Fuzzy grafovi

Plantić, Karolina

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Karolina Plantić

Fuzzy grafovi

Završni rad

Rijeka, srpanj 2023.

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Karolina Plantić

Fuzzy grafovi

Mentor: prof. dr. sc. Dean Crnković

Završni rad

Rijeka, srpanj 2023.

Sažetak

Grafovi predstavljaju prirodan i dobar način za modeliranje relacija. Objekti su predstavljeni vrhovima, a relacije bridovima. Kada postoji nejasnoća u opisu objekata ili u njihovim odnosima ili oboje, prirodno je da trebamo dizajnirati fuzzy grafove koji su opisani u ovom završnom radu. Riječ "fuzzy" dolazi iz engleskog jezika i znači nejasan, neizrazit.

U prvom dijelu uvodimo pojam fuzzy relacije, definirat ćemo kompoziciju fuzzy relacija te svojstva refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost. U drugom djelu rada uvedena je terminologija grafova i fuzzy analozi za nekoliko osnovnih pojmova teorije grafova kao što su graf, podgraf, put, povezanost, klaster, klika, most ili rezni brid , rezni vrh, šuma i stablo.

Ključne riječi: fuzzy relacije, fuzzy graf, fuzzy podgraf, put, fuzzy klaster, fuzzy klika, most ili rezni brid, rezni vrh, fuzzy šuma, fuzzy stablo

Sadržaj

1 Uvod

Teorija grafova grana je matematike koja se razvija od 18. stoljeća. Osim u matematici koristi se u računarstvu, arhitekturi, fizici, biologiji, ekonomiji, računalnoj znanosti. Teorija grafova bavi se grafovima, matematičkim objektima kojima možemo modelirati složene probleme vrlo jednostavno. Graf se u ovom kontekstu sastoji od vrhova koji su povezani bridovima. Razlikuju se neusmjereni grafovi, gdje bridovi simetrično povezuju dva vrha, i usmjereni grafovi, gdje bridovi asimetrično povezuju dva vrha. U usmjerenim grafovima uređene parove (bridove) nazivamo lukovima ili usmjerenim bridovima. Grafovi su jedan od glavnih predmeta proučavanja u disketnoj matematici, a također se koriste u geometriji, linearnoj algebri, kombinatorici i određenim dijelovima topologije.

Struktura grafa može se proširiti dodjeljivanjem težina svakom bridu grafa. Grafovi s težinama ili težinski grafovi koriste se za predstavljanje struktura u kojima vrhovi u paru imaju neke numeričke vrijednosti. Na primjer, ako graf predstavlja cestovnu mrežu, vrhovi gradove, tada bi težine mogle predstavljati udaljenost dva grada. Sa svakim vrhom može biti povezano nekoliko težina. Odnosno, svaki grad može biti povezan sa više gradova. Uz već, spomenute težinske grafove, postoje fuzzy grafovi čije težine nisu sve realne vrijednosti već samo vrijednosti iz segmenta $[0, 1]$. Da bi definirali fuzzy grafove najprije moramo definirati fuzzy relacije i njihova svojstva te ih primijeniti na fuzzy skup.

U skladu s time, tema ovog završnog rada bit će bolje upoznavanje teorije fuzzy grafova. Obradit će se osnovni pojmovi i svojstva fuzzy grafova te će se osnovni pojmovi fuzzy grafa pokazati na primjerima.

2 Fuzzy relacije

Fuzzy relacije jedan su dio fuzzy matematike koju je utemeljio matematičar L. A. Zadeh. Osim fuzzy relacija u navedeno područje uključujemo i fuzzy skupove, fuzzy logiku, fuzzy algoritme, fuzzy grafove i slično. Prije definiranja samih fuzzy grafova u ovom poglavlju definirat ćemo pojmove fuzzy podskup, fuzzy relacija koji će biti važni kod definiranja fuzzy grafova. U povijesti pojam fuzzy relacije prvi put se spominje 1971. godine u radu matematičara L. A. Zadeh.

Neka je S skup. Definiramo *fuzzy podskup* od S kao preslikavanje $\sigma : S \to [0,1]$ koje svakom elementu $x \in S$ pridružuje stupanj pripadnosti, $0 \leq \sigma(x) \leq 1$. Na sličan način definiramo *fuzzy relaciju* na S kao fuzzy podskup od $S \times S$, to jest kao preslikavanje $\mu : S \times S \to [0,1]$ koje svakom uređenom paru elemenata (x,y) pridružuje stupanj pripadnosti, $0 \leq \mu(x,y) \leq 1$. U posebnom slučaju kada σ i μ poprimaju samo vrijednosti 0 i 1, one postaju karakteristične funkcije podskupa od S i relacije na S. Odnosno, ako je $T \subseteq S$, a $R \subseteq S \times S$ relacija na S, tada je R relacija na T uz uvjet da $(x,y) \in R$ implicira $x \in T$ i $y \in T$ za svaki x, y. Neka je τ karakteristična funkcija od T i ρ karakteristična funkcija od R, tada vrijedi uvjet

$$\rho(x,y) = 1 \text{ implicira } \tau(x) = \tau(y) = 1 \qquad \text{za svaki } x, y \in S.$$

To je ekvivalentno sljedećem uvjetu

$$\mu(x,y) \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(y)\} \qquad \text{za svaki } x, y \in S$$

Vraćajući se na opći slučaj gdje je σ fuzzy podskup od S i μ fuzzy relacija na S, reći ćemo da je μ fuzzy relacija na σ ako vrijedi

$$\mu(x,y) \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(y)\} \qquad \text{za svaki } x, y \in S$$

Za bilo koji t, $0 \leq t \leq 1$ skup $\sigma_t = \{x \in S | \sigma(x) \geq t\}$ je podskup od S, a skup

$\mu_t = \{(x,y) \in S \times S | \mu(x,y) \geq t\}$ je relacija na S. Koristeći definirane σ_t i μ_t iskazat ćemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.1. Neka je μ fuzzy relacija na σ i neka je $0 \leq t \leq 1$, tada je μ_t relacija na σ_t.

