

# Problem pomicanja kauča

---

**Nađ, Bruno**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:196:372606>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-21**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



Sveučilište u Rijeci  
Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Bruno Nađ

## Problem pomicanja kauča

Završni rad

Rijeka, srpanj, 2023.

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Bruno Nađ

## Problem pomicanja kauča

Završni rad

**Mentor:** dr. sc. Sanda Bujačić Babić

Rijeka, srpanj, 2023.

## Sažetak

U radu će se opisati problem iz svakodnevnog života kojem je cilj odrediti  $2D$  oblik maksimalne površine koji se može pomicati duž hodnika koji ima oblik slova  $L$  i jedinične je širine. Problem je naizgled lagan, ali je njegova matematička pozadina itekako zanimljiva. Mnogi su matematičari iznosili svoje ideje i dokaze, ali još uvijek nismo sigurni je li predloženi koncept i rješenje ili do njega tek treba doći. J. M. Hammersley je predložio rješenje za kojeg je smatrao da je optimalno, odnosno da se radi o  $2D$  obliku maksimalne površine koji zadovoljava uvjet problema, no dvadesetak godina kasnije, 1992. godine J. Gerver je odredio oblik kojeg nazivamo Gerverov kauč i koji ima veću površinu. Do danas Gerverov kauč smatra se rješenjem problema, a do tog oblika došao je koristeći pet diferencijalnih jednadžbi. Međutim, do danas nije dokazano da je to optimalno rješenje problema te potraga za najpogodnijim kaučem još traje. Potaknuti problemom pomicanja kauča, J. H. Conway i G. C. Shepard žele odrediti maksimalnu površinu kauča kojeg pomičemo kroz hodnik koji skreće lijevo pa desno (ili obrnuto) pod kutem od  $90^\circ$  i takav kauč nazivaju ambideksterski kauč. D. Romik je obuhvatio prijašnje ideje te uz dodatne pretpostavke predstavio aktualno rješenje ambideksterskog problema pomicanja kauča čija površina iznosi  $Z + \arctan W$ , pri čemu su  $Z$  i  $W$  redom rješenja kubnih jednadžbi  $x^2(x+3) = 8$  i  $x(4x^2+3) = 1$ . Do danas nije dokazano da je Romikov ambideksterski kauč rješenje problema te potraga za oblikom veće površine još uvijek traje. Na kraju rada predstavljena je konstrukcija  $3D$  modela Gerverovog kauča.

**Ključne riječi:** kauč, ambideksterski kauč, maksimalna površina,  $2D$  oblik,  $L$ -hodnik

# Sadržaj

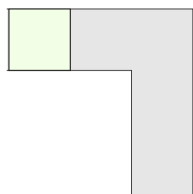
<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Potruga za optimalnim kaučem</b>	<b>5</b>
2.1	Hammersleyjev kauč . . . . .	7
2.2	Matematička konceptualizacija osnovnog problema . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Familija šest diferencijalnih jednažbi</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Gerverov kauč</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Ambideksterski kauč</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Praktični rad</b>	<b>26</b>
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>28</b>

# 1 Uvod

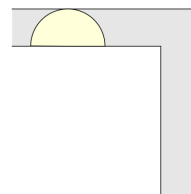
Matematičar Leo Moser 1966. godine postavio je pitanje:

*Kakav je 2D oblik najveće površine moguće pomicati duž L-hodnika jedinične širine?*

Ovaj je problem poznat pod nazivom *problem pomicanja kauča* (eng. *moving sofa problem*) i uvršten je u listu 148 neriješenih problema u geometriji te je drugi najpopularniji problem na listi od 99 "dugo otvorenih, ali ne previše poznatih matematičkih problema koje je jednostavno objasniti, ali ne i riješiti" [3]. Prirodno je dosjetiti se dva najjednostavnija oblika: kvadrata duljine stranice 1 i polukruga duljine radijusa 1. Dozvoljena kretanja oblika duž hodnika su rotacija i translacija. Kvadrat se pomiče duž hodnika translacijom, dok se kretanje polukruga sastoji od translacije, rotacije za  $90^\circ$  te opet translacije. Budući je površina polukruga radijusa duljine 1 jednaka  $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ , a površina kvadrata duljine stranice 1 jednaka 1, očigledno je da je polukrug povoljnije rješenje zadanog problema od kvadrata.<sup>1</sup>



Slika 1: Kvadrat smješten u L-hodnik



Slika 2: Polukrug smješten u L-hodnik

## 2 Potraga za optimalnim kaučem

Potruga za optimalnim kaučem koja je i danas aktualna ima snažno uporište u činjenici da su vrlo poznati matematičari J. Conway, M. Guy i K. Falconer dokazali egzistenciju rješenja, odnosno optimalnog kauča koje ne mora biti nužno jedinstveno [3].

### Gornja ograda za površinu kauča

S obzirom da smo u egzistenciju rješenja problema pomicanja kauča sigurni, vrlo je zanimljivo pokušati saznati više informacija o tom možda još uvijek nepoznatom obliku i

---

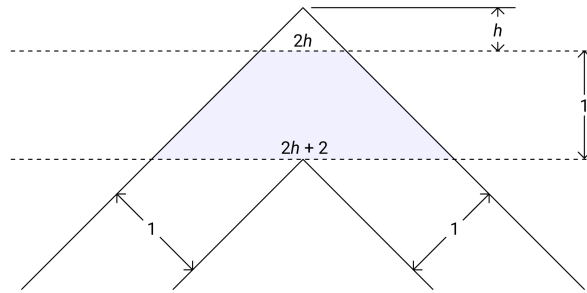
<sup>1</sup>Slike 1 i 2 preuzete su iz [1]

njegovoj površini. Za početak, možemo se pitati koja je gornja ograda površine traženog oblika. Upravo je na ovo pitanje odgovor dao J. M. Hammersley, dokazavši da gornja ograda površine iznosi  $2\sqrt{2} \approx 2.828$ . [5]

**Teorem 1.** *Gornja ograda za površinu kauča koji se pomiče duž  $L$ -hodnika jedinične širine iznosi  $2\sqrt{2}$ .*

*Dokaz.* Promotrimo slučaj kada kauč rotiramo za  $45^\circ$  u smjeru kazaljke na satu. Parametrom  $h$  parametriziramo udaljenost između vanjskog kuta hodnika i dijela koji predstavlja ravni dio hodnik. Ako kauč može prolaziti kroz hodnik jedinične širine, mora biti smješten unutar osjenčanog područja. Razlikujemo dva slučaja:

1. Kauč se može smjestiti u trokut čija je osnovica duljine  $2h+2$  i visina na tu osnovicu duljine  $\sqrt{2}$ . Tada vrijedi  $0 \leq h \leq \sqrt{2} - 1$ .

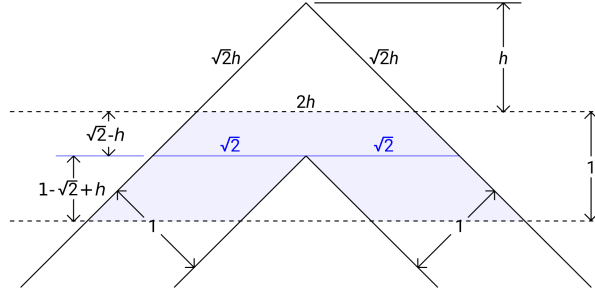


Slika 3: Gornja ograda prvi slučaj

Površina cijelog trokuta čija je osnovica duljine  $2h+2$  te duljina visine na osnovicu  $h+1$  jednaka je  $P_1(h) = \frac{(2h+2)(h+1)}{2} = h^2 + 2h + 1$ . Površina manjeg trokuta osnovice duljine  $2h$  i duljine visine  $h$  iznosi  $P_2(h) = \frac{2hh}{2} = h^2$ . Površina osjenčanog dijela jednaka je  $P_3(h) = P_1(h) - P_2(h) = 2h + 1$ . U ovom slučaju maksimalna površina kauča postiže se za  $h = \sqrt{2} - 1$  i iznosi  $2\sqrt{2} - 1 \approx 1.828$ .

2. Kauč se ne može smjestiti u trokut čija je osnovica duljine  $2h+2$  i visina na tu osnovicu duljine  $\sqrt{2}$ . Dakle, tada vrijedi  $\sqrt{2} - 1 \leq h \leq \sqrt{2}$ .

