Kompleksni brojevi u nastavi matematike

Vignjević, Anja

Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku

Diplomski studij Matematika – smjer nastavnički

Anja Vignjević

Kompleksni brojevi u nastavi matematike

Diplomski rad

Rijeka, 22.8.2023.

Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku

Diplomski studij Matematika – smjer nastavnički

Anja Vignjević

Kompleksni brojevi u nastavi matematike

Mentor: prof. dr. sc. Sanja Rukavina

Kolegij: Metodika nastave matematike

Diplomski rad

Rijeka, 22.8.2023.

Sažetak

Potreba za proširenjem skupa realnih brojeva skupom kompleksnih brojeva proizlazi već iz same činjenice da nema svaka kvadratna jednadžba rješenje u skupu realnih brojeva. Međutim, povijest kompleksnih brojeva ne vežemo za rješavanje kvadratnih jednadžbi te nalaženje rješenja svake kvadratne jednadžbe. U ovom ćemo diplomskom radu vidjeti ukratko povijest nastanka kompleksnih brojeva. Na skupu svih uređenih parova realnih brojeva definiraju se operacije zbrajanja i množenja. Tako dobiveni skup nazivamo skup kompleksnih brojeva koji zajedno s operacijama zbrajanja i množenja ima strukturu polja, što ćemo dokazati u nastavku ovog diplomskog rada. Uz navedeno, vidjet ćemo na koji način pokazujemo da je skup realnih brojeva podskup skupa kompleksnih brojeva. Nakon toga, prelazimo na kompleksne brojeve u nastavi matematike.

Primjena odluke o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj dovela je do promjene u redoslijedu i načinu obrade pojedinih sadržaja, pa tako i sadržaja koji se odnose na kompleksne brojeve. U ovom će diplomskom radu biti navedeni odgojno-obrazovni ishodi propisani Nacionalnim kurikulumom za predmet Matematika, vezani za kompleksne brojeve, s naglaskom na spomenute promjene. Bit će istražen način uvođenja i obrade kompleksnih brojeva u dva najčešće korištena udžbenika s popisa odobrenih udžbenika za 2022./2023. školsku godinu, uz komentar na analizirane udžbenike. Dodatno, bit će uspoređena ta dva udžbenika s udžbenicima koji su bili aktualni prije uvođenja Nacionalnog kurikuluma za predmet Matematika. U Nacionalnom kurikulumu za predmet Matematika, vezano za kompleksne brojeve, spominje se i preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda, a ona je vezana za korištenje programa dinamične geometrije, tj. primjerenih dostupnih računalnih programa i alata. U skladu s time, osmišljena je i u radu prikazana aktivnost u alatu GeoGebra kojom se potiče ostvarivanje nekih odgojno-obrazovnih ishoda vezanih za kompleksne brojeve. Uz navedeno, u radu će se spomenuti i specifičnosti nastave matematike u ovom području – formalizmi koji se javljaju, neki zadaci s natjecanja te sadržaji uključeni u maturu. Na kraju rada prikazat će se rezultati dviju anketa u kojima su nastavnici i učenici srednjih škola odgovarali na pitanja o nastavi matematike iz područja kompleksnih brojeva.

Ključne riječi

kompleksni brojevi, nastava matematike, Nacionalni kurikulum, odobreni udžbenici

Sadržaj

1 Uvod 1

1.1 Povijest nastanka kompleksnih brojeva 1

1.2 Skup i polje kompleksnih brojeva 4

1.3 Skup $\mathbb{R}$ kao podskup od $\mathbb{C}$ 7

2 Kompleksni brojevi u Nacionalnom kurikulumu 9

3 Kompleksni brojevi u odobrenim udžbenicima 12

4 Formalizmi u nastavi matematike pri obradi kompleksnih brojeva 24

5 Aktivnost za obradu kompleksne ravnine u GeoGebri 25

6 Kompleksni brojevi na državnoj maturi 32

7 Kompleksni brojevi na natjecanjima iz matematike 33

8 Anketa 37

9 Zaključak 42

1 Uvod

Svaka afina jednadžba $ax + b = 0$, gdje su a i b realni brojevi, ima rješenje u skupu realnih brojeva. Međutim, to nije slučaj kod kvadratnih jednadžbi, odnosno jednadžbi oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su a, b i c realni brojevi. Primjerice, kvadratna jednadžba $25x^2 + 7 = 0$, čija je diskriminatna negativna i iznosi $D = -700$, nema rješenja u skupu realnih brojeva. Tako je, na primjer, problem rješavanja kvadratnih jednadžbi koje nemaju rješenja u skupu racionalnih brojeva, poput jednadžbe $x^2 = 7$, riješen uvođenjem skupa iracionalnih brojeva. Zbog nemogućnosti rješavanja svake kvadratne jednadžbe, ukazuje se potreba za proširenjem skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ skupom kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Naime, svaka algebarska jednadžba oblika[1]

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

gdje su $a_n \neq 0, a_{n-1}, \dots , a_0 \in \mathbb{C}$, ima bar jedno rješenje u skupu kompleksnih brojeva.

U nastavku ovog uvodnog poglavlja vidjet ćemo što je prethodilo otkriću kompleksnih brojeva te ćemo uvesti skup kompleksnih brojeva.

1.1 Povijest nastanka kompleksnih brojeva

Vidjeli smo da nema svaka kvadratna jednadžba rješenja u skupu realnih brojeva. Iako je možda za pretpostaviti da će se otkriće kompleksnih brojeva vezati za kvadratne jednadžbe i pronalaženje rješenja bilo kojih kvadratnih jednadžbi, to nije slučaj. Postavljaju nam se razna pitanja: „*Kada su kompleksni brojevi nastali?*“, „*Tko ih je otkrio i što je tome prethodilo?*“, „*Je li za njihovo otkriće zaslužan pojedinac ili je to uspjeh skupine matematičara?*“. U ovome potpoglavlju dat ćemo kratke odgovore na postavljena pitanja.

Smatra se da prve tragove otkrića kompleksnih brojeva pronalazimo već u prvom stoljeću i vežemo ih za Herona Aleksandrijskog. On je dao formulu[2] za obujam krnje kvadratne piramide te formulu[3] za duljinu njezine visine. Formula za duljinu visine krnje kvadratne piramide bila je primjenjiva za neke duljine bridova donje i gornje baze te duljine bočnog brida, a Heron Aleksandrijski pomoću nje računa duljinu visine krnje kvadratne piramide u slučaju kada su duljine bridova baza $a_1 = 28$ i $a_2 = 4$ te duljina bočnog brida

---

[1] Ovo je poznati: „Osnovni teorem algebre“.

[2] Formula za obujam krnje kvadratne piramide s bridovima baza duljine a_1 i a_2 te visinom duljine h je $V = \frac{1}{3}h({a_1}^2 + a_1 a_2 + {a_2}^2)$.

[3] Formula za duljinu visine krnje piramide s bridovima baza duljine a_1 i a_2 te bočnim bridom duljine c je $h = \sqrt{c^2 - 2(\frac{a-b}{2})^2}$.

$c = 15$. Međutim, to je zahtijevalo izračunavanje kvadratnog korijena od $81 - 144$, a negativni brojevi nisu još bili otkriveni u helenističkom razdoblju. Stoga, Heron računa korijen iz $144 - 81$, odnosno 63, ignorirajući negativni predznak prvobitnog radikanda. On je bio prvi matematičar koji se suočio s potrebom određivanja drugog korijena iz negativnog broja. Međutim, trebalo je izuzetno dugo vremena nakon toga da se otkriju kompleksni brojevi koji su nam danas poznati, a punom razvoju kompleksnih brojeva doprinijeli su mnogi matematičari. Izdvojit ćemo neke od njih.

Sve je krenulo s pokušajima rješavanja, odnosno nalaženja rješenja, normiranih kubnih jednadžbi bez kvadratnog člana, tzv. reduciranih kubnih jednadžbi. Drugim riječima, normirana kubna jednadžba oblika $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ se supstitucijom $x = y - \frac{1}{3a}$ modificira u normirani oblik kubne jednadžbe bez kvadratnog člana. Time se dobivaju kubne jednadžbe oblika

1) $x^3 + px = q$
2) $x^3 = px + q$
3) $x^3 + q = px,$

pri čemu su p i q pozitivni realni brojevi, s obzirom da u tome razdoblju negativni brojevi nisu bili općeprihvaćeni.

Rješavanjem posebnih oblika kubnih jednadžbi bavili su se renesansni matematičari 16. stoljeća: Scipione del Ferro, Niccolo Fontana Tartaglia te Girolamo Cardano. Poznati su njihovi „matematički dvoboji“ koji su posljedica pokušaja otkrivanja metoda rješavanja posebnih oblika kubnih jednadžbi te nalaženja formula za rješenje istih. Određenim supstitucijama i metodama izvedena je formula za rješenja kubnih jednadžbi. U jednom svom djelu naziva „Ars Magna“, Girolamo Cardano je dao rješenje jednadžbe $x^3 = 15x + 4$. Iako je uvidio provjerom[4] da je jedno rješenje $x = 4$, primijenio je formulu za rješenje kubne jednadžbe s ciljem nalaženja preostalih rješenja. Na temelju te formule dobiveno je da je jedno rješenje $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Primijetimo da u tom izrazu postoji radikand koji je negativan broj, odnosno -121 te je dobiven izraz koji nije bio poznat u to doba. Sam Cardano nije znao dokazati da je $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$.

Spomenimo talijanskog matematičara pod imenom Rafael Bombelli koji je započeo proces uvođenja kompleksnih brojeva. Tridesetak godina nakon objavljivanja Cardanova djela, Bombelli preuzima zadatak analizirati jedno dobiveno rješenje $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ kubne jednadžbe $x^3 = 15x + 4$ te pokazuje da je ono zaista jednako 4. Bombelli stavlja da je $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$ te $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$. Sređivanjem, dobio je da je $a = 2$ i $b = 1$. Uočimo da je zaista

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$$

[4] Vrijedi $4^3 = 15 \cdot 4 + 4$ odnosno $64 = 64$, dakle $x = 4$ je jedno rješenje kubne jednadžbe $x^3 = 15x + 4$.

rješenje kubne jednadžbe $x^3 = 15x + 4$, što je i sam Girolamo Cardano znao, ali nije znao dokazati zašto vrijedi ta jednakost.

Bombelli je dao veliki značaj onome što su njegovi prethodnici smatrali „besmislenim". Da bi formalizirao svoje otkriće, Bombelli je uveo računske operacije s kompleksnim brojevima te primjere koji uključuju zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva. Neka njegova pravila i primjeri, s oznakama koje se danas koriste, su:

$$(-i) \cdot (-i) = -1, (+i) \cdot (+i) = -1, (+i) \cdot (-i) = +1,$$

$$8i + (-5i) = 3i,$$

$$\left(\sqrt[3]{4 + \sqrt{2i}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{8i}}\right) = \sqrt[3]{8 + 11\sqrt{2i}}.$$

Izdvojimo još neke poznate matematičare koji su značajni za povijest kompleksnih brojeva. Francuski matematičar René Descartes 1637. godine uveo je termin „imaginaran broj". Krajem 18. stoljeća švicarski matematičar Leonhard Euler uvodi oznaku $\sqrt{-1} = i.$ Eulera vežemo i za uvođenje eksponencijalnog oblika kompleksnog broja $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je r udaljenost kompleksnog broja od ishodišta, a kut φ argument kompleksnog broja.

Ne smijemo zaboraviti spomenuti poznatog francuskog matematičara pod imenom Abraham de Moivre, koji je zaslužan za formulu za potenciranje kompleksnih brojeva. Tom formulom, koju danas nazivamo De Moivreova formula, potencija kompleksnog broja z napisanog u trigonometrijskom obliku je $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

S obzirom da još nije bilo riječi o geometrijskoj interpretaciji kompleksnih brojeva, spomenimo koje matematičare vežemo za navedeno. Otkriće geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva javlja se na prijelazu iz 18. u 19. stoljeće te je izazvalo bolje prihvaćanje kompleksnih brojeva. Caspar Wessel prvi je opisao kompleksnu ravninu iako je to tada bilo nezapaženo u široj javnosti. Dok još javnosti nije bio poznat njegov opis kompleksne ravnine, Carl Friedrich Gauß[5] i Jean-Robert Argand su nezavisno jedan o drugome opisali kompleksnu ravninu koju stoga i nazivamo „Gaussova ravnina" ili „Argandova ravnina".

Napomenimo da ima zaista još dosta matematičara koje vežemo za kompleksne brojeva, a nismo ih spomenuli. Za kraj ovog potpoglavlja, istaknimo još irskog matematičara Williama Rowana Hamiltona koji uvodi definiciju kompleksnih brojeva, o čemu ćemo detaljnije u sljedećem potpoglavlju *Skup i polje kompleksnih brojeva.*

[5] Carl Friedrich Gauß je uveo termin „kompleksni".

1.2 Skup i polje kompleksnih brojeva

Imaginarna jedinica se u nastavi matematike definira kao broj čiji je kvadrat -1. Međutim, uočimo da vrijedi $(-i)^2 = -1$. Može se postaviti pitanje što bi se dogodilo da smo uzeli neki drugi broj $j = -i$ za imaginarnu jedinicu. Takve je dileme riješio 1833. godine irski matematičar Wiliam Rowan Hamilton definiravši kompleksne brojeve aksiomatski kao skup uređenih parova realnih brojeva. U toj se definiciji imaginarna jedinica pojavljuje samo kao pomoć u lakšem zapisivanju broja i lakšem računanju s njima, ali ne i u definiciji kompleksnog broja.

Na skupu svih uređenih parova realnih brojeva $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiramo operacije zbrajanja $\oplus$ i množenja $\odot$:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d), \qquad \forall\, (a,b),(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(a,b) \odot (c,d) = (ac-bd, ad+bc), \quad \forall\, (a,b),(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Skup $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zajedno s definiranim operacija zbrajanja i množenja zovemo skup kompleksnih brojeva i označavamo ga sa $\mathbb{C}$, a njegove elemente nazivamo kompleksnim brojevima.

Poznato je da se realni brojevi prikazuju na brojevnom pravcu, međutim kod kompleksnih brojeva to nije slučaj. Upravo zbog načina na koji smo definirali kompleksne brojeve te s obzirom da se $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ može identificirati s ravninom, kompleksne brojeve možemo predstavljati točkama ravnine. Takvu ravninu zovemo kompleksna ili Gaussova ravnina. Razlog zašto kompleksnu ravninu nazivamo i Gaussova ravnina je povijesni, a mogli smo to vidjeti u prethodnom potpoglavlju *Povijest nastanka kompleksnih brojeva.*

Skup kompleksnih brojeva zajedno s definiranim operacijama zbrajanja i množenja zadovoljava sva potrebna svojstva kojima skup $\mathbb{C}$ ima strukturu polja. U nastavku ovog potpoglavlja ćemo to i dokazati.

Napomenimo da ćemo u nastavku umjesto oznake $\oplus$ koristiti oznaku $+$ i umjesto oznake $\odot$ koristiti oznaku $\cdot$.

Teorem 1. Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ s obzirom na definirano zbrajanje i množenje je polje, odnosno

1) $(\mathbb{C}, +)$ je abelova grupa,
2) $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \ \cdot)$ je abelova grupa,
3) $(a,b) \cdot [(c,d) + (e,f)] = (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f)$, za $(a,b),(c,d)$ i $(e,f) \in \mathbb{C}$ (vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbb{C}$).

Dokaz.

Pokažimo prvo da je $(\mathbb{C}, +)$ abelova grupa.

Za početak, svojstva asocijativnosti i komutativnosti zbrajanja u $\mathbb{C}$ slijede iz asocijativnosti i komutativnosti zbrajanja u $\mathbb{R}$ i definicije zbrajanja u skupu kompleksnih brojeva.

Dakle, iz prethodno navedenog slijedi

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

a s obzirom da je zbrajanje u $\mathbb{R}$ komutativno imamo

$$(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b),$$

odnosno dobivamo da je $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$, za svaka dva kompleksna broja (a,b) i (c,d). Dakle, zbrajanje u $\mathbb{C}$ je komutativno.

Da pokažemo da je zbrajanje u $\mathbb{C}$ asocijativno, uzmimo proizvoljna tri kompleksna broja: $(a,b),(c,d)$ i (e,f).

Tada imamo

$$\begin{aligned}(a,b)+\big((c,d)+(e,f)\big)&=(a,b)+(c+e,d+f)=\\&=\big(a+(c+e),b+(d+f)\big)\end{aligned}$$

te s obzirom da je zbrajanje u $\mathbb{R}$ asocijativno imamo

$$\begin{aligned}\big(a+(c+e),b+(d+f)\big)&=\big((a+c)+e,(b+d)+f\big)=\\&=(a+c,b+d)+(e,f)=\\&=\big((a,b)+(c,d)\big)+(e,f),\end{aligned}$$

odnosno dobivamo $(a,b)+\big((c,d)+(e,f)\big)=\big((a,b)+(c,d)\big)+(e,f)$. Dakle, zbrajanje u $\mathbb{C}$ je asocijativno.

Postojanje neutrala za zbrajanje i aditivnog inverza slijedi iz aksioma za polje realnih brojeva $\mathbb{R}$. Preciznije, neutralni element za zbrajanje u $\mathbb{C}$ je $(0,0)$, jer vrijedi $(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)$, odnosno $(a,b)+(0,0)=(a,b)$, za svaki kompleksni broj (a,b). Također, iz svojstva komutativnosti zbrajanja u $\mathbb{C}$ slijedi da je $(0,0)+(a,b)=(a,b)$, za svaki kompleksni broj (a,b). Dakle, neutralni element za zbrajanje u $\mathbb{C}$ je $(0,0)$.

S obzirom da je $(a,b)+(-a,-b)=(a-a,b-b)=(0,0)$ te $(-a,-b)+(a,b)=(-a+a,-b+b)=(0,0)$, za svaki kompleksni broj (a,b), zaključujemo da je $(-a,-b)$ aditivni inverz od (a,b).