Dokaz. Za bilo koji uređeni par $(x,y) \in \mu_t$ imamo $t \leq \mu(x,y) \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(y)\}$. Stoga vrijedi $\sigma(x) \geq t$ i $\sigma(y) \geq t$. Prema tome zaključujemo $\sigma(x), \sigma(y) \in \sigma_t$. □

2.1 Kompozicija fuzzy relacija

Neka su μ i ν fuzzy relacije na σ. *Kompozicija* μ i ν je fuzzy skup $\mu \circ \nu$ definiran sa $(\mu \circ \nu)(x,z) = sup_{y \in S}[inf\,\{\mu(x,y), \nu(y,z)\}]$ za svaki $x, z \in S$. Tu kompoziciju nazivamo *max-min kompozicija.*

Propozicija 2.1.1. $\mu \circ \nu$ je fuzzy relacija na σ.

Dokaz. Za svaki x, y, z imamo $\mu(x,y) \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ i $\nu(y,z) \leq inf\,\{\sigma(y), \sigma(z)\}$. Stoga $inf\,\{\mu(x,y), \nu(y,z)\} \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\} \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(z)\}$ za svaki y tako da vrijedi $(\mu \circ \nu)(x,z) = sup_{y \in S}[inf\,\{\mu(x,y), \nu(y,z)\}] \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(z)\}$ za svaki x, z. □

Kompozicija fuzzy relacija je asocijativna, to jest za sve μ, ν, ρ vrijedi $\mu \circ (\nu \circ \rho) = (\mu \circ \nu) \circ \rho$. Stoga možemo jednostavno definirati potencije fuzzy relacije kao $\mu^1 = \mu$, $\mu^2 = \mu \circ \mu$, $\mu^3 = \mu \circ \mu^2 = \mu \circ \mu \circ \mu$ i tako dalje. Također ćemo definirati

$$\mu^\infty = sup_{k=1,2,\ldots}\mu^k.$$

Na kraju, zgodno je definirati

$$\begin{aligned} &\mu^0(x,y) = 0 \text{ ako je } x \neq y \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{za svaki } x, y \in S. \\ &\mu^0(x,x) = \sigma(x) \end{aligned}$$

Propozicija 2.1.2. Za sve t, $0 \leq t \leq 1$, imamo $(\mu \circ \nu)_t = \mu_t \circ \nu_t$.

Dokaz. Neka je $(x,z) \in (\mu \circ \nu)_t \Leftrightarrow (\mu \circ \nu)(x,z) \geq t$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow inf\,\{\mu(x,y), \nu(y,z)\} \geq t \text{ za neki } y \in S \\
&\Leftrightarrow \mu(x,y) \geq t \text{ i } \nu(y,z) \geq t \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in \mu_t \text{ i } (y,z) \in \nu_t \\
&\Leftrightarrow (x,z) \in \mu_t \circ \nu_t
\end{aligned}$$

. □

Propozicija 2.1.3. Ako je $\mu \leq \nu$ i $\lambda \leq \rho$, tada je $\mu \circ \lambda \leq \nu \circ \rho$.

Dokaz. $(\mu \circ \lambda)(x,z) = sup_{y\in S}[inf\,\{\mu(x,y), \lambda(y,z)\}] \leq sup_{y\in S}[inf\,\{\nu(x,y), \rho(y,z)\}]$
$= (\nu \circ \rho)(x,z)$ za svaki $x, z \in S$. □

Osim max-min kompozicije možemo definirati *max-prod* i *max-av kompozicije* od μ i ν, redom, sa

$$(\mu \underset{\cdot}{\circ} \nu)(x,z) + sup_{y\in S}[\mu(x,y) \cdot \nu(y,z)]$$
$$(\mu \underset{+}{\circ} \nu)(x,z) = \frac{1}{2} sup_{y\in S}[\mu(x,y) + \nu(y,z)]$$

Vrijedi : $\mu \underset{\cdot}{\circ} \nu \leq \mu \circ \nu \leq \mu \underset{+}{\circ} \nu$ za bilo koji u, v.

2.2 Refleksivnost

Neka je μ fuzzy relacija na σ. Nazivamo ju *refleksivnom* ako vrijedi $\mu(x,x) = \sigma(x)$ za svaki $x \in S$.

Propozicija 2.2.1. Ako je μ refleksivna, tada vrijedi $\mu(x,y) \leq \mu(x,x)$ i $\mu(y,x) \leq \mu(x,x)$ za svaki $x, y \in S$.

Dokaz. $\mu(x,y) \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(y)\} \leq \sigma(x) = \mu(x,x)$. Na analogan način,
$\mu(y,x) \leq inf\,\{\sigma(y), \sigma(x)\} \leq \sigma(x) = \mu(x,x)$.

□

Propozicija 2.2.2. Ako je μ refleksivna fuzzy relacija na σ, tada za bilo koji $0 \leq t \leq 1$, μ_t je refleksivna relacija na σ_t.

Dokaz. Za svaki $x \in \sigma_t$ vrijedi $t \leq \sigma(x) = \mu(x,x)$. Prema tome, $(x,x) \in \mu_t$. $\square$

Propozicija 2.2.3. Ako je μ refleksivna, tada za bilo koji ν imamo $\mu \circ \nu \geq \nu$ i $\nu \circ \mu \geq \nu$.

Dokaz. $(\mu \circ \nu)(x,z) = sup_{y \in S}[inf\,\{\mu(x,y), \nu(y,z)\}] \geq inf\,\{\mu(x,x), \nu(x,z)\}$
$= inf\,\{\sigma(x), \nu(x,z)\}$.
Ali vrijedi $\nu(x,z) \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(x)\}$ to jest $\nu(x,y) \leq \sigma(x)$. Stoga je

$$inf\,\{\sigma(x), \nu(x,z)\} = \nu(x,z).$$

Time smo dokazali $(\mu \circ \nu)(x,z) \geq \nu(x,z)$ za svaki $x, z \in S$.
Na analogan način dokazali bi $(\nu \circ \mu)(x,z) \geq \nu(x,z)$ za svaki $x, z \in S$ $\square$

Nadalje, iskazat ćemo tri posljedice koje slijede iz prethodno dokazanih propozicija, a čije dokaze možemo pronaći u literaturi [7].

Korolar 2.2.1. Ako je μ refleksivna, tada vrijedi $\mu \leq \mu \circ \mu$.

Korolar 2.2.2. Ako je μ refleksivna, tada vrijedi $\mu^0 \leq \mu^1 \leq \mu^2 \leq \cdots \leq \mu^\infty$.

Korolar 2.2.3. Ako je μ refleksivna, tada vrijedi $\mu^0(x,x) = \mu^1(x,x) = \mu^2(x,x) = \cdots = \mu^\infty(x,x) = \sigma(x)$.

Iduća propozicija povezuje kompoziciju i refleksivnost fuzzy relacija.