Površina trokuta čije je osnovica duljine  $2\sqrt{2}$  te visina duljine  $\sqrt{2}$  iznosi  $P_4(h) = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-h+h)}{2} = 2$ . Površina trokuta osnovice duljine  $2h$  te visine duljine  $h$  jednaka je  $P_5(h) = \frac{2hh}{2} = h^2$ . Površina paralelograma osnovice duljine  $\sqrt{2}$  te visine duljine  $1 - \sqrt{2} + h$  iznosi  $P_6(h) = \sqrt{2}(1 - \sqrt{2} + h) = \sqrt{2}h + \sqrt{2} - 2$ . Površina osjenčanog



Slika 4: Gornja ograda drugi slučaj<sup>2</sup>

dijela jednaka je  $P_7(h) = 2P_6(h) + P_4(h) - P_5(h) = -h^2 + 2\sqrt{2}h - 2 + 2\sqrt{2}$ . U ovom slučaju maksimalna površina kauča postiže se za  $h = \sqrt{2}$  i iznosi  $2\sqrt{2} \approx 2.828$ .

Iz navedena dva slučaja, slijedi da je maksimalna površina kauča  $2\sqrt{2} \approx 2.828$ , što je i trebalo dokazati. □

Nakon malo više od pedeset godina D. Romik i Y. Kallus poboljšavaju tvrdnju ovog teorema i dokazuju da je gornja ograda za površinu kauča jednaka 2.37 [2]. Tijekom dokaza promatra se familija poligona koji predstavljaju presjeke hodnika koji se pomiče oko kauča u raznim situacijama. Autori su implementirali kod u programskom jeziku C++ te nakon 480 sati rada, softver je potvrdio njihovu tvrdnju. Prvo rješenje problema pomicanja kauča koje je bilo na tragu optimalnog predstavljeno je u sljedećem odlomku.

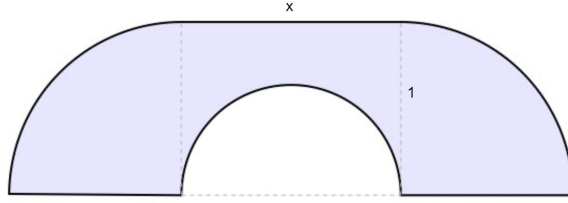
## 2.1 Hammersleyjev kauč

Uz gornju ogradu za površinu kauča koju je odredio 1968. godine Hammersley je pokušao odrediti optimalni oblik kauča. Predložio je rješenje koje je konstruirao tako da je polukrug duljine polumjera 1 prepolovio (os kojom raspolavlja polukrug prolazi kroz središte polukruga), a nastale četvrtine kruga spaja pravokutnikom kojem je izrezan dio polukružnog oblika kao što prikazuje Slika 5. Cilj je odrediti vrijednost nepoznanice  $x$  za koju će površina  $D(x)$  danog oblika biti maksimalna. Površina četvrtine polukruga radijusa duljine 1 iznosi  $A = \frac{\pi}{4}$ . Površina pravokutnika stranica duljine  $x$  i 1 jednaka je  $B(x) = x$ . Površina izrezanog polukruga radijusa duljine  $\frac{x}{2}$  iznosi  $C(x) = \frac{x^2\pi}{8}$ . Tada

<sup>2</sup>Slike 3 i 4 preuzete su iz [6]



je  $D(x) = 2A + B(x) - C(x)$ , a maksimalna vrijednost postiže se za  $x = \frac{4}{\pi}$  i iznosi  $\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} \approx 2.207$ .



Slika 5: Hammersleyjev kauč

## 2.2 Matematička konceptualizacija osnovnog problema

Definiramo  $L$ -hodnik tako da vrijedi:  $L = L_{horiz} \cup L_{vert}$  pri čemu su:

$$L_{horiz} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$L_{vert} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

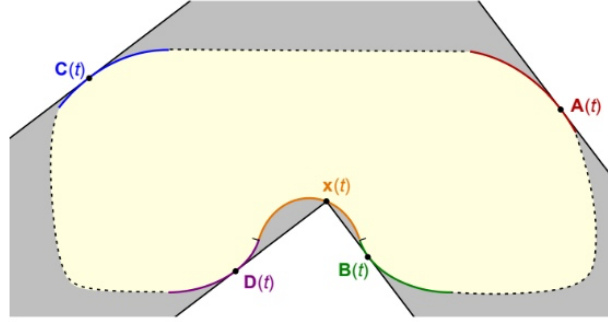
Problem pomicanja kauča je odrediti oblik koji se neprekidno giba (dozvoljena kretanja su rotacija i translacija) od  $L_{horiz}$  do  $L_{vert}$  i pri tome ostaje unutar  $L$ -hodnika. Promatramo ekvivalentan problem na način da je kauč kojeg želimo odrediti fiksiran, odnosno da se ne pomiče kroz hodnik, nego da se hodnik pomiče oko kauča. Označimo s

$$R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

matricu rotacije te s  $X: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  neprekidan put za koji vrijedi  $X(0) = [0, 0]^T$ . Ovaj put nazivamo *rotacijski put*, a on opisuje gibanje unutarnjeg kuta hodnika pri čemu  $t$  parametar predstavlja kut rotacije. Posebno je  $X(\frac{\pi}{4}) = [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]^T$  te  $X(\frac{\pi}{2}) = [-1, 0]^T$ . Jasno je ukoliko kauč  $S_X$ , pridružen rotacijskom putu  $X$ , zadovoljava

$$S_X \subseteq L_{horiz} \cap \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (X(t) + R_t(L)) \cap (X(\frac{\pi}{2}) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_{vert})),$$

onda se neprekidno giba duž  $L$ -hodnika. Štoviše, zbog maksimiziranja površine podskupovnost se može zamijeniti jednakošću. Problem se sada svodi na određivanje rotacije hodnika tako da oblik kojeg promatramo ima najveću površinu. Ključ problema je promatrati četiri točke koje su tangencijalne točke između četiri zida hodnika i kauča.



Slika 6: Rotacijski i ključni putevi <sup>3</sup>

Budući da hodnik rotiramo i translaticiramo, navedene točke određuju četiri puta koje nazivamo *ključni putevi* te redom označavamo s  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  i  $D(t)$  (Slika 6). Označimo s  $\Gamma_x(t)$  skup ključnih točaka; na primjer, u slučaju koji prikazuje Slika 6 vrijedi  $\Gamma_x(t) = \{X, A, B, C, D\}$ . Jasno, za različite vrijednosti parametra  $t$  skup ključnih točaka je drugačiji. Upravo će nam  $\Gamma_x(t)$  biti važan u daljnjem razmatranju problema, jer ovisno kako je on definiran, imat ćemo šest slučajeva koje ćemo promatrati. Definirajmo još  $\mu_t = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$  te  $\nu_t = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ , ortonormiranu bazu vektorskog prostora  $\mathbb{R}^2$ . Uočimo da za derivacije vektora vrijedi  $\mu'_t = \nu_t$  te  $\nu'_t = -\mu_t$ . Sljedeći teorem opisuje veze između rotacijskog puta  $X$  te ključnih puteva  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$ , pri čemu je  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznaka za skalarni produkt.

**Teorem 2.** *Neka su  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  te  $D(t)$  neprekidni ključni putevi te  $X$  derivabilan rotacijski put u točki  $t$ . Tada vrijedi:*

1.  $A(t) = X(t) + \langle X'(t), \mu_t \rangle \nu_t + \mu_t$ ,
2.  $B(t) = X(t) + \langle X'(t), \nu_t \rangle \mu_t$ ,
3.  $C(t) = X(t) - \langle X'(t), \nu_t \rangle \mu_t + \nu_t$ ,
4.  $D(t) = X(t) - \langle X'(t), \mu_t \rangle \nu_t$ .

*Dokaz.* Dokaz teorema može se pronaći u [1]. □

**Definicija 1.** Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  realna funkcija. Kažemo da je  $f$  klase  $C^0$  ako je  $f$  neprekidna. Funkcija  $f$  je klase  $C^k$  ako je  $\frac{d^k}{dx^k} f(x)$  neprekidna funkcija. Ako je  $\frac{d^k}{dx^k} f(x)$  neprekidna za svaki  $k \in \mathbb{N}$ , onda je funkcija  $f$  klase  $C^\infty$ .

---

<sup>3</sup>Preuzeto iz [1]

Na kraju ovog potpoglavlja uvodimo još jednu geometrijsku pretpostavku o rotacijskom putu  $X$ .

**Definicija 2.** Kažemo da se rotacijski put  $X$  *dobro ponaša* u  $t$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ , ako  $X$  ima neprekidnu drugu derivaciju u  $t$  i ako vrijedi sljedeće:

1. Ako je  $X(t)$  ključna točka, onda je  $\langle X'(t), \nu_t \rangle \geq 0$  i  $\langle X'(t), \mu_t \rangle \leq 0$ .
2. Ako je  $A(t)$  definiran, onda je  $\langle A'(t), \nu_t \rangle \geq 0$ .
3. Ako je  $B(t)$  definiran, onda je  $\langle B'(t), \nu_t \rangle \leq 0$ .
4. Ako je  $C(t)$  definiran, onda je  $\langle C'(t), \mu_t \rangle \leq 0$ .
5. Ako je  $D(t)$  definiran, onda je  $\langle D'(t), \mu_t \rangle \geq 0$ .

