procedure i u skladu s tim sposobni su riješiti jednostavni zadatak bez poznavanja definicije matematičkog pojma. Promijeni li se zadani zadatak, učenici bez poznavanja definicije matematičkog pojma nisu sposobni riješiti zadatak. Dakle, iskustvo ispitanih nastavnika pokazuje da se jednostavni matematički zadatak može ispravno riješiti bez poznavanja definicije matematičkog pojma. Time je potvrđena naša hipoteza da su učenici sposobni bez poznavanja definicije matematičkog pojma riješiti jednostavni matematički zadatak. Također, analizom rezultata navedenog pitanja zaključujemo da većina nastavnika s takvim mišljenjem rade u osnovnoj školi. Uz navedeno zaključujemo iz odgovora nastavnika da uglavnom zadatci u pisanim provjerama ne zahtijevaju poznavanje definicija matematičkih pojmova. Naime, neki nastavnici navode da pisane provjere ne sadrže pitanja u kojima se izravno traži definicija nekog matematičkog pojma. Isto tako tipovi zadataka u pisanim provjerama već su usvojeni na nastavnom satu pa se u skladu s tim mogu riješiti standardnim usvojenim procedurama koje ne zahtijevaju poznavanje definicija matematičkih pojmova. Koliko zapravo nastavnici „bježe” od nestandardnih procedura i problemskih zadataka, pogledat ćemo na dvama primjerima: jedan nastavnik navodi da u pisanim provjerama ne zahtijeva konstrukciju težišnica trokuta (jer je komplicirano i zahtijeva mnogo vremena) već samo opis konstrukcije, dok drugi navodi da inzistira na usvajanju samo jednostavnih i u nastavi čestih definicija pojmova, a ne inzistira na

usvajanju onih rjeđe korištenih jer „se definicija tog pojma koristi samo mjesec dana u 7. razredu, pa ju brzo zaborave”.



Slika 6 Udio nastavnika koji smatraju da se matematički zadatak može riješiti uz poznavanje definicije pojma, bez poznavanja definicije pojma i u objema situacijama u ovisnosti u kojoj vrste škole rade

Iako u prikazanim istraživanjima nemamo izravan stav nastavnika o ovom pitanju, ipak možemo nešto uočiti. U prikazu 1. istraživanja iz prethodnog poglavlja provedenog na uzorku studenata matematike ispitivač daje učenicima na uvid definicije izabranih matematičkih pojmova pri dokazivanju teorema ili pri rješavanju zadataka. Time uočavamo stav ispitivača o definicijama matematičkih pojmova. Naime, ispitivač očito prepoznaje važnost upotrebe definicija matematičkih pojmova pri dokazivanju teorema ili pri rješavanju zadataka.

U posljednjem, 5. pitanju ispitani nastavnici davali su, prema svojem iskustvu, ideje na koji bi način učenici lakše i s razumijevanjem usvojili definicije matematičkih pojmova: što više pojednostavniti definicije i povezati ih s bliskim primjerima, povezivati definicije s prethodno naučenim, kvizovi i igra *memory*, pokazati mnoštvo raznovrsnih primjera, izrada projekata, svakodnevno ponavljanje novih definicija na početku nastavnog sata, što više koristiti primijenjenu matematiku, upotreba alata dinamičke geometrije, izrada mentalnih mapa, razni grupni i timski radovi, povezivati nastavno gradivo i izvan okvira matematike, kvizovi Kahoot!,

križaljke, pjesmice i rime, inzistiranje na objašnjavanju svakog pojedinog koraka u rješavanju zadataka pred pločom, opisivati pojam svojim riječima.

5.2. Istraživanje provedeno tehnikom intervju na uzorku od 4 nastavnika matematike

Kako bismo detaljnije i izravno, u razgovoru, istražili stav nastavnika o povezanosti matematičkih koncepata s definicijama matematičkih pojmova, proveli smo sljedeće istraživanje.

Istraživanje je provedeno na uzorku 4 nastavnika matematike:

- I. nastavnik matematike u osnovnoj školi s dvije i pol godine iskustva rada u školi
- II. nastavnik matematike u osnovnoj školi s dvadeset godina iskustva rada u školi
- III. nastavnik matematike u srednjoj školi (tehničkoj) s deset godina iskustva rada u školi
- IV. nastavnik matematike u srednjoj školi (gimnaziji) s trideset osam godina iskustva rada u školi.