Propozicija 2.2.4. Ako su μ i ν refleksivne, onda je i $\mu \circ \nu$ refleksivna.

Dokaz. $(\mu \circ \nu)(x,x) = sup_{y \in S}[inf\,\{\mu(x,y), \nu(y,x)\}] \geq inf\,\{\mu(x,x), \nu(x,x)\} =$
$inf\,\{\sigma(x), \sigma(x)\} = \sigma(x)$. $\square$

2.3 Simetričnost

Fuzzy relaciju μ nazivamo *simetričnom* ako je $\mu(x, y) = \mu(y, x)$ za svaki $x, y \in S$. Jasno je da ako je μ simetrična relacija, onda je i μ_t simetrična za bilo koji t. Za razliku od refleksivnosti, simetričnost ne ovisi o izboru fuzzy podskupa σ.

Navodimo propoziciju koja povezuje svojstvo simetričnosti i kompoziciju.

Propozicija 2.3.1. Ako su μ i ν simetrične, onda je $\mu \circ \nu$ simetrična ako i samo ako je $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$.

Dokaz. Kako je $\mu \circ \nu$ simetrična vrijedi:

$$sup_{y\in S}[inf\ \{\mu(x, y), \nu(y, z)\}] = sup_{y\in S}[inf\ \{\mu(z, y), \nu(y, x)\}]$$

za svaki x, z.
Kada je $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ imamo:

$$sup_{y\in S}[inf\ \{\mu(x, y), \nu(y, z)\}] = sup_{y\in S}[inf\ \{\nu(x, y), \mu(y, z)\}]$$

za svaki x, z.
Ako su μ i ν simetrične, tada su dvije desne strane jednake. □

Dokaz iduće posljedice možemo pronaći u literaturi [7].

Korolar 2.3.1. Ako je μ simetrična, tada je i svaka potencija od μ simetrična.

2.4 Tranzitivnost

Fuzzy relaciju μ nazivamo *tranzitivnom* ako je $\mu \circ \mu \leq \mu$. Također, tranzitivnost kao i simetričnost ne ovisi o izboru σ. Stoga, tranzitivnost implicira $\mu^k \leq \mu$ za svaki k, tako da $\mu^\infty \leq \mu$. Lako se vidi da su μ, μ^∞ tranzitivne.

Propozicija 2.4.1. Ako je μ simetrična i tranzitivna, tada je $\mu(x, y) \leq \mu(x, x)$ za svaki $x, y \in S$.

Dokaz. $\mu(x, x) \geq (\mu \circ \mu)(x, x) = sup_{y \in S}[inf\,\{\mu(x, y), \mu(y, x)\}] = sup_{y \in S}\mu(x, y)$. $\square$

Propozicija 2.4.2. Ako je μ tranzitivna relacija na σ, tada za bilo koji $0 \leq t \leq 1$, μ_t je tranzitivna relacija na σ.

Dokaz. $\mu(x, z) \geq (\mu \circ \mu)(x, z) \geq inf\,\{\mu(x, y), \mu(y, z)\}$ za bilo koji x, y i z. Dakle, $\mu(x, y) \leq t$ i $\mu(y, z) \geq t$ implicira $\mu(x, z) \geq t$. $\square$

Propozicija 2.4.3. Ako je μ tranzitivna, $\nu \leq \mu$ i $\rho \leq \mu$. Tada je $\nu \circ \rho \leq \mu$.

Dokaz. $(\nu \circ \rho)(x, z) = sup_{y \in S}[inf\,\{\nu(x, y), \rho(y, z)\}] \leq sup_{y \in S}[inf\,\{\mu(x, y), \mu(y, z)\}]$
$= (\mu \circ \mu)(x, z) \leq \mu(x, z)$ za svaki x, z. $\square$

Korolar 2.4.1. Ako je μ tranzitivna, ν refleksivna i $\nu \leq \mu$, tada vrijedi $\nu \circ \mu = \mu \circ \nu = \mu$.

Dokaz. Dokaz ovog korolara slijedi iz propozicije 2.2.3 i propozicije 2.4.3. $\square$

Dokaz idućih dviju posljedica vezanih uz potencije relacija nalazi se u [7].

Korolar 2.4.2. Ako je μ refleksivna i tranzitivna, tada je $\mu \circ \mu = \mu$.

Korolar 2.4.3. Ako je μ refleksivna i tranzitivna, tada je $\mu^0 = \mu^1 = \mu^2 = \cdots \mu^\infty$.

Iduća propozicija povezuje svojstvo tranzitivnosti i kompoziciju fuzzy relacija.

Propozicija 2.4.4. Ako su μ i ν tranzitivne, $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$, tada je $\mu \circ \nu$ tranzitivna.

Dokaz. Zbog svojstva asocijativnosti i činjenice da relacije μ i ν komutiraju, imamo

$$(\mu \circ \nu) \circ (\mu \circ \nu) = (\mu \circ \mu) \circ (\nu \circ \nu) \leq \mu \circ \nu.$$

U zadnjem koraku iskoristili smo propoziciju 2.1.3. $\square$

3 Fuzzy grafovi

Nakon definiranja fuzzy podskupa te fuzzy relacija i njezinih svojstva u ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove i svojstva fuzzy grafova koje ćemo pokazati na primjerima.

Prije definiranja osnovnih pojmova fuzzy grafova prisjetit ćemo se definicije grafa i podgrafa općenito u teoriji grafova.

Definicija 3.1. *Graf* G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ gdje je:

1. $V(G) \neq \emptyset$ *skup vrhova* od G,
2. $E(G)$ *skup bridova* od G, disjunktan s $V(G)$,
3. ψ_G *funkcija incidencije* koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par, ne nužno različitih, vrhova od G.

Definicija 3.2. *Podgraf* grafa $G = (V, E)$ je graf $H = (W, F)$, gdje je $W \subseteq V$ i $F \subseteq E$. Podgraf H od G je *pravi podgraf* od G ako je $G \neq H$. Ako je H podgraf od G i $W(H) = V(G)$ onda kažemo da podgraf H *razapinje* graf G.

Bilo koja relacija $R \subseteq S \times S$ na skupu S može se smatrati definiranjem grafa sa skupom vrhova S i skupom bridova R. Na sličan način, bilo koja fuzzy relacija $\mu : S \times S \to [0, 1]$ može se smatrati definiranjem težinskog grafa ili fuzzy grafa, gdje brid $(x, y) \in S \times S$ ima težinu $\mu(x, y) \in [0, 1]$. U nastavku rada promatrat ćemo samo neusmjerene grafove, to jest vrijedit će da je fuzzy relacija μ simetrična.

