Linearne jednadžbe i sustavi linearnih jednadžbi u primjeni

Validžić, Kristina

Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci
Preddiplomski studij Matematika

Kristina Validžić

LINEARNE JEDNADŽBE I SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI U PRIMJENI

Završni rad
Rijeka, Srpanj 2023.

Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci
Preddiplomski studij Matematika

Kristina Validžić

LINEARNE JEDNADŽBE I SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI U PRIMJENI

Mentor: mr.sc. Ines Radošević Medvidović

Završni rad
Rijeka, Srpanj 2023.

Sadržaj

Poglavlje 1

Linearne jednadžbe

1.1 Uvod

U mnogim granama znanosti i djelatnostima postoje problemi koje nije moguće direktno ili eksplicitno riješiti pa se nastoji problem “linearizirati”, tj. aproksimirati nekim linearnim problemom koji se zatim rješava primjenom metoda linearne algebre. Linearna algebra je grana matematike koja proučava vektorske prostore, linearne operatore i sustave linearnih jednadžbi te njihovu reprezentaciju pomoću matrica. U ovom radu su uvedeni osnovni pojmovi linearne algebre koji će nam trebati za bolje razumijevanje primjene linearnih jednadžbi. Nakon toga će biti navedeni problemi koji se rješavaju pomoću sustava linearnih jednadžbi i to u znanostima kao što su kemija, geologija, građevinarstvo, fizika i slične.

1.2 Osnovni pojmovi linearne algebre

Definicija 1.2.1 *Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja F, $\cdot : F \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$* ***vektorski prostor*** *nad poljem F ako vrijedi:*

1. $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in V$;
2. *postoji* $0 \in V$ *sa svojstvom* $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in V$;
3. *za svaki* $a \in V$ *postoji* $-a \in V$ *tako da je* $a + (-a) = -a + a = 0$;
4. $a + b = b + a, \forall a, b \in V$;
5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \forall \alpha, \beta \in F, \forall a \in V$;
6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \forall \alpha, \beta \in F, \forall a \in V$;
7. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \forall \alpha \in F, \forall a, b \in V$;
8. $1 \cdot a = a, \forall a \in V$

Definicija 1.2.2 *Neka je V vektorski prostor nad poljem F.* ***Linearna kombinacija*** *vektora $v_1, \ldots, v_n$ iz V je izraz oblika $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, gdje su $a_1, \ldots, a_n$ skalari iz F i $n \in \mathbb{N}$.* ***Linearna ljuska skupa*** *$S \subseteq V$ (oznaka $[S]$) je skup svih linearnih kombinacija vektora iz S, odnosno*

$$[S] = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} x_i a_i : x_i \in F, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \Big\}$$

Definicija 1.2.3 *Neka je V vektorski prostor nad F i $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, k \in \mathbb{N}$, konačan skup vektora iz V . Kažemo da je skup S* ***linearno nezavisan*** *ako vrijedi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in F$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. U suprotnom kažemo da je skup S* ***linearno zavisan****.*

Definicija 1.2.4 *Jednadžbu nazivamo* ***linearnom*** *ako je tipa*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

gdje su $x_1, \ldots, x_n$ ***nepoznanice****, $a_1, \ldots, a_n$* ***koeficijenti*** *i b* ***slobodni član****.*

Definicija 1.2.5 ***Sustav linearnih jednadžbi*** *nad poljem F se sastoji od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, $m, n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Skalari $a_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$, se zovu ***koeficijenti sustava****, a $b_1, \ldots, b_m$* ***slobodni članovi****. Sustav jednadžbi (ili sustav tipa $m \times n$) je problem kod kojeg treba naći sve $n-$torke realnih brojeva $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ takve da zadovoljavaju svih m jednadžbi sustava.*

Sustav sa m jednadžbi i n nepoznanica, u matričnom obliku zapisujemo: $AX = B$, gdje je:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \end{pmatrix}$$

X stupčana matrica nepoznanica:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

a B je stupčana matrica slobodnih koeficijenata:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definicija 1.2.6 *Kaže se da je sustav linearnih jednadžbi* ***homogen*** *ako vrijedi $b_1 = \cdots = b_m = 0$ (svi slobodni koeficijenti jednaki nula). Opći oblik homogenog sustava je dakle:*

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

odnosno $AX = 0$.

