Permutacijske matrice

Markek, Nives

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:196:413993

Rights / Prava: Attribution 4.0 International/Imenovanje 4.0 međunarodna

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-22**

SVEUČILIŠTE U RIJECI
FAKULTET ZA MATEMATIKU

Repository / Repozitorij:

Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository

zir.nsk.hr

UNIRI DIGITALNA KNJIŽNICA

dabar
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za Matematiku
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Nives Markek

PERMUTACIJSKE MATRICE

Rijeka, rujan 2023.

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za Matematiku
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Nives Markek
Mentor: doc. dr. sc. Nina Mostarac

PERMUTACIJSKE MATRICE

Rijeka, rujan 2023.

Sažetak

Svakoj permutaciji n-članog skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ možemo jednoznačno pridružiti permutacijsku matricu reda n, tj. $(0, 1)$-matricu reda n s po jednom jedinicom u svakom retku i stupcu. Permutacijske matrice su posebna vrsta matrica koje se pojavljuju na primjer u Bruhatovoj matričnoj dekompoziciji regularne matrice i one su najjednostavnije matrice alternirajućih predznaka. U ovome radu opisat će se neka osnovna svojstva permutacijskih matrica, Bruhatov uređaj na skupu permutacijskih matrica te njihova uloga u Bruhatovoj matričnoj dekompoziciji. Skup permutacijskih matrica reda n promotrit će se i kao posebna klasa nenegativnih cjelobrojnih matrica sa zadanim sumama redaka i stupaca. Također, spomenut će se veza simetričnih permutacijskih matrica (permutacijskih matrica koje odgovaraju involucijama) s određenom klasom nenegativnih simetričnih cjelobrojnih matrica.

Ključne riječi: *permutacije, matrice, permutacijske matrice, Bruhatov uređaj*

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Tema ovog rada su permutacijske matrice. Permutacijske matrice su važna vrsta matrica koje se dobivaju permutacijom stupaca (ili redaka) jedinične matrice. Koriste se za rješavanje sustava linearnih jednadžbi i za razne dekompozicije gdje se javljaju kao faktori. Također, svakoj permutaciji skupa može se jednoznačno pridružiti permutacijska matrica kao što ćemo vidjeti u nastavku. U prvom dijelu rada definirat ćemo osnovne pojmove koji su potrebni za definiranje permutacijskih matrica. Nadalje, definirat ćemo permutacijske matrice te uvesti pojam Bruhatovog uređaja koji vodi do Bruhatove matrične dekompozicije regularne matrice u kojoj je jedan od faktora permutacijska matrica. Opisat ćemo permutacijske matrice kao određenu klasu nenegativnih cjelobrojnih matrica. Također, promatrat ćemo i permutacijske matrice koje odgovaraju involucijama (simetrične permutacijske matrice). Za kraj rada spomenut ćemo matrice alternirajućih predznaka kao generalizaciju permutacijskih matrica.

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi koji će se pojavljivati kasnije u radu. Prvo ćemo spomenuti matrice, osnovne tipove matrica, operacije s matricama te na kraju definiciju permutacije skupa i neke potrebne pojmove vezane uz permutacije. Svi navedeni pojmovi potrebni su kako bi bolje shvatili glavnu temu rada, a to su permutacijske matrice.

2.1 Matrice

Definicija 2.1.1 ***Matrica*** *tipa* $m \times n$ *s koeficijentima iz polja* $\mathbb{F}$ *je svako preslikavanje* $A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{F}$. *Skalare* $A(i, j)$ *označavamo s* a_{ij} *te nazivamo elementima matrice. Matricu* A *možemo zapisati u obliku pravokutne tablice s* m *redaka i* n *stupaca:*

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{(m\times n)} .$$

Element a_{ij} *nalazi se u* i*-tom retku te* j*-tom stupcu matrice* A. *Matrice nad poljem* $\mathbb{R}$ *zovemo realne, a nad* $\mathbb{C}$ *kompleksne matrice.*

2.1.1 Operacije s matricama

Definicija 2.1.2 *Neka su* $A = [a_{ij}]$ *i* $B = [b_{ij}]$ *matrice tipa* $m \times n$. *Zbroj matrica* A *i* B *je matrica* $C = [c_{ij}]$ *tipa* $m \times n$, *gdje je* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Zbrajanje matrica A i B istog tipa je zapravo zbrajanje elemenata zadanih matrica po pozicijama.