Definicija 3.3. *Fuzzy graf* u oznaci $G = (\sigma, \mu)$ je par funkcija (σ, μ) gdje je $\sigma : S \to [0, 1]$ fuzzy podskup na neprazan skup S i $\mu : S \times S \to [0, 1]$ simetrična fuzzy relacija na σ takva da za svaki $x, y \in S$ vrijedi relacija $\mu(x, y) \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(y)\}$.

Primjer 3.1. Na Slici 1 je prikazan primjer fuzzy grafa G koji je dobiven na sljedeći način:

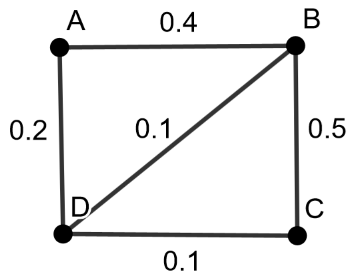
Neka je $S = \{A, B, C, D\}$ neprazni skup. Prvo definiramo fuzzy podskup σ na S kao:

$\sigma(A) = 0.5$, $\sigma(B) = 0.9$, $\sigma(C) = 1$, $\sigma(D) = 0.2$.

Zatim definiramo fuzzy relaciju μ na $S \times S$ kao:

$\mu(A, B) = 0.4$, $\mu(B, C) = 0.5$, $\mu(C, D) = 0.1$, $\mu(D, A) = 0.2$, $\mu(B, D) = 0.1$.

Dobiveni graf G je fuzzy graf jer je zadovoljena tvrdnja: $\mu(x, y) \leq inf\ \{\sigma(x), \sigma(y)\}$ za svaki $x, y \in S$.



Slika 1: Fuzzy graf G

Definicija 3.4. Fuzzy graf $H = (\tau, \nu)$ naziva se *fuzzy podgraf* od G ako vrijedi da je $\tau(x) \leq \sigma(x)$ za svaki $x \in S$ te $\nu(x, y) \leq \mu(x, y)$ za svaki $x, y \in S$.

Primjer 3.2. Na Slici 2 prikazan je primjer fuzzy podgrafa H fuzzy grafa G. Neka je $S = \{A, B, C, D\}$ neprazni skup. Prvo definiramo fuzzy podskup τ na S kao:

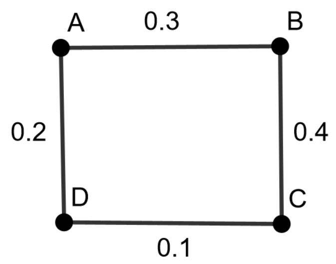
$\tau(A) = 0.3$, $\tau(B) = 0.5$, $\tau(C) = 0.7$, $\tau(D) = 0.1$.

Zatim definiramo fuzzy relaciju ν na $S \times S$ kao:

$\nu(A, B) = 0.3$, $\nu(B, C) = 0.4$, $\nu(C, D) = 0.1$, $\nu(D, A) = 0.2$, $\nu(B, D) = 0$.

Dobiveni graf H je fuzzy graf jer je zadovoljena tvrdnja: $\nu(x, y) \leq inf\ \{\tau(x), \tau(y)\}$ za svaki $x, y \in S$, a kako vrijede i sljedeće dvije tvrdnje fuzzy graf H je fuzzy podgraf od G sa Slike 1.

- $\tau(x) \leq \sigma(x)$ za svaki $x \in S$
- $\nu(x, y) \leq \mu(x, y)$ za svaki $x, y \in S$.



Slika 2: Fuzzy podgraf H

Za bilo koji t, $0 \leq t \leq 1$, ako stavimo

$$\sigma_t = \{x \in S | \sigma(x) \geq t\},$$

$$\mu_t = \{(x, y) \in S \times S | \mu(x, y) \geq t\},$$

tada imamo $\mu_t \subseteq \sigma_t \times \sigma_t$, tako da je (σ_t, μ_t) graf sa skupom vrhova σ_t i skupom bridova μ_t.

Navodimo dvije propozicije vezane uz podgrafove čije dokaze možemo pronaći u literaturi [7].

Propozicija 3.1. Ako je $0 \leq u, v \leq 1$, tada je (σ_v, μ_v) podgraf od (σ_u, μ_u).

Propozicija 3.2. Ako je (τ, ν) fuzzy podgraf od (σ, μ), tada za bilo koji t, $0 \leq t \leq 1$, (τ_t, ν_t) je podgraf od (σ_t, μ_t).

Kažemo da fuzzy podgraf (τ, ν) razapinje fuzzy graf (σ, μ) ako je $\tau(x) = \sigma(x)$ za svaki x. U ovom slučaju dva grafa imaju isti fuzzy skup vrhova, a razlikuju se u težinama bridova. Za bilo koji fuzzy podskup τ od σ, to jest takav da je $\tau(x) \leq \sigma(x)$ za svaki x, fuzzy podgraf od (σ, μ) induciran s τ je maksimalan fuzzy podgraf od (σ, μ) koji ima fuzzy skup vrhova τ. Očito je to samo fuzzy graf (τ, ν), gdje je $\nu(x, y) = inf\{\tau(x), \tau(y), \sigma(x, y)\}$ za svaki $x, y \in S$. Od sada ćemo pretpostavljati da je skup S fuzzy grafa uvijek konačan.

3.1 Putevi i povezanost

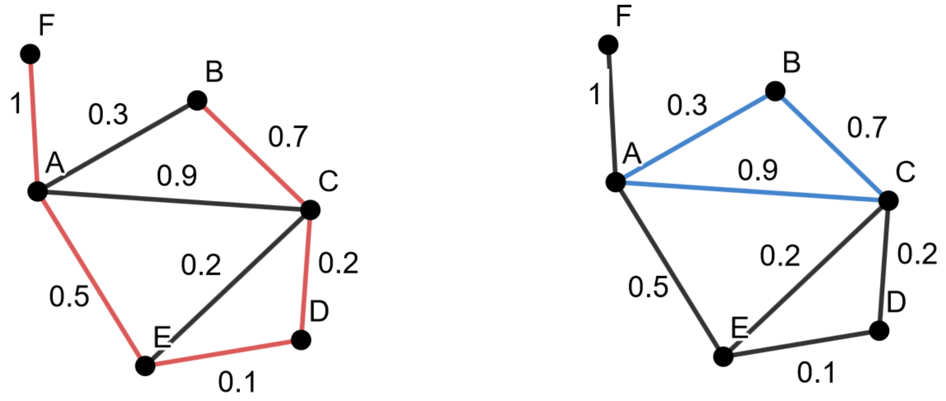
Put ρ u fuzzy grafu je niz različitih vrhova $x_0, x_1, \ldots, x_n$ takvi da je $\mu(x_{i-1}, x_i) > 0$, $1 \leq i \leq n$. Indeks $n \geq 0$ naziva se *duljina puta* ρ, a uzastopni parovi (x_{i-1}, x_i) bridovima puta. *Jakost puta* ρ definiramo kao $inf\,\{\mu(x_{i-1}, x_i)|i = 1, ..., n\}$. Drugim riječima, jakost puta je definirana kao težina najslabijeg brida puta. Ako put ima duljinu 0, definiramo njegovu jakost kao $\sigma(x_0)$. Put ρ nazivamo *ciklusom* ako je $x_0 = x_n$ i vrijedi da je $n \geq 3$.