Propozicija 1.2.1 *Homogeni sustav je uvijek rješiv (matrica sustava i proširena matrica sustava imaju isti rang) jer ima barem trivijalno rješenje. Skup svih rješenja homogenog sustava je vektorski prostor.*

Propozicija 1.2.2 *Homogeni sustav* $AX = 0$ *gdje je* $A \in M_{m,n}(F)$ *(*F *polje skalara) ima:*
1) samo trivijalno rješenje $\Leftrightarrow r(A) = n$,
2) i netrivijalna rješenja $\Leftrightarrow r(A) < n$.

Korolar 1.2.1 *Homogeni sustav* $AX = 0$ *kod kojeg je broj jednadžbi manji od broja nepoznanica uvijek ima i netrivijalna rješenja.*

Korolar 1.2.2 *Homogeni sustav* $AX = 0$ *kod kojeg je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je* $det(A) = 0$.

Definicija 1.2.7 ***Rang matrice*** *koja ima* p *redaka i* q *stupaca je broj* r *koji zadovoljava sljedeće:*
r *je manji ili jednak manjem broju od brojeva* p *i* q,
r *je jednak redu najveće minore matrice koji je različit od nule.*
Minora *(subdeterminanta)* m*-toga reda zadane matrice* A *s* p *redaka i* q *stupaca* $(m \leq p, m \leq q)$ *je determinanta matrice koja se iz* A *dobije od elemenata preostalih nakon oduzimanja elemenata izabranih* m *redaka i* m *stupaca. Rang matrice je također broj linearno nezavisnih stupaca matrice.*

Definicija 1.2.8 ***Determinanta*** $A \to detA$ *je funkcija definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara. Determinanta matrice definira se induktivno.*

Determinanta prvog reda Determinanta matrice $A = [a]$ je broj a.
Determinanta drugog reda Determinanta matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ je broj $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.

Determinanta trećeg reda Determinanta matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

je broj

$$a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}.$$

Determinanta n-tog reda Determinanta matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

je broj

$$detA = a_{1,1}detA_{1,1} - a_{2,1}detA_{2,1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n,1}detA_{n,1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k,1}detA_{k,1}.$$

Definicija 1.2.9 *Neka je A kvadratna matrica tipa nxn. Ukoliko postoji matrica B takva da vrijedi $AB = BA = I$, gdje I označava jediničnu matricu, tada matricu A nazivamo* ***regularnom*** *ili* ***invertibilnom*** *matricom. Takav B nazivamo* ***inverznom*** *matricom matrice A i označavamo s A^{-1}. Ukoliko takva B ne postoji, matricu A nazivamo* ***singularnom****. Također, vrijedi da je matrica regularna ako i samo ako joj je determinanta različita od nule.*

Teorem 1.2.1 Kronecker-Capelli *Sustav linearnih algebarskih jednadžbi $AX = B$ ima barem jedno rješenje (rješiv je), ako i samo ako je rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice sustava, odnosno $r([A|B]) = r(A)$.*

Dokaz vidi u [6].
Posljedica: Neka sustav ima rješenje i neka je n broj nepoznanica. Tada je rješenje jedinstveno ako i samo ako je $rang(A) = n$. Ako je $rang(A) < n$, tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja su izražena pomoću $n - rang(A)$ parametara.
Sustav nema rješenja ako je $r([A|B]) \neq r(A)$.

Definicija 1.2.10 Proširenu matricu *sustava dobijemo kada početnoj matrici dodamo stupac (stupce), odnosno matrici*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

dodamo stupac

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix}.$$

1.3 Rješavanje linearnih jednadžbi

Kako bismo lakše rješavali sustave linearnih jednadžbi, koristimo matrice i determinante.

