

# Liejeva grupa $SE(3)$ i transformacije u prostoru

---

Čorak, Lovro

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:196:911803>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku  
Prijediplomski sveučilišni studij Matematika

Lovro Čorak

# Liejeva grupa $SE(3)$ i transformacije u prostoru

**Mentor:** doc. dr. sc. Marijana Butorac

Završni rad  
Rijeka, Lipanj 2023.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Glavni dio</b>	<b>4</b>
2.1	Grupa $SE(3)$ . . . . .	4
2.2	Liejeva algebra grupe $SE(3)$ . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Primjena u robotici</b>	<b>9</b>
3.1	Robotika . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Programiranje pokreta robota</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>19</b>
	Popis slika . . . . .	20
	Literatura . . . . .	21

## Sažetak

Ovim radom će se uvesti pojam specijalne euklidske grupe  $\mathbf{SE}(3)$ , kao primjer matrične Liejeve grupe i pojam Liejeve algebre  $\mathbf{se}(3)$ . U drugom dijelu rada će se istražiti simulacija pomicanja robotske ruke korištenjem programa Anaconda i Pybullet simulatora.

## Ključne riječi

Grupa, Liejeva grupa,  $\mathbf{SE}(3)$ , robot, zglob, rotacija, algebra, Liejeva algebra, Anaconda, PyBullet.

# Poglavlje 1

## Uvod

U ovome radu ćemo započeti uvođenjem grupa, te od tog pojma nastaviti graditi sve do složenih pojmova kao što su Liejeve grupe i Liejeve algebre, koji su nam važni za opisivanje kretanja robotske ruke. Nakon teorije će biti dat primjer simulacije robota u Pythonu koji se nalazi u literaturi [1].

Grupe su bile poznate još u doba starih Grka, ali prvi put korištene kao pojam 1830.-ih od strane Évariste Galois (25.10.1811.–31.5.1832.). Kada je objavio svoj rad, Galois je zanimalo razumijevanje strukture algebarskih jednadžbi i simetrije koje se djelovale na iste kako bi dobili ekvivalentne oblike. Nakon ovih otkrića Sophus Lie (17.12.1842.–18.2.1899.), razvija teoriju Liejevih grupa i Liejevih algebri, koje su primjer algebarske strukture. Tokom razvoja ovih grana matematike, 1970-ih i ranih 1980-ih počinju se koristiti Liejeve algebre i Liejeve grupe u robotici, a prvi među njima je bio R.W.Brocketta (22.10.1938.-18.3.2023.)

Ovaj rad se sastoji od dva dijela. U prvom dijelu je uvedena specijalna Euklidska grupa  $SE(\mathbf{3})$  i njena Liejeva algebra  $se(\mathbf{3})$ . Te algebarske strukture su pronašle primjenu u robotici. Cilj prvog dijela je prateći rad autora Y. Ma i suradnika, uvesti neka svojstva tih algebarskih struktura koje se koriste u robotici. U drugom dijelu ovog rada proučava se kod koji se koristi u simulaciji pokreta robotske ruke.

Na primjeru u Geogebri pručava se simulacija pokreta ruke s dva zgloba. U posljednjem dijelu opisan je kod iz [1], koji se koristi u simulaciji pokreta robotske ruke.

# Poglavlje 2

## Glavni dio

### 2.1 Grupa $\mathbf{SE}(3)$

Kako bi krenuli graditi teoriju iza pokretanja robotskih zglobova potrebno je uvesti osnovne pojmove. Nakon toga ćemo postupno doći do pokretanja zglobova našeg robota.

**Definicija 2.1.1** [2] *Grupa* je uređeni par nepraznog skupa  $S$  i binarne operacije  $\cdot : S \times S \rightarrow S$  na tom skupu za koju vrijedi sljedeće:

1.  $a, b, c \in S, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (**Asocijativnost**)
2.  $\exists i \in S, a \cdot i = i \cdot a = a, \forall a \in S$  (**Neutral**)
3.  $\forall a \in S, \exists a' \in S, a \cdot a' = a' \cdot a = i$  (**Inverz**)

**Primjer 2.1.1**  $(\mathbb{Z}, +)$  i  $(\mathbb{R}, +)$  su grupe dok  $(\mathbb{N}, +)$  i  $(\mathbb{Z}^*, +)$  nisu grupe.

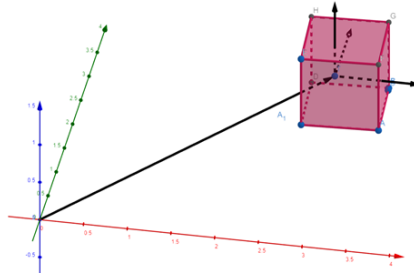
Početi ćemo definiranjem specijalne ortogonalne grupe ( $\mathbf{SO}(3)$ ). Elementi grupe su ortogonalne matrice iz skupa matrica  $M_3(\mathbb{R})$  čija determinanta iznosi 1.

**Definicija 2.1.2** [2] Za kvadratnu matricu  $A$  kažemo da je ortogonalna ako vrijedi da je transponirana matrica od  $A$  jednaka inverznoj matrici  $A$ , odnosno ako vrijedi:  
 $A^T = A^{-1}$ .

Elementi grupe  $\mathbf{SO}(3)$  su rotacije u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru zapisane pomoću matrica. Uz ovu grupu potrebno je još uvesti i vektor pomaka u  $\mathbb{R}^3$  jer se rotacije koje obavljamo ne moraju uvijek obavljati u ishodištu našeg sustava (kao što je prikazano na slici 2.1). Vektor pomaka će izgledati kao stupčasta matrica oblika:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ .

Kartezijev produkt skupova  $\mathbf{SO}(3)$  i  $\mathbb{R}^3$  zovemo specijalna Euklidska grupa. To je skup  $\mathbf{SE}(3) = \{g = (R, T) | R \in \mathbf{SO}(3), T \in \mathbb{R}^3\} = \mathbf{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$  koji je jednak skupu blok-matrica

$$\mathbf{SE}(3) = \left\{ \begin{bmatrix} R & | & T \\ \hline - & - & - \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix} \mid R \in \mathbf{SO}(3), T \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$



Slika 2.1: Geometrijski prikaz iz motivacije za uvod grupe  $\mathbf{SE}(3)$

**Teorem 2.1.1** [9] *Uređeni par  $(\mathbf{SE}(3), \cdot)$  je grupa, s binarnom operacijom množenja matrica.*

Dokaz:

Kako bi dokazali da je nešto grupa najjednostavnije je ispitati svojstva koja binarna operacija mora zadovoljavati kako bi taj uređeni par bio grupa.

$$A, B \in \mathbf{SE}(3)? \implies A \cdot B \in \mathbf{SE}(3).$$

Ovo slijedi iz definicije množenja matrica.

$$1. A, B, C \in \mathbf{SE}(3)? \implies A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$$

Ovo svojstvo vrijedi zato što vrijedi asocijativnost množenja matrica.

$$2. \exists I \in S, A \cdot I = I \cdot A = A, \forall A \in \mathbf{SE}(3)$$

Kod množenja matrica općenito znamo da je jedinična matrica neutral, pa je tako i u ovom slučaju. Ovdje zapravo vidimo zašto smo uveli zadnji redak kao dva bloka sastavljena od nul-matrice i jedinične matrice.

$$3. \forall A \in S, \exists A' \in S, A \cdot A' = A' \cdot A = I$$

Kako bi matrica imala inverz mora vrijediti da je njena determinanta različita od

nula. Determinantu matrice oblika  $\begin{bmatrix} R & | & T \\ - & & - \\ 0 & | & D \end{bmatrix}$  iznosi  $\det(R) * \det(D)$ . Pošto je R

matrica iz  $\mathbf{SO}(3)$  njena determinanta je jedan, slijedi da je  $\det(A)=1, \forall A \in \mathbf{SE}(3)$ .

Time vrijedi naravno da je determinanta takvih matrica različita od nula i tako vrijedi da postoji inverz za istu. Inverz blok matrice A (s istim oznakama za blokove)

je oblika  $\begin{bmatrix} R^{-1} & | & -R^{-1} \cdot T \\ - & & - \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix}$ .  $\square$

## 2.2 Liejeva algebra grupe $\mathbf{SE}(3)$

Kako bi uveli Liejevu algebru grupe  $\mathbf{SE}(3)$  prvo se moramo dotaknuti matričnih Liejevih grupa, stoga većinu tvrdnji izlažemo bez dokaza.

Krećemo uvođenjem vektorskog prostora nad poljem  $\mathbb{R}$ . Znamo da je oznakom  $\text{Hom}(V)$  označen vektorski prostor linearnih operatora definiranih na vektorskom prostoru. Označimo sad s  $M_n(\mathbb{F})$  (gdje je  $n = \dim(V)$ ) skup kvadratnih matrica s elementima iz  $\mathbb{F}$ . Vektorski prostor  $\text{Hom}(V)$  je izomorfan s vektorskim prostorom  $M_n(\mathbb{F})$ .  $M_n(\mathbb{F})$  je unitaran prostor s operacijom skalarnog množenja definiranom na sljedeći način:

$$(A, B) = \text{tr}(A \cdot B^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}; \forall A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Na unitarnom prostoru  $M_n(\mathbb{F})$  imamo normu induciranu skalarnim množenjem:

$$\|A\| = \sqrt{(A, A)} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}).$$

Pošto je  $M_n(\mathbb{F})$  konačno dimenzionalan vektorski prostor sve norme su ekvivalentne na  $M_n(\mathbb{F})$ , dakle slijedi da induciraju jednu topologiju.

Neka je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz matrica. Za takav niz kažemo da konvergira ka  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ako  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$  kad  $n \rightarrow \infty$ . (\*)

Uzmimo  $S \subseteq M_n(\mathbb{R})$ . Za taj skup vrijedi da je zatvoren ako za proizvoljan konvergentan niz  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  u  $S$ , skup  $S$  sadrži  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ka kojem niz konvergira.

**Definicija 2.2.1** [7] *Matrična Liejeva grupa  $G$  je podgrupa od  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  za koju vrijedi ako je  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz matrica u  $G$  i da isti konvergira ka nekoj matrici  $A$ , tada je  $A \in G$  ili  $A$  nije regularna matrica.*

**Primjer 2.2.1**  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  je matrična Liejeva grupa.

**Propozicija 2.2.1** [11] *Grupa  $\mathbf{SE}(3)$  je matrična Liejeva grupa.*

Dokaz:

Znamo da je determinanta elemenata grupe  $\mathbf{SE}(3)$  jednaka 1 (iz dokaza da je grupa, točnije kod inverza). Odavde slijedi da je  $\mathbf{SE}(3)$  zatvorena podgrupa od  $\mathbf{GL}(4)$ .  $\square$

**Napomena 2.2.1** *Matrične grupe su primjeri Liejevih grupa, ali nisu sve matrične grupe Liejeve i nisu sve Liejeve grupe ujedno i matrične.*

**Definicija 2.2.2** [11] *Liejeva algebra je algebra (označimo s  $\mathfrak{g}$ ) s operacijom  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  za koju vrijede sljedeća svojstva:*

**(L1):**  $[a, a] = 0, \forall a \in \mathfrak{g}$

**(L2):** (Jacobijev identitet)  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0, \forall a, b, c \in \mathfrak{g}$

**Napomena 2.2.2** *Novo definirana operacija se naziva komutator. Liejeve algebre ne moraju nužno biti asocijativne ili komutativne.*



**Primjer 2.2.2** *Primjer Liejeve algebre je  $\text{Hom}(V)$  s komutatorom:  $[f, g] = f \circ g - g \circ f, \forall f, g \in \text{Hom}(V)$ . Ova Liejeva algebra se označava s  $\mathfrak{gl}(V)$ . Liejeva algebra  $\mathfrak{gl}(V)$  je izomorfna s Liejevom algebrom  $\mathfrak{gl}(n)$  kvadratnih matrica tipa  $n \times n$ .*