Dva su vrha *povezana* ako postoji put između njih, a graf je *povezan* ako su svaka dva njegova vrha povezana putem. Povezanost među vrhovima je refleksivana, simetričana i tranzitivna relacija odnosno *relacija ekvivalencije.* Zapravo, x i y su povezani ako i samo ako je $\mu^\infty(x, y) > 0$. Klase ekvivalencije na skupu vrhova s obzirom na povezanost nazivaju se *komponente povezanosti* fuzzy grafa. Komponente povezanosti su maksimalni povezani fuzzy podgrafovi. Najjači put koji spaja bilo koja dva vrha x, y ima jakost $\mu^\infty(x, y)$, ponekad ćemo to nazvati *jačina povezanosti* između vrhova.

Primjer 3.1.1. Na Slici 3 prikazan je fuzzy graf G. Neka je put ρ_1 istaknut crvenom bojom na lijevoj slici fuzzy grafa G, a ρ_2 plavom bojom na desnoj slici. Odredimo duljinu i jakost puta $\rho 1$.

- Duljina puta ρ_1 je 5
- Jakost puta ρ_1 je $inf\,\{1, 0.5, 0.1, 0.2, 0.7\} = 0.1$.

Za put ρ_2 vrijedi da je početni vrh jednak zadnjem te da je broj vrhova veći ili jednak 3 pa zaključujemo da je ρ_2 ciklus u grafu G.



Slika 3: Putevi ρ_1 i ρ_2 u fuzzy grafu G

Dokaz iduće propozicije možemo pronaći u literaturi [7].

Propozicija 3.1.1. Ako je (τ, ν) fuzzy podgraf od (σ, μ), tada za svaki $x, y \in S$ vrijedi $\nu^\infty(x, y) \leq \mu^\infty(x, y)$.

Udaljenost u fuzzy grafu definiramo na sljedeći način: za bilo koji put $\rho = x_0, \dots, x_n$, definirajmo μ-duljinu od ρ kao zbroj recipročnih vrijednosti ρ-ovih težina, to jest

$$l(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(x_{i-1}, x_i)}$$

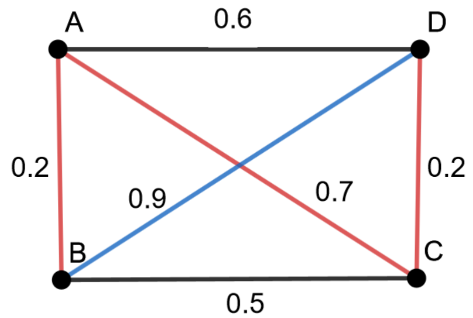
Ako je $n = 0$ definiramo $l(\rho) = 0$. Jasno je da za $n \geq 1$ imamo $l(\rho) \geq 1$. Za bilo koja dva vrha x,y sada možemo definirati njihovu μ-udaljenost $\delta(x, y)$ kao najkraću μ-duljinu bilo kojeg puta od x i y.

Primjer 3.1.2. Neka je put ρ na Slici 4 označen crvenom bojom. Izračunat ćemo μ-duljinu $l(\rho)$ puta ρ i μ-udaljenost između vrhova B i C.
Uvedimo oznake: $B = x_0, A = x_1, C = x_2, D = x_3$.

$$l(\rho) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\mu(x_{i-1}, x_i)} = \frac{1}{\mu(B,A)} + \frac{1}{\mu(A,C)} + \frac{1}{\mu(C,B)} = \frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.7} + \frac{1}{0.2} = \frac{80}{7}$$

ρ nije jedini put između vrhova B i D. Ako uzmemo u obzir sve puteve između B i D u fuzzy grafu G prikazanom na slici i odaberemo onaj čija je μ-duljina najkraća dobit ćemo μ-udaljenost, to jest

$\delta(B, D) = l(\rho_1) = \frac{10}{9}$, gdje je ρ_1 označen plavom bojom na fuzzy grafu G.



Slika 4: Udaljenost u fuzzy grafu G

Definicija 3.1.1. Neka je X neprazan skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je *metrika* (ili *funkcija udaljenosti*) na skupu X ako vrijedi:

M_1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ *nenegativnost*

M_2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *strogost*

M_3) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ *simetričnost*

M_4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ *nejednakost trokuta*

Uređeni par (X, d) nazivamo *metrički prostor*, uvjete $M_1) - M_4)$ *aksiomima metrike*, a elemente skupa X *točkama*.

Koristeći svojstva $M_1) - M_4)$ iz definicije metrike pokazat ćemo da je μ-udaljenost između vrhova x i y u oznaci $\delta(x, y)$ metrika.

Propozicija 3.1.2. $\delta(x, y)$ je metrika.

Dokaz. Pokažimo svojstva $M_1) - M_4)$ iz prethodne definicije.

$M_1)$ $\delta(x, y)$ predstavlja μ-udaljenost pa slijedi $\delta(x, y) \geq 0$.

$M_2)$ $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ jer $l(p) = 0 \Leftrightarrow \rho$ ima duljinu 0.

$M_3)$ $\delta(x, y) = \delta(y, x)$, budući da su to μ-udaljenosti istih vrhova te je μ simetrična relacija.

$M_4)$ $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$, budući je niz puteva x do y i y do z put x do z te je l aditivna na nizanje puteva.

$\square$

U ne-fuzzy slučaju, $l(\rho)$ je samo duljina n od ρ jer su svi μ-ovi jednaki 1. Stoga $\delta(x, y)$ postaje uobičajena definicija za udaljenost, to jest duljina najkraćeg puta između x i y.