Time smo pokazali da je $(\mathbb{C},+)$ abelova grupa.

Nadalje, trebamo pokazati da je $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\ \cdot)$ abelova grupa. Iz asocijativnosti i komutativnosti zbrajanja i množenja u $\mathbb{R}$ te distributivnosti množenja prema zbrajanju u $\mathbb{R}$ slijedi da je množenje u $\mathbb{C}$ komutativno i asocijativno.

Dakle, iz prethodno rečenog slijedi

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bd) = (ca - db, cb + da) = (c,d)\cdot(a,b),$$

što vrijedi za svaka dva kompleksna broja (a,b) i (c,d). Time smo pokazali da je množenje u $\mathbb{C}$ komutativno.

Pokažimo sada da je množenje u $\mathbb{C}$ asocijativno.

Neka su $(a,b), (c,d)$ i (e,f) proizvoljni kompleksni brojevi.

Imamo

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot\big((c,d)\cdot(e,f)\big) &= (a,b)\cdot(ce - df, cf + de) = \\
&= \big(a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)\big) = \\
&= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) = \\
&= \big((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ad + bc)e + (ac - bd)f\big) = \\
&= (ac - bd, ad + bc)\cdot(e,f) = \\
&= \big((a,b)\cdot(c,d)\big)\cdot(e,f),
\end{aligned}$$

čime je pokazano da je množenje u $\mathbb{C}$ asocijativno.

Nadalje, $(1,0)$ je neutralni element za množenje u $\mathbb{C}$ jer za proizvoljni kompleksni broj (a,b) vrijedi

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0, a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b),$$

a kako smo pokazali da je množenje u $\mathbb{C}$ komutativno slijedi da je $(1,0)\cdot(a,b) = (a,b)$. Time zaključujemo da je $(1,0)$ neutralni element za množenje u $\mathbb{C}$.

Preostaje nam još utvrditi koji je multiplikativni inverz u $\mathbb{C}$.

Za svaki kompleksni broj (a,b) takav da je $(a,b) \neq (0,0)$, odnosno $a^2 + b^2 \neq 0$, definirajmo[6]

$$(a,b)^* := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Tada imamo

$$(a,b)\cdot(a,b)^* = (a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a\cdot a - b\cdot(-b)}{a^2 + b^2}, \frac{a\cdot(-b) + b\cdot a}{a^2 + b^2}\right) = (1,0)$$

[6] Uočimo da je zbog uvjeta $(a,b) \neq (0,0)$, odnosno $a^2 + b^2 \neq 0$, izraz za $(a,b)^*$ dobro definiran.

te bismo analogno dobili da je $(a,b)^* \cdot (a,b) = (1,0)$. Stoga je multiplikativni inverz od kompleksnog broja (a,b) upravo $(a,b)^*$. Dakle, $(a,b)^* = (a,b)^{-1}$.

Dakle, $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\ \cdot)$ je abelova grupa.

Također, imamo

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)] = (a,b)\cdot(c+e,d+f) =$$

$$= \big(a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e)\big) =$$

$$= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) =$$

$$= (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) =$$

$$= (a,b)\cdot(c,d) + (a,b)\cdot(e,f).$$

Odnosno, vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbb{C}$.

Time smo pokazali da je skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ polje s obzirom na zbrajanje i množenje koje smo definirali.

■

1.3 Skup $\mathbb{R}$ kao podskup od $\mathbb{C}$

Označimo s $\mathbb{R}'$ skup svih kompleksnih brojeva oblika $(x,0)$, odnosno

$$\mathbb{R}' = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Uzmimo proizvoljna dva elementa iz $\mathbb{R}'$, $(a,0)$ i $(c,0)$. Zbrojimo li ih ili pomnožimo, s obzirom na definirane operacije zbrajanja i množenja u $\mathbb{C}$, dobit ćemo elemente skupa $\mathbb{R}'$. Drugim riječima, kako je $(a,0)+(c,0)=(a+c,0)\in\mathbb{R}'$ i $(a,0)\cdot(c,0)=(ac,0)\in\mathbb{R}'$, slijedi da je skup $\mathbb{R}'$ zatvoren u odnosu na operacije zbrajanja i množenja u $\mathbb{C}$. Može se pokazati da je $\mathbb{R}'$ polje obzirom na navedene operacije.

Definirajmo na $\mathbb{R}'$ sljedeći uređaj

$$(a,0) \le (c,0) \Leftrightarrow a \le c,$$

tada je $\mathbb{R}'$, s tim definiranim uređajem, potpuno uređeno polje.

Dakle, skup $\mathbb{R}'$ je potpuno uređeno polje pa ga poistovjećujemo s $\mathbb{R}$ koji je također potpuno uređeno polje. Identificiramo realan broj a s kompleksnim brojem $(a,0)$ i pišemo $(a,0)=a$. Tada je $(0,0)=0$ i $(1,0)=1$. Time se $\mathbb{R}$ ulaže u $\mathbb{C}$, tj. postaje pravi podskup od $\mathbb{C}$.

Objasnimo preciznije prethodno rečeno. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ sa $f(a) = (a, 0)$. To preslikavanje je izomorfizam polja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}'$.

Dokažimo da je prethodno definirana funkcija f zaista izomorfizam polja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}'$. Provjerimo prvo je li zadano preslikavanje homomorfizam polja, odnosno vrijedi li[7]

1. $f(a +_{\mathbb{R}} b) = f(a) +_{\mathbb{R}'} f(b), \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. $f(a \cdot_{\mathbb{R}} b) = f(a) \cdot_{\mathbb{R}'} f(b), \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Neka su a i b proizvoljni realni brojevi. Imamo

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b),$$

$$f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a \cdot b - 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b),$$

što je trebalo pokazati.

Još treba provjeriti da je zadano preslikavanje bijekcija.

Neka je $f(a) = f(b)$. Tada je $(a, 0) = (b, 0)$. Odnosno, iz jednakosti uređenih parova, dobivamo da je $a = b$. Kako iz jednakosti slika, slijedi jednakost originala zaključujemo da je funkcija f injekcija. S obzirom da je slika funkcije f jednaka kodomeni $\mathbb{R}'$, funkcija f je surjekcija. Zaključujemo da je funkcija f bijekcija. Time smo pokazali da je funkcija f zaista izomorfizam polja.

Taj izomorfizam polja identificira skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ s podskupom kompleksnih brojeva, $\mathbb{R}'$. Stoga, dobili smo $\mathbb{R}' \cong \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Kompleksan broj $(0,1)$ zovemo imaginarna jedinica te ju označavamo slovom i.

Kao što je bilo za očekivati, imamo

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

Zaključno, prema definicijama operacija zbrajanja i množenja u $\mathbb{C}$, za svaki kompleksan broj (a, b) imamo

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0,1).$$

Dakle, iz svega prethodno navedenog imamo $(a, b) = a + bi$, što je algebarski (standardni) oblik kompleksnog broja. Broj a nazivamo realni dio, upravo zbog gornje identifikacije $a = (a, 0)$ i izomorfnih polja $\mathbb{R}'$ i $\mathbb{R}$, dok broj b nazivamo imaginarni dio kompleksnog broja. Uobičajne oznake za kompleksne brojeve su z, w, z_1, w_1 i dr.

Operacije zbrajanja i množenja u $\mathbb{C}$ definirane na početku ovog poglavlja prelaze u

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad \text{i}$$

[7] Ovdje je kod binarnih operacija posebno naglašeno na kojim su skupovima definirane, iako u nastavku dokaza će se pisati samo $+$ i $\cdot$ pritom vodeći računa kako je koja binarna operacija definirana.

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Znamo da je na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ zadan uređaj $\leq$. Na taj se način realni brojevi mogu međusobno uspoređivati. Uočimo da sada prvi put nailazimo na skup brojeva koji nema uređaja – skup kompleksnih brojeva.

Navedeno možemo i pokazati tako da prepostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da skup kompleksnih brojeva ima uređaj. Tada za svaki kompleksni broj z mora vrijediti $z \leq 0$ ili $z \geq 0$. Posebno, za $i \neq 0$, treba vrijediti $i < 0$ ili $i > 0$.

Neka je $i > 0$. Pomnožimo li nejednakost $i > 0$ sa $i \neq 0$, dobivamo $i^2 > 0$, tj. $-1 > 0$. Dakle, došli smo do kontradikcije.

Neka je sada $i < 0$ te pomnožimo tu nejednakost sa $i < 0$. Tada imamo $i^2 > 0$, odnosno $-1 > 0$, što je opet kontradikcija.

Dakle, na skupu kompleksnih brojeva nema uređaja.

Iako ne možemo odrediti koji je kompleksni broj veći, a koji manji, možemo provjeriti jesu li dva kompleksna broja jednaka. Sjetimo se definicije kompleksnih brojeva kao uređenih parova realnih brojeva. Na temelju definicije jednakosti uređenih parova utvrđujemo jednakost kompleksnih brojeva. Dakle, dva će kompleksna broja (a,b) i (c,d) biti jednaka ako je $a=c$ i $b=d$.

Drugim riječima, dva će kompleksna broja $a+ib$ i $c+id$ biti jednaka ako i samo ako su im jednaki realni i imaginarni djelovi. U isto se možemo i dodatno uvjeriti.

Iz $a+ib=c+id$ slijedi $a-c=(d-b)i$. Ukoliko bi bilo $d \neq b$, onda bi vrijedilo $i=\frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{R}$, što je nemoguće. Time smo se dodatno uvjerili u prethodno rečeno vezano za jednakost kompleksnih brojeva.

Sada možemo prijeći na kompleksne brojeve u nastavi matematike kao i načine njihove obrade u udžbenicima i dr.

2 Kompleksni brojevi u Nacionalnom kurikulumu

U ovom ćemo poglavlju vidjeti koje su se promjene dogodile u sadržajima koje učenici trebaju usvojiti, a da su vezane s kompleksnim brojevima.

U Nastavnom planu i programu za stjecanje školske spreme u programima jezične, klasične i prirodoslovno-matematičke gimnazije koji se odnosi na predmet Matematika[8], objavljenom u Glasniku Ministarstva kulture i prosvjete 1994. godine, navode se tzv. zadaće u

[8] Donesen Odlukom o zajedničkom i izbornom dijelu programa za stjecanje srednje školske spreme u programima opće, jezične, klasične i prirodoslovno-matematičke gimnazije.

kojima se spominje da učenici drugog razreda, vezano za kompleksne brojeve, trebaju znati obrazložiti potrebu proširivanja skupa realnih brojeva te savladati računske operacije s kompleksnim brojevima, uključujući prikazivanje kompleksnih brojeva u ravnini. Preciznije, u sklopu sadržaja za drugi razred gimnazije, navodi se „Skup kompleksnih brojeva“ u okviru kojeg se spominje: kvadratna jednadžba, formula za rješavanje kvadratne jednadžbe, skup kompleksnih brojeva, apsolutna vrijednost kompleksnog broja, dijeljenje kompleksnih brojeva, prikazivanje kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini. Za četvrti razred gimnazije, u sklopu sadržaja „Brojevi“, vezano za kompleksne brojeve, navodi se skup kompleksnih brojeva, trigonometrijski zapis kompleksnoga broja, Moivreova formula. Zadaće koje se spominju za četvrti razred gimnazije, a u kojima se spominju kompleksni brojevi, su da učenici četvrtog razreda trebaju svladati osnovna znanja o skupovima brojeva u strukturalnom smislu, strogo razlikovati svojstva prirodnih, cijelih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva. Zaključujemo da su se po tom Nastavnom planu i programu kompleksni brojevi prvi put spominjali i uvodili u drugom razredu gimnazije, a sadržaj se nadopunjavao u četvrtom razredu gimnazije.

Primjena Odluke o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (u nastavku rada: Odluka) dovela je do promjene u redoslijedu i načinu obrade pojedinih matematičkih sadržaja, pa tako i sadržaja koji se odnose na kompleksne brojeve. S obzirom da se promjena vezana za kompleksne brojeve javlja u drugom i četvrtom razredu gimnazije, napomenimo od kada se Odluka primjenjuje za učenike spomenutih razreda. Za učenike drugih razreda gimnazije Odluka se primjenjuje od školske godine 2020./2021., a za učenike četvrtih razreda gimnazije od školske godine 2021./2022.

Za početak promotrimo program gimnazije koji ima 105 sati predmeta Matematika u drugom razredu. Glavna promjena koja se dogodila Odlukom jest da su kompleksni brojevi izborni sadržaj u drugom razredu gimnazije s tim programom. Izborni odgojno-obrazovni ishodi, u nastavku samo ishodi, vezani za kompleksne brojeve u drugom razredu gimnazije su: „Računa i interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini (MAT SŠ A.2.).“. Napomenimo da slovčana oznaka „A“ označava domenu predmeta Matematika: „Brojevi“, a brojka 2 označava u kojem se razredu ishod ostvaruje. Očekuje se da učenik prikazuje kompleksni broj u algebarskom obliku i u Gaussovoj ravnini, zbraja, oduzima, množi i dijeli kompleksne brojeve, određuje i prikazuje konjugirano kompleksni broj i modul kompleksnoga broja te interpretira geometrijsko značenje zbroja, razlike ili modula razlike dvaju kompleksnih brojeva. Ishodi vezani za kompleksne brojeve u četvrtom razredu gimnazije (96 sati predmeta Matematika) su: „Računa s kompleksnim brojevima (MAT SŠ A.4.2.).“. Očekuje se da učenik zapisuje kompleksni broj u algebarskome i trigonometrijskome obliku, zbraja oduzima, množi i potencira kompleksne brojeve u odgovarajućem obliku, po potrebi koristeći se De Moivreovom formulom. Također, u okviru proširenog sadržaja, očekuje se da učenik korjenuje kompleksne brojeve. Druga brojka, 2, označava koji je to ishod po redu u navedenoj domeni. U istoj domeni, prvo se u četvrtom razredu obrađuju realni brojevi. Također, ishodi vezani za kompleksne brojeve u četvrtom razredu gimnazije su: „Interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini (MAT SŠ A.4.3. i MAT SŠ C.4.1.).“. Očekuje se da učenik prikazuje kompleksni broj u Gaussovoj ravnini, određuje i prikazuje konjugirano kompleksni broj i modul kompleksnog broja, rješenja jednostavnih jednadžbi i nejednadžbi grafički prikazuje u Gaussovoj ravnini, interpretira geometrijsko značenje zbroja, razlike ili modula razlike dvaju kompleksnih brojeva. U okviru proširenog sadržaja za spomenute ishode, očekuje se da učenik rješenja jednadžbe, primjerice $z^5 = 2$, prikazuje u Gaussovoj ravnini. Napomenimo da slovčana oznaka „D“ označava domenu predmeta Matematika: „Oblik i prostor“. S obzirom da su kompleksni brojevi izborni sadržaj za drugi razred gimnazije, možemo uočiti da se u četvrtom razredu ponavlja/obrađuje sadržaj koji se potencijalno obrađuje u drugom razredu gimnazije uz dodatno nadopunjavanje sadržaja s kompleksnim brojevima.

U nastavku ćemo promatrati ishode za programe gimnazija s više sati predmeta Matematika u drugome i četvrtom razredu, ali samo ističući razlike u odnosu na prethodno rečene ishode.

Promatramo li program gimnazije koji ima 140 sati predmeta Matematika u drugom razredu možemo uočiti iste ishode te razradu ishoda kao i za program gimnazije koji ima 105 sati predmeta Matematika u drugom razredu. Razlika se javlja u četvrtom razredu, s 128 sati, a razlika je u tome što su korjenovanje kompleksnih brojeva i prikazivanje rješenja jednadžbe u Gaussovoj ravnini sada obavezni, a ne izborni sadržaji.

Napomenimo da se u programu gimnazije s 175 sati predmeta Matematika u drugom razredu ne spominju kompleksni brojevi ni kao izborni sadržaj. Razlika u odnosu na četvrti razred gimnazije s 128 sati predmeta Matematika javlja se i u četvrtom razredu s 160 sati predmeta Matematika, gdje se dodatno očekuje da učenik uočava potrebu proširenja skupova brojeva $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ skupom kompleksnih brojeva. Također očekuje se da učenik uz interpretaciju geometrijskog značenja zbroja, razlike i modula razlike dvaju kompleksnih brojeva, interpretira geometrijsko značenje umnoška dvaju kompleksnih brojeva. U okviru proširenog sadržaja uvodi se otkrivanje fraktala i konstrukcija Mandelbrotovog skupa. Za veći broj sati predmeta Matematika u drugom i četvrtom razredu gimnazije vezano za kompleksne brojeve nema promjena u odnosu na prethodno rečeno.

Pogodno je još spomenuti da se učenici prvi put susreću s imaginarnom jedinicom u drugom razredu gimnazije kada se obrađuje računanje s drugim i trećim korijenom („Računa s drugim i trećim korijenom (MAT SŠ A.2.1.).“). Međutim, tada im još kompleksni brojevi nisu poznati, kao ni veza imaginarne jedinice i kompleksnih brojeva.

Za kraj ovog poglavlja napomenimo još da se u Kurikulumu za nastavni predmet Matematika (u nastavku rada: Kurikulum) vezano za kompleksne brojeve, spominje i preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda, a ona je vezana za korištenje programa dinamične geometrije, tj. primjerenih dostupnih računalnih programa i alata. Vidjet ćemo u nastavku ovog diplomskog rada primjer upotrebe interaktivnog alata GeoGebra.