Direktno iz definicije slijedi da su ključni putevi  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  i  $D(t)$  klase  $C^1$ .

Kao što ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju, pretpostavka da se put dobro ponaša u  $t$  će se pokazati korisnom tijekom pojednostavljivanja jednadžbi.

### 3 Familija šest diferencijalnih jednadžbi

Predstavljamo šest diferencijalnih jednadžbi koje rotacijski put mora zadovoljavati u različitim slučajevima kretanja kauča.

**Teorem 3.** *Neka je  $X$  rotacijski put,  $S_X$  kauč,  $\Gamma_x(t)$  skup ključnih točaka te  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  i  $D(t)$  ključni putevi. Neka je  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  takav da se  $X$  dobro ponaša u  $t$ . Tada je nužan uvjet da bi  $S_X$  bio rješenje problema pomicanja kauča taj da  $X$  u  $t$  zadovoljava jednu od šest diferencijalnih jednadžbi ovisno o skupu ključnih točaka  $\Gamma_x(t)$ :*

1.  $\Gamma_x(t) = \{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$

$$X''(t) = R_t \left( \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \sin t & -2 \cos t \\ 2 \cos t & 2 \sin t \end{bmatrix} X'(t) \right). \quad (1)$$

2.  $\Gamma_x(t) = \{\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$

$$X''(t) = R_t \left( \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \frac{3}{2} \cos t & \frac{3}{2} \sin t \end{bmatrix} X'(t) \right). \quad (2)$$

$$3. \Gamma_x(t) = \{\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{C}\}$$

$$X''(t) = R_t \left( \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} X'(t) \right). \quad (3)$$

$$4. \Gamma_x(t) = \{\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$$

$$X''(t) = R_t \left( \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \sin t & \frac{3}{2} - \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} X'(t) \right). \quad (4)$$

$$5. \Gamma_x(t) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$$

$$X''(t) = R_t \left( \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \sin t & -2 \cos t \\ 2 \cos t & 2 \sin t \end{bmatrix} X'(t) \right). \quad (5)$$

$$6. \Gamma_x(t) = \{\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$$

$$X''(t) = R_t \left( \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \sin t & -\frac{3}{2} \cos t \\ \frac{3}{2} \cos t & \frac{3}{2} \sin t \end{bmatrix} X'(t) \right). \quad (6)$$

*Dokaz.* Izvest ćemo (3) promatrajući lokalne promjene kauča uslijed gibanja. Najprije fiksirajmo malu pozitivnu vrijednost  $\delta$  i označimo  $t' = t + \delta$ . Ideja je opisati kretanje  $L$ -hodnika rotacijskim putem  $X$ :

1. za  $s \in [0, t]$  nastaje put  $X(s)$  kojeg opisuje unutarnja točka hodnika dok se hodnik rotira oko tog unutarnjeg kuta,
2. transliramo hodnik za vrijednost  $\delta$  u smjeru vektora  $\mu_t$ ,
3. za  $s \in [t, t']$  nastavljamo put opisan unutarnjim kutem hodnika iz  $X(t) + \delta\mu_t$  do  $X(s) + \delta\mu_t$  rotacijom za kut  $s$ ,
4. transliramo hodnik za vrijednost  $\delta$  u smjeru vektora  $-\mu_{t'}$ ,
5. rotacija za  $s \in [t', \frac{\pi}{2}]$ .

Označimo sa  $S_{X'}$  oblik koji se nalazi u presjeku hodnika dobivenih navedenim nizom:

$$\begin{aligned}
S_{X'} &= L_{horiz} \cap \left( X \left( \frac{\pi}{2} \right) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_{vert}) \right) \cap \bigcap_{0 \leq s \leq t} (X(s) + R_s(L)) \\
&\cap \bigcap_{0 \leq r \leq \delta} (X(t) + r\mu_t + R_t(L)) \\
&\cap \bigcap_{t \leq s \leq t'} (X(s) + \delta\mu_t + R_s(L)) \\
&\cap \bigcap_{0 \leq r \leq \delta} (X(t') + r\mu_t + R_{t'}(L)) \\
&\cap \bigcap_{t' \leq s \leq \frac{\pi}{2}} (X(s) + R_s(L))
\end{aligned}$$

Uspoređujući  $S_X$  i  $S_{X'}$ , vidimo da se promjenom parametara područje u blizini točke  $X(t)$  smanjilo, dok se promjenom parametara u blizini točke  $A(t)$  opisalo veće područje. Dio oblika blizu treće točke  $C(t)$  ostaje nepromijenjen jer za svaki  $s \in [t, t']$  tijekom trećeg koraka vanjski zid hodnika je paralelan  $\mu_s$  te je tangenta ključnog puta  $C(s)$ . Nadalje, zbog pretpostavke da je  $X$  diferencijabilan u  $t$ , dio oblika koji je izgubljen aproksimira paralelogram čije su stranice  $\delta X'(t)$  i  $\delta\mu_t$  pa je njegova površina dana s:

$$|\langle X'(t), \nu_t \rangle \delta^2| + o(\delta^2) = \langle X'(t), \nu_t \rangle \delta^2 + o(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0, \quad (7)$$

gdje jednakost slijedi iz pretpostavke da se  $X$  dobro ponaša u  $t$ . Slično zaključujemo da je dobiveni dio paralelogram (zapravo pravokutnik jer  $A'(t)$  je paralelan  $\nu_t$ ) čije su stranice  $\delta A'(t)$  i  $\delta\mu_t$ . Površina pravokutnika je:

$$\langle A'(t), \nu_t \rangle \delta^2 + o(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0. \quad (8)$$

Uspoređujući (7) i (8) vidimo da, ako pretpostavimo da  $S_X$  ima najveću površinu, mora vrijediti:

$$\langle X'(t) - A'(t), \nu_t \rangle \geq 0.$$

Nadalje, nejednakost:

$$\langle X'(t) - A'(t), \nu_t \rangle \leq 0$$

također mora vrijediti jer smo mogli odlučiti u drugom koraku translirati hodnik u drugom smjeru, tj. u smjeru vektora  $-\mu_t$ . Tada bi dio oblika opisan ranije bio dobiven umjesto izgubljen te analogno ranije izgubljeni dio bio bi dobiven pa bi jednadžbama (7) i

(8) bio zamijenjen redosljed u odnosu na ranije opisan način pojavljivanja. Prema tome, ukoliko želimo maksimizirati površinu, rotacijski put mora zadovoljavati identitet:

$$\langle X'(t) - A'(t), \nu_t \rangle = 0. \quad (9)$$

Ukoliko u drugom koraku translaticiramo hodnik u smjeru vektora  $\nu_t$ , rotacijski put  $X$  zadovoljava identitet:

$$\langle X'(t) - C'(t), \mu_t \rangle = 0. \quad (10)$$

Deriviranjem izraza  $A(t)$  i  $C(t)$  iz Teorema 2 te uzimajući u obzir  $\mu'_t = \nu_t$ ,  $\nu'_t = -\mu_t$ , dobivamo:

$$\begin{aligned} A'(t) &= X'(t) + \langle X''(t), \mu_t \rangle \nu_t + \langle X'(t), \mu'_t \rangle \nu_t + \langle X'(t), \mu_t \rangle \nu'_t + \mu'_t \\ &= X'(t) + \langle X''(t), \mu_t \rangle \nu_t + \langle X'(t), \nu_t \rangle \nu_t - \langle X'(t), \mu_t \rangle \mu_t + \nu_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'(t) &= X'(t) - \langle X''(t), \nu_t \rangle \mu_t - \langle X'(t), \nu'_t \rangle \mu_t - \langle X'(t), \nu_t \rangle \mu'_t + \nu'_t \\ &= X'(t) - \langle X''(t), \nu_t \rangle \mu_t + \langle X'(t), \mu_t \rangle \mu_t - \langle X'(t), \nu_t \rangle \nu_t - \mu_t. \end{aligned}$$

Uvrštavamo dobiveni izraz  $A'(t)$  u (9):

$$\begin{aligned} \langle X'(t) - X'(t) - \langle X''(t), \mu_t \rangle \nu_t - \langle X'(t), \nu_t \rangle \nu_t + \langle X'(t), \mu_t \rangle \mu_t - \nu_t, \nu_t \rangle &= 0, \\ \langle -\langle X''(t), \mu_t \rangle \nu_t - \langle X'(t), \nu_t \rangle \nu_t + \langle X'(t), \mu_t \rangle \mu_t - \nu_t, \nu_t \rangle &= 0, \\ -\langle X''(t), \mu_t \rangle - \langle X'(t), \nu_t \rangle + 0 - 1 &= 0, \\ \langle X''(t), \mu_t \rangle &= -\langle X'(t), \nu_t \rangle - 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Uvrštavamo dobiveni izraz  $C'(t)$  u (10):

$$\begin{aligned} \langle X'(t) - X'(t) + \langle X''(t), \nu_t \rangle \mu_t - \langle X'(t), \mu_t \rangle \mu_t + \langle X'(t), \nu_t \rangle \nu_t + \mu_t, \mu_t \rangle &= 0, \\ \langle X''(t) - \nu_t - \langle X'(t), \mu_t \rangle + 0 + 1, \mu_t \rangle &= 0, \\ \langle X''(t), \nu_t \rangle &= \langle X'(t), \mu_t \rangle - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Nadalje, iz identiteta (11) i (12) slijedi (3). Preostali slučajevi dokazuju se analogno.  $\square$

Diferencijalne jednadžbe (1)–(6) nije teško riješiti, a rješenja predstavljena u sljedećem teoremu koristit će nam prilikom konstrukcije Gerverovog i ambideksterskog kauča.