Definicija 2.1.3 *Neka je matrica $A = [a_{ij}]$ tipa $m \times n$ i $B = [b_{ij}]$ tipa $r \times s$. Kako bi množili matrice A i B one moraju biti ulančane, odnosno broj stupaca matrice A mora biti jednak broju redaka matrice B. Tada postoji umnožak $AB = [c_{ij}]$, matrica tipa $m \times s$ takva da je $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$.*

Primjer 2.1.1 *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{(3\times 1)}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{(1\times 3)}$. *Tada je:*

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{(3\times 3)}.$$

2.1.2 Tipovi matrica specijalnog oblika

U nastavku je navedeno nekoliko specijalnih tipova matrica:

- **Nul-matrica** je matrica u kojoj su svi elementi jednaki nuli.
- **Kvadratna matrica** reda n je matrica u kojoj se broj redaka i stupaca podudara, odnosno $m = n$.
- **Gornje trokutasta matrica** je kvadratna matrica u kojoj je $a_{ij} = 0$ za $i > j$. Za $n = 3$, jedan primjer gornje trokutaste matrice reda 3 dan je sa:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

- **Donje trokutasta matrica** je kvadratna matrica u kojoj je $a_{ij} = 0$ za $i < j$. Ostali elementi su proizvoljni. Za $n = 3$, primjer donje trokutaste matrice reda 3 dan je sa:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Napomena 2.1.1 *Glavna dijagonala kvadratne matrice $A = [a_{ij}]$ reda n je skup svih elemenata oblika a_{ii}, gdje je $i \in \{1, ..., n\}$. Sporedna dijagonala te matrice je skup svih elemenata a_{ij} za koje je $i + j = n + 1$.*

- **Dijagonalna matrica** je kvadratna matrica kod koje su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj. za koju je $a_{ij} = 0$, za $i \neq j$. Posebna dijagonalna matrica je **jedinična matrica** I_n reda n koja na glavnoj dijagonali ima samo jedinice. Jedinična matrica reda n za $n = 3$ je oblika:
$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Anti-identična** matrica Q_n je kvadratna matrica reda n koja na sporednoj dijagonali ima jedinice, a ostali elementi su joj jednaki 0.

- **Transponirana matrica** matrice A je matrica A^T koju dobivamo iz matrice A zamjenom redaka i stupaca. Za $m \times n$ matricu A transponirana matrica će biti tipa $n \times m$. Transponirana matrica matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ je $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

- **Simetrična matrica** je kvadratna matrica za koju vrijedi $A = A^T$. **Antisimetrična matrica** je kvadratna matrica za koju vrijedi $A = -A^T$.

- Kvadratna matrica A reda n je **regularna** matrica ako postoji A^{-1} tako da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. U suprotnom, matrica A je **singularna** matrica. Ako takva matrica A^{-1} postoji zovemo ju **inverznom matricom** matrice A.

- **Ortogonalna matrica** je matrica A za koju vrijedi da je $A^TA = AA^T = I$. Svaka ortogonalna matrica je invertibilna, budući da vrijedi $A^{-1} = A^T$.

2.2 Permutacije skupova

Definicija 2.2.1 *Označimo sa S skup od n elemenata. Tada je* ***permutacija skupa S*** *uređena n-torka* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *kod koje su komponente* s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *međusobno različiti elementi od S.*

Napomena 2.2.1 *Permutaciju skupa S od n elemenata možemo promatrati i kao bijekciju tog skupa na samog sebe. Nadalje, skup svih permutacija od* $S = \{1, 2, ..., n\}$ *označavat ćemo sa* S_n*, a permutacije skupa S malim grčkim simbolima poput* σ *i* τ*.*

Vezano uz permutacije uvodimo pojmove uspona i silaska, inverzije te transpozicije permutacije σ.

Definicija 2.2.2 *Neka je* $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_n$. ***Uspon od*** σ *je par* $(i, i+1)$, *gdje je* $s_i < s_{i+1}$. *S druge strane,* ***silazak od*** σ *je par* $(i, i+1)$, *gdje je* $s_i > s_{i+1}$. *Kažemo da se uspon, odnosno silazak događa na poziciji i.*

Napomena 2.2.2 *Suma broja uspona i silazaka od* σ *za jedan je manja od broja elemenata zadane permutacije, odnosno jednaka je* $n - 1$.