**Definicija 2.2.3** [11] *Za  $\mathfrak{h}$  vrijedi da je Liejeva podalgebra od  $\mathfrak{g}$  ako je vektorski prostor  $i$  da vrijedi  $[h_1, h_2] \in H, \forall h_1, h_2 \in H$ .*

**Primjer 2.2.3**  *$\mathfrak{se}(3)$  je Liejeva podalgebra od  $\mathfrak{gl}(4)$ .*

**Definicija 2.2.4** [7] *Neka je  $A \in \mathfrak{gl}(n)$ . Tada definiramo:*

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot A^i = I + A + \frac{A^2}{2} + \dots$$

**Napomena 2.2.3** [7] *Eksponecijalno preslikavanje je dobro definirano.*

**Propozicija 2.2.2** [7, 11] *Ovako definirano eksponencijalno preslikavanje ima sljedeća svojstva:  $\forall A, B \in \mathfrak{gl}(n), t \in \mathbb{R}$*

1.  $\exp(\theta) = 1$  ( $\theta$  je nul-matrica)
2.  $(\exp(A))^* = \exp(A^*)$
3.  $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$
4.  $\exp(T^{-1} \cdot A \cdot T) = T^{-1} \cdot \exp(A) \cdot T, T \in \mathfrak{gl}(n)$
5.  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$
6.  $\frac{d}{dt}(\exp(t \cdot A)) = A \cdot \exp(t \cdot A)$
7.  $\exp(A + B) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \exp\left(\frac{A}{m}\right) \cdot \exp\left(\frac{B}{m}\right) \right)^m$

**Definicija 2.2.5** [7, 11] *Jednparametarska grupa matricne Liejeve grupe  $GL(n)$  je funkcija  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$  koja zadovoljava sljedeće:*

1.  $\gamma$  je neprekidna funkcija
2.  $\gamma(0) = I$
3.  $\forall s, t \in \mathbb{R}, \gamma(s + t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t)$

**Definicija 2.2.6** [11] *Diferencijabilna krivulja u  $M_n(\mathbb{F})$  je funkcija  $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow M_n$  za koju postoji derivacija  $\forall t \in \langle a, b \rangle$ , gdje je derivacija definirana kao:  $\gamma'(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{\gamma(t) - \gamma(u)}{t - u}$ .*

**Teorem 2.2.1** *Za diferencijalnu jednadžbu  $\gamma'(t) = A \cdot \gamma(t), \gamma(0) = c; A, C \in M_n$  vrijedi da ima jedinstveno rješenje  $\gamma(t) = C \cdot \exp(tA)$ .*

Ovaj teorem nam je važan jer iz njega slijedi sljedeća posljedica:

**Korolar 2.2.1** [10] *Za  $AB = BA$  vrijedi:  $\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A+B)$ .*

Dokaz:

$$\begin{aligned} \exp(A)\exp(B) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \right) = \left( \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{A^i B^j}{i! j!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i! j!} A^i B^j \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} A^l B^{k-l} \right). \end{aligned}$$

Pošto vrijedi da matrice A i B komutiraju, možemo primijeniti binomni poučak, pa nam slijedi:  $\exp(A+B)$ .

□

**Teorem 2.2.2** [7, 11] *Ako je  $\gamma(t)$  jednoparameterska grupa, tada postoji jedinstvena matrica  $A \in M_n$  takva da je  $\gamma(t) = e^{tA}$ . (\*\*)*

Ovaj teorem je bitan jer on daje poveznicu između Liejevih grupa i Liejevih algebri preko eksponencijalnog preslikavanja.

**Definicija 2.2.7** [9] *Za fiksni jedinični vektor  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , vektorski produkt nam daje linearni operator  $v \mapsto u \times v$  koji preslikava iz  $\mathbb{R}^3$  u  $\mathbb{R}^3$ . Matrični prikaz tog linearnog operatora je:*

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**Teorem 2.2.3** [9] *Za proizvoljni  $g \in SE(3)$  postoje (ne nužno jedinstvene) koordinate okretanja  $\xi = (v, w)$  i  $t \in \mathbb{R}$  takvi da je  $g = \exp(t\hat{\xi})$ , gdje je  $\hat{\xi}$  antisimetrična matrica koja odgovara vektoru  $\xi$ .*

**Definicija 2.2.8** [7, 11] *Neka je  $G$  Liejeva matrična grupa. Liejeva algebra grupe  $G$  je:*

$$\text{Lie}(G) = \{A \in M_n | \exp(tA) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

**Teorem 2.2.4** [7, 11] *Lie(G) je Liejeva algebra.*

**Primjer 2.2.4** *Lie(SE(3)) = se(3).*

Elementi Liejeve algebre  $\mathfrak{se}(3)$  su oblika  $\begin{bmatrix} A & | & T \\ - & | & - \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ , gdje je  $A \in M_3(\mathbb{R})$  za koju vrijedi

$A^T = -A$ , a T predstavlja vektor pomaka u  $\mathbb{R}^3$ . Komutator ove Liejeve algebre je zadan na sljedeći način:

$$[x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1.$$

# Poglavlje 3

## Primjena u robotici

Liejeva algebra  $se(3)$  može služiti za opisivanje kretanja u prostoru na svakakve načine, a pokretanje robota je samo jedan od mnogobrojnih primjera korištenja spomenute algebre. [10]

### 3.1 Robotika

Inače kad se spomene robotika ili roboti, osobi prva slika koja padne na pamet je robot koji izgleda kao čovjek, iako to nije nužno jedini oblik robota. Robot je automatizirani stroj koji na neki način pomaže čovjeku.