**Teorem 4.** Opća rješenja diferencijalnih jednadžbi (1)–(6) redom su:

$$X_1(t) = R_t \begin{bmatrix} a_1 \cos t + a_2 \sin t - 1 \\ -a_2 \cos t + a_1 \sin t - \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \kappa_1, \quad (13)$$

$$X_2(t) = R_t \begin{bmatrix} \frac{-1}{4}t^2 + b_1t + b_2 \\ \frac{1}{2}t - b_1 - 1 \end{bmatrix} + \kappa_2, \quad (14)$$

$$X_3(t) = R_t \begin{bmatrix} c_1 - t \\ c_2 + t \end{bmatrix} + \kappa_3, \quad (15)$$

$$X_4(t) = R_t \begin{bmatrix} \frac{-1}{2}t + d_1 - 1 \\ \frac{-1}{4}t^2 + d_1t + d_2 \end{bmatrix} + \kappa_4, \quad (16)$$

$$X_5(t) = R_t \begin{bmatrix} e_1 \cos t + e_2 \sin t - \frac{1}{2} \\ -e_2 \cos t + e_1 \sin t - 1 \end{bmatrix} + \kappa_5, \quad (17)$$

$$X_6(t) = R_t \begin{bmatrix} f_1 \cos \frac{t}{2} + f_2 \sin \frac{t}{2} - 1 \\ -f_2 \cos \frac{t}{2} + f_1 \sin \frac{t}{2} - 1 \end{bmatrix} + \kappa_6, \quad (18)$$

pri čemu su  $\kappa_j = (\kappa_{j,1}, \kappa_{j,2})^T$ ,  $j = 1, \dots, 6$  i  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ ,  $i = 1, 2$  proizvoljne realne konstante.

*Dokaz.* Supstituirajmo  $y(t) = R_{-t}X'(t)$  pri čemu je

$$R_{-t} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

te napišimo sve diferencijalne jednadžbe u obliku  $y(t)$ . Na taj način dobivamo šest linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda  $y'(t) = Ty + v$ , pri čemu je  $T$   $2 \times 2$  matrica koeficijenata te  $v$  vektor. Na primjer, za jednadžbu (2) je  $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$  te  $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  dok su pripadne matrice za jednadžbu (3)  $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  i  $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Nadalje, klasičnim postupkom rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda, metodom varijacije konstante, dobivamo tražena rješenja.  $\square$

*Napomena.* Drugi način dokazivanja Teorema 4 je direktna provjera. Uvrstimo rješenja (13 – 18) u jednadžbe (1 – 6). Kako bi nam provjera bila olakšana, implementiran je paket *MovingSofas* [4] dostupan u *Mathematici*. Sljedeći kod potvrđuje da funkcije  $X_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe (1 – 6).

```

SofaODE1[t_] := RotationMatrix[t].
  ({-1, -1/2} + {{2 Sin[t], -2 Cos[t]}, {2 Cos[t], 2 Sin[t]}}).x1'[t];
SofaODE2[t_] := RotationMatrix[t].
  ({-1, -1/2} + {{Sin[t], -Cos[t]}, {3/2 Cos[t], 3/2 Sin[t]}}).x2'[t];
SofaODE3[t_] := RotationMatrix[t].
  ({-1, -1} + {{Sin[t], -Cos[t]}, {Cos[t], Sin[t]}}).x3'[t];
SofaODE4[t_] := RotationMatrix[t].
  ({-1/2, -1} + {{3/2 Sin[t], -3/2 Cos[t]}, {Cos[t], Sin[t]}}).x4'[t];
SofaODE5[t_] := RotationMatrix[t].
  ({-1/2, -1} + {{2 Sin[t], -2 Cos[t]}, {2 Cos[t], 2 Sin[t]}}).x5'[t];
SofaODE6[t_] := RotationMatrix[t].
  ({-1/2, -1/2} + {{3/2 Sin[t], -3/2 Cos[t]}, {3/2 Cos[t], 3/2 Sin[t]}}).x6'[t];

```

Slika 7: Definiranje diferencijalnih jednadžbi

```

Table[Simplify[SofaODEj[t] == xj'[t]], {j, 1, 6}]
{True, True, True, True, True, True}

```

Slika 8: Potvrda rješenja diferencijalnih jednadžbi

## 4 Gergerov kauč

Promatrajući Hammersleyjev kauč, J. Gerger je predstavio rješenje koje ima veću površinu. U ovom poglavlju bit će predstavljena konstrukcija Gergerovog kauča. Najprije pretpostavimo da rotacijski put  $X$  zadovoljava sljedeće uvjete:

1. rotacijski put  $X$  je klase  $C^\infty$ ,
2. kauč  $S_X$ , pridružen rotacijskom putu  $X$ , simetričan je obzirom na polovište  $X(\frac{\pi}{4})$ ,
3. za ključni put  $A(t)$  vrijedi  $A(0) = [1, 0]^T$ ,

4.

$$\Gamma_x(t) = \begin{cases} \{A, C, D\}, & 0 < t < \varphi, \\ \{X, A, C, D\}, & \varphi \leq t < \Theta, \\ \{X, A, C\}, & \Theta \leq t \leq \frac{\pi}{2} - \Theta, \\ \{X, A, B, C\}, & \frac{\pi}{2} - \Theta < t \leq \frac{\pi}{2} - \varphi, \\ \{A, B, C\}, & \frac{\pi}{2} - \varphi < t < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (19)$$

pri čemu su  $0 < \varphi < \Theta < \frac{\pi}{4}$  dva kuta čije vrijednosti treba odrediti,

5. tijekom navedenih slučajeva iz (19) rotacijski put se dobro ponaša.

Uzimajući u obzir navedene pretpostavke, rotacijski put  $X$  tijekom slučajeva iz (19) mora zadovoljavati odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu (1 – 5). Prema tome, za rotacijski



put mora vrijediti:

$$X(t) = \begin{cases} X_1(t), & 0 < t < \varphi, \\ X_2(t), & \varphi \leq t < \Theta, \\ X_3(t), & \Theta \leq t \leq \frac{\pi}{2} - \Theta, \\ X_4(t), & \frac{\pi}{2} - \Theta < t \leq \frac{\pi}{2} - \varphi, \\ X_5(t), & \frac{\pi}{2} - \varphi < t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Sada se problem svodi na određivanje 22 parametra  $\varphi$ ,  $\Theta$ ,  $\kappa_{1,1}$ ,  $\kappa_{1,2}$ ,  $\kappa_{2,1}$ ,  $\kappa_{2,2}, \dots, \kappa_{5,2}$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $e_i$ ,  $i = 1, 2$ . Koristeći navedene pretpostavke određujemo parametre. Iz uvjeta simetrije obzirom na polovište  $X(\frac{\pi}{4})$  proizlazi:

$$X' \left( \frac{\pi}{2} - t \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X'(t). \quad (20)$$

Uzimajući u obzir (20) zaključujemo da vrijedi:

$$\begin{aligned} X'_5 \left( \frac{\pi}{2} - t \right) &= X'_1(t), & t \in [0, \varphi], \\ X'_4 \left( \frac{\pi}{2} - t \right) &= X'_2(t), & t \in [\varphi, \Theta]. \end{aligned}$$

Iz uvjeta

$$X'_5 \left( \frac{\pi}{2} - t \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X'_5(t),$$

slijedi:

$$e_1 = a_1, \quad e_2 = a_2. \quad (21)$$

Iz uvjeta

$$X'_4 \left( \frac{\pi}{2} - t \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X'_4(t),$$

slijedi:

$$d_1 = \frac{\pi}{4} - b_1, \quad d_2 = b_2 + \frac{\pi}{4} \cdot (2b_1 - \frac{\pi}{4}). \quad (22)$$