3.2 Klasteri

Jedan pristup definiranja grupiranja vrhova je nazvati skup C *klasterom* vrhova reda k ako

a) za sve vrhove $x, y \in C$ vrijedi $d(x, y) \leq k$

b) za sve vrhove $z \notin C$ vrijedi $d(z, w) > k$ za neki $w \in C$.

gdje je $d(a, b)$ duljina najkraćeg puta između vrhova a i b. Drugim riječima, u k-klasteru C, svaki par vrhova je unutar udaljenosti k jedan od drugog, a C je maksimalan u odnosu na ovo svojstvo, to jest nijedan vrh izvan C nije unutar udaljenosti k od svakog vrha u C. Kada je k=1, tada se k-klaster naziva *klika*, to je maksimalan potpuni podgraf, to jest maksimalan podgraf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom. S druge strane, ako pustimo $k \to \infty$, k-klaster postaje komponenta povezanosti, to jest maksimalni podgraf u kojem za svaki par vrhova postoji put između njih.

Ove ideje mogu se primijeniti i na fuzzy grafove.

Definicija 3.2.1. Neka je $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy graf, skup $C \subseteq S$ nazivamo *fuzzy klasterom* reda k ako vrijedi

$$inf_{x,y \in C} \mu^k(x, y) > sup_{z \notin C}(inf_{w \in C} \mu^k(w, z))$$

Ako je G graf te ako imamo da je $\mu^k(a, b) = 0$ ili $\mu^k(a, b) = 1$ za svaki a i b, tada prethodnu definicija možemo pisati na sljedeći način:

a) $\mu^k(x, y) = 1$ za svaki $x, y \in C$

b) $\mu^k(w, z) = 0$ za svaki $z \notin C$ i neki $w \in C$.

Odnosno, k-klasteri dobiveni ovom definicijom samo su klike u grafovima dobivene određivanjem praga k-te potencije danog fuzzy grafa. Neka je C fuzzy k-klaster i neka je $inf_{x,y \in C} \mu^k(x, y) = t$. Ako postavimo μ^k (i σ) na t, dobivamo graf u kojem je C klika.

3.3 Mostovi i rezni vrhovi

Neka je $G = (\sigma, \mu)$ fuzzy graf i neka su x, y bilo koja dva različita vrha te neka je G' fuzzy podgraf od G dobiven brisanjem brida (x, y), to jest $G' = (\sigma, \mu')$ gdje je

$$\mu'(x, y) = 0; \; \mu' = \mu \text{ za sve ostale parove.}$$

Kažemo da je (x, y) *rezni brid* ili *most* u G ako je $\mu'^{\infty}(u, v) < \mu^{\infty}(u, v)$ za neke u, v. Drugim riječima, ako brisanje brida (x,y) smanjuje jačinu povezanosti između neka dva vrha. Očigledno, (x, y) je most ako i samo ako postoje u, v takvi da je (x, y) brid svakog najjačeg puta od u do v.

Teorem 3.3.1. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

a) (x, y) je most

b) $\mu'^{\infty}(x,y) < \mu(x,y)$

c) (x,y) nije najslabiji brid bilo kojeg ciklusa.

Dokaz. Pokažimo da $b) \implies a)$. Pretpostavimo suprotno, to jest da (x,y) nije most. Ako (x,y) nije most, moramo imati $\mu'^{\infty}(x,y) = \mu^{\infty}(x,y) \geq \mu(x,y)$, što nam daje kontradikciju s tvrdnjom b).

Pokažimo da $a) \implies c)$. Pretpostavimo suprotno, to jest da je (x,y) najslabiji brid bilo kojeg ciklusa. Tada se svaki put koji uključuje brid (x,y) može pretvoriti u put koji ne uključuje (x,y), ali je barem jednako jak, korištenjem ostatka ciklusa kao put od x do y. Stoga, (x,y) ne može biti most. Prema tome, dolazimo do kontradikcije s tvrdnjom a).

Pokažimo da $c) \implies b)$. Pretpostavimo suprotno, to jest da vrijedi $\mu'^{\infty}(x,y) \geq \mu(x,y)$. Tada postoji put od x do y koji ne uključuje brid (x,y), čija je snaga $\geq \mu(x,y)$. Taj put zajedno s (x,y) čini ciklus od kojih je (x,y) najslabiji brid. Time dobivamo kontradikciju s tvrdnjom c). □

Neka je w bilo koji vrh i neka je G^* fuzzy podgraf od G dobiven brisanjem vrha w, to jest G^* je fuzzy podgraf induciran sa σ^*, gdje je

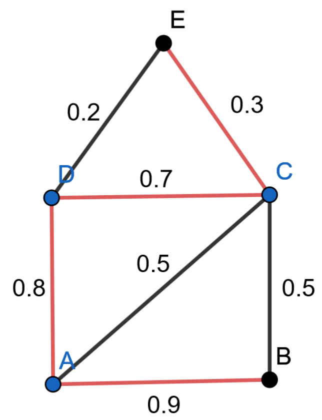
$\sigma^*(w) = 0$; $\sigma^* = \sigma$ za sve ostale vrhove.

Kažemo da je w *rezni vrh* u G ako je $\mu^{*\infty}(u,v) < \mu^{\infty}(u,v)$ za neke u, v različite od w. Drugim riječima, ako brisanje vrha w smanjuje jačinu povezanosti između nekog drugog para vrhova. Očigledno, w je rezni brid ako i samo ako postoje u, v različiti od w takvi da je w na svakom najjačem putu od u do v.

Za graf G kažemo da je *nerazdvojiv* ili *blok* ako nema reznih vrhova. U fuzzy grafovima blok može imati rezne bridove, to jest mostove.

Primjer 3.3.1. Na Slici 5 prikazan je fuzzy graf G. Odredit ćemo rezne bridove (mostove) i vrhove zadanog grafa.

Koristeći ekvivalentne tvrdnje a) i c) iz Teorema 3.3.1. slijedi da su bridovi CE, CD, AD, AB rezni bridovi ili mostovi (označeni crvenom bojom) jer ni jedan od tih bridova nije najslabiji brid u nekom ciklusu. Npr. najslabiji brid u ciklusu DCE je brid DE pa on nije rezni brid.
Za određivanje reznih vrhova koristit ćemo tvrdnju: w je rezni brid ako i samo ako postoje u, v različiti od w takvi da je w na svakom najjačem putu od u i v. Zaključujemo da su rezni vrhovi A, C, D (označeni plavom bojom) jer npr. za rezni vrh A vrijedi da postoje vrhovi B i E čiji je najjači put $BADCE$, a taj put sadrži vrh A. Slično vrijedi za vrhove C i D.