Slika 3.1: Jednostavan oblik robota

Robotika je znanost koja proučava dizajn, konstrukciju i uporabu strojeva (robota) koji služe za izvođenje određenih radnji koje inače obavlja čovjek. Roboti su u svakodnevnoj primjeni, a neki od najosnovnijih primjera su:

1. Proizvodnja - uporaba u tvornicama i to sve od podizanja jako teških tereta do spajanja malenih dijelova nevidljivih čovjekovom oku
2. Operativni zahvati - roboti su postali toliko precizni da ih u nekim bolnicama koriste kod izvođenja operacija
3. Poljoprivreda - ovdje se koriste za zalijevanje, sađenje i tako dalje

4. Istraživanje svemira - najpoznatiji primjer robotike je istraživanje svemira pomoću robota
5. Vojna uporaba - najjednostavniji primjer je korištenje robota kod razminiravanja područja

Robotika je jako brzo rastuća disciplina koja napreduje iz dana u dan i to razvojem umjetne inteligencije i sensorike koje omogućavaju robotima obavljanje sve zamršenijih i težih poslova. Zbog napredovanja u ovim poljima neki roboti su sposobni i komunicirati međusobno ili postati svjesni svoje okoline i prilagoditi se radu u novim okolinama.



Slika 3.2: Primjer robota koji koristi umjetnu inteligenciju i senzore za snalaženje u prostoru

Robotika kao znanost obuhvaća jako puno grana inženjerstva kao što su strojarstvo, mehanika, elektrotehnika i programiranja (Više o robotici se nalazi u literaturi [15]).

Prije rješavanja primjera je potrebno uvesti matricnu jednadžbu koja će služiti za izračun koordinata te ujedno i Rodriguesovu formulu za izračun matrice rotacije.

**Definicija 3.1.1** [9]

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + t. \quad (1)$$

U ovoj jednadžbi  $R$  je matrica rotacije za kut  $\theta$ , a  $t$  je vektor pomaka.

Ovu jednadžbu lako povežemo s drugim poglavljem jer ako stavimo matricu rotacije i vektor pomaka u blok matricu  $\begin{bmatrix} R & | & t \\ - & - & \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix}$  dobije se da je ta matrica element iz  $\mathbf{SE}(3)$ .

**Teorem 3.1.1** [9] (*Rodriguesova formula za matricu rotacije*)

Za normirani vektor  $\omega \in \mathbb{R}^3$  i  $t \in \mathbb{R}$  vrijedi da je funkcija  $\exp(\hat{\omega}t) = R$  data formulom:

$$\exp(\hat{\omega}t) = I + \hat{\omega}\sin(t) + \hat{\omega}^2(1 - \cos(t)).$$

Dokaz:

Za potencije  $\hat{\omega}$  vrijedi:

$$\hat{\omega}^2 = \omega\omega^T - I$$

$$\hat{\omega}^3 = -\hat{\omega}$$

Jer neka je  $\omega = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ , onda vrijedi:

$$\omega\omega^T = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{bmatrix}$$

Oduzimanjem jedinične matrice od ovog izraza se dobije  $\hat{\omega}^2$  jer je  $\omega$  normirani vektor. Eksponecijalni red se može pojednostaviti na sljedeći način:

$$\exp(\hat{\omega}t) = I + \hat{\omega}t + \frac{(\hat{\omega}t)^2}{2!} + \frac{(\hat{\omega}t)^3}{3!} + \frac{(\hat{\omega}t)^4}{4!} = I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) \hat{\omega} + \left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} - \dots\right) \hat{\omega}^2$$

Nakon ovoga se može primjetiti kako se u zagradama nalaze redovi  $\sin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$

i za  $(1 - \cos(t)) = 1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k}}{(2k)!}$ . Uvrštavanjem spomenutih funkcija se dobije formula.  $\square$

**Napomena 3.1.1** *Kako je već opisano u grupi  $\mathbf{SE}(3)$  se nalaze matrice oblika  $\begin{bmatrix} A & | & T \\ - & & - \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix}$ , a kako  $A$  predstavlja matricu rotacije, Rodriguesovom formulom matrice rotacije postoji veza između rotacije za kut  $i$  grupe  $\mathbf{SE}(3)$ . Neka je  $\xi$  proizvoljni element grupe  $\mathbf{SE}(3)$ . Uvrštavanjem u eksponencijalni red dobijemo sljedeće:*

$$e^{\hat{\xi}t} = I + \hat{\xi}t + \frac{(\hat{\xi}t)^2}{2!} + \frac{(\hat{\xi}t)^3}{3!} + \dots$$

Koristeći Rodriguesovu formulu direktno slijedi:

$$e^{\hat{\xi}t} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}t} & (I - e^{\hat{\omega}t})\hat{\omega}v + \omega\omega^T vt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Primjer 3.1.1** *Neka je zadana točka  $(1,1,1)$  te treba odrediti točku  $A$  koja nastaje rotacijom za kut od  $60^\circ$  oko  $Z$  osi i translaciju za vektor  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , te odrediti točku  $B$  koja je*

*nastala rotacijom za  $-30^\circ$  oko  $Y$  osi u točki  $A$  i translacijom za vektor  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  (zadatak je nacrtan u Geogebra<sup>1</sup>).*

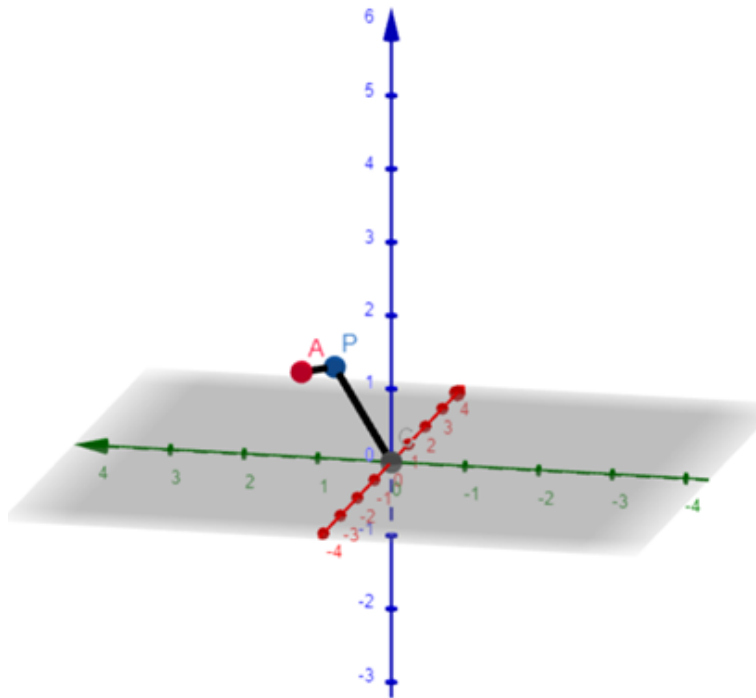
<sup>1</sup>Više o programu Geogebra na poveznici: <https://www.geogebra.org/calculator>