Primjer 2.2.1 *Neka je* $n = 5$ *i* $\sigma = (3, 5, 4, 2, 1)$. *Označimo elemente permutacije* σ *oznakama* $s_1 = 3, s_2 = 5, s_3 = 4, s_4 = 2, s_5 = 1$. *Uspon permutacije* σ *događa se na poziciji 1, jer* $s_1 = 3$ *i* $s_2 = 5$ *te* $3 < 5$. *Kako uvjet vrijedi, gledamo na kojoj poziciji se broj 3 nalazi u* σ, *a to je 1. Nadalje, vrijedi da je* $5 > 4$, $4 > 2$ *i* $2 > 1$ *pa zaključujemo da se silazak od* σ *događa na pozicijama 2, 3 i 4.*

Definicija 2.2.3 ***Inverzija*** *permutacije* $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_n$ *je par* (i, k), *takav da je* $i < k$ *i* $s_i > s_k$, *gdje* $i, k = 1, 2, \ldots, n$. *Ako je broj inverzija permutacije* σ *paran broj, kažemo da je permutacija parna. U suprotnom kažemo da je neparna.*

Primjer 2.2.2 *Neka je* $n = 5$ *i* $\sigma = (3, 5, 4, 2, 1)$. *Kada tražimo inverzije permutacije prvo gledamo indekse pozicija na kojima se nalaze elementi permutacije kako bi izdvojili one pozicije za koje vrijedi da je* $i < k$, $i, k = 1, 2, 3, 4, 5$. *Nadalje, gledamo elemente koji se nalaze na tim pozicijama te provjeravamo vrijedi li drugi uvjet, da je* $s_i > s_k$. *Zadana permutacija ima osam inverzija, a to su sljedeći parovi:* $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ *i* $(4, 5)$.

Definicija 2.2.4 *Neka je* $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_n$. ***Transpozicija*** *u permutaciji* σ *je zamjena bilo koja dva elementa u permutaciji.*

Ako u permutaciji σ zamijenimo elemente s_k i s_l, gdje je $k < l$ te $s_k > s_l$ (tj. par (k, l) je inverzija), dobit ćemo novu permutaciju s manje inverzija. Ako je svaki od elemenata na pozicijama s_{k+1}, s_{k+2}, $\ldots$, s_{l-1} ili veći od s_k ili manji od s_l, tada zamjena smanjuje broj inverzija za točno jedan.

Primjer 2.2.3 *Pogledajmo permutaciju* $\sigma = (5, 8, 2, 1, 9, 3, 4, 7, 6)$ *iz* S_9. *Vidimo da je jedna inverzija te permutacije par* $(2, 6)$. *Elementi* s_2 *i* s_6 *su redom brojevi 8 i 3. Kako vrijedi* $s_3 = 2 < s_6 = 3$, $s_4 = 1 < s_6 = 3$, $s_5 = 9 > s_2 = 8$ *u permutaciji* σ, *slijedi da će transpozicija brojeva 8 i 3 smanjiti broj inverzija za točno jedan.*

Uočimo, ako krenemo od permutacije σ, nizom transpozicija možemo doći do identične permutacije $(1, 2, \ldots, n)$. Obratno, ako krenemo od identične permutacije, nizom transpozicija možemo dobiti bilo koju permutaciju skupa S.

Poglavlje 3

Permutacijske matrice

3.1 Definicija i svojstva

Definicija 3.1.1 ***Permutacijska matrica*** *P je kvadratna matrica reda n takva da svaki redak i stupac sadrži jedan element jednak 1, dok su preostali elementi jednaki 0. Permutacijska matrica se može dobiti iz jedinične matrice permutacijom njezinih stupaca (ili ekvivalentno redaka, ali tada uz korištenje drugačije reprezentacije od one koju ćemo u nastavku opisati).* ***Elementarna permutacijska matrica*** *je matrica dobivena zamjenom samo jednog para stupaca (redaka) u jediničnoj matrici. Sve ostale permutacijske matrice nisu elementarne.*

Svakoj permutaciji $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ može se pridružiti permutacijska matrica $P = [p_{ij}]$, gdje je $p_{1s_1} = p_{2s_2} = \ldots = p_{ns_n} = 1$ i $p_{ij} = 0$ inače. Dana matrica P dobiva se iz jedinične matrice permutacijom stupaca pomoću permutacije σ.

Primjer 3.1.1 *Neka je $n = 4$ i $\sigma = (2, 4, 3, 1)$. Tada je*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $s_1 = 2, s_2 = 4, s_3 = 3, s_4 = 1$, elementi na pozicijama p_{1s_1}, p_{2s_2}, p_{3s_3}, p_{4s_4} su jedinice, dok su na ostalim pozicijama nule.