Problematika istraživanja koje nam slijedi ima sličnosti s problematikom prethodnog istraživanja. Tema istraživanja, ciljevi i hipoteze jednaki su im. Već iz naslova možemo uočiti da je sljedeće istraživanje provedeno na manjem uzorku, tj. ispitano je manje nastavnika matematike, no u ovom istraživanju (u odnosu na prethodno istraživanje) razlikuje se tehnika ispitivanja – u ovom slučaju intervju. Također, pitanja se sasvim ne podudaraju u obama istraživanjima. Svakom pojedinom nastavniku postavljena su sljedeća pitanja:

1. *Uočavate li u svojem radu pozitivnu ili negativnu povezanost matematičkih koncepata s definicijama pojma? Preciznije, na temelju vlastitog iskustva, smatrate li da učenici mogu ispravno riješiti matematički zadatak ne poznajući definiciju pojma ili obrnuto, mogu li učenici na temelju ispravne definicije pojma doći do pogrešnih zaključaka, tj. da učenici na temelju točne definicije nisu sposobni riješiti matematički zadatak? Imate li konkretan primjer?*
2. *Zahtijevate li da vaši učenici znaju definicije?*
3. *Imate li ideju kako bi učenici lakše, odnosno s razumijevanjem naučili definicije matematičkih pojmova?*

I. Nastavnik matematike u osnovnoj školi s dvije i pol godine iskustva rada u školi

Kao odgovor na prvo pitanje nastavnik je uočio da učenici više na primjerima nego na definicijama shvate određene matematičke koncepte. Naravno, navodi da to nije matematički ispravan postupak, ali učenicima u osnovnoj školi mnogo je „bliži”. Na primjer, u 6. razredu pri obradi cijelih brojeva učenicima je često teško objasniti opis postupka zbrajanja cijelih brojeva različitih predznaka kao: ... *oduzmu se apsolutne vrijednosti pribrojnika (manja od veće), a zbroj ima predznak pribrojnika s većom apsolutnom vrijednosti*. Međutim, na konkretnim primjerima učenici usvoje spomenuti koncept. Isto tako nastavnik navodi da definiciju ili opis postupka uvijek napiše na ploču te da je učenici zapišu u svoje bilježnice. Dakle, u ovom slučaju učenici ovladaju postupkom zbrajanja cijelih brojeva različitih predznaka iz provedenih primjera a da ne znaju opisati formalni postupak. No primijetimo da je ta procedura vrlo jednostavna, odnosno možemo svrstati takve zadatke u jednostavne zadatke.

One definicije koje učenici najčešće zapamte definicije su iz geometrije. To su većinom definicije oblika najbližeg roda i razlike vrste te su uglavnom vrlo intuitivne i jasne. S obzirom na problem našeg istraživanja, definicije iz geometrije izrazito su povezane s matematičkim konceptima. Dakle, nastavnik navodi sljedeće: ako učenici ne znaju definiciju polumjera ili tetive kružnice, najčešće ne znaju ni riješiti zadatak. Obrnuto, nastavnik navodi da postoje i slučajevi u kojima učenici točno riješe zadatak bez poznavanja definicije. Na primjer, u 7. razredu pri obradi mnogokuta znaju nacrtati dijagonalu konkretnog mnogokuta, ali ne znaju definiciju dijagonale mnogokuta. Nastavnik također navodi da određeni broj učenika (na nastavnikov upit) zna izreći određenu definiciju, ali nije sposoban riješiti zadatak. Dakle, učenici su naučili definiciju napamet, bez razumijevanja i razmišljanja. Jedan zanimljiv primjer u kojem je do izražaja došao postupak provjere poznavanja definicija kod učenika nalazimo u igri *Alias* koju je nastavnik ove školske godine proveo s učenicima. Naime, to je igra u kojoj se treba objasniti zadani pojam bez upotrebe korijenja riječi. Dakle, ovdje je nastavnik uočio koliko učenici loše poznaju definicije. Nastavnik navodi da učenici nastoje objasniti zadani pojam, tj. izreći njegovu definiciju, ali to najčešće nije ispravna matematička definicija.