Slika 5: Rezni bridovi i vrhovi u fuzzy grafu G

3.4 Šume i stabla

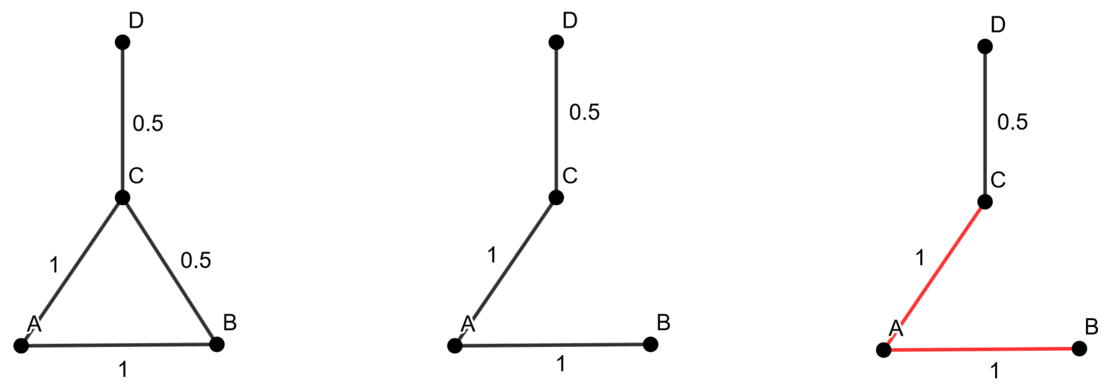
Definicija 3.4.1. Graf koji nema ciklusa zove se *aciklički graf* ili *šuma*, a povezani aciklički graf *stablo*. Komponente povezanosti šume su stabla.

Fuzzy graf ćemo nazvati šumom ako graf koji se sastoji od njegovih bridova različitih od nule je šuma, a stablo ako je spomenuti graf povezan. Fuzzy graf $G = (\sigma, \mu)$ nazivamo *fuzzy šumom* ako ima fuzzy razapinjući podgraf $F = (\sigma, \nu)$ koji je šuma, gdje za sve bridove (x, y) koji nisu u F (to jest tako da je $\nu(x, y) = 0$) vrijedi $\mu(x, y) < \nu^{\infty}(x, y)$. Drugim riječima, ako je $(x, y) \in G$, ali $(x, y) \notin F$, tada postoji put u F između vrhova x i y čija je jakost veća od $\mu(x, y)$. Jasno je da je šuma fuzzy šuma. Ako je G povezan, tada je i F povezan. U ovom slučaju G nazivamo *fuzzy stablom*, to jest povezana fuzzy šuma je fuzzy stablo.

Primjer 3.4.1. Na Slici 6 želimo pokazati da prva slika s lijeve strane prikazuje fuzzy šumu G koristeći prethodno definiranu fuzzy šumu. Vidimo da za G postoji razapinjući fuzzy podgraf F koji se nalazi na srednjoj slici. Taj fuzzy podgraf u sebi ne sadrži cikluse pa je on šuma. Nadalje, u našem slučaju jedini brid koji se nalazi u G, a ne nalazi u F je brid BC. Na zadnjoj slici u nizu vidimo da u F postoji put između vrhova B i C istaknut crvenom bojom te vrijedi:

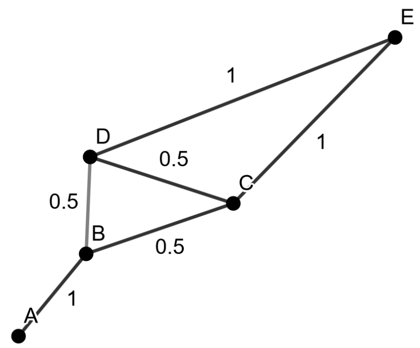
$$inf\,\{\mu(C,A),\mu(A,B)\} > \mu(B,C)$$
$$inf\,\{1,1\} > 0.5$$
$$1 > 0.5$$

Stoga, zaključujemo da je G dobar primjer fuzzy šume.



Slika 6: Dobar primjer fuzzy šume

Primjer 3.4.2. Graf G sa Slike 7 ne prikazuje fuzzy šumu jer ne postoji razapinjući fuzzy pograf F koji je šuma sa svojstvom da za brid $(x, y) \in G$ takav da $(x, y) \notin F$ postoji put čija je jakost veća od $\mu(x, y)$.



Slika 7: Graf koji ne prikazuje fuzzy šumu

Primjer 3.4.3. Ranije u Primjeru 3.4.1. pokazali smo da je graf G fuzzy šuma. Kako vrijedi da je to povezan graf jer za svaka dva vrha postoji put između njih, zaključujemo da je G na Slici 6 dobar primjer i za fuzzy stablo.
Slično, u Primjeru 3.4.2. pokazali smo da graf G nije fuzzy šuma, a kako nije fuzzy šuma nije ni fuzzy stablo. Stoga zaključujemo da graf G sa slike 7 ne prikazuje ni fuzzy stablo.

Idućim teoremom iskazat ćemo nužan i dovoljan uvjet za određivanje je li zadani graf fuzzy šuma.

Teorem 3.4.1. G je fuzzy šuma ako i samo ako u bilo kojem ciklusu od G postoji brid (x, y) takav da je $\mu(x, y) < \mu'^{\infty}(x, y)$, gdje ' označava brisanje brida (x, y) iz G.

Dokaz." $\Leftarrow$ " Neka je (x, y) brid ciklusa sa svojstvom iz iskaza teorema te za koji je $\mu(x, y)$ najmanji. Ako u grafu G nema ciklusa, tada je G šuma i gotovi smo. Izbrišemo li brid (x, y), dobiveni fuzzy podgraf zadovoljava svojstvo puta fuzzy šume. Ako još uvijek postoje ciklusi u dobivenom grafu, ponovimo postupak. Imajte na umu da u svakoj fazi niti jedan prethodno izbrisani brid nije jači od brida koji se trenutno briše. Stoga, put osiguran svojstvom iz teorema uključuje samo bridove koji još nisu obrisani. Kada ne preostane nijedan ciklus, dobiveni fuzzy podgraf je šuma F. Neka je (x, y) brid koji ne pripada šumi F. Tada je (x, y) jedan od bridova koje smo izbrisali u procesu konstruiranja F te postoji put od x do y koji je jači od $\mu(x, y)$ i koji ne uključuje brid (x, y) niti bilo koji od bridova izbrisanih prije njega. Ako taj put uključuje bridove koji su kasnije izbrisani, mogu se zaobići koristeći putanju još jačih bridova. Ako je koji od tih bridova kasnije izbrisan, put se može zaobići i tako dalje. Ovaj se proces na kraju stabilizira s putanjom koja se u potpunosti sastoji od bridova šume F. Stoga, G je fuzzy šuma.