Pogledajmo sada pojmove inverzije i transpozicije u terminima permutacijskih matrica. Neka je $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ permutacija od $S = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Inverzija permutacije σ dana kao par (k, l), gdje je $k < l$, $s_k > s_l$, odgovara 2×2 podmatrici matrice P,

$$P[k, l|s_l, s_k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Q_2,$$

određenoj retcima k i l te stupcima s_l i s_k matrice P. Transpozicijom elemenata s_k i s_l dobit ćemo novu permutaciju s puno manje inverzija, a podmatrica $P[k, l|s_l, s_k]$ zamijenit će se s jediničnom matricom reda 2. Nadalje, ako je $(l - k - 1) \times (s_k - s_l - 1)$ podmatrica od P, određena retcima $k + 1$, $\ldots$, $l - 1$ i stupcima $s_l + 1, ..., s_k - 1$ nul-matrica, tada zamjena podmatrice $P[k, l|s_l, s_k]$ s jediničnom matricom smanjuje broj inverzija za točno jedan. Anti-identična matrica Q_n koja odgovara permutaciji $\sigma = (n, n - 1, \ldots, 1)$ ima maksimalan mogući broj inverzija, odnosno točno $\binom{n}{2}$ inverzija.

Primjer 3.1.2 *Permutaciji $\sigma = (5, 8, 2, 1, 9, 3, 4, 7, 6)$ iz S_9 odgovara permutacijska matrica*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jedna inverzija je par $(2, 6)$, znači $k = 2$ i $l = 6$. Ako pogledamo podmatricu tipa $(l - k - 1) \times (s_k - s_l - 1)$, koja će u ovom slučaju biti 3×4 podmatrica određena retcima 3,4,5 i stupcima 4,5,6,7 ona će biti nul-matrica te će slijediti da transpozicija brojeva 8 i 3 u permutaciji σ smanjuje broj inverzija za točno jedan.

3.1.1 Svojstva permutacijskih matrica

U nastavku slijedi nekoliko svojstava permutacijskih matrica.

- Postoje dvije permutacijske matrice tipa 2×2 i $3! = 6$ permutacijskih matrica tipa 3×3. Općenito postoji $n!$ permutacijskih matrica reda n.

- Svaka permutacijska matrica P je ortogonalna, odnosno regularna s inverzom jednakim $P^{-1} = P^T$.

- Transponirana tj. inverzna matrica permutacijske matrice P je također permutacijska matrica. Umnožak $P = P_1P_2$ permutacijskih matrica P_1 i P_2 koje odgovaraju permutacijama σ_1 i σ_2 redom, je također permutacijska matrica, koja odgovara permutaciji $\sigma_1 \circ \sigma_2$.
- Svaka elementarna permutacijska matrica je simetrična.
- Množenje matrice $A = [a_{ij}]$ s lijeva permutacijskom matricom P (tj. PA), odgovara permutiranju redaka matrice A, a množenje s desna permutacijskom matricom P (tj. AP), odgovara permutiranju stupaca matrice A.

3.2 Bruhatov uređaj

Postoji jedan poseban uređaj koji se definira na S_n. Zovemo ga Bruhatov[1] uređaj i označavamo ga sa $\preceq_B$.

Definicija 3.2.1 *Neka su σ i τ permutacije iz S_n. Kažemo da σ* ***prethodi*** *τ u Bruhatovom uređaju i pišemo $\sigma \preceq_B \tau$, ako se σ može dobiti iz τ nizom transpozicija koje smanjuju broj inverzija.*

Bruhatov uređaj je parcijalni uređaj na S_n. Identična permutacija ι_n (identična matrica I_n) je jedinstvena minimalna permutacija u djelomično uređenom skupu $(S_n, \preceq_B)$, jer ima nula inverzija, dok je anti-identična ζ_n (anti-identična matrica Q_n) jedinstvena maksimalna permutacija jer ima $\binom{n}{2}$ inverzija.
Koristeći definiciju Bruhatovog uređaja nije lako odrediti jesu li dvije permutacije povezane na taj način. Zato koristimo karakterizaciju Bruhatovog uređaja koja zahtijeva usporedbu samo $(n-1)^2$ cijelih brojeva. Za bilo koju realnu matricu $A = [a_{ij}]$ tipa $m \times n$, definiramo matricu $\sum(A) = [\sigma_{ij}]$ kao matricu tipa $m \times n$, gdje je

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(A) = \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} a_{kl}, \quad 1 \leq j \leq n, \;\; 1 \leq i \leq m,$$

zbroj elemenata u vodećoj $i \times j$ podmatrici matrice A. Ako imamo zadanu permutacijsku matricu P tipa $n \times n$, tada zadnji stupac od $\sum(P)$, kao i zadnji redak od $\sum(P)$, sadrži cijele brojeve $1, 2, \ldots, n$, tim redom. Sljedećim teoremom iskazana je karakterizacija Bruhatovog uređaja za lakše prepoznavanje veze dviju permutacija u Bruhatovom uređaju.