3 Kompleksni brojevi u odobrenim udžbenicima

U poglavlju *Anketa* bit će prikazana pitanja i odgovori nastavnika srednjih škola u provedenoj u anketi. Jedno pitanje koje se nalazilo u anketi vezano je za udžbenike koje koriste učenici ispitanih nastavnika. Ustanovilo se da su dva udžbenika, s popisa odobrenih udžbenika za školsku godinu 2022./2023., najčešće korišteni. U ovom će poglavlju biti analizirani ti udžbenici i uspoređen način obrade kompleksnih brojeva u njima. Bit će prikazan način obrade kompleksnih brojeva u ta dva udžbenika s naglaskom na prisutnosti pojedinih metoda nastave matematike u njima. Budućim nastavnicima uvid u način obrade kompleksnih brojeva može biti koristan da bi i oni sami imali bolju predodžbu pri odabiru određenog udžbenika za svoje učenike, barem što se tiče kompleksnih brojeva. Jasno, u slučaju da je u nekim nastavnim cjelinama bolji neki drugi udžbenik i to bude presudno pri odabiru istog, nastavnik svoj rad može prilagoditi obradi kompleksnih brojeva kako je u nekom drugom udžbeniku, s obzirom da je udžbenik literatura za učenike, a ne za nastavnike.

Kao dodatak ovom poglavlju, radi usporedbe s obradom kompleksnih brojeva u udžbenicima nekada i sada, bit će analiziran stariji udžbenik za 2. razred gimnazije kao i udžbenik za 4. razred gimnazije. Ti udžbenici bili su aktualni daleko prije uvođenja Kurikuluma, stoga su kompleksni brojevi obavezni sadržaj u udžbenicima za drugi razred. Iz toga razloga analizirat će se dva udžbenika kako bi se moglo uvidjeti obrada kompleksnih brojeva u njima u potpunosti.

Autori: Dakić B., Elezović N.

MATEMATIKA 4, 1. dio, Element, 2021.

Na početku nastavne cjeline „Kompleksni brojevi“ nalazi se istoimena nastavna jedinica u kojoj se na samom početku uočava razlog uvođenja skupa kompleksnih brojeva kao proširenje skupa realnih brojeva. Na temelju činjenice da je

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

navedeno da je svaki od skupova $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ proširenje prethodnog, a to proširenje je načinjeno zbog potrebe da se omogući provedba određene algebarske operacije. Međutim, kako piše u udžbeniku, skup $\mathbb{R}$ nije završetak tog procesa. Za objasniti potrebu uvođenja skupa kompleksnih brojeva, rečeno je da neke jednostavne kvadratne jednadžbe, poput $x^2 + x + 1 = 0$, nemaju rješenja u skupu realnih brojeva. S obzirom na to, navedeno je sljedeće.

Primjerice, već odgovor na pitanje: Za koji realan broj x vrijedi $x^2 = -1$? glasi: Ne postoji takav realan broj.

U ovom udžbeniku imaginarna jedinica je uvedena kao zamišljeno rješenje jednadžbe $x^2 + 1 = 0$, odnosno autori navode da je imaginarna jedinica i broj za koji vrijedi $i^2 = -1$.

Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ definiran je zahtijevajući da on ima sljedeća svojstva koja se navode u udžbeniku, a to su:

1) $\mathbb{C}$ *sadrži skup realnih brojeva kao svoj podskup.*

2) $\mathbb{C}$ *sadrži imaginarnu jedinicu i.*

3) U skupu $\mathbb{C}$ *definirane su operacije zbrajanja i množenja za koje vrijede sva uobičajna pravila računanja.*

Definiranje imaginarnog broja yi kao umnoška realnog broja y i imaginarne jedinice i slijedi nakon konkretnih primjera imaginarnih brojeva. Jasno je napisano da će upravo zbog prethodno navedenih zahtjeva, imaginarni broj biti kompleksan broj. Također, prikazani su konkretni kompleksni brojevi da bi učenici uočili da su oni oblika $x + yi$, gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Nakon toga, primjenom metode apstrakcije i generalizacije, naveden je opći oblik kompleksnog broja z. S obzirom na to, u ovom udžbeniku autori navode sljedeće.

Kompleksni broj z ima oblik $z = x + yi$. *Tu su* x *i* y *realni brojevi, a* i *imaginarna jedinica. Broj x je realan dio kompleksnog broja z, a broj y je njegov imaginaran dio. Pišemo:*

$$x = Re\, z, \quad y = Im\, z.$$

U udžbeniku piše kako se takav zapis zove algebarski (ili) standardni prikaz kompleksnog broja z. Nakon spomenutog, u udžbeniku je rečeno da su dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ jednaka ako i samo ako im se podudaraju realni i imaginarni dijelovi. Navedeno je prikazano i matematičkim simbolima, a isto kratko dokazano. Uočimo da se u ovom udžbeniku spominje jednakost kompleksnih brojeva, ali nema riječi o nepostojanju uređaja u skupu kompleksnih brojeva zbog kojeg ne možemo odrediti koji je kompleksan broj veći. Kao što je već rečeno svojstvom 3) skupa kompleksnih brojeva, u udžbeniku je ponovljeno da i u skupu kompleksnih brojeva vrijede svojstva komutativnosti i asocijativnosti za zbrajanje i množenje te svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju kompleksnih brojeva koristeći matematički zapis matematičkim simbolima za spomenuta svojstva. Zbroj, razlika i umnožak kompleksnih brojeva dani su na sljedeći način.

Ako su $z_1 = x_1 + y_1 i$ *i* $z_2 = x_2 + y_2 i$ *bilo koja dva kompleksna broja, tada njihov zbroj, razliku i umnožak računamo na sljedeći način:*

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Uočimo da je dana formula za računanje umnoška dvaju kompleksnih brojeva. Međutim, učenici bi umnožak dva konkretna kompleksna broja mogli odrediti množeći ih poput algebarskih izraza, a uvažavajući činjenicu da je $i^2 = -1$. Kao i nakon objašnjavanja kada su dva kompleksna broja jednaka, nakon uvođenja prethodnih algebarskih operacija za kompleksne brojeve, nailazimo na primjere i zadatke u kojima konkretne kompleksne brojeve treba zbrojiti, pomožiti ili oduzeti. Zatim slijedi obrađivanje potencije imaginarne jedinice. Potreba za uvođenjem potencije imaginarne jedinice prikazana je primjerom u kojem je potrebno izračunati $(1+i)^3$, gdje se postavlja pitanje koliko je i^3. Određene su vrijednosti za i^2, i^3, i^4 te i^5 te je napomenuto da se račun dalje ponavlja, odnosno da se analognim postupkom određuju ostale potencije imaginarne jedinice. U udžbeniku je navedeno da se svaki prirodan broj n može zapisati u obliku $4k+r$, gdje je k količnik, a r ostatak pri dijeljenju broja n sa 4 te da je broj r jedan od brojeva 0,1,2 ili 3. U skladu s time, detaljno je raspisano zašto je $i^n = i^r$, gdje je $n = 4k + r$. Primjenom metode konkretizacije, određeno je koliko je i^{23}.

S obzirom na navedeno, naveden je sljedeći zaključak, nakon kojeg slijede riješeni primjeri i zadaci.

Neka je k prirodan broj. Tada za potencije imaginarne jedinice i vrijedi:

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$$

Zatim slijedi obrada dijeljenja kompleksnih brojeva. Prije nego li je objašnjeno kako se dijele kompleksni brojevi, uveden je novi pojam – kompleksno konjugirani brojevi. Navedena je sljedeća definicija.

Ako je $z = x + yi$ bilo koji kompleksni broj, onda $\bar{z} = x - yi$ zovemo kompleksno konjugirani broj broja z.

Zatim se određuje kompleksno konjugirani broj konkretnog kompleksnog broja. Napomenimo da se u spomenutom udžbeniku spominje da je umnožak dvaju međusobno kompleksno konjugiranih brojeva (različitih od nule) pozitivan realan broj te se isto dokazuje. Spomenuto će učenicima biti od koristi prilikom dijeljenja kompleksnih brojeva. Konačno, nakon uvođenja kompleksno konjugiranog broja, na konkretnom primjeru u kojem je potrebno podijeliti broj $z_1 = 2 + 3i$ brojem $z_2 = 1 - i$ pokazano je kako se dijele kompleksni brojevi. Nakon toga, primjenom metode generalizacije zaključeno je da se isti postupak dijeljenja provodi i pri dijeljenju bilo koja dva kompleksna broja te je napisano sljedeće.

Dva se kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ dijele tako da se brojnik i nazivnik pomnože kompleksno konjugiranim brojem nazivnika i dobiveni razlomak sredi:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Nakon navedenog, slijedi definiranje kompleksne ravnine na sljedeći način.

Svakom kompleksnom broju $z = x + yi$ odgovara točka $M(x, y)$ u kompleksnoj ravnini. Na osi apscisa smješteni su realni brojevi pa se ona zove realna os. Na osi ordinata smješteni su imaginarni brojevi pa se ona zove imaginarna os. Pridruživanje kompleksnih brojeva i točaka kompleksne ravnine obostrano je jednoznačno.

Zatim se obrađuje modul kompleksnog broja koji se u udžbeniku definira na sljedeći način.

Modul kompleksnog broja $z = x + yi$ je realan nenegativan broj $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Geometrijska interpretacija modula kompleksnog broja dana je objašnjenjem da je modul broja z jednak udaljenosti njemu odgovarajuće točke $M(x, y)$ od ishodišta koordinatnog sustava. Primijetimo da u ovom udžbeniku modul kompleksnog broja nije detaljno uveden.

Kod modula kompleksnog broja možemo primijetiti poopćenje ili generalizaciju apsolutne vrijednosti realnog broja pa se koristi ista oznaka, što se navodi i u udžbeniku. U skladu s time, raspisano je da je $|z| = |x + 0i| = \sqrt{x^2 + 0} = \sqrt{x^2} = |x|$ kada je $z = x$, realan broj.

Zatim se obrađuje udaljenost točaka u ravnini. Za dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ određuje se $|z_1 - z_2|$ te se dobiva da je $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Uočeno je da se u dobivenom izrazu može prepoznati formula za udaljenost dviju točaka u ravnini, pri čemu te točke imaju koordinate (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Na taj se način pokazalo da je $|z_1 - z_2|$ udaljenost između točaka z_1i z_2 u kompleksnoj brojevnoj ravnini.

Dokazana je jednakost $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ te jednakost $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, gdje je $z_2 \neq 0$. Napomenimo da se u udžbeniku spominje da se jednakost $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ može indukcijom poopćiti na umnožak bilo koliko kompleksnih brojeva. Dakle, generalizacijom se dobiva
$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$, a indukcijom bi se isto trebalo dokazati. U udžbeniku navedeno nije dokazano indukcijom, što bi se učenike moglo poticati da bi se što više nastavni sadržaji matematike povezali.

Zatim slijedi uvođenje trigonometrijskog prikaza kompleksnog broja. Prvo se uvodi pojam polarnog sustava te koordinatne mreže. Nakon toga dano je sljedeće.

Kartezijeve i polarne koordinate vezane su relacijama:

$$\begin{cases} x = r\ \cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Prikaz kompleksnog broja z u obliku

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

naziva se trigonometrijski prikaz broja z.

Zatim autori navode da je udaljenost r kompleksnog broja od ishodišta modul tog broja, iako nije pokazano kako iz polarnih i kartezijevih koordinata to slijedi, te navode da je kut φ

argument kompleksnog broja kojeg označavamo s $\varphi = \arg(z)$. Argument računamo iz veze: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$. Jednadžbom $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ kut φ nije potpuno određen, s obzirom da ta jednadžba ima dva rješenja unutar intervala $[0, 2\pi\rangle$ (koja se međusobno razlikuju za π). U udžbeniku je objašnjeno na koji način se određuje „pravo“ rješenje od dva dobivena te što se događa u slučaju kad je $x = 0$.

Nakon uvođenja trigonometrijskog prikaza kompleksnog broja, uvodi se množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku. Pokazano je da je $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ te $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, pri čemu je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\,\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\,\varphi_2)$. Za Moivreovu formulu, odnosno formulu za potenciranje kompleksnih brojeva, napomenuto je da se može dokazati indukcijom, iako ista nije provedena. Konačno, na kraju nastavne cjeline „Kompleksni brojevi“ obrađuje se korjenovanje kompleksnih brojeva. Na početku je objašnjena razlika između aritmetičkog korijena pozitivnog realnog broja te korijena kompleksnog broja koji je u udžbeniku definiran kako stoji u nastavku.

n-ti korijen kompleksnog broja z je svako rješenje jednadžbe $w^n = z$. Pišemo $w = \sqrt[n]{z}$.

Naglašeno je da iako postoji razlika između aritmetičkog korijena pozitivnog realnog broja te korijena kompleksnog broja, oznaka im je ista. Stoga, smatram da se učenicima treba skrenuti pažnja na postojeće razlike između aritmetičkog korijena pozitivnog realnog broja i korijena kompleksnog broja, s obzirom da im je oznaka ista.

Nakon toga izvedena je formula za n-ti korijen kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ koji, kako se navodi u udžbeniku, ima točno n različitih vrijednosti: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, za $k = 0,1,\dots,n-1$. Zatim je objašnjeno zašto tih n brojeva određuje pravilan n-terokut u kompleksnoj ravnini. S ovime završavamo analiziranje ovog udžbenika.

U ovom udžbeniku nailazimo na zanimljive teme vezane za kompleksne brojeve koje se spominju u sklopu „kutka plus“. Uz takve teme, nailazimo i na „povijesni kutak“ u kojem možemo vidjeti i mali dio povijesti vezan za kompleksne brojeve. U skladu s time, spominje se W. R. Hamiltonova definicija kompleksnih brojeva, zatim povijest nastanka kompleksnih brojeva, kratki životopis Karla Friedricha Gaussa zaslužnog za prikaz kompleksnih brojeva u kompleksnoj, Gaussovoj, ravnini. O svemu tome smo mogli vidjeti i u uvodu ovog diplomskog rada.

U sklopu „kutka plus“ nalazimo povezanost Pitagorinih trojki brojeva i kompleksnih brojeva. Kako autori navode u udžbeniku, uz pomoć kompleksnih brojeva se može pronaći po volji mnogo Pitagorinih trojki, odnosno prirodnih brojeva a, b i c koji zadovoljavaju jednakost $a^2 + b^2 = c^2$. Jasno nam je zašto se ti brojevi nazivaju Pitagorine trojke čim vidimo o kojoj se jednakosti radi. Dan je primjer konkretnog kompleksnog broja pomoću kojeg su se odredile Pitagorine trojke brojeva te je pokazano da se pomoću bilo kojeg kompleksnog broja, a ne samo onog iz primjera, oblika $z = x + yi$, gdje su x i y prirodni brojevi, mogu dobiti

Pitagorine trojke koje zadovoljavaju sljedeće jednakosti: $a = |x^2 - y^2|$, $b = 2|xy|$, $c = x^2 + y^2$, za svaki $x, y \in \mathbb{N}$ takav da je $x \neq y$. Time je napravljen prijelaz s konkretnog primjera na opći metodom generalizacije i apstrakcije.

Napomenimo da se u „kutku plus“ još nalaze i trigonometrijski identiteti i kompleksni brojevi. Preciznije, zadaci u kojima je potrebno dokazati neki trigonometrijski identitet primjenjujući znanje o kompleksnim brojevima. Za kraj, nalazimo na zanimljivosti o fraktalima i Mandalbrotovom skupu.

Osvrt na prikazani udžbenik

U ovom udžbeniku kompleksni brojevi se uvode naglašavajući potrebu za proširenjem skupa realnih brojeva zbog nemogućnosti određivanja rješenja svake kvadratne jednadžbe i taj način uvođenja novog skupa brojeva mi se sviđa. Smatram da je učenicima korisno vidjeti potrebu uvođenja kompleksnih brojeva da bi i oni sami bili više motiviraniji za njihovo učenje uvidjevši navedenu potrebu na samom početku nastavne cjeline. Vidjeli smo da se u ovom udžbeniku ne spominje nepostojanje uređaja na skupu kompleksnih brojeva, već samo kada su dva kompleksna broja jednaka. Smatram da bi se moglo u tom dijelu udžbenika učenicima barem prokomentirati nepostojanje uređaja na skupu kompleksnih brojeva. Pogodno bi bilo da je i pokazano zašto ih je nemoguće uspoređivati po veličini, s obzirom da se već spominje kada su dva kompleksna broja jednaka i isto dokazuje. Kod obrade potencije imaginarne jedinice je izračunato koliko je i^2, i^3, i^4 i i^5. Mišljenja sam da su se mogle odrediti vrijednosti još nekih potencija imaginarne jedinice kako bi bilo više uočljivo koje su sve vrijednosti potencija imaginarne jedinice. Prije dijeljenja kompleksnih brojeva uveden je pojam kompleksno konjugiranih brojeva, što smatram da je u pravom trenutku uvedeno da se uoči potreba za uvođenjem tog pojma pri dijeljenju kompleksnih brojeva. Prisutna je metoda konkretizacije, a zatim metoda generalizacije i apstrakcije prilikom obrade dijeljenja kompleksnih brojeva, što može učenike potaknuti da i inače na temelju konkretnog primjera generaliziraju rješenje. Također, vjerujem da će im taj postupak dijeljenja biti puno lakši ako se izvede prvo na konkretnom primjeru, a zatim na temelju njega, izvede opći zaključak za dijeljenje kompleksnih brojeva. U ovom udžbeniku se ne navodi usporedba dijeljenja kompleksnih brojeva s racionalizacijom nazivnika. Korisno bi bilo, po mome mišljenju, da se navedeno nalazi u udžbeniku da bi se učenike potaknulo na povezivanje matematičkog gradiva (dijeljenje kompleksnih brojeva i racionalizacija nazivnika). Uvođenje kompleksne ravnine na način da se navodi kako svakom kompleksnom broju odgovara uređeni par realnih brojeva pa u skladu s time kompleksnim brojevima možemo pridružiti točke u koordinatnoj ravnini mi se sviđa. Jedino što bih nadodala kod obrade kompleksne ravnine je naglasak da realne brojeve prikazujemo na pravcu dok to nije slučaj kod kompleksnih brojeva. Smatram da bi se time učenike više potaknulo na uspoređivanje i povezivanje matematičkog sadržaja. Tako na primjer, kod obrade modula kompleksnog broja te udaljenosti kompleksnih brojeva u ovome se udžbeniku povlači analogija i uspoređivanje s modulom realnog broja i udaljenosti realnih brojeva, što smatram da je korisno za učenike. Izvoditi neke računske operacije s kompleksnim brojevima, na primjer izračunati $\frac{(\sqrt{3}+i)^{10}}{(-2+2i)^{12}}$, je zasigurno lakše pomoću trigonometrijskog zapisa kompleksnog broja. Bitno je da učenici vide smisao onoga što uče jer im i na taj način raste motivacija za buduće učenje. U ovom udžbeniku se navodi da se složene operacije s kompleksnim brojevima (množenje, dijeljenje, potenciranje, korjenovanje) mogu jednostavnije računati ako je kompleksan broj zapisan u trigonometrijskom obliku. Taj način uvođenja trigonometrijskog zapisa kompleksnog broja mi se sviđa. Zadnje što je obrađeno je korjenovanje kompleksnih brojeva. Obrada korjenovanja kompleksnih brojeva postupno je napravljena i detaljno je pokazana razlika između korjenovanja realnih brojeva i kompleksnih brojeva. Dakle, korjenovanje realnih brojeva i kompleksnih se razlikuje, a u ovome udžbeniku ta je razlika korektno objašnjena. Nadodala bih jedino da je u zadacima jasno rečeno traži li se n-ti korijen nekog broja u skupu $\mathbb{R}$ ili u skupu $\mathbb{C}$. Time bih zaključila osvrt na način kako su u ovom udžbeniku prikazani obavezni sadržaji vezani za kompleksne brojeve.