Počinja se od izračuna matrice rotacije za prvu točku uporabom Rodriguesove formule za matricu rotacije:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \sin(60^\circ) + \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^2 \cdot (1 - \cos(60^\circ)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Slijedi računanje koordinata točke A koja se nalazi na položaju nakon pomaka za vektor  $i$  rotacije za kut.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{bmatrix} &= R_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.6340 \\ 1.3660 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Slika 3.3: Izgled zadatka nakon izračuna točke A

Ovim izračunom je dobivena točka A. Preostaje izračunati točku B na analogan način. Označimo s  $A'$  vektor dobiven translacijom vektora A za vektor  $[0, 1, 0]^T$ , a s  $A_1$  normirani vektor vektora A.

$$A' = A + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = \frac{A'}{|A'|} = \left( \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{7}}{7} \right)$$

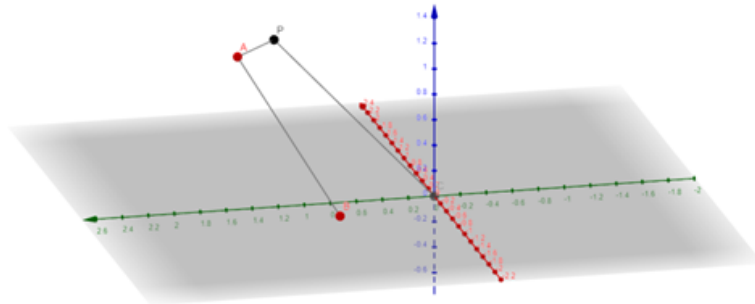
$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \\ \frac{\sqrt{7}}{7} & 0 & \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \\ -\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) & -\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) & 0 \end{bmatrix} \sin(-30^\circ) +$$

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \\ \frac{\sqrt{7}}{7} & 0 & \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \\ -\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) & -\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} & 0 \end{bmatrix} \right)^2 (1 - \cos(-30^\circ)) \Rightarrow$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} -\frac{21-12\sqrt{3}}{56} & -\frac{(-14-3\sqrt{7})(2-\sqrt{3})}{56\sqrt{7}} & -\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{3}-9-\sqrt{21}}{56} \\ -\frac{(14-3\sqrt{7})(2-\sqrt{3})}{56\sqrt{7}} & -\frac{3}{56} & -\frac{9\sqrt{7}+3-5\sqrt{21}-\sqrt{3}}{56} \\ \frac{3\sqrt{7}+9-5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{56} & -\frac{5\sqrt{21}+3-9\sqrt{7}-\sqrt{3}}{56} & -\frac{2-\sqrt{3}}{28} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_B \\ y'_B \\ z'_B \end{bmatrix} = R_2 \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'_B \\ y'_B \\ z'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25\sqrt{21}+14\sqrt{3}-42\sqrt{7}-28}{56\sqrt{7}} \\ \frac{70\sqrt{3}+65\sqrt{7}-126-8\sqrt{21}}{56\sqrt{7}} \\ \frac{3\sqrt{7}+17-11\sqrt{3}-\sqrt{21}}{56} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.6726 \\ 0.8818 \\ 0.1051 \end{bmatrix}$$



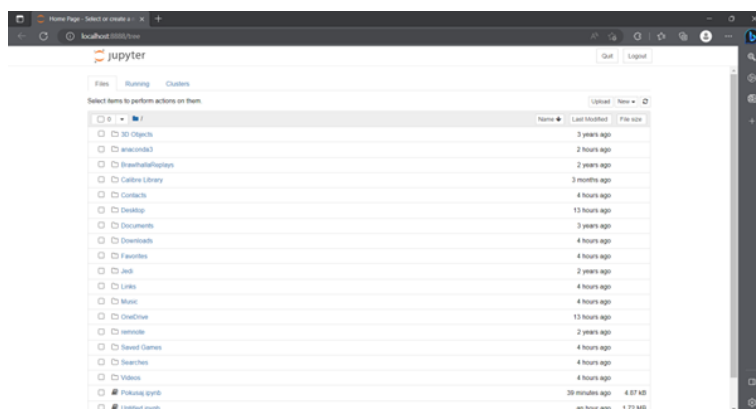
Slika 3.4: Izgled zadatka u 3D prostoru

## Poglavlje 4

# Programiranje pokreta robota

Dio izrade robota je i programiranje kretanja robota. Postoje mnogi programi za programiranje kretanja robota, ali najbolji za početnike i besplatni su: RoboDk, Gazebo, Webots, Anaconda. U ovom radu je korištena Anaconda<sup>1</sup> koja služi za distribuciju Pythona, R i mnogih drugih programa potrebnih za znanost podataka. Od svih tih programa nama je bitan Python koji sadrži mnoge pakete s naredbama, no najvažniji paketi za ovaj projekt su NumPy i Pybullet. NumPy nam služi za rad s višedimenzionalnim nizovima i matricama. Dok nam je NumPy paket zaslužan za matematički dio programiranja, Pybullet je pak odgovaran za fiziku tokom naše simulacije koju pokušavamo programirati. Pybullet simulator koji se koristi za imitaciju robotskih sustava i drugih kompleksnih mehaničkih sustava. Pa otpočnimo s programiranjem.

Započnimo paljenjem *Jupyter Notebook* programa koji smo dobili instalacijom Anaconde paketa.