Iz uvjeta

$$X'_3 \left( \frac{\pi}{2} - t \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X'_3(t),$$

slijedi:

$$c_2 = c_1 - \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

Iz pretpostavki  $A(0) = [1, 0]^T$  te  $X(0) = [0, 0]^T$  slijedi:

$$\kappa_{1,1} = 1 - a_1, \quad \kappa_{1,2} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = -\frac{1}{4}. \quad (24)$$

Budući da zahtijevamo da je rotacijski put  $X$  klase  $C^\infty$ , slijedi:

$$X_1(\varphi) = X_2(\varphi), \quad X'_1(\varphi) = X'_2(\varphi), \quad (25)$$

$$X_2(\Theta) = X_3(\Theta), \quad X'_2(\Theta) = X'_3(\Theta), \quad (26)$$

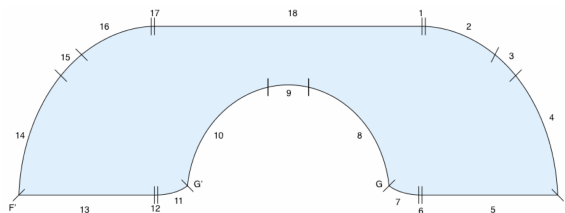
$$X_3\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = X_4\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right), \quad X'_3\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = X'_4\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right), \quad (27)$$

$$X_4\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = X_5\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad X'_4\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = X'_5\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right). \quad (28)$$

Dodatno, vrijede dva identiteta:

$$X_1(\varphi) = B\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right), \quad X_5\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = D(\Theta) \quad (29)$$

koji nastaju tijekom prijelaza iz slučaja u (19). Uočimo da je druga jednadžba u (29) suvišna, jer slijedi iz prve i pretpostavke da je kauč simetričan. Dakle, jednadžbe (21) – (29) čine sustav 28 jednadžbi s 22 nepoznanice. Uočimo da su druga jednadžba u (27) te jednadžbe u (28) suvišne jer slijede iz jednadžbi (25 – 26) te pretpostavke da je kauč simetričan. Prema tome, potrebno je riješiti sustav 22 jednadžbe s 22 nepoznanice. Ukupno se radi o 20 linearnih jednadžbi s nepoznamicama  $\kappa_{1,1}, \kappa_{1,2}, \kappa_{2,1}, \kappa_{2,2}, \dots, \kappa_{5,2}, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, i = 1, 2$  te su dvije jednažbe nelinearne s nepoznamicama  $\varphi$  i  $\Theta$ . Rješenja sustava dana su u tablici, a mogu se pronaći i u [4]. Uzimajući u obzir dane vrijednosti parametara, Gerver je konstruirao kauč Slika 9 koji je omeđen s 3 ravne i 15 zakrivljenih linija. Uočimo da su 5, 3 i 18 dužine te 1, 6, 12 i 17 kružni lukovi kružnice duljine polumjera  $\frac{1}{2}$ . Nadalje, krivulje 2, 3, 7, 11, 15 i 16 su evolvente kružnice dok su 4 i 14 evolvente evolvente evolvente kružnice.



Slika 9: Gerverov kauč

$\Theta=0.681301509382724894$	$\varphi=0.039177364790083641$
$a_1 = 1.210322422072688751$	$\kappa_{1,1} = -0.2103322422072688751$
$a_2 = -\frac{1}{4}$	$\kappa_{1,2} = \frac{1}{4}$
$b_1 = -0.527624598026784624$	$\kappa_{2,1} = -0.919179292771593322$
$b_2 = 0.920258385160637622$	$\kappa_{2,2} = 0.472406619750805465$
$c_1 = 0.626045522848465867$	$\kappa_{3,1} = -0.613763229430251668$
$c_2 = -0.944750803946430751$	$\kappa_{3,2} = 0.889626479003221860$
$d_1 = 1.313022761424232933$	$\kappa_{4,1} = -0.308347166088910014$
$d_2 = -0.525382670414554437$	$\kappa_{4,2} = 0.472406619750805465$
$e_1 = 1.210322422072688751$	$\kappa_{5,1} = -1.017204036787814585$
$e_2 = \frac{1}{4}$	$\kappa_{5,2} = \frac{1}{4}$

Tablica 1: Vrijednosti parametara Gerverovog kauča

*Napomena.* Evolventa kružnice je krivulja dobivena tako što se na zadanu krivulju postavi zamišljeno zategnuto uže čiji se slobodni kraj prati dok se ono namotava po zadanoj krivulji ili, obratno, dok se ono odmotava po krivulji.

Površina kauča iznosi 2.21953166 te je upravo Gerverov kauč do danas najbolje poznato rješenje. Tijekom potrage za oblikom veće površine naišlo se na pitanja na koja se još uvijek ne zna konkretan odgovor. Samo neka od zanimljivih pitanja su:

1. Postoji li asimetrična verzija Gerverovog kauča veće površine koja zadovoljava (19)?
2. Postoji li kauč konstruiran na način da se ne promatra lokalni maksimum površine tijekom opisanih slučajeva?
3. Zašto se u konstrukciji Gerverovog kauča nigdje ne pojavljuje slučaj kada je  $\Gamma_x(t) = \{\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ ?

Možda se upravo konačno rješenje problema krije kao odgovor na ova pitanja te zasigurno matematičari nestrpljivo čekaju rasplet ove priče. Tijekom godina problem se promatra iz različitih perspektiva te se formuliraju mnoge druge zanimljive varijante inicijalnog problema.

## 5 Ambideksterski kauč

Matematičari J. H. Conway i G. C. Shepard promatrajući problem pomicanja kauča, postavljaju pitanje:

*Kakav je 2D oblik najveće površine moguće pomicati kroz hodnik jedinične širine koji skreće lijevo pa desno (ili obrnuto)?*

U ovom poglavlju predstavljen je oblik koji se naziva ambideksterski<sup>4</sup> kauč te se smatra aktualnim rješenjem ovog problema. Autor ambideksterskog kauča predstavljenog u nastavku je D. Romik<sup>5</sup>. Pretpostavimo da rotacijski put  $X$  zadovoljava sljedeće uvjete:

1. rotacijski put  $X$  je klase  $C^\infty$ ,
2. kauč  $S_X$ , pridružen rotacijskom putu  $X$ , simetričan je obzirom na polovište  $X(\frac{\pi}{4})$ ,
3. za ključni put  $A(t)$  vrijedi

$$A(0) = \left[ 1, \frac{1}{2} \right]^T, \quad (30)$$

4.

$$\Gamma_x(t) = \begin{cases} \{A,C,D\}, & 0 < t < \beta, \\ \{X,A,B,C,D\}, & \beta \leq t \leq \frac{\pi}{2} - \beta, \\ \{A,B,C\}, & \frac{\pi}{2} - \beta < t < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (31)$$

pri čemu je  $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$  kut čije vrijednosti treba odrediti,

5. tijekom navedenih slučajeva iz (31) rotacijski put se dobro ponaša.

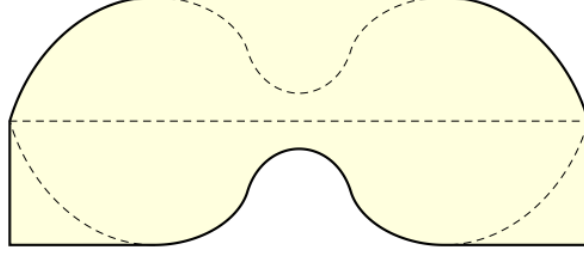
Uočimo da se svaki oblik  $S_X$  pridružen rotacijskom putu  $X$  može pretvoriti u "ambideksterski oblik". Ključ je upravo u pretpostavci (30). Ideja je tada konstruirati oblik dobiven presjekom  $S_X$  i zrcalne slike  $S_X$  obzirom na pravac  $y = \frac{1}{2}$ . Dakle, ukoliko zahtijevamo da oblik ima maksimalnu površinu iz uvjeta Teorema 3 te navedenih pretpostavki slijedi:

$$X(t) = \begin{cases} X_1(t), & 0 < t < \beta, \\ X_6(t), & \beta \leq t \leq \frac{\pi}{2} - \beta, \\ X_5(t), & \frac{\pi}{2} - \beta < t < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (32)$$

---

<sup>4</sup>eng. ambidexterity - sposobnost čovjeka jednako se dobro služiti i lijevom i desnom rukom, pogotovo u pisanju

<sup>5</sup>američki matematičar, profesor s Odjela za matematiku Sveučilišta u Californiji, Davis