Dodatni materijali za učenike, poput onih u „kutku plus“ i u „povijesnom kutku“, su mi se zaista svidjeli. Smatram da je pogodno da udžbenik sadrži razne zanimljivosti, poput zanimljivosti u ovom udžbeniku, kako bi se učenike što više potaknulo na učenje kompleksnih brojeva i njihovo istraživanje. U slučaju da se na takve teme ne stigne skrenuti pažnja učenicima tijekom redovne nastave, smatram da se isto može proučiti s njima na dodatnoj nastavi matematike i tako dopuniti i produbiti znanje učenika o kompleksnim brojevima. Osim toga, može se učenicima zadati za domaću zadaću da pročitaju i istraže neke od navedenih zanimljivosti. Također, na primjer, zanimljivost o Pitagorinim trojkama brojeva i kompleksnim brojevima se može iskoristiti za provođenje sljedeće aktivnosti na redovnoj nastavi. Nastavnik može učenike pitati što misle da su Pitagorine trojke brojeva te koju jednakost one trebaju zadovoljavati. Učenicima može zadati da izaberu konkretan kompleksan broj kojem je realan i imaginaran dio prirodan broj te da ga kvadriraju. Time bi se s učenicima ponovio algebarski oblik kompleksnog broja, množenje kompleksnih brojeva (sa samim sobom) te pojmovi poput realni i imaginarni dio kompleksnog broja. Nakon toga, nastavnik može potaknuti učenike da provjere koji bi brojevi bili Pitagorine trojke u ovome slučaju. Nakon što otkriju da su apsolutne vrijednosti realnog i imaginarnog dijela kvadriranog kompleksnog broja kojeg su odabrali duljine kateta pravokutnog trokuta, došli bi do traženih Pitagorinih trojki brojeva. Na kraju, nastavnik traži od učenika da generalizira dobiveno za bilo koji kompleksan broj kojemu su realni i imaginarni dijelovi prirodni brojevi. Po mome mišljenju, navedena aktivnost bila bi korisna za učenike jer bi ih se osim, ponavljanja kompleksnih brojeva, poticalo na generalizaciju rješenja. Generalizacija rješenja bitan je dio jednog od triju elementa vrednovanja u nastavnome predmetu Matematika: „Rješavanje problema“.

Pri analiziranju sljedećeg aktualnog udžbenika naglasak će biti na dijelovima koji su drugačije obrađeni u odnosu na prethodni udžbenik. Dijelovi koji se ne spomenu obrađeni su na sličan način kao i u prethodnom udžbeniku.

Autori: Matić I., Jukić, Matić Lj., Zelčić M., Šujansky M., Vukas T., Dijanić Ž.

Matematika 4, 1. dio, Školska knjiga, 2021.

Potreba za uvođenjem skupa kompleksnih brojeva u ovom je udžbeniku opisana na sljedeći način. Ponovljeno je da je skup realnih brojeva zatvoren s obzirom na osnovne algebarske operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, osim s nulom) te da je potencija realnog broja s cjelobrojnim eksponentnom realan broj. Međutim, kako autori navode, potenciranje racionalnim eksponentom nije uvijek realan broj, što u prethodnom udžbeniku nije navedeno.

U ovom udžbeniku rečeno je sljedeće.

Primjerice $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ *nema rješenja u skupu realnih brojeva. S obzirom na to da jednadžbu* $x^2 + 1 = 0$ *ne možemo riješiti u skupu realnih brojeva, jer ne postoji realan broj koji na kvadrat daje* -1, *skup realnih brojeva proširujemo na novi skup u kojem će ta jednadžba biti rješiva.*

Pojmovi: imaginarna jedinica, imaginarni brojevi te kompleksni brojevi definirani su kao i u prethodnom udžbeniku te isto obrađeni, jedino je dan simbolički zapis skupa svih kompleksnih brojeva, $\mathbb{C} = \{z = x + yi : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Za razliku od prethodno analiziranog udžbenika, u ovom je udžbeniku prilikom obrade jednakosti kompleksnih brojeva napomenuto da, za razliku od skupa realnih brojeva, u skupu kompleksnih brojeva ne postoji uređaj i ne možemo odrediti koji je kompleksan broj veći. Isto tako, navedeno je kako ne možemo izjaviti da je neki kompleksan broj (koji nije realan) pozitivan ili negativan, ali se može definirati jednakost kompleksnih brojeva, što je i napravljeno. Napomenimo da u ovom udžbeniku nije dokazano zašto ne postoji uređaj u skupu kompleksnih brojeva. Redoslijed obrade sadržaja iz područja kompleksnih brojeva drugačiji je nego u prethodnom udžbeniku.

Nakon jednakosti kompleksnih brojeva, obrađuju se kompleksno konjugirani brojevi. Pri kraju obrade tog dijela rečeno je da će kompleksno konjugirani brojevi biti od važnosti pri dijeljenju kompleksnih brojeva, dok se navedeno u prijašnjem udžbeniku navelo na samom početku obrade dijeljenja kompleksnih brojeva. Zatim slijedi obrada računskih operacija s kompleksnim brojevima. Za razliku od prethodnog udžbenika, u ovom se udžbeniku prvo konkretni kompleksni brojevi zbrajaju, oduzimaju i množe te se koristeći metodu generalizacije navodi kako se zbrajaju, oduzimaju i množe općenito dva kompleksna broja. Preciznije, zbrajanjem dva konkretna kompleksna broja uočeno je da se zbraja realni dio jednog kompleksnog broja s realnim dijelom drugog kompleksnog broja te da isto vrijedi za imaginarne dijelove, a generalizacijom je zaključeno da se općenito dva kompleksna broja, ne samo ona iz primjera, na taj način zbrajaju. Analogno se zaključuje kako se kompleksni brojevi oduzimaju i množe. Također, navodi se da algebarske operacije na skupu kompleksnih brojeva moraju zadržavati svojstva koja vrijede u skupu realnih brojeva (s obzirom da je skup kompleksnih brojeva proširenje skupa realnih brojeva) te da se zato osnovne algebarske operacije na skupu $\mathbb{C}$ definiraju prirodno, kao s algebarskim izrazima, vodeći računa da je $i^2 = -1$. Dodatno je komentirano da su svojstva komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja i množenja te distributivnosti množenja prema zbrajanju u skupu kompleksnih brojeva zadržana. Zatim slijedi primjer u kojem se pomoću konkretna tri kompleksna broja želi pokazati da vrijedi svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju. Dakle, u tom se dijelu koristi nepotpuna indukcija i generalizacija da to svojstvo vrijedi za bilo koja tri kompleksna broja.

Što se tiče dijeljenja kompleksnih brojeva i obrade istog u ovom udžbeniku, za razliku od prethodnog udžbenika, prvo se računa $\frac{3-4i}{2}$, odnosno riješen je primjer u kojem se kompleksan broj (koji nije realan) dijeli realnim brojem. Zatim se postavlja pitanje kako će se kompleksan broj podijeliti kompleksnim brojem kojemu je imaginarni dio različit od nule te se postavlja pitanje: *S čime možemo pomnožiti nazivnik da bismo poništili postojanje imaginarnog dijela?.* Također, navode da taj problem jako podsjeća na racionalizaciju nazivnika te je riješen primjer u kojem je potrebno racionalizirati nazivnik u izrazu $\frac{3-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. Učenike se ovime potiče da povezuju nastavne sadržaje iz matematike. Navedeno im je da se na sličan način izračunava količnik $\frac{3-i}{2+i}$. Dakle, opet nailazimo na primjenu metode analogije i uspoređivanja u ovom udžbeniku. Nakon toga se primjenom metode generalizacije objašnjava kako se provodi računska operacija dijeljenja bilo kojih kompleksnih brojeva. Uočavamo da se postupno obrađuje dijeljenje kompleksnih brojeva u tom udžbeniku.

Zatim slijedi obrada potencije imaginarne jedinice koja, za razliku od prethodnog udžbenika, započinje promatranjem vrijednosti prvih nekoliko potencija imaginarne jedinice, zaključno s i^8. Na taj je način učenicima vidljivo da se vrijednosti potencija periodički ponavljaju. Daljnje objašnjavanje potencije imaginarne jedinice slično je kao i u prethodnom udžbeniku.

Nakon toga slijedi obrada kompleksne ravnine. Za razliku od prethodnog udžbenika, u ovom se udžbeniku navodi sljedeće.

Prisjetimo se da smo realne brojeve prikazivali na brojevnom pravcu. Kompleksni brojevi imaju dvije komponente (realni i imaginarni dio) pa se nameće njihov prikaz u koordinatnoj ravnini.

Učenicima se zaista može postaviti pitanje kako se kompleksni brojevi prikazaju u ravnini, a (realni) brojevi se prikazuju na brojevnom pravcu. Ovaj udžbenik daje učenicima odgovor na takve nedoumice. U ovom udžbeniku nalazimo i na geometrijsko značenje zbroja i razlike dvaju kompleksnih brojeva. Uspoređeno je zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva, kao što je objašnjeno u prethodnom udžbeniku, sa zbrajanjem i oduzimanjem vektora. Prvo je riješen primjer u kojem je potrebno odrediti računski te nacrtati u kompleksnoj ravnini zbroj i razliku kompleksnih brojeva $z_1 = -1 + 2i$ i $z_2 = 3 + i$. Nakon toga je riješen primjer u kojem je potrebno odrediti računski i grafički zbroj i razliku vektora $\overrightarrow{v_1} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\overrightarrow{v_2} = 3\vec{i} + \vec{j}$. Učenicima je postavljeno pitanje: *Primjećujete li analogiju?,* iako ista nije objašnjena.

Nakon toga slijedi obrada modula kompleksnog broja. Za razliku od prethodnog udžbenika, modul kompleksnog broja je u ovom udžbeniku detaljnije obrađen. Obrada započinje ponavljanjem da je udaljenost realnog broja na brojevnom pravcu od ishodišta (nule) njegova apsolutna vrijednost ili modul. Zatim se želi poopćiti, odnosno generalizirati, definicija modula i na kompleksne brojeve, pritom navodeći sljedeće.

S obzirom na to da su oni predstavljeni točakama u koordinatnoj ravnini, njihovu udaljenost od ishodišta računat ćemo s pomoću Pitagorina poučka.

Uočimo da je u ovom udžbeniku detaljnije učenicima objašnjeno zašto se modul kompleksnog broja $z = x + yi$ računa po formuli $\sqrt{x^2 + y^2}$. Također, nailazimo na primjenu metode analogije i uspoređivanja jer se u udžbeniku učenike prisjeća kako se određuje duljina vektora $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Time se učenike potiče na uočavanje analogije između vektora i kompleksnih brojeva kao i prije gdje se učenike poticalo da primijete analogiju između zbrajanja i oduzimanja vektora te zbrajanja i oduzimanja kompleksnih brojeva. Nakon toga se uvodi geometrijska interpretacija modula razlike dvaju kompleksnih brojeva na način da se učenike podsjeća da je modul razlike dvaju realnih brojeva njihova međusobna udaljenost te je pokazano da isto vrijedi i za kompleksne brojeve. Dakle, da udaljenost točaka u kompleksnoj ravnini kojima su pridruženi kompleksni brojevi odgovara modulu razlike tih kompleksnih brojeva. Time je prisutna metoda analogije i uspoređivanja kojom se učenike potiče na povezivanje nastavnog sadržaja iz matematike. Napomenimo da je u ovom udžbeniku indukcijom dokazano da je $|z^n| = |z|^n$, što u prethodnom nije. Zatim se obrađuje trigonometrijski prikaz kompleksnog broja. Motivacija za obradu i uvođenje istog, dana je sljedećim.

Ako želimo izračunati vrijednost izraza $\frac{(1-i)^8 \cdot (\sqrt{3}+i)^{10}}{(-2+2i)^{12}}$ *koristeći se naučenim, poprilično ćemo se namučiti.*

Učenike se zatim motiviralo na način da im se reklo da će upravo jedan novi prikaz kompleksnog broja omogućiti jednostavnije provođenje računskih operacija, poput potenciranja, množenja i dijeljenja, koje će i prethodni zadatak učiniti jednostavnijim. Također se prvo uvodi polarni sustav, iako se u ovom udžbeniku pojam koordinatne mreže ne spominje. Za razliku od prethodnog udžbenika, učenike se upućuje na prikazane slike kako bi primijetili da je $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$. Napomenimo da je obrada množenja i dijeljenja kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku slična kao i u prethodnom udžbeniku. Dodatak u ovom udžbeniku je što se spominje geometrijska interpretacija umnoška dvaju kompleksnih brojeva. Nakon toga se obrađuje potenciranje kompleksnih brojeva te je indukcijom dokazana De Moivreova formula. Napomenimo još da se u ovom udžbeniku učenike podsjeća na glavnu mjeru kuta te određivanje iste kako bi argument kompleksnog broja bio u intervalu $[0, 2\pi\rangle$. Važnost prethodno navedenog vidjet ćemo i u šestom poglavlju *Kompleksni brojevi na državnoj maturi*.

Nakon toga se obrađuje korjenovanje kompleksnih brojeva. Jedina razlika koju uočavamo je što se u zadacima traži n-ti korijen nekog broja u skupu $\mathbb{R}$ i u skupu $\mathbb{C}$, što nije bio slučaj u prethodnom udžbeniku. U prethodnom se udžbeniku u zadacima nije eksplicitno navodilo u kojem će se skupu n-ti korijen nekog broja nalaziti, iako se očekivalo da će rješenje biti kompleksan broj koji nije realan.

U ovome udžbeniku, za razliku od prethodnog, nema povijesnog kutka ili nekih zanimljivih činjenica o kompleksnim brojevima.

<u>Osvrt na prikazani udžbenik</u>

Iako mi je način obrade kompleksnih brojeva u prvom udžbeniku korektan i u svemu je poštivano načelo znanstvenosti, osobno mi se više sviđa obrada kompleksnih brojeva u ovome udžbeniku. Navest ću što je presudilo da mi je osobno bolji ovaj udžbenik. Za razliku od prethodnog udžbenika u ovom se udžbeniku spominje da na skupu kompleksnih brojeva nema uređaja, što mi se zaista sviđa. Jasno je rečeno da ne možemo odrediti koji je kompleksan broj veći, a koji manji od drugog, kao niti izjaviti da je neki kompleksan broj pozitivan ili negativan. Iako navedeno nije dokazano, sviđa mi se što je barem učenicima izjavljeno. Također, detaljnije obrađeno dijeljenje kompleksnih brojeva i podsjećivanje učenika na racionalizaciju nazivnika mi se sviđa. Mišljenja sam da je učenicima korisno da se kompleksna ravnina uvodi podsjetnikom da se realni brojevi prikazuju na brojevnom pravcu. Na taj se način potaknulo učenike na uspoređivanje skupa realnih brojeva, kojeg su upoznali ranije, s novim skupom kompleksnih brojeva. U udžbeniku ima dosta poticanja učenika na uočavanje analogije, na primjer analogija između kompleksnih brojeva i vektora, odnosno njihovog modula kao i njihovog zbrajanja i oduzimanja. Smatram da je korisno da učenici uče novo gradivo na temelju već naučenog jer time uče povezivati činjenice što im je zasigurno korisno. Također, navedena je motivacija za uvođenje trigonometrijskog zapisa kompleksnog broja. Odnosno, dan je izraz $\frac{(1-i)^8\cdot(\sqrt{3}+i)^{10}}{(-2+2i)^{12}}$ te je učenicima rečeno da će jednostavnije izračunati vrijednost izraza ukoliko se uvede novi prikaz kompleksnog broja. Dakle, znajući da će im biti lakše nešto kasnije izračunati, učenike bi to moglo motivirati za učenje trigonometrijskog zapisa kompleksnog broja. Također, kod obrade korjenovanja kompleksnih brojeva u ovom mi se udžbeniku sviđa što je eksplicitno navedeno u kojem će se skupu n-ti korijen nekog broja nalaziti. Smatram da je bitno da se učenike podsjeća na razliku između korjenovanja u skupu realnih brojeva i u skupu kompleksnih brojeva, a zadacima gdje se eksplicitno navodi u kojem se skupu nalazi korijen nekog broja to će se postići. Nadodala bih ovom udžbeniku zanimljivosti o kompleksnim brojevima poput onih u prvome analiziranom udžbeniku.

Kao što je najavljeno, analizirat ćemo eventualne razlike u obradi kompleksnih brojeva između sljedeća dva udžbenika, koji su bili aktualni znatno prije uvođenja Kurikuluma, i dva prethodno analizirana udžbenika.