[1]F. Georges René Bruhat bio je francuski matematičar koji se bavio algebarskim grupama.

Teorem 3.2.1 *Neka su σ i τ dvije permutacije skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ s odgovarajućim permutacijskim matricama P i Q (P permutacijska matrica koja odgovara permutaciji σ i Q permutacijska matrica koja odgovara permutaciji τ). Tada je $\sigma \preceq_B \tau$ ako i samo ako je $\sum(P) \geq \sum(Q)$, po elementima.*

Primjer 3.2.1 *Neka su $\sigma = (1, 3, 4, 2)$ i $\tau = (1, 2, 4, 3)$ permutacije skupa S_4. Njima odgovarajuće permutacijske matrice su, redom, P i Q,*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slijedi da su $\sum(P)$ i $\sum(Q)$ sljedeće matrice:

$$\sum(P) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \sum(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je $\sum(Q) \geq \sum(P)$ te slijedi da je $\tau \preceq_B \sigma$, odnosno τ prethodi σ u Bruhatovom uređaju.

U terminima permutacijskih matrica, ako su P i Q permutacijske matrice koje odgovaraju permutacijama σ i τ iz S_n, tada je $P \preceq_B Q$ ako se permutacijska matrica P može dobiti iz permutacijske matrice Q nizom zamjena 2×2 podmatrica $Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ s $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Već navedena karakterizacija za povezanost dvije permutacije u Bruhatovom uređaju može se primijeniti i za permutacijske matrice.

Teorem 3.2.2 *Neka su P i Q dvije odgovarajuće permutacijske matrice nekih dviju permutacija iz S_n. Tada $P \preceq_B Q$ ako i samo ako je $\sum(P) \geq \sum(Q)$, po elementima.*

3.3 Bruhatova matrična dekompozicija

Neka je A kvadratna regularna matrica reda n s elementima iz polja $\mathbb{C}$. Kako je A regularna matrica, primjenjivanjem elementarnih transformacija[2] nad retcima iz nje možemo dobiti gornje trokutastu matricu U reda n. Budući da množenje permutacijskom matricom slijeva odgovara permutiranju redaka matrice A, postoji permutacijska matrica R reda n takva da primjenom Gaussove eliminacije na RA i pivotiranjem duž glavne dijagonale od RA dobivamo matricu U. Dakle, matricu U možemo dobiti množenjem RA slijeva s odgovarajućom donje trokutastom matricom K tj. $KRA = U$. Sada je $A = PLU$, gdje je $L = K^{-1}$, donje trokutasta matrica (kao inverz donje trokutaste matrice) te je $P = R^{-1}$ permutacijska matrica (kao inverz permutacijske matrice). Time dolazimo do sljedećeg teorema.

Teorem 3.3.1 *Ako je A regularna kvadratna kompleksna matrica, tada postoje permutacijska matrica P, donje trokutasta matrica L i gornje trokutasta matrica U takve da je $A = PLU$.*

Primjer 3.3.1 *Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ te $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Matrica A je regularna. Množenjem s lijeva matricom R te primjenom elementarnih retčanih operacija na dobivenu matricu, dobijemo matricu $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Iz $KRA = U$ dobijemo matricu $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Sada imamo*

$$A = PLU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

gdje je $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Napomena 3.3.1 *Budući da odabir pivotnih elemenata nije jedinstveno određen, matrica P, a time ni matrice L i U nisu jedinstvene.*

---

[2] Elementarne operacije koje koristimo su sljedeće:

- zamjena dvaju redaka (stupaca);
- množenje retka (stupca) nenul skalarom;
- množenje retka (stupca) skalarom te dodavanje drugom retku (stupcu).

Elementarne transformacije možemo primijeniti direktno na zadanu matricu ili primijeniti na jediničnu matricu te množiti A slijeva (zdesna) dobivenom matricom.

Postoji još jedna dekompozicija regularne matrice A s matricama P, L i U s istim svojstvima samo poredanih drugim redoslijedom prilikom množenja. Do sada smo imali $A = PLU$, a možemo imati $A = LPU$. Ovdje imamo donje trokutastu matricu L, nakon koje slijedi permutacijska matrica P te nakon nje gornje trokutasta matrica U. Umjesto gornje trokutaste matrice U možemo imati još jednu donje trokutastu matricu koja može biti jednaka L, ali i ne mora. Pišemo $A = LPL$. Bilo koja od dekompozicija $A = LPU$ ili $A = LPL$, zove se *Bruhatova matrična dekompozicija.*

Teorem 3.3.2 *Neka je A regularna kvadratna matrica s elementima iz polja $\mathbb{C}$. Tada postoje sljedeće matrice:*

- *jedinstvena permutacijska matrica P*
- *donje trokutasta matrica L*
- *gornje trokutasta matrica U*

takve da je $A = LPU$. Slično, postoje sljedeće matrice:

- *jedinstvena permutacijska matrica P*
- *dvije donje trokutaste matrice L (koje ne moraju biti jednake)*

takve da je $A = LPL$.