Slika 10: Konstrukcija ambidecksterskog kauča

Slično kao i u postupku određivanja Gergerovog kauča, problem se svodi na određivanje 13 parametara  $\beta, \kappa_{1,1}, \kappa_{1,2}, \kappa_{6,1}, \kappa_{6,2}, \kappa_{5,1}, \kappa_{5,2}, a_i, f_i, e_i, i = 1, 2$ . Koristeći navedene pretpostavke određujemo parametre. Uzimajući u obzir (20) zaključujemo da vrijedi:

$$X'_5\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = X'_1(t), \quad t \in [0, \beta].$$

Iz uvjeta

$$X'_5\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X'_5(t),$$

slijedi:

$$e_1 = a_1, \quad e_2 = -a_2. \quad (33)$$

Iz uvjeta

$$X'_6\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X'_6(t),$$

slijedi:

$$f_2 = (1 - \sqrt{2})f_1. \quad (34)$$

Iz pretpostavki  $A(0) = [1, \frac{1}{2}]^T$  te  $X(0) = [0, 0]^T$  slijedi:

$$\kappa_{1,1} = 1 - a_1, \quad \kappa_{1,2} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 0. \quad (35)$$

Budući da zahtijevamo da je rotacijski put  $X$  klase  $C^\infty$  slijedi:

$$X_1(\beta) = X_6(\beta), \quad X'_1(\beta) = X'_6(\beta), \quad (36)$$

$$X_6\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = X_5\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right), \quad X'_6\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = X'_5\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right). \quad (37)$$

Uočimo da je druga jednadžba iz (37) suvišna jer slijedi iz druge jednadžbe (36) te jednadžbi (33) i (34) koje su dobivene iz pretpostavke da je kauč simetričan. Nadalje, pretpostavka (31) bit će zadovoljena ako vrijedi:

$$X_1(\beta) = B(\beta), \quad X_5\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = D\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right), \quad (38)$$

ali vidimo da je druga jednadžba suvišna jer slijedi iz prve te pretpostavke da je kauč simetričan. Iz druge jednadžbe Teorema 2, jednadžbi iz (36) te prve jednadžbe iz (38) slijedi:

$$\begin{aligned}
B(\beta) &= X_6(\beta) + \langle X'_6(\beta), \mu_t \rangle \nu_t, \\
X_1(\beta) &= X_1(\beta) + \langle X'_1(\beta), \mu_t \rangle \nu_t, \\
\langle X'_1(\beta), \mu_t \rangle \nu_t &= 0, \\
\langle X'_1(\beta), \mu_t \rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Sljedećim teoremom predstavljene su vrijednosti 13 traženih parametara.

**Teorem 5.** *Sustav od ukupno 13 jednadžbi (33) – (39) s 13 nepoznanica  $\beta$ ,  $\kappa_{1,1}$ ,  $\kappa_{1,2}$ ,  $\kappa_{6,1}$ ,  $\kappa_{6,2}$ ,  $\kappa_{5,1}$ ,  $\kappa_{5,2}$ ,  $a_i$ ,  $f_i$ ,  $e_i$ ,  $i = 1, 2$  ima jedinstveno rješenje:*

$$\beta = \arctan \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \right) \right], \tag{40}$$

$$a_1 = e_1 = \frac{1}{4} \frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{4} \sqrt{4 + \sqrt[3]{71 + 8\sqrt{2}} + \sqrt[3]{71 - 8\sqrt{2}}}, \tag{41}$$

$$a_2 = e_2 = 0, \tag{42}$$

$$\kappa_{1,2} = \kappa_{6,2} = \kappa_{5,2} = \frac{1}{2}, \tag{43}$$

$$\kappa_{1,1} = 1 - a_1, \tag{44}$$

$$\kappa_{6,1} = 1 - \frac{4}{3}a_1, \tag{45}$$

$$\kappa_{5,1} = 1 - \frac{5}{3}a_1, \tag{46}$$

$$f_1 = \frac{\sqrt[4]{83 + \sqrt[3]{420619 + 15104\sqrt{2}} + \sqrt[3]{420619 - 15104\sqrt{2}}}}{3\sqrt{2(2 - \sqrt{2})}}, \tag{47}$$

$$f_2 = (1 - \sqrt{2})f_1. \tag{48}$$

*Dokaz.* Dokaz teorema može se pronaći u [1]. □

$\beta=0.289653820817320941$	
$a_1 = 0.875287362412732241$	$\kappa_{1,1} = 0.124712637587267758$
$a_2 = 0$	$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2}$
$f_1 = 1.202938908156911389$	$\kappa_{6,1} = -0.167049816550309655$
$f_2 = -0.498273610464875672$	$\kappa_{6,2} = \frac{1}{2}$
$e_1 = 0.875287362412732241$	$\kappa_{5,1} = -0.458812270687887068$
$e_2 = 0$	$\kappa_{5,2} = \frac{1}{2}$

Tablica 2: Vrijednosti parametara ambideksterskog kauča

Sljedeći teorem potvrđuje svojstva ambideksterskog kauča koji je do danas najbolje poznato rješenje ovog problema.

**Teorem 6.** *Neka je  $X$  rotacijski put (32) čije su vrijednosti parametara dane s (40 – 48). Neka je  $\Sigma = S_X \cap \rho(S_X)$  pri čemu je  $\rho$  zrcaljenje obzirom na pravac  $y = \frac{1}{2}$ . Tada je  $\Sigma$  oblik koji se može kretati kroz hodnik koji skreće lijevo pa desno (ili obrnuto). Nadalje, jedino rotacijski put  $X$  zadovoljava pretpostavke navedene na početku ovog poglavlja te uvjete iz Teorema 2,  $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\beta, \frac{\pi}{2} - \beta\}$ . Površina  $\Delta$  ambideksterskog kauča  $\Sigma$  iznosi:*

$$\Delta = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} - 1 + \arctan \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \right) \right] \approx 1.644955.$$

Udaljenost  $\lambda$  između krajnje lijeve i desne točke ambideksterskog kauča  $\Sigma$  iznosi:

$$\lambda = \frac{2}{3} \sqrt{4 + \sqrt[3]{71 + 8\sqrt{2}} + \sqrt[3]{71 - 8\sqrt{2}}} \approx 2.334099.$$

*Dokaz.* Preostaje dokazati površinu  $\Delta$  i udaljenost  $\lambda$  budući da ostale tvrdnje slijede iz prije navedenog. Dokažimo prvo udaljenost  $\lambda$ . Uočimo da je krajnje lijeva točka kauča  $C(\frac{\pi}{2}) = (C_1(\frac{\pi}{2}), \frac{1}{2})$ , a krajnje desna  $A(0) = (1, \frac{1}{2})$ . Iz navedenog zaključujemo:

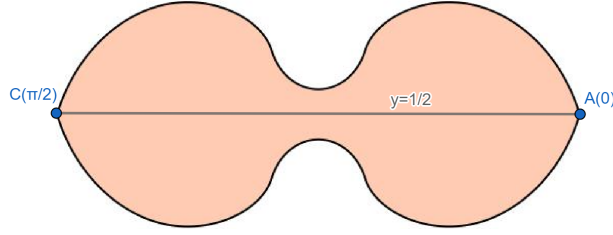
$$\lambda = 1 - C_1 \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

pa preostaje odrediti  $C_1 \left( \frac{\pi}{2} \right)$ . Podsjetimo se da je  $C(t)$  dan s:

$$C(t) = X(t) - \langle X'(t), \nu_t \rangle \mu_t + \nu_t.$$

Posebno, za  $t = \frac{\pi}{2}$  te pretpostavke (32) slijedi:

$$C \left( \frac{\pi}{2} \right) = X_5 \left( \frac{\pi}{2} \right) - \left\langle X'_5 \left( \frac{\pi}{2} \right), \nu_{\frac{\pi}{2}} \right\rangle \mu_{\frac{\pi}{2}} + \nu_{\frac{\pi}{2}}. \quad (49)$$