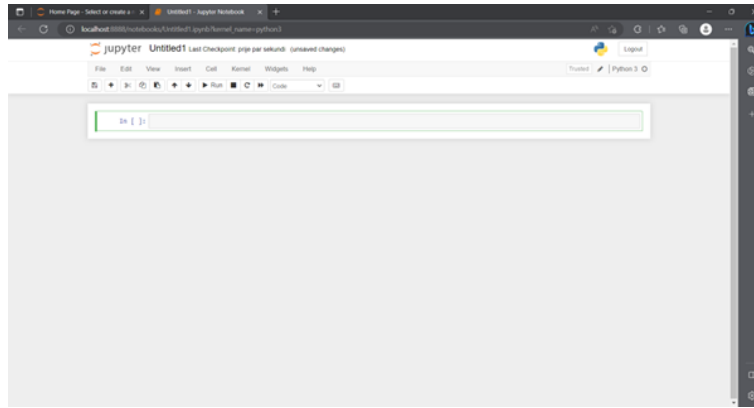


Slika 4.1: Sučelje *Jupyter notebook-a*

Dobiveno sučelje se nalazi u korisniku odabranom internet pregledniku. Pritiskom na tipku **New** i odabirom **Python3** kreiramo novu datoteku u kojoj ćemo programirati.

<sup>1</sup>Poveznica za preuzimanje Anaconde: <https://www.anaconda.com/download>

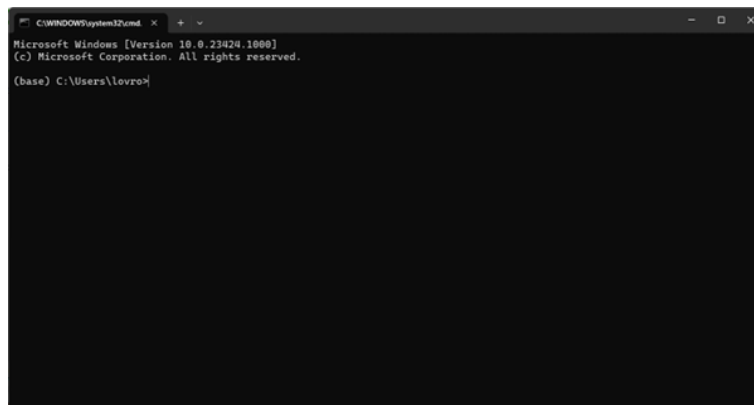




Slika 4.2: Izgled novo kreirane datoteke

Ako je na ovaj način upaljen *Jupyter Notebook* tada nije potrebno dodatno instalirati NumPy paket jer on dolazi već instaliran u Anacondi. Nakon toga je potrebno instalirati Pybullet paket. To možemo napraviti na više načina. Najjednostavniji je upisivanjem sljedećeg koda u Anaconda prompt prozor koji se može pokrenuti s Anaconda izbornika programa:

**Kod 4.0.1** `conda install -c conda-forge pybullet`



Slika 4.3: Anaconda prompt prozor za unos koda za instalaciju Pybullet paketa

Nakon uspješne instalacije Pybullet paketa vratimo se u Jupyter gdje može započeti pisanje koda za simulaciju. Nastavak koda je većinom preuzet iz literature [1]. Za početak krenemo uvođenjem paketa, što napravimo sljedećim naredbama:

```
import numpy as np

import pybullet as p

import pybullet_data '''Ovom naredbom pozivamo mapu koja sadrži sve datoteke koje se
↳ mogu koristiti kod simulacije pomoću Pybulleta, a između ostalog i Franka panda
↳ robot arm (robota iz ovog primjera) i Plane (ravninu na kojoj će se robot
↳ nalaziti).'''

import time '''Time paket nam je važan jer pomoću njega određujemo koliko drugo
↳ simulacija traje i koliko brzo se odvija simulacija.'''
```

Nakon toga je potrebno iskoristiti par naredbi iz Pybullet paketa kako bi simulaciju bilo moguće pokrenuti.

```
p.connect(p.GUI) '''Ovom naredbom se povezujemo s GUI(graphical user interface) kako  
→ bi se pokrenuo interaktivni prozor sa željenom simulacijom.'''
```

```
p.resetSimulation() '''Ovim redom koda se vraća simulacija u početni položaj'''  
p.setAdditionalSearchPath(pybullet_data.getDataPath()) '''Korištenjem ovog redka  
→ program dobiva do znanja gdje može pronaći potrebne datoteke koje koristimo iz  
→ Pybullet_data'''
```

```
p.setGravity(0,0,-9.8)'''Ova funkcija postavlja gravitaciju. U ovom primjeru  
→ postavljeno je na klasičnu gravitacijsku konstantu.'''  
p.setRealTimeSimulation(0) '''Ovom funkcijom se nameće programu u kojem vremenu  
→ simulacija mora biti izvedena, ali pošto je ovdje u zagradi nula, znači da je  
→ onemogućena i da se simulacija izvršava najbrže što može.'''
```

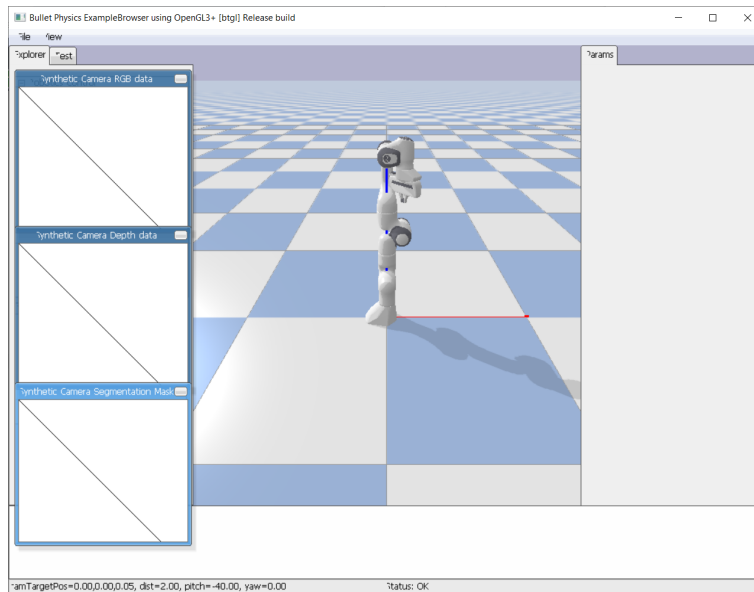
Potom pozivamo potrebne materijale za simulaciju.

```
p.loadURDF("plane.URDF",[0,0,0],[0,0,0,1]) '''Uzimanje ravnine koja se nalazi u  
→ sredi\v stu koordinatnog sustava i nema rotaciju.'''
```