Kao odgovor na drugo postavljeno pitanje nastavnik navodi da unatoč tomu što on na satu kaže definicije i učenici ih zapišu u svoje bilježnice – ne zahtijeva da ih učenici nauče. U pisanim

provjerama za ocjenu koja se odnosi na element vrednovanja matematičke komunikacije u kojima se, između ostalog, provjerava usvojenost definicija jesu pitanja na koja učenici odgovaraju *točno* ili *netočno*. Ili, na slikovitom prikazu kružnica i dijelova kružnice učenici su morali upisati naziv prikazanog pojma. Nastavnik također navodi da je jedina definicija koju je ove školske godine provjeravao izravnim pitanjem u pisanoj provjeri znanja bila definicija vektora koju je većina učenika razrednog odjela ispravno napisala. Nastavnik navodi i to da apstraktnije definicije uvijek nastoji približiti učenicima raznovrsnim primjerima. Kao što smo vidjeli u igri *Alias*, učenici nisu vješti u iskazivanju definicija pojmova, stoga nastavnik navodi kako misli da i u slučaju provjeravanja znanja učenika o definicijama pri provjeri znanja ne bi bilo mnogo uspješnih odgovora.

Kao odgovor na treće postavljeno pitanje nastavnik navodi da bi dobar put k boljem razumijevanju i usvajanju matematičkih definicija kod učenika bio taj da oni sami pokušaju definirati zapažene pojmove. Kao što smo već naveli, usvajanje novih matematičkih pojmova najčešće započinje uvodnim primjerom na početku nastavnog sata kada učenici na poticaj nastavnika uočavaju bitna svojstva pojma, nakon čega nastavnik prikazuje definiciju. Ono što bi prema ispitanom nastavniku bilo poželjno, ali i prema modelu Škole za život: učenici bi sami trebali pokušati definirati zadani pojam pa u raspravi s nastavnikom uočiti pozitivne i negativne strane te napisane definicije i doći do ispravne definicije. Time bi učenici aktivno sudjelovali u određivanju definicije novog pojma, što znamo da ostaje dugoročnije u pamćenju, ali učili bi i neka bitna matematička svojstva, nužnost i dovoljnost uvjeta u definiciji nekog pojma.

II. Nastavnik matematike u osnovnoj školi s dvadeset godina iskustva rada u školi

Kao odgovor na prvo postavljeno pitanje nastavnik navodi da s obzirom na temu istraživanja veliku ulogu ima nastavna jedinica koja se obrađuje. Naime, nastavnik navodi da postoje situacije u kojima učenici ispravno riješe zadatak a da ne znaju definiciju pojma kada ih upita.

Kao odgovor na drugo postavljeno pitanje nastavnik navodi da također ne zahtijeva da učenici znaju definicije, već traži da znaju objasniti na primjeru ili primijeniti određeni matematički koncept. Nastavnik također navodi da definicije koje učenici najviše usvoje jesu definicije iz geometrije. Kao i prethodni nastavnik, ovaj nastavnik navodi da te definicije nisu apstraktne i učenici ih mogu slikovito prikazati.

Kao odgovor na treće postavljeno pitanje nastavnik navodi da je glavni problem zbog kojeg se matematičke definicije ne usvajaju – apstraktnost definicija i analogija prisutna u zadacima u kojima učenici misle da čak i ako ne znaju definiciju, mogu uspješno riješiti zadatak. Ono što bi bilo poželjno učiniti, prema nastavniku, jest to da učenici na raznim primjerima apstraktnost svedu na minimum. Dakle, ključ usvajanja definicija u tome je da učenici vide što više primjera i na temelju njih uoče pravilnosti koje će im olakšati učenje definicija, ali i povećati razumijevanje i dugoročnost pamćenja matematičkih definicija.