Dokaz:
U prvom dijelu dokaza pokazat ćemo da, koristeći elementarne operacije nad retcima, kada množimo slijeva s donje trokutastom matricom, te koristeći elementarne operacije nad stupcima, kada množimo zdesna s gornje trokutastom matricom, matricu A možemo svesti na permutacijsku matricu. Time dobivamo $A = LPU$. U drugom dijelu pokazujemo jedinstvenost permutacijske matrice P. Za prvi dio imamo četiri koraka:

1. Promatramo pivotni element u prvom retku matrice A (prvi element u retku koji je različit od nule). Nakon množenja zdesna gornje trokutastom matricom, tj. primjenom odgovarajućih elementarnih operacija nad stupcima, možemo dobiti matricu u kojoj je pivotni element jednak 1, dok su ostali elementi u tom retku jednaki 0.

2. Slično, množenjem donje trokutastom matricom slijeva, odnosno primjenom odgovarajućih elementarnih operacija nad retcima možemo dobiti da su svi elementi ispod pivotnog elementa jednaki nuli.

3. Promatramo pivotni element u drugom retku te ponovimo prva dva koraka i tako do n-tog retka.

4. Na kraju, dobit ćemo permutacijsku matricu P takvu da je $P = L_1AU_1$, gdje je donje trokutasta matrica L_1 produkt svih korištenih donje trokutastih matrica, a gornje trokutasta matrica U_1 je produkt svih korištenih gornje trokutastih matrica.

5. Iz $P = L_1AU_1$ dobivamo da je $A = LPU$, gdje je $L = L_1^{-1}$ i $U = U_1^{-1}$.

Sada pokazujemo jedinstvenost permutacijske matrice P, tj. da je ona jedinstveno određena matricom A. Pretpostavimo da permutacijska matrica P odgovara permutaciji σ te označimo s $r_i(A, j) = A[i|1, 2, \dots, j]$ početni dio i-tog retka od stupca 1 do stupca j, gdje $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Neka je $\rho(A : i) = min\{j|r_i(A, j)$ nije u prostoru razapetom s $\{r_1(A, j), \dots, r_{i-1}(A, j)\}\}$, za $i = 1, 2, \dots, n$. Kako je P permutacijska matrica, znači da u svakom retku ima točno jednu jedinicu. Ta jedinica nalazi se u i-tom retku i $\sigma(i)$-tom stupcu pa slijedi da je

$$\rho(P : i) = \sigma(i).$$

Nadalje, vrijednost $\rho(A : i)$ ostaje sačuvana množenjem slijeva regularnom donje trokutastom matricom L i množenjem zdesna regularnom gornje trokutastom matricom U tj. vrijedi:

$$\rho(A : i) = \rho(LAU : i).$$

Slijedi da je P jedinstveno određena matricom A. Tvrdnja za dekompoziciju $A = LPL$ slijedi iz prvog dijela teorema, budući da za regularnu matricu AQ_n postoji dekompozicija:

$$AQ_n = LPU = LPI_nU = LP(Q_nQ_n)U = L(PQ_n)(Q_nU),$$

iz čega slijedi da je $A = L(PQ_n)(Q_nUQ_n) = LP_1L_1$, gdje su L i L_1 ne nužno različite donje trokutaste matrice. ■

3.4 Klasa nenegativnih cjelobrojnih matrica

Neka su $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ i $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ vektori s nenegativnim cjelobrojnim elementima. S $N(R, S)$ označena je klasa $m \times n$ nenegativnih cjelobrojnih matrica takvih da je suma prvog retka jednaka r_1, suma drugog retka jednaka r_2, ..., suma m-tog retka jednaka r_m te suma prvog stupca jednaka s_1, suma drugog stupca jednaka s_2, ..., suma n-tog stupca jednaka s_n. Skup svih $n \times n$ permutacijskih matrica, P_n, je poseban slučaj ovakve klase za $m = n$ i $R = S = (1, 1, \dots, 1)$.