Autor: Elezović N.

MATEMATIKA 2, Element, 1997.

Na samom početku obrade kompleksnih brojeva objašnjena je potreba za njihovim uvođenjem. Uz navedeno, obrađene su računske operacije u skupu kompleksnih brojeva te kompleksna ravnina. Proučavanjem ovog udžbenika uočeno je da je način njihove obrade sličan kao i u prvome analiziranom udžbeniku. Iz tog će razloga biti izdvojene neke značajne razlike koje uočavam u ovom udžbeniku s obzirom na prvi analizirani udžbenik. Obrada dijeljenja kompleksnih brojeva uključuje i spominjanje racionalizacije nazivnika, što smo vidjeli da nije bio slučaj u prvome udžbeniku. Međutim, i dalje drugi udžbenik postupnije uvodi dijeljenje kompleksnih brojeva. Sjetimo se, u tom je udžbeniku prvo kompleksan broj, koji nije realan, podijeljen realnim, a zatim kompleksan broj, koji nije realan, s kompleksnim brojem koji nije realan. Naglasimo da je u ovom udžbeniku jasno pokazano da se rezultat dijeljenja kompleksnih brojeva može svesti na standardni zapis kompleksnog broja. Dakle, time se i učenike potiče da obraćaju pažnju da prilikom računanja s kompleksnim brojevima, na kraju računa, oni budu zapisani u nekom od poznatih oblika – algebarski (standardni) ili trigonometrijski oblik, koji će učiti kasnije. Modul kompleksnog broja je u ovom udžbeniku detaljnije objašnjen pozivajući se na Pitagorin poučak. Kompleksna ravnina je zadnje što je u ovom udžbeniku obrađeno vezano za kompleksne brojeve. Primjećuje se izuzetno manje primjera i zadataka u odnosno na prethodno analizirane udžbenike.

Autor: Elezović N.

MATEMATIKA 4, Element, 1996.

Kao i kod prethodno analiziranog udžbenika, uočeno je da je način obrade kompleksnih brojeva u ovom udžbeniku sličan kao i u prvome analiziranom udžbeniku. Kompleksni brojevi se u ovom udžbeniku obrađuju u sklopu nastavne cjeline *Brojevi,* nastavne jedinice *Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja*. Na samom početku poglavlja o kompleksnim brojevima, ponovljena su osnovna svojstva kompleksnih brojeva koja su obrađivana u drugome razredu. Dodatno, u tom dijelu ponavljanja dokazano je da u skupu kompleksnih brojeva ne postoji relacija uređaja. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja detaljnije je obrađen u ovom udžbeniku. Iz veze Kartezijevih i polarnih koordinata te iz $x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sređivanjem dobiven je izraz za modul kompleksnog broja, odnosno $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Razlike u obradi računskih operacija s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom zapisu nema u odnosu na prvi analizirani udžbenik, osim što se pokazuje geometrijska interpretacija množenja kompleksnog broja z_1 s kompleksnim brojem z_2 čiji je modul 1, odnosno $z_2 = \cos\varphi + i\sin\varphi$. U ovom udžbeniku ima manje primjera i zadataka u usporedbi s prva dva analizirana udžbenika.

4 Formalizmi u nastavi matematike pri obradi kompleksnih brojeva

U ovom će poglavlju biti riječi o formalizmima koje učenici razvijaju, a vezani su za kompleksne brojeve. Kako bismo pokušali otkriti tipične formalizme vezane za kompleksne brojeve koji se javljaju u nastavi matematike, pitali smo nastavnike javljaju li se kod njihovih učenika formalizmi koje smo naveli. Također smo ih pitali da navedu još neke formalizme, osim onih koje smo naveli, ako ih kod svojih učenika uočavaju.

Anketu je ispunilo 18 nastavnika srednjih škola.

Formalizmi koji su navedeni u anketnom pitanju te broj nastavnika koji su označili te formalizme su dani u nastavku.

1. Učenik točno navodi formulu za $n-$ti korijen kompleksnog broja, ali je ne zna primijeniti u zadacima.

– 10 nastavnika je označilo ovaj formalizam

2. Učenik objašnjava da kod potenciranja imaginarne jedinice treba gledati ostatak pri dijeljenju eksponenta s 4, ali ne zna objasniti zašto.

– 9 nastavnika je označilo ovaj formalizam

3. Učenik točno objašnjava vezu algebarskog i trigonometrijskog prikaza kompleksnog broja, ali ne zna primijeniti u zadacima.

– 6 nastavnika je označilo ovaj formalizam

4. Učenik točno formulira kada su dva kompleksna broja jednaka, ali to ne zna primijeniti u zadacima.

– 5 nastavnika je označilo ovaj formalizam

5. Učenik točno formulira geometrijsku interpretaciju modula, ali ne zna odrediti modul konkretnog kompleksnog broja.

– 4 nastavnika je označilo ovaj formalizam

6. Učenik točno formulira definiciju kompleksno konjugiranog broja, ali ne zna odrediti kompleksno konjugirani broj konkretnog kompleksnog broja.

– 1 nastavnik je označio ovaj formalizam

Kao što je već rečeno, nastavnici su mogli napisati koje još, osim navedenih, formalizama uočavaju kod učenika vezane za kompleksne brojeve. Međutim, nisu naveli dodatne formalizme, osim već ponuđenih.

S obzirom na vrste formalizma, zaključeno je da se javlja sljedeći formalizam vezan za kompleksne brojeve. Neki učenici znaju reproducirati definicije vezane za kompleksne brojeve, ali ne shvaćaju njihov smisao pa ih, u skladu s time, ne znaju primijeniti u zadacima. Nastavnici bi trebali biti svjesni formalizama kod učenika te svoj sat provoditi na načine kojima bi se učenike poticalo na aktivno i svjesno usvajanje matematičkog gradiva.

5 Aktivnost za obradu kompleksne ravnine u GeoGebri

Svjesni mogućnosti postojanja formalizama u znanju učenika, nastavnici bi, za vrijeme nastave matematike, trebali stvarati situacije u kojima se učenike potiče na misaonu aktivnost i na svjesno usvajanje matematičkog gradiva. Također, nastavnici bi trebali stvarati situacije kojima se učenike potiče na samostalan rad. Drugim riječima, nastavnici matematike trebaju poštivati načelo aktivnosti i samostalnosti. U skladu s time i s tom svrhom, osmislila sam jednu aktivnost u digitalnom alatu GeoGebri za obradu kompleksne ravnine.

Aktivnost je namijenjena učenicima četvrtih razreda srednjih škola. Predviđeno vrijeme trajanja aktivnosti je jedan školski sat, odnosno 45 minuta, te je ona namijenjena za sat obrade novog nastavnog sadržaja „Kompleksna ravnina“. Cilj ove aktivnosti je da učenici sami istražuju kompleksnu ravninu te da pomoću poticajnih pitanja nastavnika usvajaju ishode iz Kurikuluma vezane za kompleksnu ravninu. Učenike će se na taj način potaknuti na misaonu aktivnost tijekom cijelog nastavnog sata. Ovom se aktivnosti potiče učenike na individualni rad. Za njeno izvođenje tijekom nastavnog sata, od nastavnih pomagala potrebna su računala na kojima su pripremljene izrađene datoteke u GeoGebri. Osnovne digitalne vještine potrebne su učenicima za izvršavanje ove aktivnosti, uz predznanje očekivano za njihov uzrast. Dakle, ovom se aktivnosti povezuje matematika s drugim nastavnim predmetom – informatikom.

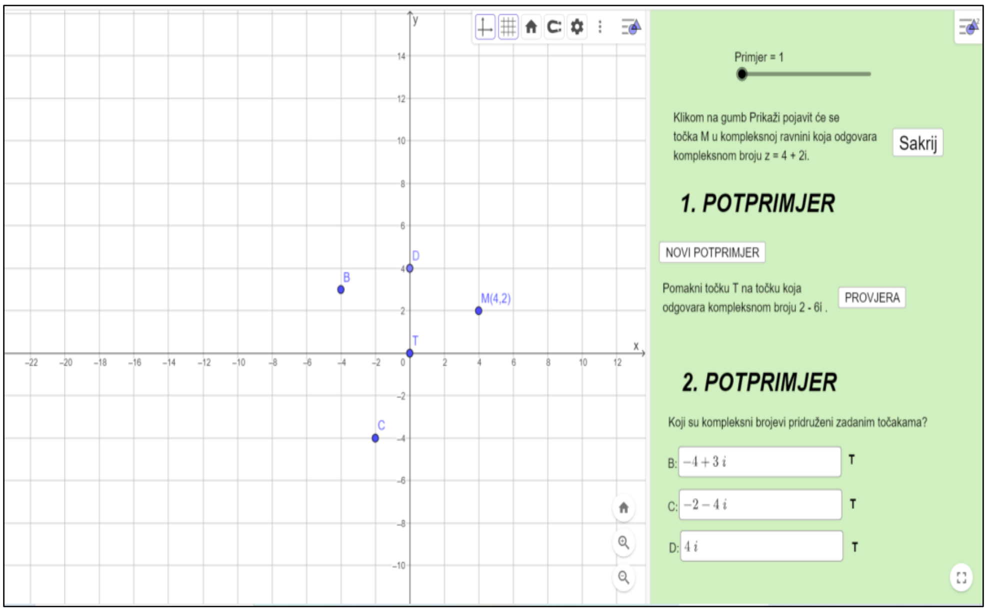
U nastavku ovog poglavlja bit će opisana cijela artikulacija nastavnog sata u sklopu koje se provodi spomenuta osmišljena aktivnost.

U uvodnom dijelu sata nastavnik potiče učenike na aktualiziranje prethodno ostvarenih postignuća vezanih za kompleksne brojeve te ih motivira i najavljuje glavni dio sata. U skladu s time, nastavnik s učenicima ponavlja algebarski oblik kompleksnog broja te kako se zbrajaju i oduzimaju kompleksni brojevi. Nakon toga, podsjeća ih da su realne brojeve prikazivali na brojevnom pravcu te najavljuje da će ovaj sat prikazivati kompleksne brojeve, ali ne na brojevnom pravcu, nego u koordinatnoj ravnini. Nakon toga nastavnik piše naslov „Kompleksna ravnina“ na ploči te kreće glavni dio sata.

Glavni dio sata predviđen je za provođenje aktivnosti u GeoGebri. Učenici, prema uputama nastavnika, otvaraju dobivenu datoteku u GeoGebri te kreću s istraživanjem kompleksne ravnine. Aktivnost se sastoji od tri primjera.

Primjer 1

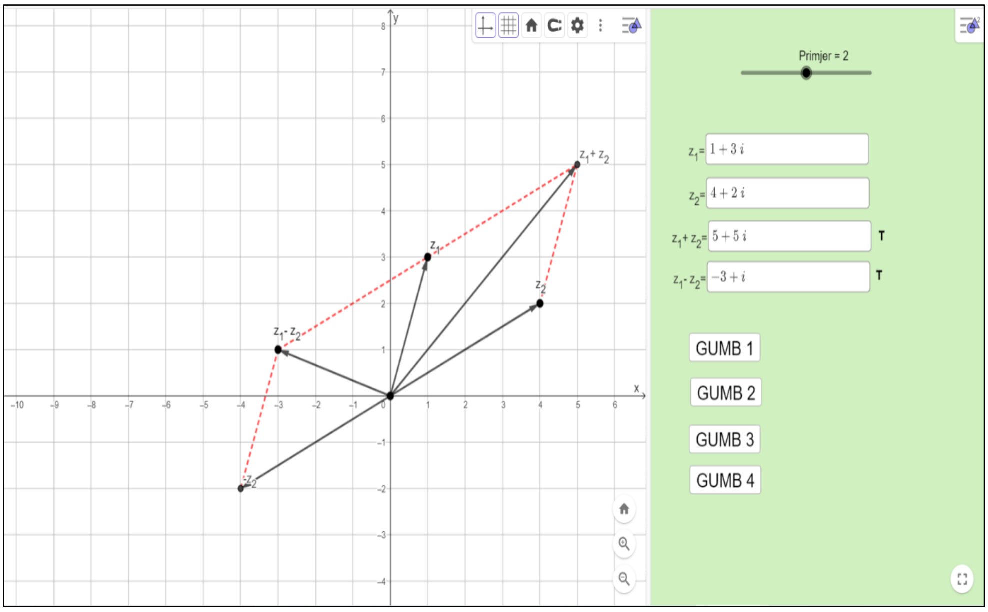
U prvom primjeru potrebno je da učenici kliknu na gumb *Prikaži* da bi im se pojavio kompleksan broj $z = 4 + 2i$ u kompleksnoj ravnini. Cilj ovog dijela primjera je da učenici uoče da se kompleksni brojevi prikazuju u kompleksnoj ravnini te na koji način. Nastavnik učenicima može postavljati poticajna pitanja poput: *Koliko iznosi x koordinata prikazane točke u ravnini, a koliko y koordinata? Čemu je jednak realni, a čemu imaginarni dio kompleksnog broja z? Možete li poopćiti i zaključiti općenito koja točka u ravnini odgovora kompleksnom broju $z = x + yi$? Gdje su u ravnini smješteni realni brojevi? Kako se nazivaju brojevi smješteni na osi ordinata?* Nakon što učenici zaključe da se kompleksnom broju pridružuje točka u ravnini, nastavnik učenicima može reći da se koordinatna ravnina u kojoj su, na opisani način, smješteni svi kompleksni brojevi zove kompleksna ili Gaussova ravnina. Također, navedenim pitanjima učenike može navesti na zaključak o imenima osi s obzirom na to jesu li na osi smješteni realni ili imaginarni brojevi. Nakon toga, učenik može krenuti s vježbanjem i provjerom naučenog. U sklopu prvog primjera nalaze se dva potprimjera. U prvom potprimjeru učeniku će se pojaviti konkretni kompleksni brojevi, a on ih treba prikazati točkama u kompleksnoj ravnini tako da pomakne točku T na odgovarajuće mjesto u kompleksnoj ravnini te klikne *Provjera*. Time dobiva povratnu informaciju o točnosti riješenog. Nakon toga, učenik prelazi na drugi potprimjer u kojem je potrebno odrediti kojemu je kompleksnom broju pridružena određena točka u kompleksnoj ravnini. Nakon svakog pokušaja javlja se povratna informacija o točnosti riješenog. Ishod koji se želi ostvariti ovim primjerom je: „Interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini (MAT SŠ A.4.3. i MAT SŠ C.4.1.).“, u sklopu kojeg se očekuje da učenik prikazuje kompleksni broj u Gaussovoj ravnini.



Slika 1: Prvi primjer u Geogebri

Primjer 2

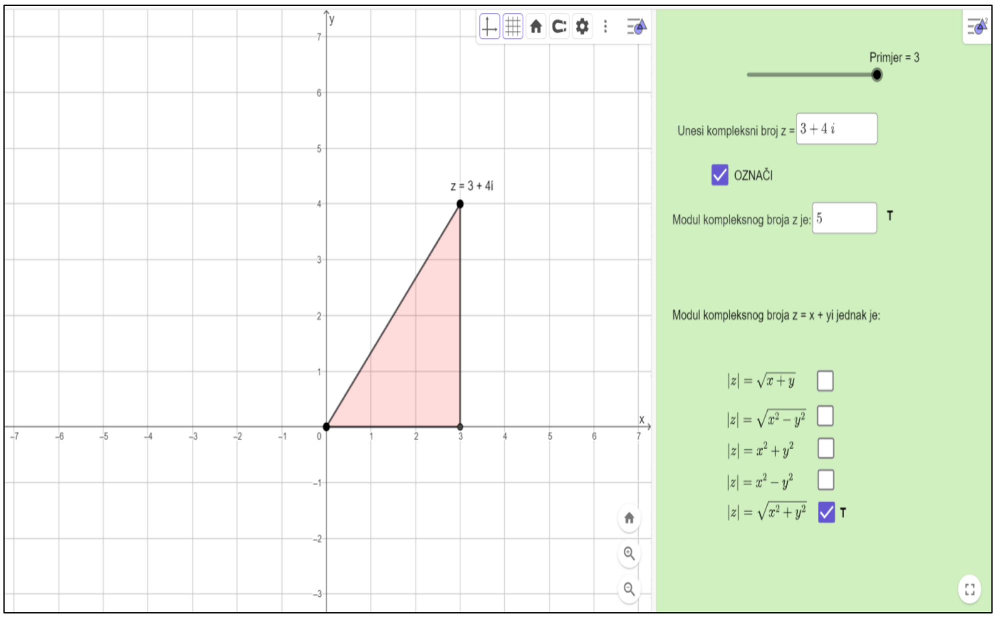
U ovom primjeru potrebno je najprije po volji napisati kompleksne brojeve $z_1 \ i \ z_2$ u za to predviđeno mjesto (tekstualno polje u GeoGebri). U kompleksnoj ravnini tim će se kompleksnim brojevima pridružiti odgovarajuće točke. Nakon toga, učenik treba računski odrediti zbroj i razliku tih kompleksnih brojeva te ih napisati u za to predviđeno mjesto. U slučaju da učenik krivo odredi te krivo napiše zbroj i razliku kompleksnih brojeva, pojavit će se slovo N pored njegovog unosa koje upućuje učenike na netočan odgovor. U slučaju točnog odgovora, pojavit će se slovo T te će se kompleksnom broju $z_1 + z_2$ i $z_1 - z_2$ pridružiti odgovarajuće točke u kompleksnoj ravnini. Nakon toga se pojavljuje gumb *Gumb 1* i *Gumb 2* te učenik kreće dalje s istraživanjem kompleksnih brojeva u GeoGebri. Prvo je potrebno da učenik klikne na gumb *Gumb 1* nakon čega će se pojaviti vektori s početkom u ishodištu i završetkom u točkama koje odgovaraju kompleksnim brojevima z_1, z_2 i $z_1 + z_2$. Nastavnik učenicima može postaviti pitanja poput: *Što uočavate, što se pojavilo? Koliko vektora je prikazano? Koje su početne, a koje krajnje točke tih vektora? Kako možemo dobiti vektor s početkom u ishodištu i završetkom u točki koja odgovara kompleksnom broju* $z_1 + z_2$*? Koja pravila za zbrajanje vektora znate?*. Nakon toga, klikom na gumb *Gumb 2* pojavljuje se paralelogram kojemu je četvrti vrh točka u kompleksnoj ravnini koja odgovara kompleksnom broju $z_1 + z_2$, a preostali vrhovi ishodište te točke u kompleksnoj ravnini koje odgovaraju kompleksnim brojevima z_1 i z_2. Time se želi da učenici zaključe da je točka u kompleksnoj ravnini pridružena kompleksnom broju $z_1 + z_2$ dobivena pravilom paralelograma odnosno da se kompleksni brojevi pri operaciji zbrajanja ponašaju na isti način kao i vektori. Klikom na gumb *Gumb 3* pokazuju se dva vektora s početkom u ishodištu i završetkom u točki pridruženoj kompleksnom broju $z_1 - z_2$ te točki pridruženoj kompleksnom broju $-z_2$ u kompleksnoj ravnini. Klikom na gumb *Gumb 4* pojavljuje se paralelogram kojemu je četvrti vrh točka u kompleksnoj ravnini koja odgovara kompleksnom broju $z_1 - z_2$, a preostali vrhovi su ishodište te točke u kompleksnoj ravnini koje odgovaraju kompleksnim brojevima z_1 i $-z_2$. Analogno kao i prije, nastavnik opet treba postaviti poticajna pitanja s ciljem da učenici zaključe koja je geometrijska interpretacija razlike dvaju kompleksnih brojeva. Ishod koji se želi ostvariti ovim primjerom je: „Interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini (MAT SŠ A.4.3. i MAT SŠ C.4.1.).“, u sklopu kojeg se očekuje da učenik interpretira geometrijsko značenje zbroja i razlike dvaju kompleksnih brojeva.