III. Nastavnik matematike u srednjoj školi (tehničkoj) s deset godina iskustva rada u školi

Slično kao i prethodno ispitani nastavnik, kao odgovor na prvo postavljeno pitanje nastavnik navodi da povezanost matematičkih koncepata i definicije pojma u školskoj praksi ovisi o nastavnoj jedinici. Preciznije, nastavnik navodi da većina učenika ne uči definicije, već uči postupke rješavanja zadataka. Ti naučeni postupci vrlo se brzo i zaborave jer nemaju teorijsku podlogu. Suprotno, nastavnik navodi da u nastavnoj jedinici *Sličnost trokuta* učenici u zadatku u kojem su prikazani trokuti i treba prepoznati koji su od njih slični moraju znati definiciju. Dakle, bez definicije ne bi mogli riješiti zadatak. Slično, u 2. razredu srednje škole učenici usvajaju diskriminantu kvadratne jednadžbe. Njezina definicija glasi: *Neka je dana kvadratna jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su a , b i c realni brojevi i gdje je $a \neq 0$. Diskriminanta kvadratne jednadžbe jest broj $d = b^2 - 4ac$. Ovisno o diskriminanti, kvadratna jednadžba može imati jedno dvostruko realno rješenje ($d = 0$), dva realna različita rješenja ($d > 0$) i nemati realna rješenja, odnosno imati dva konjugirano kompleksna rješenja ($d < 0$).* Drugim riječima, učenici bez poznavanja navedene definicije i pravila ne mogu bez rješavanja kvadratne jednadžbe odrediti koliko je rješenja i kojeg su tipa rješenja zadane kvadratne jednadžbe. Prema nastavnikovoj praksi, još jedan primjer učenja samo postupka rješavanja zadatka – jer učenici misle da im ne treba definicija – nalazi se u nastavnoj jedinici *Trigonometrija pravokutnog trokuta*. Naime, prema nastavniku, ako učenici trebaju odrediti trigonometrijske omjere šiljastih kutova pravokutnog trokuta sa standardnim oznakama, oni nauče pripadne formule, npr. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$. No ako je zadan trokut s nestandardnim oznakama, što nastavnik često učini u pisanim provjerama, učenici bez poznavanja definicije trigonometrijskih omjera šiljastog kuta u pravokutnom trokutu ne mogu odrediti trigonometrijske omjere šiljastih kutova pravokutnog trokuta.

Može se navesti i primjer pojma derivacija funkcije kada nastavnik ne objašnjava definiciju, već učenici usvajaju taj koncept bez definicije. Naime, nastavnik zbog zahtjevnosti definicije (preko limesa) ne daje njezino objašnjenje, već učenici usvajaju postupak određivanja derivacije funkcija pomoću formula, tj. šablonski.

Kao odgovor na drugo postavljeno pitanje nastavnik navodi da pri provjeri znanja ne zahtijeva izravno poznavanje definicija, no učenici za rješavanje određenih tipova zadataka moraju znati definiciju pojma. Na primjer, nastavnik navodi, kao što smo već spomenuli, da za određivanje trigonometrijskih omjera šiljastih kutova pravokutnog trokuta u pisanu provjeru znanja uvrštava pravokutne trokute s nestandardnim oznakama te na temelju toga provjerava znanje definicije. Da bismo definirali trigonometrijske omjere u pravokutnom trokutu, najprije trebamo definirati prilježicu i nasuprotnu katetu: *Neka je dan pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Ako je kateta na kraku šiljastog kuta, kažemo da je ta kateta tom kutu prilježica kateta, u suprotnom kažemo da je tom kutu nasuprotna kateta.* Definicija trigonometrijskih omjera u pravokutnom trokutu glasi: *Neka je dan pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Trigonometrijski su omjeri kuta α : sinus kuta $\alpha = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$, kosinus kuta $\alpha = \frac{\text{prilježica kateta}}{\text{hipotenuza}}$, tangens kuta $\alpha = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{prilježica kateta}}$ i kotangens kuta $\alpha = \frac{\text{prilježica kateta}}{\text{nasuprotna kateta}}$.*

Kao odgovor na treće postavljeno pitanje nastavnik navodi da bi dobar način uključivao korištenje više raznovrsnih primjera koji sadrže više zadataka te da bi ih trebalo povezati ili prepoznati određene pojmove. Dakle, dobar način, prema nastavniku, bi bio takav da se jedan zadatak riješi na više načina kako bi se skup ideja pojma povećao i samo znanje definicije ostalo bi dugoročnije u pamćenju.

IV. Nastavnik matematike u srednjoj školi (gimnaziji) s trideset osam godina iskustva rada u školi

Kao odgovor na prvo postavljeno pitanje nastavnik navodi da većina učenika ne uči definicije matematičkih pojmova te da im je općenito matematički rječnik vrlo siromašan, a učenici napamet uče postupke rješavanja matematičkih zadataka. Budući da ispitanik nastavnik predaje učenicima koji polaze program opće gimnazije i prirodoslovno-matematičke gimnazije, možemo usporediti ta dva gimnazijska programa u kontekstu naše teme. Nastavnik navodi da je „neučenje” definicija matematičkih pojmova, kao i učenje matematičkih procedura napamet