Primjer 3.4.1 *Neka je* $R = (3, 5, 4)$ *i* $S = (2, 4, 3, 3)$. *Tražimo* 3×4 *matricu* A *iz klase* $N(R, S)$*:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{(3\times 4)}.$$

Matrica A*, koja odgovara vektorima* R *i* S *, dobiva se na sljedeći način:*

- *Prvo biramo poziciju* a_{11}. *Ako uzmemo da je na toj poziciji 2, tada odmah vidimo da na poziciji* a_{21} *i* a_{31} *moraju biti nule jer suma prvog stupca mora biti jednaka* $s_1 = 2$.
- *Zatim biramo poziciju* a_{12}. *Kako suma prvog retka mora biti jednaka 3, na poziciju* a_{21} *moramo staviti 1, a na ostale pozicije u prvom retku stavimo nule.*
- *Nadalje, ako na poziciju* a_{22} *stavimo 3, u drugom stupcu, na ostale pozicije stavimo nulu, dok na poziciju* a_{23} *stavimo broj 2 kako bi suma u drugom retku bila 5.*
- *Na kraju, u zadnjem retku prilagodimo pozicije tako da suma svih brojeva u tom retku bude 4, i suma predzadnjeg i zadnjeg stupca bude 3.*

Na taj način dobivena je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Sljedeći teorem daje nužan uvjet za $N(R, S) \neq \emptyset$.

Teorem 3.4.1 *Klasa* $N(R, S)$ *je neprazna ako i samo ako je*

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n. \tag{3.1}$$

Dokaz:
$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da vrijedi: $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$. Želimo pokazati da je tada $N(R, S) \neq \emptyset$. Sljedećim postupkom opisan je algoritam kojim se dobiva matrica $A = [a_{ij}]$ iz klase $N(R, S)$.

1. Izaberemo neku poziciju (i, j) i označimo $a_{ij} = min\{r_i, s_j\}$. U tom slučaju, ako je $min\{r_i, s_j\} = r_i$, svi ostali elementi u retku i su jednaki 0, a ako je $min\{r_i, s_j\} = s_j$, tada su svi ostali elementi u stupcu j jednaki 0.

2. Nadalje, smanjimo r_i i s_j za a_{ij}, odnosno jedan od njih smanjimo do nule, a odgovarajući redak ili stupac brišemo. Ovaj korak radimo kako bi dobili nove nenegativne cjelobrojne vektore R' i S' koji zadovoljavaju uvjet $r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_p = s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_q$.

3. Postupak nastavljamo rekurzivno.

Dobili smo matricu $A \in N(R, S)$ pa slijedi da je klasa $N(R, S)$ neprazna. $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $N(R, S) \neq \emptyset$ i $A \in N(R, S)$. Takva matrica A iz klase $N(R, S)$ ima sume redaka $r_1, r_2, \ldots, r_m$ redom i sume stupaca $s_1, s_2, \ldots, s_n$ redom. Ako sumiramo sve sume redaka dobit ćemo sumu svih elemenata matrice A. Analogno, ako sumiramo sve sume stupaca dobit ćemo sumu svih elemenata matrice A. Slijedi: $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$. ■

Bruhatov uređaj može se generalizirati za svaku klasu $N(R, S)$. Neka su $A_1, A_2 \in N(R, S)$. Tada pišemo $A_1 \preceq_B A_2$ ako i samo ako se A_1 može dobiti iz A_2 nizom poteza oblika:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+1 & b-1 \\ c-1 & d+1 \end{bmatrix},$$

tj. dodavanjem $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ nekim 2×2 podmatricama od A_1, gdje su $b, c \geq 1$. U prijašnjem primjeru opisan je postupak za nalaženje matrice u klasi $N(R, S)$. Opisanim postupkom kreće se iz pozicije (1,1), odnosno uvijek biramo poziciju u sjeverozapadnom kutu i time dobivamo jedinstveni minimalni element Bruhatovog uređaja na $N(R, S)$. Analogno, ako uvijek biramo poziciju u sjeveroistočnom kutu, odnosno krećemo od pozicije (1,n), tada dobivamo jedinstveni maksimalni element u Bruhatovom uređaju na $N(R, S)$. U sljedećem potpoglavlju opisana je još jedna veza između permutacija i cjelobrojnih matrica.