Definicija 1.3.1 Elementarne transformacije *sustava linearnih jednadžbi su:*

1. *zamjena poretka dviju jednadžbi,*
2. *množenje neke jednadžbe skalarom $\lambda \neq 0$,*
3. *pribrajanje neke jednadžbe pomnožene skalarom λ nekoj drugoj jednadžbi sustava.*

Definicija 1.3.2 *Nad proširenom matricom sustava možemo primijeniti sljedeće transformacije:*

1. *množenje retka matrice nekim skalarom različitim od nule,*
2. *zamjena dva retka matrice,*
3. *pribrajanje jednog retka drugom.*

Definicija 1.3.3 *Dva sustava linearnih jednadžbi nad poljem F su **ekvivalentna** ako imaju isti broj nepoznanica i isti skup rješenja.*

Definicija 1.3.4 *Neka je Ω prostor rješenja homogenog sustava $AX = 0$, $A \in M_{m,n}(F)$, $r(A) = r$. Tada je $dim\Omega = n - r$. Posebno, za $r(A) = n$, sustav $AX = 0$ ima samo trivijalno rješenje.*

*Jedna od metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi je **Gaussova metoda eliminacije**. Rješenje se dobije tako da se proširena matrica polaznog sustava elementarnim transformacijama nad retcima svodi na gornjetrokutastu matricu. Dobiveni sustav ima ista rješenja kao polazni sustav.*

Propozicija 1.3.1 *Primjenom konačnog broja elementarnih transformacija na dani sustav linearnih jednadžbi se dobiva ekvivalentan sustav. Dobiveni sustav je sveden na jednostavniji pa ga je lakše riješiti, tj. cilj je Gaussova algoritma matricu sustava svesti na oblik iz kojeg je lako očitati rješenje sustava.*

Postupak ćemo demonstrirati nad sustavom od 4 *jednadžbe s* 4 *nepoznanice:*
Neka je

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 &= b_1\\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 &= b_2\\
a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 &= b_3\\
a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 + a_{4,4}x_4 &= b_4
\end{aligned}$$

zadani sustav prikazan matrično (proširena matrica sustava):

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & | & b_1\\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & | & b_2\\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & | & b_3\\
a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & | & b_4
\end{pmatrix}.$$

Neka je $a_{11} \neq 0$. *Stavimo* $m_{i,1} = a_{i,1}/a_{1,1}$, $i = 2, 3, 4$.
i oduzmemo prvu jednadžbu pomnoženu s m_{i1} *od* i*-te jednadžbe* $(i = 2, 3, 4)$ *te dobijemo matricu:*

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & | & b_1\\
0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & a'_{2,4} & | & b'_2\\
0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} & a'_{3,4} & | & b'_3\\
0 & a'_{4,2} & a'_{4,3} & a'_{4,4} & | & b'_4
\end{pmatrix}.$$

gdje su $a'_{i,j} = a_{i,j} - m_{i,1}a_{1,j}$ *i* $b'_i = b_i - m_{i,1}b_1$.
Time je parametar x_1 *eliminiran iz tri preostale jednadžbe. Brojevi* $m_{i,1}$ *kojima se u postupku eliminacije množi prva jednadžba se zovu multiplikatori. Neka je i* $a'_{22} \neq 0$. *Tada stavimo* $m_{i,2} = a'_{i,2}/a'_{2,2}$, $i = 3, 4$. *i oduzmemo drugu jednadžbu pomnoženu s* $m_{i,2}$ *od* i*-te jednadžbe* $(i = 3, 4)$. *Dobivamo:*

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & | & b_1\\
0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & a'_{2,4} & | & b'_2\\
0 & 0 & a''_{3,3} & a''_{3,4} & | & b''_3\\
0 & 0 & a''_{4,3} & a''_{4,4} & | & b''_4
\end{pmatrix}.$$

gdje su $a''_{i,j} = a'_{i,j} - m_{i,2}a'_{2,j}$, *i* $b''_i = b'_i - m_{i,2}b'_2$.
Konačno, stavimo $m_{i,3} = a''_{i,3}/a''_{3,3}$, $i = 4$ *i oduzmemo treću jednadžbu pomnoženu s* $m_{i,3}$ *od četvrte jednadžbe. Rezultat je gornje trokutasti sustav*