bez razumijevanja, u gotovo cijelom razredu zastupljeno u općoj gimnaziji. Za razliku od opće gimnazije, učenici koji pohađaju program prirodoslovno-matematičke gimnazije uče definicije, ali samo oni koji imaju ocjene vrlo dobar i odličan te su očito sposobni riješiti i matematičke probleme primjenjujući definicije pojmova. No važna razlika u učenju definicija matematičkih pojmova u tim dvama gimnazijskim programima jest u sljedećem: učenici koji pohađaju prirodoslovno-matematičku gimnaziju uočavaju važnost definicija pojmova te, iako je možda nisu naučili pri rješavanju zadataka, pogledaju definiciju, razmisle i na temelju toga riješe zadatak. Dakle, možemo reći da su, unatoč tomu što možda neke definicije ne nauče, svjesni toga da pomoću definicije mogu riješiti zadatak, a ako ne znaju postupak, pročitaju definiciju s razumijevanjem.

Kao odgovor na drugo postavljeno pitanje nastavnik navodi da znanje definicija provjerava pri provjeri znanja i u općoj i u prirodoslovno-matematičkoj gimnaziji. Ali kao što je prethodno navedeno i objašnjeno, učenici u općoj gimnaziji čak i ako nauče definicije za provjeru znanja, nauče ih napamet, bez razumijevanja, za razliku od pojedinih učenika u prirodoslovno-matematičkoj gimnaziji.

Kao odgovor na treće postavljeno pitanje nastavnik navodi da bi dobar put k učenju matematičkih definicija s razumijevanjem uključivao rješavanje što više zadataka različitih tipova u kojima bi učenici uočili da nema smisla učiti napamet toliko postupaka rješavanja zadataka, već treba naučiti s razumijevanjem definiciju pojma kao i određena svojstva te navedeno primijeniti u pojedinom zadatku. Nastavnik nadodaje kako smatra da učenici trebaju znati definicije, odnosno koristiti matematički jezik kao što i na satu engleskoga koriste engleski jezik.

Zaključak:

Na temelju istraživanja možemo zaključiti da učenici nedovoljno uče većinu definicija matematičkih pojmova. Često, ako ih i nauče, to učine na razini interpretacije, odnosno nisu ih usvojili jer ih nisu naučili s razumijevanjem. Preciznije, istraživanje je pokazalo da manji dio učenika koji pohađaju osnovnu školu nauči definicije pojmova, ali ih ne zna primijeniti na zadatke. Za razliku od učenika osnovne škole, manji dio učenika koji pohađa program prirodoslovno-matematičke gimnazije uči definicije matematičkih pojmova s razumijevanjem i zna riješiti zadatke. Ali takvih je učenika neznatan broj. Time je potvrđena naša hipoteza da

većina učenika ne uči definicije matematičkih pojmova s razumijevanjem. Također, većina učenika ispitanih nastavnika usvaja načine provođenja matematičkih procedura. Dakle, istraživanje je pokazalo da većina učenika, i oni koji pohađaju osnovnu i oni koji pohađaju srednju školu, bez poznavanja definicije pojma, odnosno poznajući samo postupak rješavanja zadataka, mogu riješiti tek jednostavni zadatak. Time smo potvrdili našu hipotezu da se jednostavni matematički zadatci mogu riješiti bez poznavanja definicije matematičkog pojma. Dolazimo do zaključka kako učenici zapravo ne razumiju matematičke koncepte. Osvrnemo li se na elemente vrednovanja u nastavnom predmetu Matematika: *usvojenost znanja i vještina, matematička komunikacija i rješavanje problema*, jasno je da se to mora odraziti i na ocjene.

Istraživanje je pokazalo da većina nastavnika ne zahtijeva poznavanje matematičkih definicija, neovisno o tome rade li u osnovnoj ili srednjoj školi. Jedino nastavnik koji predaje u gimnaziji zahtijeva poznavanje matematičkih definicija. Time je naša hipoteza da nastavnici u osnovnim i srednjim školama ne zahtijevaju poznavanje matematičkih definicija potvrđena. Također dolazimo do zaključka da je za loše ocjene jednim dijelom zaslužan i način poučavanja. Naime, ako nastavnici ne zahtijevaju poznavanje definicija matematičkih pojmova, svjesno odustaju od toga da učenici razumiju matematičke koncepte jer je usvajanje i razumijevanje definicija matematičkih pojmova temelj razumijevanja matematičkog koncepta. Dakle, nastavnici u pisane provjere znanja ne uvrštavaju definicije matematičkih pojmova već izvještane zadatke sa standardnim procedurama. Za primjer, jedan nastavnik navodi da je u cijeloj školskoj godini zahtijevao samo jednu definiciju u jednoj pisanoj provjeri, ali i kad bi češće provjeravao definicije, vjeruje da ne bi bilo mnogo uspješnih odgovora. Na takav način učenici samo usvajaju standardne procedure bez mnogo razmišljanja, odnosno matematiku znaju samo površno, a ne onako kako bi trebalo.