Slika 2: Drugi primjer u Geogebri

Primjer 3

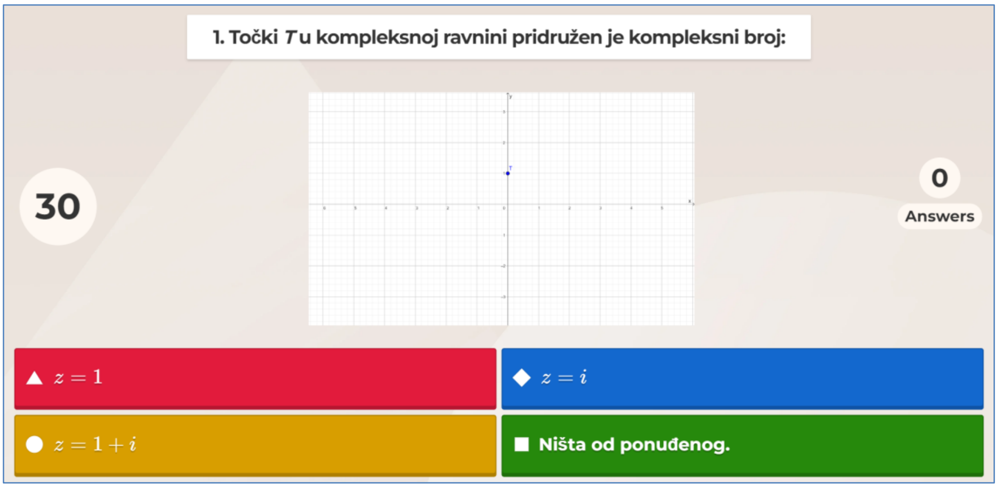
U zadnjem primjeru učenik prvo treba, u za to predviđeno mjesto, napisati po volji kompleksan broj te će se u kompleksnoj ravnini prikazati njemu odgovarajuća točka. Nastavnik učenike podsjeća da je modul realnog broja udaljenost tog broja od ishodišta brojevnog pravca te ih potiče da naprave analogiju s modulom kompleksnog broja. Znači, očekuje se da će učenici zaključiti da je modul kompleksnog broja udaljenost njemu odgovarajuće točke od ishodišta koordinatnog sustava. Nakon što označe potvrdni okvir *Označi* u kompleksnoj ravnini će se prikazati pravokutni trokut. Učenik treba izračunati duljinu hipotenuze tog pravokutnog trokuta, odnosno modul kompleksnog broja kojeg je napisao u tom primjeru. Izračunatu duljinu treba zaokružiti na dvije decimale. Nastavnik može postaviti pitanja poput: *Koji trokut uočavate? Kako ćete izračunati modul kompleksnog broja? Čemu je on jednak, duljini koje stranice trokuta?*. Kao i prije, učeniku će se javiti povratna informacija o točnosti riješenog. Na kraju ove aktivnosti potrebno je da učenik generalizira formulu za modul kompleksnog broja $z = x + yi$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$. Bit će mu ponuđeno više odgovora, a on treba označiti ispravan odgovor. Ishod koji se želi ostvariti ovim primjerom je: „Interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini (MAT SŠ A.4.3. i MAT SŠ C.4.1.).“, u sklopu kojeg se očekuje da učenik interpretira geometrijsko značenje modula i određuje modul kompleksnog broja.



Slika 3: Treći primjer u Geogebri

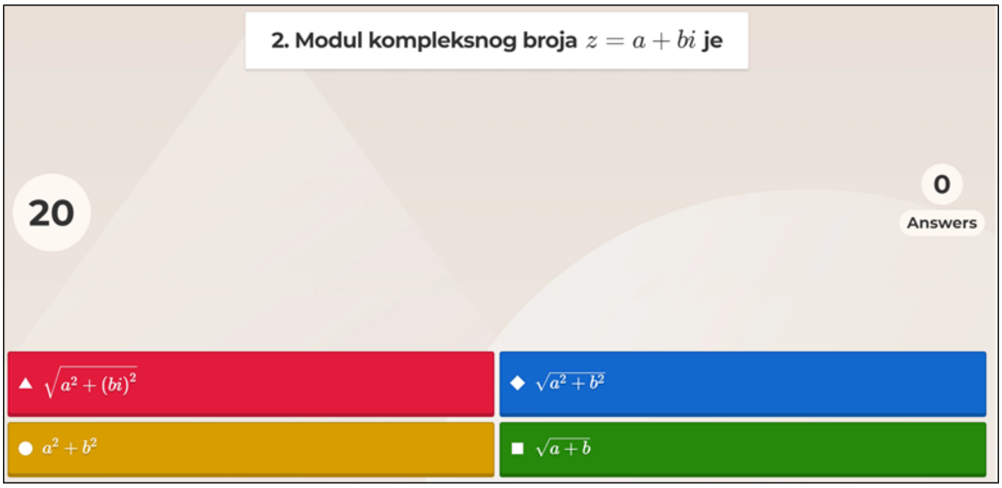
Nakon riješenog zadnjeg primjera završava glavni dio sata.

U završnom dijelu sata nastavnik provodi formativno vrednovanje učenika kojim provjerava usvojenost planiranih ishoda. Za provjeravanje usvojenosti planiranih ishoda izradila sam kratki Kahoot kviz za učenike koji se sastoji od pet pitanja. Na sljedećim slikama možemo vidjeti kako kviz izgleda te koja su pitanja postavljena učenicima u kvizu.



Slika 4: Prvo pitanje u kvizu za učenike

Očekuje se da će učenici uočiti da je točan odgovor na prvo pitanje $z = i$. Dodatno, u slučaju da bude vremena, nastavnik može s učenicima prokomentirati koje točke u kompleksnoj ravnini odgovaraju ostalim ponuđenim kompleksnim brojevima.

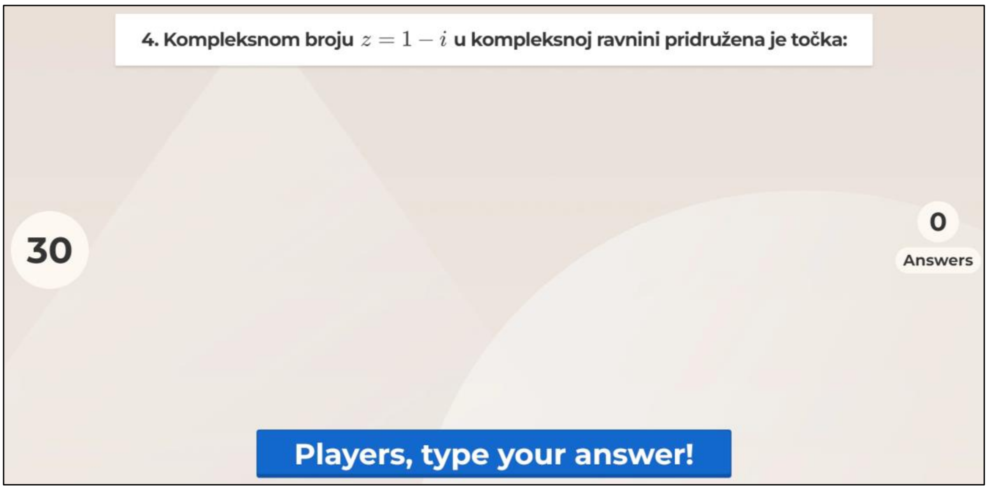


Slika 5: Drugo pitanje u kvizu za učenike

Točan odgovor na drugo pitanje je $\sqrt{a^2 + b^2}$. Nastavnik s učenicima može prokomentirati kako dobivamo taj izraz. Očekuje se da će učenici reći da se taj izraz dobiva pomoću Pitagorinog poučka što su i vidjeli u trećem primjeru iz GeoGebre.

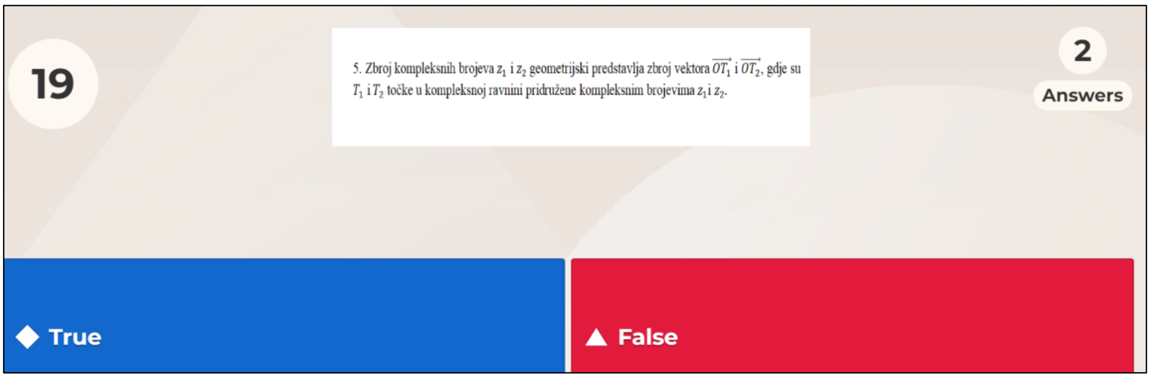
Slika 6: Treće pitanje u kvizu za učenike

Pogledajmo sada treće pitanje u kvizu. Očekuje se da će učenici uočiti da modul kompleksnog broja $z = -5 + 12i$ nije 169. U slučaju da bude vremena, nastavnik na kraju sata može s učenicima prokomentirati koji je modul tog kompleksnog broja. Očekuje se da će učenici reći da je modul tog kompleksnog broja 13.



Slika 7: Četvrto pitanje u kvizu za učenike

Točan odgovor na četvrto pitanje je $(1, -1)$ te se očekuje da će učenici dati taj odgovor.



Slika 8: Peto pitanje u kvizu za učenike

Očekuje se da će učenici uočiti da je tvrdnja o geometrijskoj interpretaciji zbrajanja kompleksnih brojeva iz petog pitanja točna.

Nakon što učenici odgovore na pitanja u kvizu te nastavnik s njima prokomentira njihove odgovore, završava nastavni sat.

Nastavnik po volji može GeoGebra datoteku promijeniti dodavši primjere pomoću kojih će učenici istraživati koje je geometrijsko značenje modula razlike dvaju kompleksnih brojeva, umnoška dvaju kompleksnih brojeva ili neki drugi sadržaj vezan za kompleksne brojeve kojima bi se ostvarivali neki od gore spomenutih ishoda.

Poveznica na izrađenu GeoGebra datoteku: https://www.geogebra.org/classic/s7wkbnqj.

6 Kompleksni brojevi na državnoj maturi

U ovom će poglavlju biti riječi o sadržajima državne mature koji uključuju kompleksne brojeve. Za početak, važno je spomenuti da se zadaci s kompleksnim brojevima nalaze samo na višoj, A, razini državne mature predmeta Matematika.

Do uvođenja Nacionalnog kurikuluma u ispitnim katalozima za državnu maturu predmeta Matematika spominju se obrazovni ishodi koji se ispituju, vezani za kompleksne brojeve, u sklopu sadržaja „skupovi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$“, a to su: „razlikovati skupove $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ (poznavati termine: prirodan, cijeli, racionalan, iracionalan, realan i kompleksan broj te razlikovati navedene brojeve)“, „upotrebljavati zapis kompleksnih brojeva u standardnome i trigonometrijskome obliku“, te „zbrajati, oduzimati, množiti, dijeliti, korjenovati, potencirati te određivati apsolutne vrijednosti kompleksnih brojeva“ u sklopu sadržaja „elementarno računanje“.

U ispitnim katalozima za državnu maturu predmeta Matematika od 2021./2022. kompleksni brojevi se javljaju u području ispitivanja „Brojevi“, potpodručju ispitivanja „Skupovi brojeva“, a odgojno-obrazovni ishodi vezani za kompleksne brojeve koji se spominju su: „Računa s kompleksnim brojevima. (MAT SŠ A.4.2.).“ te „Interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini. (MAT SŠ A.4.3., MAT SŠ C.4.1.).“. Dakle, jednaki su onima koji se spominju u Nacionalnom kurikulumu.

Korisno je spomenuti da je Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja objavio Preporuke za rješavanje ispita državne mature iz Matematike te da u istima nailazimo na preporuke vezane za kompleksne brojeve.

Najvažnija napomena koju navode je: „Ako je rezultat kompleksan broj, treba ga napisati u algebarskom $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ ili trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \in \mathbb{R}, r > 0, \varphi \in [0, 2\pi\rangle$.“

U nastavku navodimo primjere i objašnjenja iz Preporuke koji su važni za učenike.

<u>Primjer:</u> Neka je $z = 3 + 2i$. Koliko je $(iz\bar{z})^4$?

Kod tog primjera stavljena je napomena kojom navode da je očekivani odgovor 28561 ili 13^4. Međutim, odgovori $(13i)^4$, $28561i^4$ i slično nisu prihvatljivi jer nisu do kraja pojednostavljeni.

Dan je i sljedeći primjer.

<u>Primjer:</u> Izračunajte $\frac{(1-i)^8}{1+i}$.

Kod tog primjera stavljena je napomena kojom navode da je očekivani odgovor $8 - 8i$. Međutim, odgovor $\frac{16}{1+i}$ nije prihvatljiv jer nisu provedene sve naznačene računske operacije.

Zadnji primjer popraćen napomenom koju navode u spomenutoj Preporuci, a da je vezan za kompleksne brojeve, je sljedeći.

Primjer: Koliko iznosi umnožak $z \cdot w$ ako je $z = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$ i $w = 6(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$?

Kod tog primjera navode da je očekivani odgovor $z \cdot w = 6(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$, dok odgovor $z \cdot w = 6(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4})$ nije prihvatljiv jer $\frac{11\pi}{4} \notin [0, 2\pi\rangle$.

Dakle, i u nastavi matematike potrebno je pri obrađivanju kompleksnih brojeva imati na umu spomenute Preporuke i od učenika zahtijevati ono što je u skladu s Preporukom, tj. ono što je u skladu s načelima nastave matematike.

Napomenimo još za kraj ovog poglavlja da je od 18 ispitanih nastavnika srednjih škola koje se pitalo njih 12 reklo kako njihovi učenici ne „sređuju" rezultat do kraja, ako se to od njih eksplicitno ne traži u zadacima. U skladu s time, tih 12 nastavnika izjavilo je da njihovi učenici provode dijeljenje kompleksnih brojeva u algebarskome obliku kada se to traži u zadatku, ali ako se u nekom drugom zadatku u nazivniku pojavi imaginarna jedinica oni ne uočavaju potrebu za sređivanjem. To je povezano s napomenom iz Preporuke u sklopu primjera u kojem je potrebno izračunati $\frac{(1-i)^8}{1+i}$.

7 Kompleksni brojevi na natjecanjima iz matematike

Do sada smo se bavili problemima koji proizlaze iz formalnog učenja kompleksnih brojeva, a sada ćemo se baviti kompleksnim brojevima na matematičkim natjecanjima. Pripremanje učenika za natjecanje iz matematike često se provodi u okviru dodatne nastave matematike. Nastavnik treba biti svjestan zadataka i sadržaja koji su uključeni na matematičkim natjecanjima i tako pripremati učenike i pomoći im u ostvarivanju njihovih potencijala. Stoga, u ovom poglavlju bit će izdvojeni i riješeni neki zadaci s kompleksnim brojevima koji su se javljali na natjecanjima iz matematike.

Kompleksni brojevi se na natjecanjima iz matematike za drugi razred posljednji put javljaju 2019. godine. Nakon te godine, zadatke s kompleksnim brojevima nalazimo na natjecanjima iz matematike za četvrti razred. Razlog je i više nego jasan. Pojavom Kurikuluma, kompleksni brojevi su izborni sadržaj u drugom razredu srednje škole i takav sadržaj se ne javlja na natjecanjima iz matematike za učenike drugih razreda. U nastavku će se spominjati zadaci s natjecanja iz matematike A ili B varijante pa je pogodno napomenuti da su zadaci A varijante složeniji i namijenjeni učenicima prirodoslovno-matematičkih gimnazija, ali se u toj varijanti mogu natjecati i drugi učenici. Zadaci B varijante namijenjeni su učenicima svih srednjih škola, osim prirodoslovno-matematičkih gimnazija.