" $\Rightarrow$ " Pretpostavimo da je G fuzzy šuma. Neka je ρ bilo koji ciklus, tada neki brid (x, y) od ρ nije u F. Stoga, prema definiciji fuzzy šume imamo

$$\mu(x, y) < \nu^{\infty}(x, y) \leq \mu'^{\infty}(x, y).$$

Time smo pokazali da postoji brid (x, y) u ciklusu ρ takav da je $\mu(x, y) < \mu'^{\infty}(x, y)$.

□

Iduća propozicija daje nam još jedan uvjet za određivanje fuzzy šume.

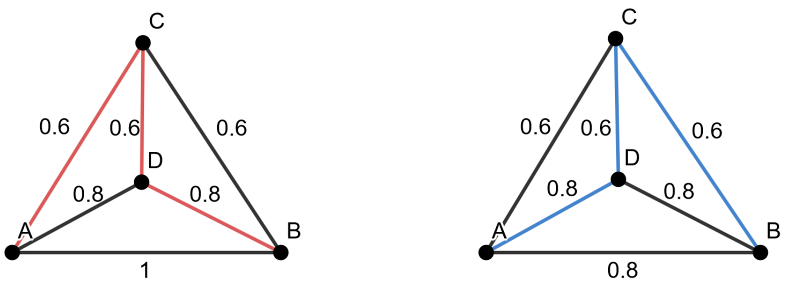
Propozicija 3.4.1. Ako postoji najviše jedan najjači put između bilo koja dva vrha od G, tada G mora biti fuzzy šuma.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da G nije fuzzy šuma. Tada prema teoremu 3.4.1. postojao bi ciklus ρ u G takav da za sve bridove (x, y) od ρ vrijedi

$$\mu(x, y) \geq \mu'^{\infty}(x, y).$$

Stoga je (x, y) sam po sebi najjači brid od x do y. Ako izaberemo (x, y) kao najslabiji brid od ρ, tada slijedi da je ostatak ciklusa ρ također najjači put od x do y. Prema tome, dobivamo kontradikciju s pretpostavkom propozicije. □

Napomena 3.4.1. Obrat Propozicije 3.4.1. ne vrijedi. Ako je G fuzzy šuma, onda G može imati višestruke najjače puteve između bilo koja dva vrha od G. Pokazat ćemo to na primjeru. Putevi $ACDB$(prikazan crvenom bojom) i $ADCB$(prikazan plavom bojom) su dva najjača puta između vrhova A i B u fuzzy šumi G.



Slika 8: Fuzzy šuma s više najjačih puteva između dva vrha

Propozicija 3.4.2. Ako je G fuzzy šuma, bridovi od F su samo mostovi od G.

Dokaz. Brid (x, y) koji nije u F sigurno nije most, budući da je

$$\mu(x, y) < \nu^{\infty}(x, y) \leq \mu'^{\infty}(x, y).$$

Obratno, neka je (x, y) brid u F. Da (x, y) nije most imali bismo put ρ od x do y, koji ne uključuje (x, y), snage $\geq \mu(x, y)$. Taj put mora uključivati bridove koji nisu u F, jer je F šuma i nema ciklusa. Međutim, po definiciji, svaki takav brid (u_i, v_i) može se zamijeniti putem ρ_i u F jakosti $> \mu(u, v)$. Sada ρ_i ne može uključivati brid (x, y), budući da su svi njegovi bridovi isključivo jači od

$$\mu(u, v) \geq \mu(x, y).$$

Stoga, zamjenom svakog (u_i, v_i) s ρ_i, možemo konstruirati put u F od x do y koji ne uključuje (x, y), dajući nam ciklus u F. Prema tome, dolazimo do kontradikcije. □

Napomena 3.4.2. Prema posljednjoj propoziciji slijedi tvrdnja: ako je G fuzzy šuma, njezina razapinjuća šuma F je jedinstvena.

4 Zaključak

Teorija grafova omogućuje prikaz i način rješavanja određenog problema u raznim svakodnevnim situacijama. Cilj ovog seminarskog rada bio je osnovne pojmove i svojstva grafova primijeniti na fuzzy grafove. Prije definiranja tih grafova bilo je bitno proučiti fuzzy relacije i njihova svojstva. Fuzzy grafove možemo promatrati kao težinske grafove, pri čemu su težine u fuzzy grafu ograničene, to jest vrijednosti su iz intervala $[0, 1]$. Također, za svaki par vrhova x, y vrijedi $\mu(x, y) \leq inf\,\{\sigma(x), \sigma(y)\}$, gdje su $\sigma(x)$ i $\sigma(y)$ težine vrhova x i y.

Popis slika

Literatura

[1] Bilješke iz kolegija *Diskretna matematika*, Crnković, Dean - Mostarac, Nina, 2020./2021.

[2] Bilješke iz kolegija *Metrički prostori*, Slamić, Ivana, 2022./2023.

[3] Chandrasekharan M.-Nagarajan S.: *Characterization of Fuzzy Bridges and Fuzzy Cutnodes*, 2014 URL: `https://www.ijsr.net/archive/v3i4/MDIwMTMxMzA5.pdf` (22.03.2023.)

[4] *Geogebra*, URL:`https://www.geogebra.org/classic?lang=hr`(22.03.2023.)

[5] Mathew Sunil - Sunitha M.S.: *Fuzzy Graph Theory: A Survey, Annals of Pure and Applied Mathematics*,4, 2013., 92-110.

[6] Mutab Al Mutab, Huda: *Fuzzy Graphs*, Joural of Advances In Mathematics, 17, 2019., 232-247. DOI:`https://doi.org/10.24297/jam.v17i0.8443`

[7] Rosenfeld, A., *Fuzzy graaphs*, In: Zadeh L.A.-Fu, K.S.-Tnaka, K.-Shimura M.: *Fuzzy Sets and Their Applications*, Academic press, 1975., 77-95.

[8] Veljan, Darko: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001., 1.izadanje, 235-359.