Budući da nastavnici uglavnom ne zahtijevaju poznavanje matematičkih definicija, nije ni čudno što ih učenici ne usvajaju. Kao još jedan zaključak provedenog istraživanja nameće se informacija da je za takav pristup učenika jednim dijelom zaslužan rad nastavnika, odnosno da su nastavnici neizravno stvorili preduvjete za takvu situaciju.

Posljedica svega navedenog jest to da učenici ne usvajaju matematiku kako bi trebali – većina učenika ne zna definicije i ne razumije matematičke koncepte, što dovodi do sljedećeg: ako nastavnik malo promijeni zadani zadatak, učenici ga više ne znaju riješiti. Još jedna važna posljedica navedenog jest ta da učenici bez teorijske podloge vrlo brzo zaborave naučene postupke rješavanja zadataka, što nije nikako pravi put k izgradnji znanja matematike. Također,

istraživanje je pokazalo da jedino učenici koji pohađaju program prirodoslovno-matematičke gimnazije zaista razumiju važnost definicija u matematici, tj. da definicije izgrađuju matematiku, a ne postupci rješavanja zadataka.

Na temelju rezultata provedenih istraživanja i prikaza istraživanja došli smo do sličnih zaključaka. Naime, većina učenika pristupa rješavanju matematičkih problema koristeći samo sliku pojma te je manji broj učenika koji ispravno riješe matematički problem zaista pristupio rješavanju ispravno: koristeći definiciju pojma. Takav pristup obično imaju učenici s visokom ocjenom iz Matematike.

6. ZAKLJUČAK

Na temelju ovog rada došli smo do zaključka da većina učenika ne usvoji matematičke koncepte. Naime, bez poznavanja formalnih matematičkih definicija većina učenika sposobna je riješiti samo jednostavne matematičke zadatke učenjem matematičkih procedura napamet bez obzira na to je li riječ o učenicima u osnovnoj ili srednjoj školi ili o studentima matematike. Još jedan važan problem koji se ovdje javlja jest učenje tih postupaka rješavanja matematičkih zadataka bez razumijevanja. Jedan ispitani nastavnik navodi da ako učenika zaustavi u nekom koraku rješavanja jednostavnog zadataka i upita da mu ga objasni, najčešći su odgovori da to tako mora biti – bez objašnjenja. Iz toga je vidljivo da učenici zapravo ne razumiju matematičke procedure, ali onda ne razumiju ni matematički koncept. Dakle, i u teoriji i u praksi ovim smo radom potvrdili da učenici bez poznavanja formalne definicije mogu ispravno riješiti samo jednostavni matematički zadatak. Nažalost, čini se da nastavnici ne samo da toleriraju već svojim pristupom nastavi i vrednovanju određenim dijelom i uzrokuju takvu situaciju.

Neznatan broj učenika uči i shvaća važnost matematičkih definicija te su takvi učenici i sposobni riješiti složene matematičke zadatke. Oni najčešće pohađaju program prirodoslovno-matematičke gimnazije i najvjerojatnije će kasnije upisati fakultet koji zahtijeva znanje matematike, stoga im je važno da tijekom školovanja usvajaju matematiku onako kako bi trebalo, i teorijski i računski, ne odvajajući jedno od drugoga.

Uz navedeno, rezultati istraživanja pokazali su da se u različitim obrazovnim sustavima pridaje različita važnost definicijama matematičkih pojmova. Zahtjevi hrvatskog obrazovnog sustava, a tako i kurikulum, pridaju veliku važnost usvajanju definicija matematičkih pojmova, za razliku od njemačkog obrazovnog sustava. No provedenim istraživanjima pokazali smo da većina ispitanih nastavnika koji rade u hrvatskom obrazovnom sustavu ipak u praksi ne pridaje važnost usvajanju matematičkih definicija. To se očituje uvrštavanjem zadataka sa standardnim procedurama u pisane provjere s vrlo malo ili bez problemskih zadataka, odnosno neinzistiranjem na usvajanju i razumijevanju matematičkih definicija.