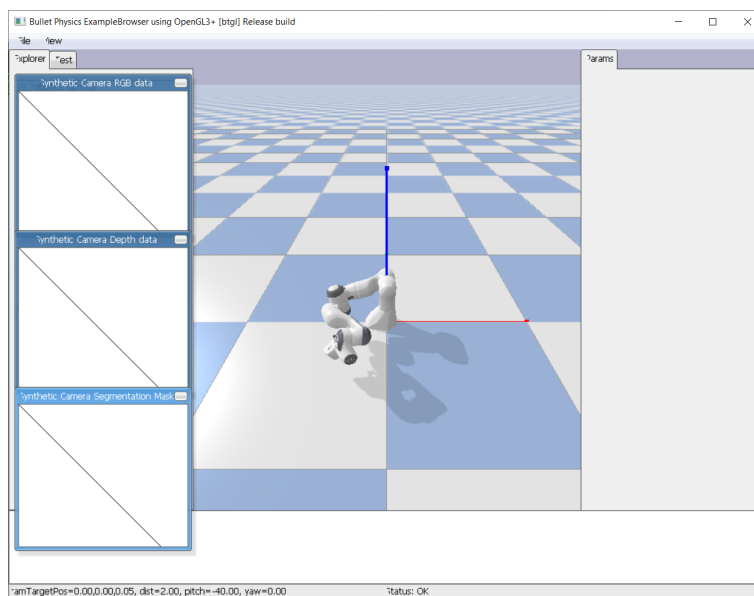
```
targid=p.loadURDF("franka_panda/panda.urdf", [ 0, 0, 0], [ 0, 0, 0, 1], useFixedBase=  
→ True) '''Naredbom u ovom reduku se poziva robot korišten u primjeru. Zadajemo  
→ njegovu poziciju i rotaciju u koordinatnom sustavu, te hoće li njegovo dno biti  
→ učvršćeno za središte koordinatnog sustava, odnosno za ravninu na kojoj se  
→ nalazi.'''
```

```
obj_of_focus=targid '''Ovdje se određuje na što će kamera simulacije biti  
→ Usmjerena.'''
```

```
for step in range(500): '''Definiramo varijablu step koja poprima vrijednosti od 0 do  
→ 499. Naredbom range u ovom slučaju određujemo koliko dugo će simulacija biti  
→ upaljena, tj. dok varijabla step ne prođe sve brojeve u tom intervalu.'''  
p.setJointMotorControlArray(targid,[0,1,2,3],  
→ p.POSITION_CONTROL,targetPositions=[-0.5,-1,-1,0.5]) '''Ovom naredbom  
→ definiramo pomicanje zglobova (motora u zglobovima) tako što prvo dajemo  
→ argumente redom: robot na koji primjenjujemo pomak, indekse zglobova na koje  
→ primjenjujemo pomak, način pomicanja zglobova, nova/željena pozicija zglobova  
→ zadana rotacijom u radianima koja odgovara redosljedu indeksa zglobova.'''  
focus_position, _ =p.getBasePositionAndOrientation(targid) '''Naredbom  
→ getBasePositionAndOrientation se u varijable focus_position i _ spremaju  
→ pozicija i orijentacija baze robota, respektivno.'''  
p.resetDebugVisualizerCamera(cameraDistance=3,cameraYaw=0,  
→ cameraPitch=-40,cameraTargetPosition=focus_position) '''Naredba  
→ resetDebugVisualizerCamera nam služi za centriranje kamere, na udaljenosti od  
→ 3 jedinice, rotacija kamere lijevo-desno je 0, rotacija kamere gore-dolje je  
→ 40 stupnjeva prema dolje i stvar na koju je kamera fokusirana je pozicija baze  
→ robota.'''  
p.stepSimulation() '''Ovaj redak nam služi kako bi pokrenuli simulaciju.'''  
time.sleep(1./10.) '''Pomoću ove naredbe dajemo stanku između koraka pomicanja,  
→ tj. zadajemo jednu destinu sekunde između različitih vrijednosti koje step  
→ poprima u ovoj petlji.'''  
p.disconnect() '''Ovim retkom zatvaramo simulaciju i odspajamo se od GUI  
→ prozora.'''
```



Slika 4.4: Simulacija prije pokretanja robota.



Slika 4.5: Simulacija nakon izvršene kretnje robota

Svaki robot u Pybullet\_data mapi ima određene vrste zglobova, broj zglobova i ti zglobovi imaju predodređene krajnje vrijednosti. Robot u ovom primjeru ima gotovo sve rotacijske zglobove. Zglobove koje smo koristili imaju sljedeće granice (u radijanima):

1. Zglob ima granice  $[-2.8973, 2.8973]$
2. Zglob ima granice  $[-1.7628, 1.7628]$
3. Zglob ima granice  $[-2.8973, 2.8973]$
4. Zglob ima granice  $[-3.0718, -0.0698]$

Kako bi se povezali Liejeva grupa  $\mathbf{SO}(3)$  s pomicanjem zglobova robota u ovom primjeru potrebna je funkcija:

```
print(p.getLinkState(targid, 0, computeForwardKinematics=True))
```