3.5 Involucije i simetrične cjelobrojne matrice

Definicija 3.5.1 *Permutacija σ iz S_n je **involucija** ako je $\sigma^2 = \iota_n$, gdje ι_n označava identično preslikavanje.*

Napomena 3.5.1 *Involucija je permutacija koja je jednaka svom inverzu.*

Napomena 3.5.2 *U terminima permutacijskih matrica, neka je P permutacijska matrica koja odgovara permutaciji σ. Tada je $P^2 = I_n$. Permutacijska matrica P odgovara permutaciji koja je involucija ako i samo ako je P simetrična matrica.*

Primjer 3.5.1 *Neka je $\sigma = (3,6,1,4,5,2)$ permutacija iz S_6. Njoj odgovarajuća permutacijska matrica je*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica P je simetrična pa je permutacija σ involucija. U permutaciji σ, uspon se događa na pozicijama 1, 3 i 4, a silazak na pozicijama 2 i 5.

Neka je $\mathcal{I}(n,k)$, $k = 1,2,\ldots,n-1$, skup involucija iz S_n koje imaju točno k uspona. Nadalje, neka je $\mathcal{T}(n,k)$ skup svih $k \times k$ simetričnih cjelobrojnih matrica s nenegativnim elementima, koje ne sadrže nul-redak niti nul-stupac te za koje je suma svih elemenata matrice jednaka n.

Primjer 3.5.2 *Sljedeća matrica je u skupu $\mathcal{T}(26,4)$:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kardinalni broj skupa $\mathcal{I}(n,k)$ jednak je

$$I(n,k) = |\mathcal{I}(n,k)| = \sum_{k=1}^{n-1} I(n,k)t^k, 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Neka je $T(n,k) = |\mathcal{T}(n,k)|$. Sljedeći teorem daje vezu između skupova $\mathcal{I}(n,k)$ i $\mathcal{T}(n,k)$ s pripadnim kardinalnim brojevima $I(n,k)$ i $T(n,k)$.

Teorem 3.5.1 *Vrijedi:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} I(n,k)t^{k+1}(1+t)^{n-1-k} = \sum_{i=1}^{n} T(n,i)t^i.$$

Napomena 3.5.3 *Prethodna jednakost ekvivalentna je sljedećoj jednakosti:*

$$T(n,i) = \sum_{k=0}^{i-1} I(n,k)\binom{n-1-k}{i-1-k}, i = 1,2,\ldots,n.$$

3.6 Matrice alternirajućih predznaka

Definicija 3.6.1 ***Matrica alternirajućih predznaka (ASM)***[3] *je kvadratna matrica čiji su elementi brojevi 0, 1 i -1 tako da je zbroj svakog retka i svakog stupca jednak 1, a elementi različiti od 0 izmjenjuju se u predznaku u svakom retku i stupcu.*

Napomena 3.6.1 *Permutacijske matrice su najjednostavniji tip matrica alternirajućih predznaka. To su matrice alternirajućih predznaka koje ne sadrže elemente -1 te u svakom retku i svakom stupcu sadrže točno jednu jedinicu.*

Neka je A_n skup svih matrica alternirajućih predznaka reda n. Broj svih matrica alternirajućih predznaka reda n, $|A_n|$, računa se po sljedećoj formuli:

$$|A_n| = \frac{1!4!7!\cdots(3n-2)!}{n!(n+1)!(n+2)!\cdots(2n-1)!}. \tag{3.2}$$

U A_2 nalaze se dvije permutacijske matrice, dok u A_3 ima 7 matrica od kojih samo jedna nije permutacijska matrica.

Primjer 3.6.1 *Jedina matrica iz A_3 koja nije permutacijska je*

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kod zapisa matrice alternirajućih predznaka, za matricu D_3 može se koristiti sljedeća notacija:

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 \\ + & - & + \\ 0 & + & 0 \end{bmatrix}.$$

[3] Eng. Alternating sing matrix

Poglavlje 4

Zaključak

Permutacijske matrice su kvadratne matrice reda n takve da svaki redak i stupac sadrži jedan element 1, dok su preostali elementi nule. Koriste se za rješavanje sustava linearnih jednadžbi i za LU faktorizaciju kod Gaussove eliminacije kada želimo zamijeniti pivotni element, ako je jednak nuli, nenul elementom. U radu je opisano kako se svakoj permutaciji skupa može jednoznačno pridružiti permutacijska matrica te koju ulogu permutacijska matrica ima u Bruhatovoj matričnoj dekompoziciji regularne matrice. Opisana je veza permutacijskih matrica koje odgovaraju involucijama, s određenom klasom nenegativnih cjelobrojnih matrica. Kao generalizacija permutacijskih matrica spomenute su matrice alternirajućih predznaka.

Literatura

[1] R. A. Brualdi, A. Carmona, P. van den Driessche, S. Kirkland, D. Stevanović, Combinatorial Matrix Theory, Springer, 2018.

[2] R.A Brualdi, *Permutation (Matrices) and Beyond*, ISTE, 2021.