Neki od savjeta koje ispitani nastavnici navode – kako bi učenici shvatili važnost definicija i lakše usvajali matematičke koncepte – uključuju razne igre, mentalne mape, kvizove, alate dinamičke geometrije i slično. Ostaje pitanje zašto nastavnici ne primjenjuju vlastite savjete. U trećem istraživanju većina nastavnika navodi kako bi se trebalo izbjegavati vrlo slične zadatke i upotrijebiti raznovrsne zadatke, što smatram najučinkovitijim rješenjem. Podsjetimo se, u to

bi se mogli ubrajati i zadatci iz svakodnevnog života čiji su ciljevi i današnje nastave osmišljene u okviru programa Škole za život. Ispitani nastavnici navode da takav pristup ne primjenjuju u onolikoj mjeri u kojoj bi trebalo zbog nedostatka vremena. To ne može biti isprika. Ako je zaista tako, treba nam velika promjena u obrazovnom sustavu, a novi Kurikulum nije postigao svoj cilj.

S obzirom na sve navedeno, nameće se zaključak da učenici na svim razinama obrazovanja uglavnom ne usvajaju matematičke koncepte. Učenici su samo točno riješili zadatak, odnosno ispravno usvojili i proveli matematičku proceduru, ali nisu usvojili matematički koncept. To znači da vjerojatno neće biti sposobni primijeniti istu proceduru kada budu suočeni sa samo malo izmijenjenim zadacima ili kad se bude očekivala primjena tog znanja u nekom drugom području. Ispravno usvojiti matematiku ne znači baratati matematičkim procedurama, već usvojiti matematičke koncepte. U prilog tomu ide i način rada nastavnika koji uglavnom ne pridaju važnost definicijama matematičkih pojmova, prvotno u pisanim provjerama u kojima se najčešće provjerava usvojenost matematičkih sadržaja. Dakle, jedini put k izgradnji znanja iz matematike podrazumijeva pridavanje veće važnosti matematičkim definicijama primjenjujući ih u raznim primjerima i zadacima, a nikako usvajati procedure rješavanja zadataka napamet.

7. LITERATURA

- [1] Babić, M., Belavić, D., Dika, A., Draženović Žitko, V., Fofonjka, M., Golac Jakopović, I., Goleš, B., Jukić, S., Lobar, Z., Marić, M., Nemeth, T., Stajčić, G., Vuković, M., Vuković, A., *Matematika 6, digitalni obrazovni sadržaj matematike za šesti razred osnovne škole*, Profil Klett. Dostupno na: <https://hr.izzi.digital/DOS/1399/1400.html> (Preuzeto 15. svibnja 2021.)
- [2] Cotič, M., Felda, D., *Solving realistic problems in the initial instruction of mathematics*, 2011. Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/en/clanak/106014> (Preuzeto 5. listopada 2022.)
- [3] Edutorij, e-Škole, *Pojam linearne funkcije*. Dostupno na: https://edutorij.eskole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/8de4554a-5c3e-47b6-b355b81bb7d387cc/html/10636_Pojam_linearne_funkcije.html (Preuzeto 30. kolovoza 2022.)
- [4] Edwards, B., Ward, M., *The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses*, 2008. Dostupno na: <https://ir.library.oregonstate.edu/concern/defaults/qz20st055> (Preuzeto 27. ožujka 2021.)
- [5] Gusić, M., *Uloga nastavnika pri formiranju matematičkih koncepata kod učenika*. Poučak Vol. 17, No. 67(2016). Dostupno na: https://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=266669 (Preuzeto 27. ožujka 2021.)
- [6] Gusić, J., Mladinić, P., Pavković, M., *Matematika 2, udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred opće, jezične i klasične gimnazije, 1. dio*, 2008, Školska knjiga.
- [7] Gusić, J., Mladinić, P., Pavković, M., *Matematika 2, udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred opće, jezične i klasične gimnazije, 2. dio*, 2008, Školska knjiga.
- [8] Jukić Matić, L., Kehler-Poljak, G., Rukavina, S., *The Influence of Curriculum on the Concept of Function: An Empirical Study of Pre-Service Teachers*, 2022. European Journal of Science and Mathematics Education, 10(3), 380-395. Dostupno na: https://www.researchgate.net/publication/360142740_The_Influence_of_Curriculum_on_the_Concept_of_Function_An_Empirical_Study_of_Pre-Service_Teachers (Preuzeto: 23. kolovoza 2022.)
- [9] Juričić Devčić, M., *Kognitivni, metakognitivni i motivacijski aspekti rješavanja matematičkih problema*, 2016. Dostupno na: https://www.researchgate.net/publication/325391057_Kognitivni_metakognitivni_i_motivacijski_aspekti_rjesavanja_matematickih_problema (Preuzeto 5. listopada 2022.)