Koristeći ju dobijemo razne brojeve koji označavaju poziciju prvog zgloba (jer je 0 argument funkcije) u robotu. Stavimo li je prije izvođenja simulacije dobiju se početne koordinate zgloba. Kod ovog primjera je to  $(0, -0.04, 0.283)$ . Pošto je kut rotacije  $-0.5$  radijana, uporabom Rodriguesove formule za matricu rotacije<sup>2</sup> se dobije:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \sin(-0.5) + \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^2 \cdot (1 - \cos(-0.5)) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(0.5) & \sin(0.5) & 0 \\ -\sin(0.5) & \cos(0.5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8776 & 0.4794 & 0 \\ -0.4794 & 0.8776 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Slijedi da su koordinate:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 0 \\ -0.04 \\ 0.283 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0192 \\ -0.0351 \\ 0.283 \end{bmatrix}$$

Za provjeru se uvijek može upotrijebiti funkcija

```
print(p.getLinkState(targid, 0, computeForwardKinematics=True))
```

nakon simulacije kako bi se dobili rezultati.

```
((-0.019176649901375825, -0.03510350550244323, 0.28300000000000003), (0.0, 0.0, -0.247398830271001, 0.9689137313406908), (0.0, -0.04, -0.05), (0.0, 0.0, 0.0, 1.0), (-1.862645149230957e-09, 0.0, 0.3330000042915344), (0.0, 0.0, -0.24739882349967957, 0.968913733959198))
```

Slika 4.6: Koordinate nakon simulacije primjera, prva tri broja predstavljaju koordinate.

<sup>2</sup>Iskaz i dokaz formule se nalaze u [13] na stranici 10, Theorem 0.2

# Poglavlje 5

## Zaključak

Robotika kao disciplina se razvija iz dana u dan. Njen razvoj osjećamo u svakodnevnom životu. Kako se razvija robotika tako se razvijaju i mnoge grane fizike, matematike, strojarstva i elektrotehnike. Nadajmo se u budućnosti će robotika svojim pomicanjem granica potaknuti razvoj mnogih drugih polja znanosti, a moguće i nova otkrića u njima. Ovim radom je uveden pojam specijalne Euklidske Liejeve grupe **SE(3)** i pojam Liejeve algebre od **SE(3)**, proučena su njihova svojstva koja se koriste u robotici. U drugom dijelu rada opisan je kod korišten za programiranje kretanja ruke robota i kako je to povezano sa uvedenom teorijom.

# Popis slika

2.1	Geometrijski prikaz iza motivacije za uvod grupe $\mathbf{SE}(3)$ . . . . .	5
3.1	Jednostavan oblik robota . . . . .	9
3.2	Primjer robota koji koristi umjetnu inteligenciju i senzore za snalaženje u prostoru . . . . .	10
3.3	Izgled zadatka nakon izračuna točke A . . . . .	12
3.4	Izgled zadatka u 3D prostoru . . . . .	13
4.1	Sučelje <i>Jupyter notebook-a</i> . . . . .	14
4.2	Izgled novo kreirane datoteke . . . . .	15
4.3	Anaconda prompt prozor za unos koda za instalaciju Pybullet paketa . . .	15
4.4	Simulacija prije pokretanja robota. . . . .	17
4.5	Simulacija nakon izvršene kretnje robota . . . . .	17
4.6	Koordinate nakon simulacije primjera, prva tri broja predstavljaju koordinate. . . . .	18

# Bibliografija

- [1] Daniel Eid, pybullet for custom python RL environments, URL: <https://youtu.be/kZxPaGdoSJY>, (20.6.2023.)
- [2] Krešimir Horvatić, Linearna algebra, Golden marketing - Tehnička knjiga, 2004.
- [3] Luis Boza, Eugenio M. Fedriani Martel, Juan Núñez Valdés, Angel F. Tenorio, A historical review of the classifications of Lie algebras, REVISTA DE LA UNI ÓN MATEMÁTICA ARGENTINA, Vol. 54, No. 2, 2013.
- [4] Jonny Evans, The Lie algebra of a matrix group, URL: [http://jde27.uk/lgla/08\\_lie\\_alg.html](http://jde27.uk/lgla/08_lie_alg.html), (10.12.2022.)
- [5] Jean Gallier, Notes on Differential Geometry and Lie Groups, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Philadelphia, USA, March 25. 2009
- [6] PyBullet Quickstart Guide, URL: [https://docs.google.com/document/d/10sXEhzFR\\_SnvFcl3XxNGhnD4N2SedqwdAvK3dsihxVUA/edit#heading=h.2ye70wns7io3](https://docs.google.com/document/d/10sXEhzFR_SnvFcl3XxNGhnD4N2SedqwdAvK3dsihxVUA/edit#heading=h.2ye70wns7io3), (15.6.2023.)
- [7] Roger Howe, Very basic Lie theory, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 600-623.
- [8] Israel Kleiner, A History of Abstract Algebra, Birkhauser Boston, 2007
- [9] Y. Ma, J. Košecká, S. Soatto and S. Sastry, Lecture Notes 1. An Invitation to 3-D Vision: From Images to Models (in preparation)
- [10] Mark Saroufim, How to Move? Lie Group Robotics, URL: <https://marksaroufim.medium.com/how-to-move-lie-group-robotics-67fc4f3959d1>, (20.2.2023.)
- [11] Kristopher Tapp, Matrix groups for undergraduates, American Mathematical Society, 2005.
- [12] Lie groups, Lie algebras, projective geometry and optimization for 3D Geometry, Engineering and Computer Vision, March 3, 2014
- [13] Wikipedia, the free encyclopedia, Évariste Galois, URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Évariste\\_Galois](https://en.wikipedia.org/wiki/Évariste_Galois) (10.5.2023.)
- [14] Wikipedia, the free encyclopedia, Robotics, URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Robotics#:~:text=Robotics%20is%20an%20interdisciplinary%20branch,can%20help%20and%20assist%20humans.> (1.5.2023.)

- [15] Wikipedia, the free encyclopedia, Roger W. Brockett, URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Roger\\_W.\\_Brockett](https://en.wikipedia.org/wiki/Roger_W._Brockett) (10.5.2023.)
- [16] Wikipedia, the free encyclopedia, Sophus Lie, URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Sophus\\_Lie](https://en.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie) (10.5.2023.)