Slika 11: Krajnje točke ambideksterskog kauča  $\Sigma$

Uočimo da iz (17) slijedi:

$$X_5(t) = \begin{bmatrix} e_1 \cos 2t + e_2 \sin 2t - \frac{1}{2} \cos t + \sin t + \kappa_{5,1} \\ -e_2 \cos 2t + e_1 \sin 2t - \frac{1}{2} \sin t - \cos t + \kappa_{5,2} \end{bmatrix},$$

$$X'_5(t) = \begin{bmatrix} -2e_1 \sin 2t + 2e_2 \cos 2t + \frac{1}{2} \sin t + \cos t \\ 2e_2 \sin 2t + 2e_1 \cos 2t - \frac{1}{2} \cos t + \sin t \end{bmatrix},$$

te uvrštavajući  $t = \frac{\pi}{2}$  dobivamo:

$$X_5\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -e_1 + 1 + \kappa_{5,1} \\ e_2 - \frac{1}{2} + \kappa_{5,2} \end{bmatrix},$$

$$X'_5\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -2e_2 + \frac{1}{2} \\ -2e_1 + 1 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, vrijedi:

$$\nu_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mu_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uvrštavajući dobiveno u (49) slijedi:

$$\begin{aligned} C\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \begin{bmatrix} -e_1 + 1 + \kappa_{5,1} \\ e_2 - \frac{1}{2} + \kappa_{5,2} \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} -2e_2 + \frac{1}{2} \\ -2e_1 + 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e_1 + 1 + \kappa_{5,1} \\ e_2 - \frac{1}{2} + \kappa_{5,2} \end{bmatrix} - \left(2e_2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e_1 + 1 + \kappa_{5,1} \\ e_2 - \frac{1}{2} + \kappa_{5,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2e_2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e_1 + 1 + \kappa_{5,1} - 1 \\ e_2 - \frac{1}{2} + \kappa_{5,2} - 2e_2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e_1 + \kappa_{5,1} \\ -e_2 + \kappa_{5,2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



iz čega zaključujemo:

$$C_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e_1 + \kappa_{5,1}.$$

Tada vrijedi:

$$\lambda = 1 + e_1 - \kappa_{5,1}.$$

Nadalje, iz (41) i (46) slijedi:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + e_1 - \left(1 - \frac{5}{3}e_1\right) \\ &= 1 + e_1 - 1 + \frac{5}{3}e_1 \\ &= \frac{8}{3}e_1 \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{4 + \sqrt[3]{71 + 8\sqrt{2}} + \sqrt[3]{71 - 8\sqrt{2}}} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{4 + \sqrt[3]{71 + 8\sqrt{2}} + \sqrt[3]{71 - 8\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Odredimo sada površinu  $\Delta$ . Uočimo da zbog simetrije oblika  $\Sigma$  za njegovu površinu vrijedi:

$$\Delta = 4 \left[ \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - A_1(t)\right) A_2'(t) dt + \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - B_1(t)\right) B_2'(t) dt + \int_{\beta}^{\frac{\pi}{4}} \left(x_1(t) - \frac{1}{2}\right) x_2'(t) dt \right] \quad (50)$$

pri čemu su  $X(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ ,  $A(t) = [A_1(t), A_2(t)]^T$  i  $B(t) = [B_1(t), B_2(t)]^T$ . Uvedimo oznake:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - A_1(t)\right) A_2'(t) dt, \\ I_2 &= \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - B_1(t)\right) B_2'(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\beta}^{\frac{\pi}{4}} \left(x_1(t) - \frac{1}{2}\right) x_2'(t) dt. \end{aligned}$$

Tada za  $I_1$  vrijedi:

$$I_1 = \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}-\beta} \left(\frac{1}{2} - A_1(t)\right) A_2'(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - A_1(t)\right) A_2'(t) dt$$

te za  $I_2$  vrijedi:

$$I_2 = \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}-\beta} \left(\frac{1}{2} - B_1(t)\right) B_2'(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - B_1(t)\right) B_2'(t) dt.$$

Označimo:

$$I_{1,1} = \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}-\beta} \left(\frac{1}{2} - A_1(t)\right) A_2'(t) dt$$

te izvedimo podintegralnu funkciju za taj integral. Podintegralne funkcije za preostale integrale izvede se analogno. Podsjetimo se da je  $A(t) = X(t) + \langle X'(t), \mu_t \rangle \nu_t + \mu_t$ , te zbog pretpostavke (32) slijedi:

$$A(t) = X_6(t) + \langle X'_6(t), \mu_t \rangle \nu_t + \mu_t. \quad (51)$$

Direktno iz (18) slijedi:

$$X_6(t) = \begin{bmatrix} f_1 \left( \cos t \cdot \cos \frac{t}{2} - \sin t \cdot \sin \frac{t}{2} \right) + f_2 \left( \cos t \cdot \sin \frac{t}{2} + \sin t \cdot \cos \frac{t}{2} \right) - \cos t + \sin t + \kappa_{6,1} \\ f_1 \left( \sin t \cdot \cos \frac{t}{2} + \cos t \cdot \sin \frac{t}{2} \right) + f_2 \left( \sin t \cdot \sin \frac{t}{2} - \cos t \cdot \cos \frac{t}{2} \right) - \sin t - \cos t + \kappa_{6,2} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Nadalje, iz (52) slijedi:

$$X'_6(t) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}f_1 \left( \cos t \cdot \sin \frac{t}{2} + \sin t \cdot \cos \frac{t}{2} \right) + \frac{3}{2}f_2 \left( -\sin t \cdot \sin \frac{t}{2} + \cos t \cdot \cos \frac{t}{2} \right) + \sin t + \cos t \\ \frac{3}{2}f_1 \left( \cos t \cdot \cos \frac{t}{2} - \sin t \cdot \sin \frac{t}{2} \right) + \frac{3}{2}f_2 \left( \cos t \cdot \sin \frac{t}{2} + \sin t \cdot \cos \frac{t}{2} \right) - \cos t + \sin t \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Uvrštavajući (52) i (53) u (51) vrijedi:

$$\begin{aligned} A(t) &= X_6(t) + \left( -\frac{3}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} \cdot f_1 + \frac{3}{2} \cdot \cos \frac{t}{2} \cdot f_2 \right) \nu_t + \mu_t \\ &= X_6(t) + \left( -\frac{3}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} \cdot f_1 + \frac{3}{2} \cdot \cos \frac{t}{2} \cdot f_2 \right) \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \\ &= X_6(t) + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \sin t \left( \sin \frac{t}{2} \cdot f_1 - \cos \frac{t}{2} \cdot f_2 \right) + \cos t \\ \frac{3}{2} \cos t \left( -\sin \frac{t}{2} \cdot f_1 + \cos \frac{t}{2} \cdot f_2 \right) + \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \sin t \left( \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} \cdot f_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2} \cdot f_2 + 1 \right) + \cos t \left( \cos \frac{t}{2} \cdot f_1 + \sin \frac{t}{2} \cdot f_2 \right) + \kappa_{6,1} \\ A_2(t) &= \sin t \left( \cos \frac{t}{2} \cdot f_1 + \sin \frac{t}{2} \cdot f_2 \right) - \cos t \left( \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} f_1 - \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} f_2 + 1 \right) + \kappa_{6,2} \\ A'_2(t) &= \sin t + \frac{3}{4} \cos t \left( \frac{t}{2} f_1 + \cos \frac{t}{2} f_2 \right). \end{aligned}$$

Nakon određivanja preostalih integrala, konačno rješenje iznosi  $\Delta \approx 1.644955$ . Numerički dokaz ove tvrdnje može se pronaći u paketu *MovingSofas*[4] koji je dostupan u *Mathematici*.  $\square$

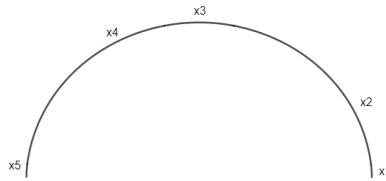
Do danas nije dokazano da je ambideksterski kauč  $\Sigma$  rješenje problema. Potraga za novim ambideksterskim kaučem je u tijeku, a možda i nikada neće prestati. Ostaje nam pričekati i vidjeti rasplet cijele ove priče i hoće li se pokazati je li zaista Romik autor konačnog rješenja problema.

## 6 Praktični rad

Proučavajući problem pomicanja kauča dosjetio sam se kako bi bilo zanimljivo i korisno izraditi 3D model kauča. Koristeći Teorem 4, točnije jednadžbe (13–17), konstruirao sam u GeoGebri krivulje koje čine rotacijski put Gerverovog kauča. Budući da su navedenim jednadžbama dana opća rješenja, za konstantne vrijednosti uvrstio sam vrijednosti dane u Tablici 1.