- [10] Kadum, V., *O problemu sposobnosti i nesposobnosti za matematiku*, 2006. Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/en/11544> (Preuzeto 5. listopada 2022.)
- [11] Kurnik, Z., *Jezik u nastavi matematike*, Matematika i škola, 33(2006), 99-105. Dostupno na: <https://mis.element.hr/fajli/392/33-02.pdf> (Preuzeto 27. ožujka 2021.)
- [12] Kurnik, Z., *Matematički pojam*, Matematika i škola, 11(2001), 8-16. Dostupno na: <http://mis.element.hr/fajli/182/11-02.pdf> (Preuzeto 27. ožujka 2021.)
- [13] Kurnik, Z., *Matematički zadatak*, Matematika i škola, 7(2000), 51-58. Dostupno na: <https://mis.element.hr/list/3/broj/7/clanak/54/matematicki-zadatak> (Preuzeto 5. listopada 2022.)
- [14] Matić, I., Barišin, J., Jukić Matić, Lj., Zelčić, M., Mišurac, M., Gortan, R., Vujasin Ilić, V., Dijanić, Ž., *Matematika 2, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno, 2. dio*, 2021, Školska knjiga.
- [15] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, 2019. Dostupno na: https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html (Preuzeto 27. ožujka 2021.)
- [16] Panaoura, A., Michael-Chrysanthou, P., Philippou, A., *Teaching the concept of function: Definition and problem solving*, 2016. Dostupno na: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01286927/document> (Preuzeto 27. ožujka 2021.)
- [17] Simon, M., *What is a Mathematical Concept?*, 2020. Dostupno na: https://www.researchgate.net/publication/338490514_What_is_a_Mathematical_Concept (Preuzeto: 8. rujna 2022.)
- [18] Sruk, S., *Modeliranje funkcijama u ekonomiji*, 2021. Dostupno na: <https://hrcak.srce.hr/file/390469> (Preuzeto: 5. listopada 2022.)
- [19] Varošaneć, S., *Matematika 3, udžbenik za 3. razred gimnazija i strukovnih škola, 3 ili 4 sata nastave tjedno*, 2020, Element d.o.o.
- [20] Vinner, S., *The role of denitions in the teaching and learning of Mathematics*. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1991, 6581. Dostupno na: https://www.researchgate.net/publication/227282219_The_Role_of_Definitions_in_the_Teaching_and_Learning_of_Mathematics (Preuzeto 27. ožujka 2021.)
- [21] Žubrinić, D., *Matematičke izreke*, 2010. Dostupno na: <http://www.croatianhistory.net/mat/izreke.html> (Preuzeto 14. listopada 2022.)

8. POPIS SLIKA

Slika 1 Predmeti oblika paralelograma: segment vrata ormara, pločica, slika, parket, papir, nož skalpela izvan kućišta.....	5
Slika 2 Postoji li funkcija čiji je ovo graf? (URL: https://www.researchgate.net/publication/227282219_The_Role_of_Definitions_in_the_Teaching_and_Learning_of_Mathematics , preuzeto 27. ožujka 2021.).....	14
Slika 3 Raspodjela ispitanih nastavnika prema vrsti škole u kojoj rade	23
Slika 4 Udio svih ispitanih nastavnika, onih koji rade u osnovnoj i onih koji rade u srednjoj školi, o stavu prema usvajanju definicija matematičkih pojmova	25
Slika 5 Udio, prema iskustvu ispitanih nastavnika, učenika koji usvoje i ne usvoje definicije matematičkih pojmova	26
Slika 6 Udio nastavnika koji smatraju da se matematički zadatak može riješiti uz poznavanje definicije pojma, bez poznavanja definicije pojma i u objema situacijama u ovisnosti u kojoj vrste škole rade.....	29