2. razred SŠ – B varijanta, državno natjecanje, 2011.

Nacrtajte u kompleksnoj ravnini skup točaka (x, y), *pridruženih kompleksnim brojevima* $z = x + yi$, *za koje vrijedi*

$$Re(z) \cdot Im(z) < 0 \ i \ |z|^2 \leq Im(z^2) + 1.$$

Izračunajte površinu tog skupa točaka.

Rješenje.

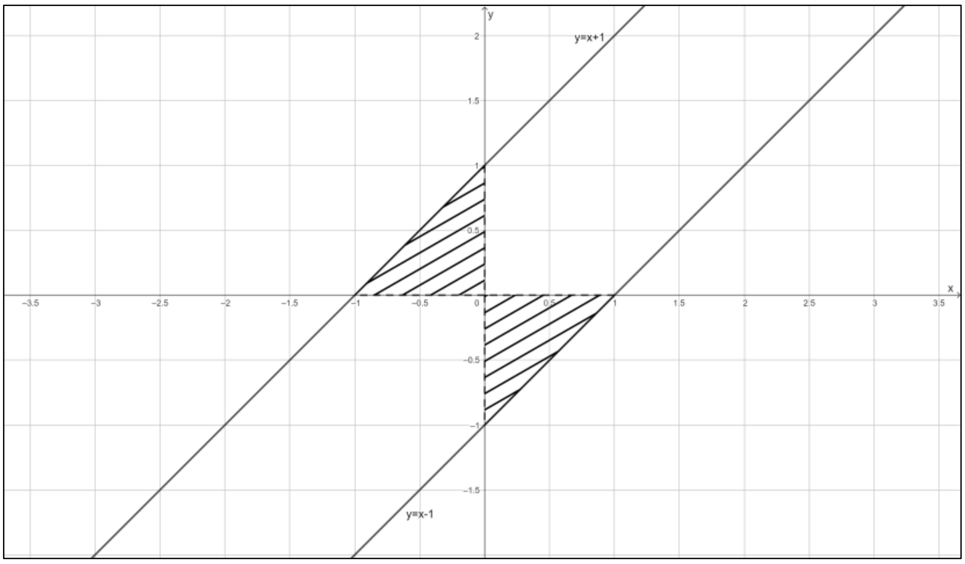
Za kompleksni broj $z = x + yi$ vrijedi da je $Re(z) = x$ i $Im(z) = y$ pa iz $Re(z) \cdot Im(z) < 0$ imamo $x \cdot y < 0$. Stoga, tražene točke pripadaju drugom ili četvrtom kvadrantu.

Kako je $|z|^2 = x^2 + y^2$ te $Im(z^2) = Im(x^2 + 2xyi - y^2) = 2xy$, iz $|z|^2 \leq Im(z^2) + 1$ imamo $x^2 + y^2 \leq 2xy + 1$.

Imamo $(x - y)^2 \leq 1$ ili $|x - y| \leq 1$. Dobivamo $-1 \leq x - y \leq 1$, odnosno $y \leq x + 1$ i $y \geq x - 1$.

Iz svega prethodno navedenog slijedi da je traženi skup točaka dio ravnine između pravaca $y = x + 1$ i $y = x - 1$, ali unutar drugog i četvrtog kvadranta s obzirom da koordinate traženih točaka zadovoljavaju $x \cdot y < 0$.

Na sljedećoj slici prikazan je dobiveni skup točaka u kompleksnoj ravnini.



Slika 9: Grafički prikaz rješenja zadatka

Potrebno je još odrediti površinu dobivenog skupa točaka. Uočimo da imamo dva pravokutna jednakokračna trokuta s katetama duljine 1. Možemo koristiti formulu za površinu pravokutnog trokuta $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta. U našem je slučaju, $a = b = 1$, stoga imamo $P = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 1$. Time je zadatak riješen u potpunosti.

4. razred SŠ – B varijanta, državno natjecanje, 2020.

U kompleksnoj ravnini nalazi se jednakostranični trokut ABC. Kompleksan broj $z = \sqrt{3} + 4i$ pridružen je vrhu C, a kompleksan broj $z = i$ središtu S tom trokutu opisane kružnice. Odredite kompleksne brojeve pridružene vrhovima A i B.

Rješenje.

S obzirom da svakom kompleksnom broju $z = x + yi$ odgovora točka $M(x, y)$ u kompleksnoj ravnini, kompleksnom broju $z = \sqrt{3} + 4i$ u kompleksnoj ravnini odgovara točka $(\sqrt{3}, 4)$ i to su koordinate točke C koja je jedan vrh trokuta ABC. Analogno, točka S ima koordinate $(0,1)$. Kako je točka S središte trokutu ABC opisane kružnice, duljina polumjera, u oznaci R, opisane kružnice trokutu ABC jednaka je udaljenosti točaka S i C (točka C pripada opisanoj kružnici).

Dakle, iz rečenog, slijedi

$$R = \sqrt{(0 - \sqrt{3})^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Kako je duljina polumjera opisane kružnice jednakostraničnog trokuta $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, slijedi da je $a = \frac{3R}{\sqrt{3}}$, odnosno $a = 6$.

Vrhovi, trokuta ABC, A i B pripadaju kružnici opisanoj trokutu ABC pa oni zadovoljavaju jednadžbu te opisane kružnice. S obzirom da je duljina polumjera spomenute opisane kružnice $2\sqrt{3}$, a njeno središte točka $S(0,1)$ dobivamo da je jednadžba[9] kružnice opisane trokutu ABC dana sa

$$x^2 + (y - 1)^2 = 12. \tag{1}$$

Trokut ABC je jednakostraničan, odnosno ima sve stranice jednake duljine, pa iz $|AC| = 6$ slijedi da je

$$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 4)^2 = 36. \tag{2}$$

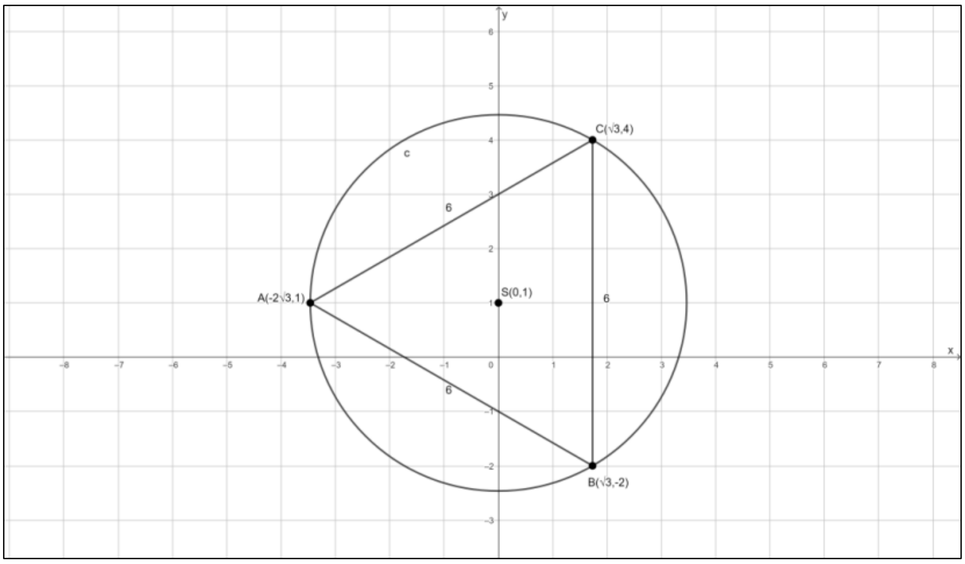
Iz $(1) - (2)$ i sređivanjem dobivenog, dobivamo $y = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Uvrstimo $y = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$ u jednadžbu (1) i dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0.$$

[9] Jednadžba kružnice sa središtem u točki $S(p, q)$ i polumjerom duljine r je $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe[10] su $x_1 = -2\sqrt{3}$ i $x_2 = \sqrt{3}$. Tada iz $y = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$ dobivamo da je $y_1 = 1$ i $y_2 = -2$.

Dakle, vrhu A pridružen je kompleksan broj $-2\sqrt{3} + i$, a vrhu B kompleksan broj $\sqrt{3} - 2i$, što je trebalo odrediti.



Slika 10: Grafički prikaz rješenja zadatka

4. razred SŠ – A varijanta, županijsko natjecanje, 2023.

Za svaki prirodan broj n neka su a_n i b_n realni brojevi takvi da je $(\sqrt{3} + i)^n = a_n + ib_n$.

Dokaži da izraz

$$\frac{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}{a_{n+1} a_n + b_{n+1} b_n}$$

poprima istu vrijednost za sve $n \in \mathbb{N}$ te odredi tu vrijednost.

Rješenje.

Neka je $z_1 := \sqrt{3} + i$.

Kompleksan broj z_1 u trigonometrijskom obliku je $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. Koristeći De Moivreovu formulu, imamo $z_n = {z_1}^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6})$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Kako je $(\sqrt{3} + i)^n = a_n + ib_n$, vrijedi da je $a_n = 2^n \cdot \cos\frac{n\pi}{6}$ i $b_n = 2^n \cdot \sin\frac{n\pi}{6}$. Dakle, imamo

[10] Kvadratna jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$, ima rješenja $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 4^n \left(\cos\frac{n\pi}{6} \sin\frac{(n+1)\pi}{6} - \cos\frac{(n+1)\pi}{6} \sin\frac{n\pi}{6} \right) =$$

$$= 4^n \sin(\frac{(n+1)\pi}{6} - \frac{n\pi}{6}) =$$

$$= 4^n \sin\frac{\pi}{6},$$

pritom smo koristili adicijsku formulu $sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

Analogno bismo dobili da je $a_{n+1} a_n + b_{n+1} b_n = 4^n \cos\frac{\pi}{6}$.

Iz svega prethodno rečenog slijedi $\frac{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}{a_{n+1} a_n + b_{n+1} b_n} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, dakle izraz poprima jednaku vrijednost za sve $n \in \mathbb{N}$ i ta vrijednost je $\frac{\sqrt{3}}{3}$, što je trebalo dokazati.

8 Anketa

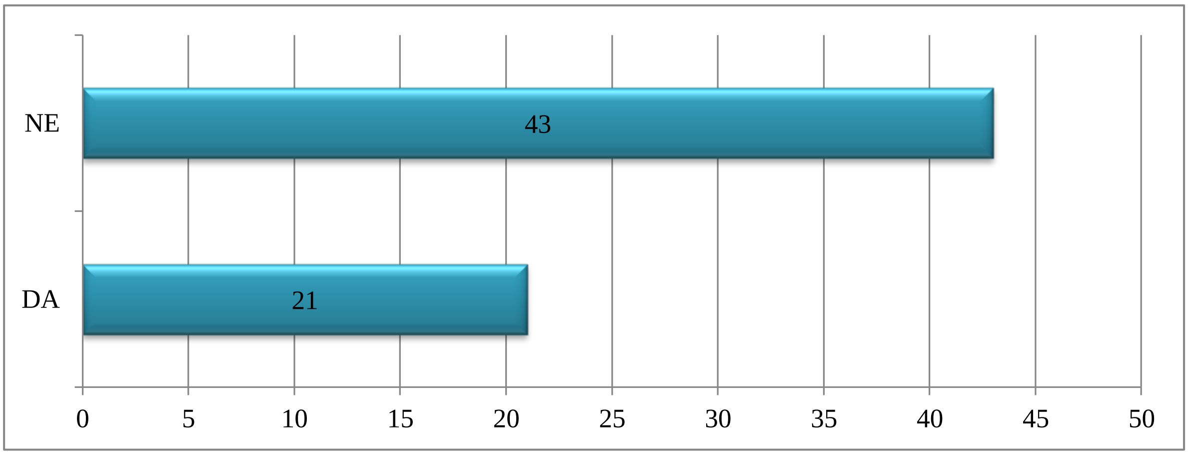
Kao što je već bilo rečeno, provedene su dvije ankete u kojima su nastavnici i učenici srednjih škola odgovarali na pitanja o nastavi matematike iz područja kompleksnih brojeva. Kratka anketa je provedena nad 64 učenika četvrtih razreda opće gimnazije te opsežnija anketa nad 40 nastavnika srednjih škola.

Prvo ćemo navesti pitanja za učenike te analizirati njihove odgovore.

Prvo pitanje postavljeno učenicima je:

„Smatrate li da su kompleksni brojevi teško shvatljivi?".

Na sljedećem grafikonu možemo vidjeti koliko je učenika odgovorilo da smatraju da su kompleksni brojevi teško shvatljivi, a koliko ih smatra da nisu.



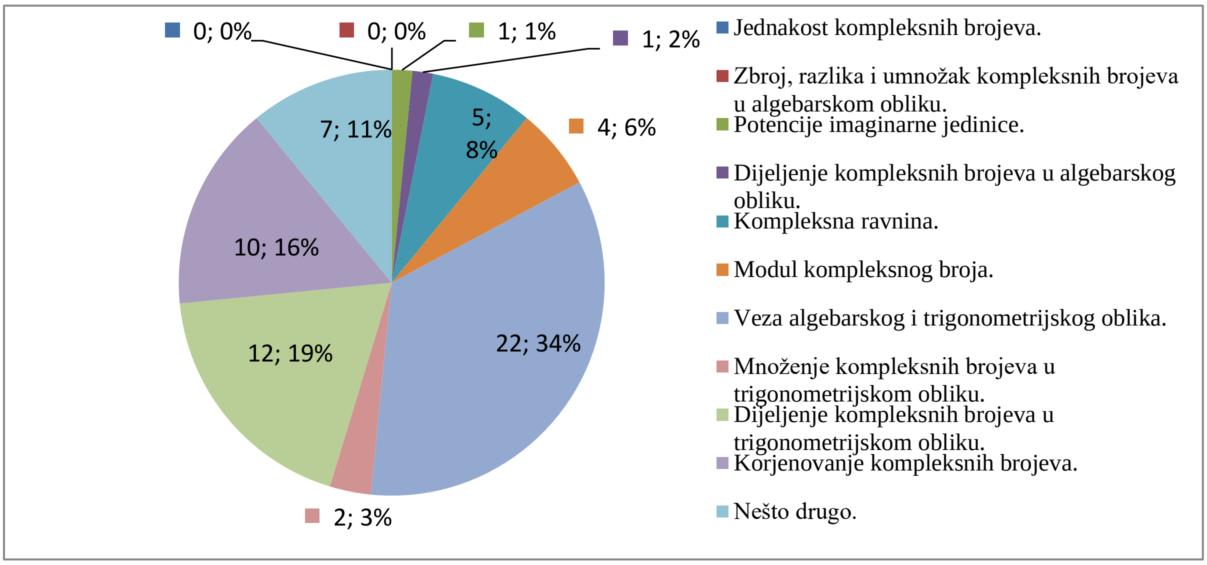
Slika 11: Analiza odgovora učenika na prvo pitanje iz ankete

Ovim se pitanjem htjelo vidjeti kako učenici doživljaju kompleksne brojeve i koliko ih smatraju teškima. Čak 43 ispitanih učenika kompleksne brojeve ne smatra teškima, dok njih 21 smatraju. Vidjet ćemo kasnije kako nastavnici na temelju svog iskustva odgovaraju na slično pitanje.

Sljedeće, posljednje, pitanje postavljeno učenicima je:

„Koji dio gradiva o kompleksnim brojevima vam je najteži za razumijeti?“.

Na sljedećem grafikonu možemo vidjeti kako su učenici odgovorili na prethodno navedeno pitanje.



Slika 12: Analiza odgovora učenika na drugo pitanje iz ankete

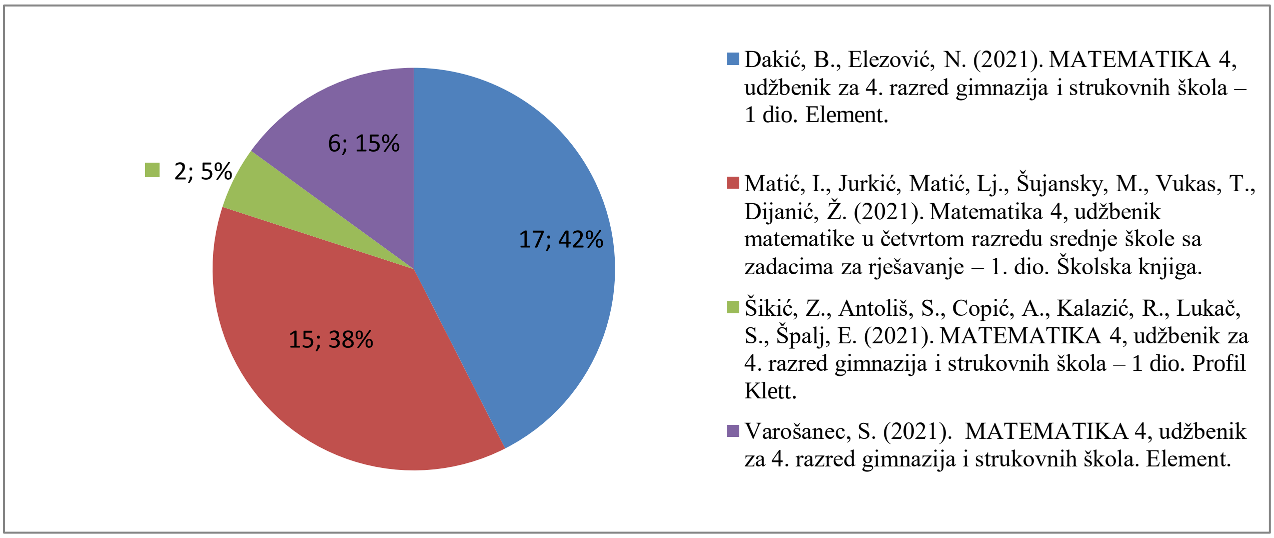
Drugim se pitanjem za učenike htjelo vidjeti koji dio gradiva o kompleksnim brojevima im je najteži za razumijeti. Vidjet ćemo u nastavku da se isto pitanje postavilo nastavnicima te su oni trebali odgovoriti što je, po njihovu mišljenju, najteže razumljivo za učenike. Također, vidjet ćemo poklapaju li se mišljenja nastavnika i učenika. Izdvojimo da je 22 ispitanih učenika izjavilo da im je najteže za razumijeti vezu algebarskog i trigonometrijskog oblika kompleksnog broja, 12 ispitanih učenika dijeljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku, 10 ispitanih učenika korjenovanje kompleksnih brojeva, dok 5 ispitanih učenika kompleksnu ravninu smatra teškom za razumijeti. Sedmero ispitanih učenika odgovorilo je s „Nešto drugo“, a u nastavku ankete neki su se izjasnili da smatraju da je sve o kompleksnim brojevima teško za razumijeti, dok neki da je sve o kompleksnim brojevima lagano.