Krivulja x1	Krivulja(1.21cos(2t) - 0.25sin(2t) + 0.5sin(t) - cos(t) - 0.21, 0.25cos(2t) + 1.21sin(2t) - sin(t) - 0.5cos(t) + 0.25, t, 0, 0.04)
Krivulja x2	Krivulja(cos(t) (-0.25 t <sup>2</sup> - 0.53t + 0.92) + sin(t) (-0.5 t - 0.53 + 1) - 0.92, sin(t) (-0.25 t <sup>2</sup> - 0.53t + 0.92) + cos(t) (0.5t + 0.53 - 1) + 0.47, t, 0.04, 0.68)
Krivulja x3	Krivulja(cos(t) (0.63 - t) - sin(t) (-0.94 + t) - 0.61, sin(t) (0.63 - t) + cos(t) (-0.94 + t) + 0.89, t, 0.68, π / 2 - 0.68)
Krivulja x4	Krivulja(cos(t) (-0.5 t + 1.31 - 1) - sin(t) (-0.25 t <sup>2</sup> + 1.31t - 0.53) - 0.31, sin(t) (-0.5 t + 1.31 - 1) + cos(t) (-0.25 t <sup>2</sup> + 1.31t - 0.53) + 0.47, t, π / 2 - 0.68, π / 2 - 0.04)
Krivulja x5	Krivulja(1.21cos(2t) + 0.25sin(2t) - 0.5cos(t) + sin(t) - 1.02, -0.25 cos(2t) + 1.21sin(2t) - 0.5sin(t) - cos(t) + 0.25, t, π / 2 - 0.04, π / 2)

Slika 12: Jednadžbe krivulja



Slika 13: Prikaz krivulja

Nakon toga definirane su evolvente jedinične kružnice. Upravo su evolvente i jedan od razloga što je Gerverov kauč veće površine od Hammersleyevog.

$$\begin{aligned}
 \text{ev1} &= \text{Krivulja}(\cos(t) + t \sin(t) - 2.34482179, \sin(t) - t \cos(t) - 0.0406342574, t, 0, 0.5) \\
 &= \left. \begin{aligned} x &= \cos(t) + t \sin(t) - 2.34 \\ y &= \sin(t) - t \cos(t) - 0.04 \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 0.5 \\
 \text{ev2} &= \text{Krivulja}(-\cos(t) - t \sin(t) + 1.1172953275, \sin(t) - t \cos(t) - 0.0406342574, t, 0, 0.5) \\
 &= \left. \begin{aligned} x &= -\cos(t) - t \sin(t) + 1.12 \\ y &= \sin(t) - t \cos(t) - 0.04 \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 0.5
 \end{aligned}$$

Slika 14: Jednadžbe evolventi

Zatim su definirana dva kružna luka te tri dužine koje spajaju sve navedene krivulje te daju konačni oblik kauča.

$$\begin{aligned}
 k3 &= \text{Krivulja}(\cos(t) - 1.34482179, \sin(t) - 0.0406342574, t, \frac{\pi}{2}, \pi) \\
 &= \left. \begin{aligned} x &= \cos(t) - 1.34 \\ y &= \sin(t) - 0.04 \end{aligned} \right\} 1.57 \leq t \leq 3.14
 \end{aligned}$$

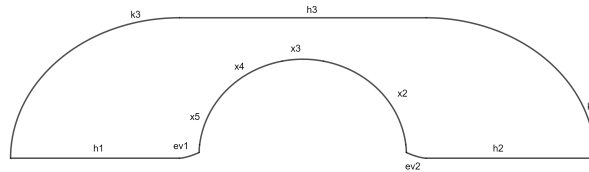
$$\begin{aligned}
 k4 &= \text{Krivulja}(\cos(t) + 0.1172953275, \sin(t) - 0.0406342574, t, 0, \frac{\pi}{2}) \\
 &= \left. \begin{aligned} x &= \cos(t) + 0.12 \\ y &= \sin(t) - 0.04 \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1.57
 \end{aligned}$$

Slika 15: Jednadžba prvog kružnog luka

Slika 16: Jednadžba drugog kružnog luka

$$\begin{aligned}
 h1 &= \text{Dužina}((-1.34482179, -0.0406342574), (-2.34482179, -0.0406342574)) \\
 &= 1 \\
 h2 &= \text{Dužina}((0.1172953275, -0.0406342574), (1.1172953275, -0.0406342574)) \\
 &= 1 \\
 h3 &= \text{Dužina}((-1.34482179, 0.9593657426), (0.1172953275, 0.9593657426)) \\
 &= 1.46
 \end{aligned}$$

Slika 17: Jednadžbe dužina



Slika 18: Model kauča

Sljedeća slika prikazuje 3D model nakon printanja.



Slika 19: 3D model kauča

*Napomena.* Nakon što se model izveze u .stl datoteku, prije printanja potrebno je napraviti nekoliko korekcija. Naime, na dijelovima presjeka krivulja, a pogotovo na rubnim dijelovima kauča, potrebno je "popuniti" materijal kako bi model bolje izgledao. To je potrebno napraviti budući da krivulje na rubnim dijelovima imaju male prekide zbog tehničkih nepreciznosti koje se događaju u proizvodnom procesu. Bez navedene korekcije, odnosno malo namještanja nakon printanja, model ne bi izgledao kao na priloženoj slici.

## 7 Zaključak

Problem pomicanja kauča kroz  $L$ -hodnik jedinične širine jedan je od problema koje je lako objasniti, ali ga je komplicirano riješiti. Cilj je svakako što je više moguće pojednostaviti kauč te precizno opisati njegova svojstva. Kroz rad je opisano korištenje matematičkih alata pri pokušaju određivanja konačnog rješenja problema. Najznačajnije oblike kauča konstruirali su J. M. Hammersley te J. Gerver. Upravo je Gerverov kauč aktualno rješenje problema. Ostaje pitanje mogu li se dodatne pretpostavke koje kauč zadovoljava zanemariti i hoće li se u budućnosti pokazati je li Gerverov kauč konačno rješenje problema. U radu je također opisana konstrukcija 3D modela Gerverovog kauča. Pozadina konstrukcije modela temelji se na teoremima koji su navedeni u radu. Intenzivnim proučavanjem došlo se do jedne od varijanti problema, ambideksterskog problema pomicanja kauča, također do danas neriješenog problema. Matematičari imaju zahtjevan zadatak, odgovoriti na mnoga pitanja od kojih su neka od najzanimljivijih: kako se navedeni problem ostvaruje u 3D? Hoće li se uvođenjem treće dimenzije morati promatrati više od šest diferencijalnih jednadžbi? Koje pretpostavke mora zadovoljavati kauč koji bi bio rješenje takve varijante problema? Preostaje vidjeti kakve će promjene i pristupe problemu donijeti uvođenje treće dimenzije. Ipak, najbogatija činjenica u cijeloj ovoj priči je da u postupku pronalaska rješenja vrijednost leži u tome što kroz dugotrajnu proceduru i potragu za rješenjem možemo doći do novih pristupa, varijanti problema i vrijednih novih matematičkih znanja kojih na početku istraživanja nismo bili svjesni.

## Popis slika

1	Kvadrat smješten u $L$ –hodnik . . . . .	5
2	Polukrug smješten u $L$ –hodnik . . . . .	5
3	Gornja ograda prvi slučaj . . . . .	6
4	Gornja ograda drugi slučaj . . . . .	7
5	Hammersleyjev kauč . . . . .	8
6	Rotacijski i ključni putevi . . . . .	9
7	Definiranje diferencijalnih jednadžbi . . . . .	15
8	Potvrda rješenja diferencijalnih jednadžbi . . . . .	15
9	Gervero kauč . . . . .	17
10	Konstrukcija ambideksterskog kauča . . . . .	20
11	Krajnje točke ambideksterskog kauča $\Sigma$ . . . . .	23
12	Jednadžbe krivulja . . . . .	26
13	Prikaz krivulja . . . . .	26
14	Jednadžbe evolventi . . . . .	26
15	Jednadžba prvog kružnog luka . . . . .	27
16	Jednadžba drugog kružnog luka . . . . .	27
17	Jednadžbe dužina . . . . .	27
18	Model kauča . . . . .	27
19	3D model kauča . . . . .	27

## Popis tablica

1	Vrijednosti parametara Gervero kauča . . . . .	18
2	Vrijednosti parametara ambideksterskog kauča . . . . .	22

## Literatura

- [1] Romik, D.: *Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem*, 2016. URL: <https://www.math.ucdavis.edu/~romik/data/uploads/papers/sofa.pdf> (pristupio sadržaju 11. ožujka 2023.)
- [2] Kallus, Y. Romik, D.: *Improved upper bounds in the moving sofa problem*, 2018. URL: <https://www.math.ucdavis.edu/~romik/data/uploads/papers/sofabounds.pdf> (pristupio sadržaju 11. ožujka 2023.)
- [3] Croft, H. Falconer, K. Guy, M.: *Unsolved Problems in Geometry. Problem Books in Mathematics; Unsolved Problems in Intuitive Mathematics. Vol. II.* Springer-Verlag, 1991.
- [4] Romik, D.: *Moving Sofas, Mathematica*, 2016. URL: <https://www.math.ucdavis.edu/~romik/data/uploads/software/movingsofas-v1.3-printout.pdf> (pristupio sadržaju 25. ožujka 2023.)
- [5] Hammersley J.M.: *On the enfeeblement of mathematical skills by Modern Mathematics and by similar soft intellectual trash in schools and universities*, 1968. URL: <https://gwern.net/doc/math/humor/1968-hammersley.pdf> (pristupio sadržaju 2. travnja 2023.)
- [6] *StackExchange*, 2017. URL: <https://math.stackexchange.com/questions/1847453/whats-the-upper-bound-for-sofa-problem> (pristupio sadržaju 11. ožujka 2023.)