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & | & b_1\\
0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & a'_{2,4} & | & b'_2\\
0 & 0 & a''_{3,3} & a''_{3,4} & | & b''_3\\
0 & 0 & 0 & a'''_{4,4} & | & b'''_4
\end{pmatrix}.$$

gdje su $a'''_{i,j} = a''_{i,j} - m_{i,3}a''_{2,j}$, *i* $b'''_i = b''_i - m_{i,3}b''_2$.
Četvrta jednadžba sadrži samo nepoznanicu x_4 *pa rješenje dobivamo odmah:*

$$x_4 = \frac{b'''_4}{a'''_{4,4}}.$$

Dobivenu vrijednost uvrstimo u treću jednadžbu i dobivamo x_3. *Daljnjim uvrštavanjem dobivamo* x_2 *i* x_1. *Time smo dobili jedinstveno rješenje* (x_1, x_2, x_3, x_4).

Jedno od svojstava Gaussove metode je činjenica da u primjeni nije potrebno unaprijed utvrđivati je li zadani sustav uopće rješiv. Naime, Gaussova metoda u svojoj osnovi ima računanje ranga matrice sustava te će eventualna nerješivost sustava (tj. činjenica da matrica sustava i proširena matrica sustava nemaju isti rang) tijekom izvođenja algoritma postati očita. Vidi [6].

Definicija 1.3.5 *Kaže se da je sustav* $AX = B$ ***Kramerov*** *ako je* $A \in M_n$ *(*A *kvadratna matrica reda* $n \in \mathbb{N}$*) i ako je* A *regularna matrica.*

Propozicija 1.3.2 *Kramerov sustav* $AX = B$ *je rješiv, a rješenje mu je jedinstveno i dano formulom* $C = A^{-1}B$.

Osim rješavanja sustava linearnih jednadžbi provođenjem Gaussove metode eliminacije na proširenoj matrici, Kramerov sustav je moguće riješiti na sljedeći način:
1) Odredimo determinantu $D = det(A)$.
2) Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ *odredimo determinantu* D_k *koja se dobije tako da se* k*-ti stupac matrice* A *zamijeni stupcem slobodnih članova* B.
3) Rješenje sustava je dano sa:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, k = 1, \ldots, n.$$

1.4 Primjena linearnih jednadžbi

1.4.1 Linearne jednadžbe u kemiji

Kod uravnoteženja kemijske reakcije koristimo sustave linearnih jednadžbi. Kemijske jednadžbe se pišu u obliku $R \to P$ *(reaktanti* $\to$ *produkti). Uz svaki reaktant i produkt zapisuje se broj zvan stehiometrijski koeficijent. Stehiometrijski koeficijenti u danoj kemijskoj jednadžbi opisuju omjere množina pojedinih reaktanata i produkata. Stehiometrijske koeficijente ćemo označavati kao nepoznanice* $x_1, \ldots, x_n$, *a reaktante ćemo označavati s* $a_1, \ldots, a_n$. *U* *jednadžbi, slobodni članovi označuju produkt. Određivanje stehiometrijskih koeficijenata $x_1, \ldots, x_n$ svodimo na problem rješavanja homogenog sustava linearnih (kemijskih) jednadžbi. Ako znamo samo reaktante i produkte, jednadžba reakcije nije izjednačena dok ne odredimo stehiometrijske koeficijente svih reaktanata i produkata. Mora vrijediti da je za svaku vrstu atoma ili iona broj jedinki s lijeve strane jednadžbe jednak broju jedinki s desne strane. U slučaju da su poznati svi reaktanti i svi produkti, problem se može svesti na rješavanje sustava linearnih jednadžbi.*

Primjer 1.4.1 (Uravnoteženje kemijske reakcije)

Svaka tvar ima svoju kemijsku formulu. Uzmimo za primjer sljedeću reakciju.

$$C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O \; - nije\ ujednačena\ (balansirana)$$

Ovo je sustav od 3 jednadžbe s 4 nepoznanice. Sustav postavljamo na sljedeći način i tako da koeficijenti uz nepoznanice predstavljaju broj atoma s lijeve i s desne strane:

$$\begin{aligned} C &: 2x_1 = x_3 \\ X &: 6x_1 = 2x_4 \\ O &: 2x_2 = 2x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Odnosno, sustav:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ovo je sustav od 3 *jednadžbe s* 4 *nepoznanice pa primjenom opisane Gaussove metode eliminacije dobivamo rješenje:*