Pogledajmo sada odgovore nastavnika.

Kao što je bilo i najavljeno, nastavnicima je bilo postavljeno pitanje:

„Koji udžbenik koriste Vaši učenici?“.

Sljedeća slika daje uvid u odgovore nastavnika.



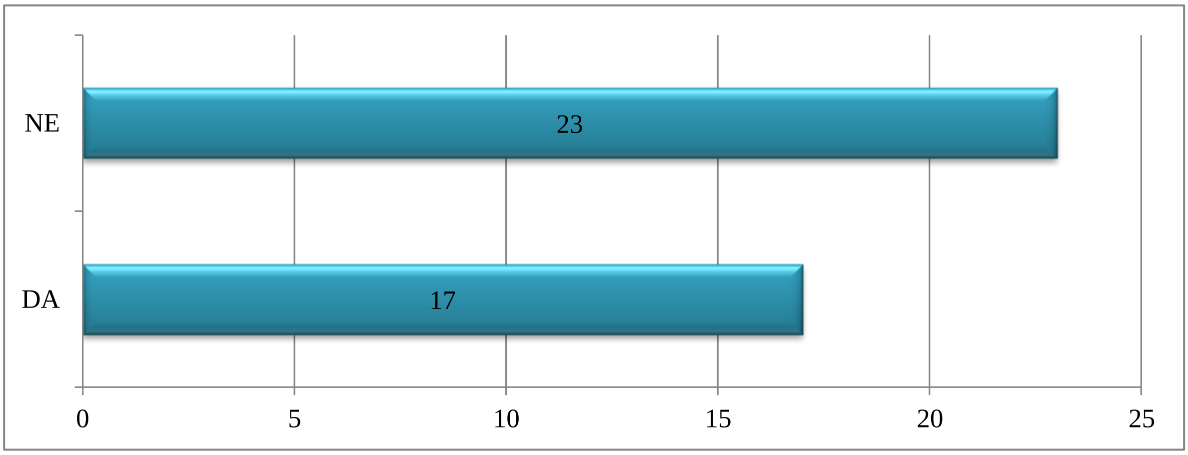
Slika 13: Analiza odgovora nastavnika na prvo pitanje iz ankete

Kao što vidimo, najveći broj nastavnika koristi udžbenike koji su analizirani u ovom diplomskom radu. Zapravo, na temelju odgovora na ovo pitanje odlučeno je koji će udžbenici biti analizirani.

Drugo pitanje postavljeno nastavnicima je:

„Smatrate li da su kompleksni brojevi učenicima teško shvatljivi?“.

Sljedeća slika daje uvid u odgovore nastavnika.



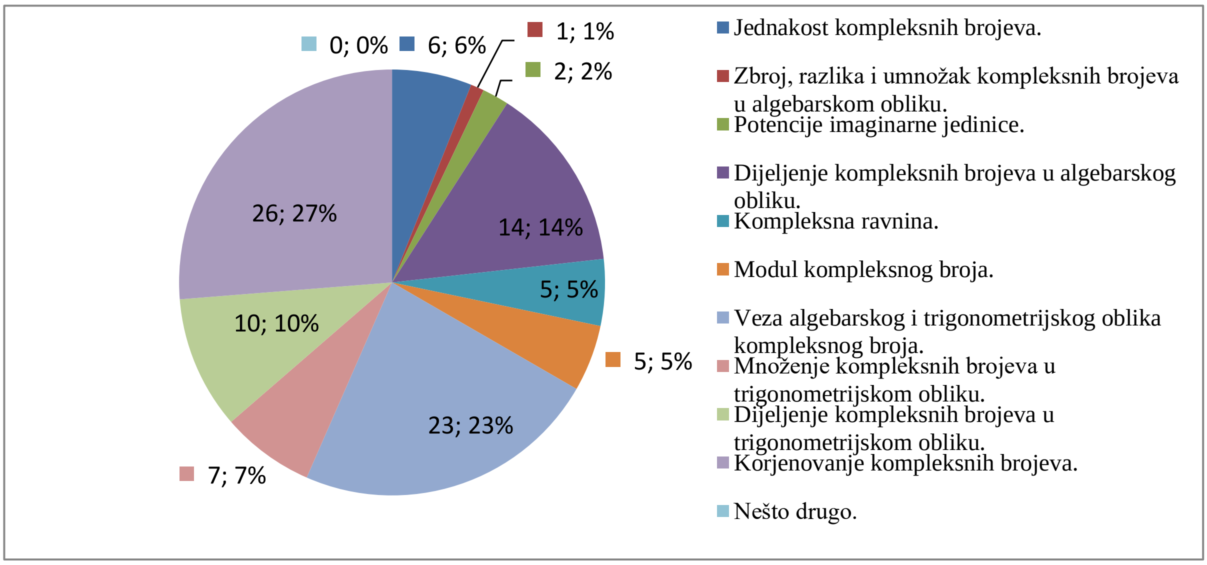
Slika 14: Analiza odgovora nastavnika na drugo pitanje iz ankete

Možemo vidjeti da veći broj nastavnika smatra da učenicima kompleksni brojevi nisu teško shvatljivi. To se poklapa i s odgovorima učenika.

Zatim je postavljeno treće pitanje nastavnicima:

„Koji dio gradiva o kompleksnim brojevima je učenicima najteži za razumijeti?“.

Sljedeća slika daje uvid u odgovore nastavnika.



Slika 15: Analiza odgovora nastavnika na treće pitanje iz ankete

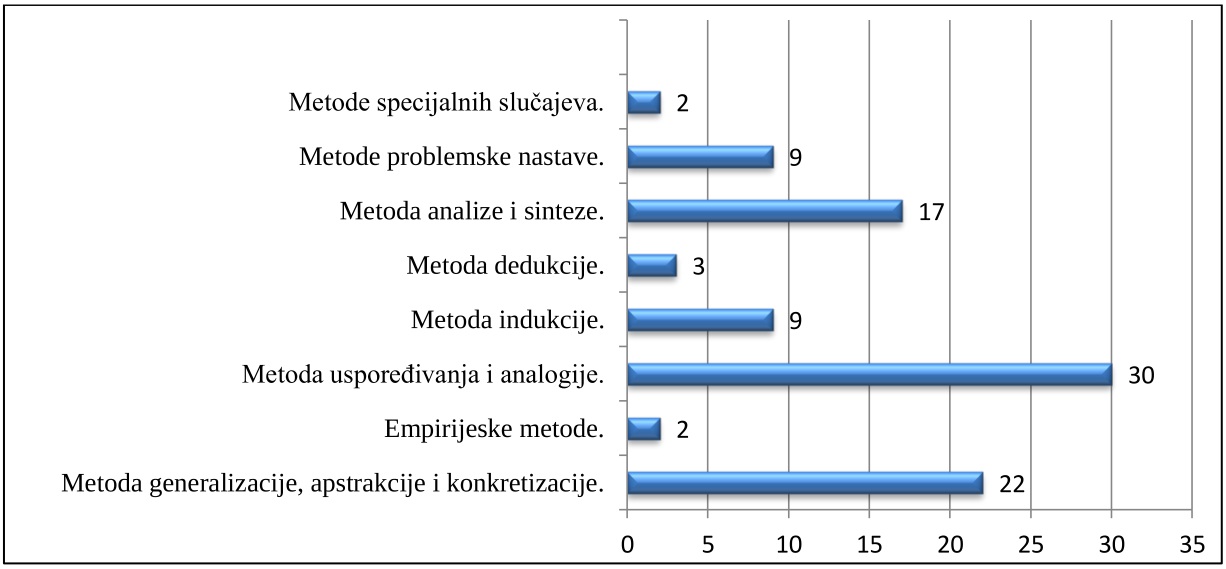
Naglasimo da je jedan nastavnik mogao označiti više ponuđenih odgovora. Izdvojimo najčešće odgovore nastavnika na treće pitanje. Možemo uočiti da 26 ispitanih nastavnika smatra da je učenicima najteže za razumijeti korjenovanje kompleksnih brojeva, 23 ispitanih nastavnika smatra da je učenicima najteže za razumijeti vezu algebarskog i trigonometrijskog oblika kompleksnog broja, dok ih 14 smatra da im je najteže za razumijeti dijeljenje kompleksnih brojeva u algebarskom obliku.

Dakle, među najčešćim odgovorima i nastavnika i učenika na ovo pitanje je korjenovanje kompleksnih brojeva i veza algebarskog i trigonometrijskog oblika kompleksnog broja. Korisno je uzeti dobivene rezultate u obzir te usmjeriti veću pozornost prilikom obrade tog dijela gradiva. Naravno, ne zanemarujući ostalo.

Četvrto pitanje postavljeno nastavnicima je:

„Koje su metode nastave matematike najčešće prisutne na Vašoj nastavi pri obradi kompleksnih brojeva?“.

Sljedeća slika daje uvid u odgovore nastavnika.



Slika 16: Analiza odgovora nastavnika na četvrto pitanje iz ankete

Napomenimo da ovo pitanje treba shvatiti uvjetno, s obzirom da nisu dana objašnjenja svake od navedenih metoda. Naglasimo da je jedan nastavnik mogao označiti više ponuđenih odgovora. Ovim smo pitanjem htjeli vidjeti, prema mišljenju nastavnika, koje su to najčešće prisutne metode nastave matematike prilikom obrade kompleksnih brojeva. Uočimo da nastavnici najviše obrađuju kompleksne brojeve primjenom metode uspoređivanja i analogije, metode generalizacije, apstrakcije i konkretizacije te metode analize i sinteze. Zaista, proučavajući udžbenike mogli smo i tamo vidjeti prisutnost spomenutih metoda. Iako metoda analize i sinteze nije naglašavana, jasno je da je prisutna u udžbenicima jer oni sadrže brojne odredbene i dokazne zadatke vezane za kompleksne brojeve. Na primjer, drugi po redu izdvojeni zadatak s natjecanja je primjer odredbenog zadatka, a treći po redu izdvojeni zadatak je primjer dokaznog zadatka.

Naknadno je nastavnicima postavljeno pitanje koje se na četvrto pitanje nadovezuje, a ono je:

„*Navedite barem jednu primjenu gore spomenutih metoda u obradi kompleksnih brojeva u Vašoj nastavi.*“.

Izdvojit ćemo neke relevantne odgovore. Nastavnici navode da metodu uspoređivanja i analogije primjenjuju prilikom obrade dijeljenja kompleksnih brojeva u algebarskom zapisu, pozivajući se na analogiju s racionalizacijom nazivnika. Istu metodu primjenjuju i prilikom prikazivanja kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i računanja njihovog modula pozivajući se na analogiju s prikazom realnih brojeva na brojevnom pravcu i računanje njihove apsolutne vrijednosti, odnosno modula. Metodu generalizacije primjenjuju prilikom određivanja vrijednosti potencije imaginarne jedinice, a navode da svojstvo modula umnoška uočavaju na određenom broju primjera pa generaliziraju nepotpunom indukcijom. Za kraj analiziranja odgovora na ovo pitanje, nastavnik navodi da primjenjuje metodu problemske nastave pomoću problemskog zadatka: *„Odredi vrhove šesterokuta u kompleksnoj ravnini.“*. Korisno je proučavati kako nastavnici primjenjuju određene metode nastave matematike prilikom obrade kompleksnih brojeva i tako proširiti mogućnosti vlastite primjene tih metoda.

Prisjetimo se da smo pitanje vezano za formalizme analizirali u poglavlju *Formalizmi u nastavi matematike pri obradi kompleksnih brojeva*, stoga završavamo s ovim poglavljem.

9 Zaključak

U ovom smo diplomskom radu naveli odgojno-obrazovne ishode propisane Kurikulumom vezane za kompleksne brojeve kao i načine obrade kompleksnih brojeva u dva najčešće korištena aktualna udžbenika, uz naglasak na prisutnost nekih metoda nastave matematike. Dana je i usporedba tih udžbenika s dva udžbenika koja su bila aktualna znatno prije uvođenja Kurikuluma. Očekivano, uočili smo da je promjena u Kurikulumu uzrokovala i promjenu u nastavi matematike pri obradi kompleksnih brojeva te da oni više nisu obavezni sadržaj u drugom razredu srednje škole. Kvadratne jednadžbe se obrađuju u drugom razredu srednje škole. Činjenica da se kompleksni brojevi ne obrađuju u drugom razredu srednje škole, imat će za posljedicu da se niti kvadratne jednadžbe neće u potpunosti obraditi s obzirom na njihova rješenja. Smatram da je bitno s učenicima nakon obrade kompleksnih brojeva u četvrtom razredu srednje škole ponoviti kvadratne jednadžbe kako bi i oni sami uvidjeli što se promijenilo uvođenjem novog skupa brojeva. Također, mogli smo vidjeti rezultate provedene ankete u sklopu koje se, među ostalim, nalaze i formalizmi vezani za kompleksne brojeve. Korisno je da je nastavnik svjestan formalizama koji se javljaju kod učenika i da pokušava stvarati situacije kojima će spriječavati stvaranje tih formalizma, koliko god je moguće. U skladu s time, osmislili smo i prikazali aktivnosti u GeoGebri kojom bi učenici istraživali kompleksnu ravninu. Smatram da je učenicima taj način učenja zabavniji i da su više motiviraniji za rad. Kako svi učenici nisu isti, tako nailazimo na učenike koji svoje potencijale pokazuju na natjecanjima iz matematike, stoga smo u radu prikazali sadržaj vezan za kompleksne brojeve koji se javlja na matematičkim natjecanjama. Neki zadaci s tih natjecanja su izdvojeni i detaljno su prikazana njihova rješenja. Imali smo prilike vidjeti kako rješavanje tih zadataka uključuje povezivanje matematičkog gradiva koje su učenici učili prije kompleksnih brojeva s gradivom o kompleksnim brojevima.

Iako su kompleksni brojevi naoko apstraktni, oni imaju široku primjenu, na primjer, u fizici i elektrotehnici. Zanimljivo je da su sljedeće slike upravo utemeljene na kompleksnim brojevima, a zapravo je riječ o fraktalima.

Slika 17: Fraktali [6] i [7]

Popis slika

Slika 1: Prvi primjer u Geogebri 26
Slika 2: Drugi primjer u Geogebri 28
Slika 3: Treći primjer u Geogebri 29
Slika 4: Prvo pitanje u kvizu za učenike 29
Slika 5: Drugo pitanje u kvizu za učenike 30
Slika 6: Treće pitanje u kvizu za učenike 30
Slika 7: Četvrto pitanje u kvizu za učenike 31
Slika 8: Peto pitanje u kvizu za učenike 31
Slika 9: Grafički prikaz rješenja zadatka 34
Slika 10: Grafički prikaz rješenja zadatka 36
Slika 11: Analiza odgovora učenika na prvo pitanje iz ankete 37
Slika 12: Analiza odgovora učenika na drugo pitanje iz ankete 38
Slika 13: Analiza odgovora nastavnika na prvo pitanje iz ankete 39
Slika 14: Analiza odgovora nastavnika na drugo pitanje iz ankete 39
Slika 15: Analiza odgovora nastavnika na treće pitanje iz ankete 40
Slika 16: Analiza odgovora nastavnika na četvrto pitanje iz ankete 41
Slika 17: Fraktali [6] i [7] 42

LITERATURA

[1] Agarwal, P., R., Perera, K., Pinelas, S. (2011). *An Introduction to Complex Analysis*. Springer.

[2] Beman, W., W. (1897). *A Chapter In The History Of Mathematics.*

URL: https://www.jstor.org/stable/1623297 (28.8.2023.)

[3] Elezović, N. (1996). *MATEMATIKA 4*, udžbenik za 4. razred gimnazije. Element.

[4] Elezović, N. (1997). *MATEMATIKA 2*, udžbenik za 2. razred gimnazije. Element.

[5] Dakić, B., Elezović, N. (2021). *MATEMATIKA 4*, udžbenik za 4. razred gimnazija i strukovnih škola – 1 dio. Element.

[6] *Fraktali*, Galaksija

URL: https://www.galaksija.hr/tekst/Fraktali/1095 (26.5.2023.)

[7] *Fraktal*, Wikipedia

URL: https://hr.wikipedia.org/wiki/Fraktal (26.5.2023.)

[8] Glasnik Ministarstva kulture i prosvjete Republike Hrvatske, Nastavni programi za gimnazije, Zagreb, 1994.

URL: https://www.edusinfo.hr/Appendix/PLPREDUS_HR//PLPREDUS201Y1994T1H1463988290_12_1.pdf (26.5.2023.)

[9] Krizmanić, D. (2018/19). *Matematička analiza 1.*

[10] *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, 2019.

URL: https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html (26.5.2023.)

[11] Matematička natjecanja

URL: https://natjecanja.math.hr/ (26.5.2023.)

[12] Matić, I., Jurkić, Matić, Lj., Šujansky, M., Vukas, T., Dijanić, Ž. (2021). *Matematika 4*, udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje – 1. dio. Školska knjiga.

[13] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja

URL: https://www.ncvvo.hr/ (26.5.2023.)