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 - \frac{7}{6}x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = \frac{7}{6}x_4 \\ x_3 - \frac{2}{3}x4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = \frac{2}{3}x_4 \end{aligned}$$

gdje je x_4 proizvoljna varijabla, stoga je parametarsko rješenje u ovisnosti o parametru x_4. Primjerice, za $x_4 = 6$ dobivamo:

$$x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 4$$

Iz ovoga slijedi jednadžba uravnotežene reakcije:

$$2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O$$

1.4.2 Linearne jednadžbe u geologiji

Geologija je znanost koja proučava strukturu, evoluciju i dinamiku Zemlje i njenih prirodnih mineralnih i energetskih resursa. Obuhvaća više grana, a jedna od njih je ona koja sadrži kristalografiju, mineralogiju, petrologiju i geokemiju, a koje se bave tvarima i sastavom Zemlje. Mineralogija (i kristalografija) se bave mineralima. Minerali su prirodni elementi i spojevi s određenim homogenim kemijskim sastavom i uređenim atomskim sastavom. Sastavni su dio Zemljine kore i nastaju prirodnim procesima (kemijski spojevi). Minerali nastaju kristalizacijom, a dijele se ovisno o vrsti sudionika u procesu nastanka. Također, minerali su sastavni dio stanica u ljudskom organizmu. U geologiji (mineralogiji) se koristi linearna algebra za rješavanje problema određenih kombinacija minerala i opisivanje tih preobrazbi, kao i stvaranje novih minerala. Metamorfizam je promjena mineralnog sastava i strukture stijene.

Primjer 1.4.2 (Uravnoteženje metamorfne reakcije)

Problem uravnoteženja kemijske reakcije minerala možemo opisati kao sljedeći sustav: u kompoziciji n minerala u n-dimenzionalnom sustavu, koja je linearna kombinacija ovih minerala potrebna kako bi nastao mineral y?

Uzmimo za primjer nastajanje biotita. Reakcija je prikazana sljedećom shemom:

$$garnit + klorid + muskovit \rightarrow kianit + biotit + kvarc + H_2O$$

pri čemu su kemijski zapisi ovih reaktanata garnit $(Fe_2Mg_1)Al_2Si_3O_{12}$, klorid $(Fe_2Mg_7)Al_6Si_5O_{20}(OH)_{16}$, biotit $K_2(Fe_3Mg_3)Al_2Si_6O_{20}(OH)_4$, kvarc SiO_2, kianit Al_2SiO_5 i muskovit $(KF)_2(Al_2O_3)_3(SiO_2)_6$.
Uravnoteženje ove reakcije možemo zadati kao problem: Koja linearna kombinacija kvarca, muskovita, kianita, klorida, garnita i H_2O je potrebna kako bi nastao biotit? Matematički je prikazano sljedećim sustavom jednadžbi:

$$x_1 Qt + x_2 Mu + x_3 Ky + x_4 Ch + x_5 Ga + x_6 H_2O = Biotit$$

odnosno,

$$\begin{array}{rl}
(SiO_2) & x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 3 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 5 + x_5 \cdot 3 + x_6 \cdot 0 = 6 \\
(AlO(3/2)) & x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 3 + x_3 \cdot 2 + x_4 \cdot 6 + x_5 \cdot 2 + x_6 \cdot 0 = 2 \\
(FeO) & x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 + x_4 \cdot 2 + x_5 \cdot 2 + x_6 \cdot 0 = 3 \\
(MgO) & x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 + x_4 \cdot 7 + x_5 \cdot 1 + x_6 \cdot 0 = 3 \\
(KO(1/2)) & x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 0 + x_6 \cdot 0 = 2 \\
(H_2O) & x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 + x_4 \cdot 8 + x_5 \cdot 0 + x_6 \cdot 1 = 2
\end{array}$$

ili u matričnom prikazu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rješenje smo dobili koristeći opisanu Gaussovu metodu eliminacije i prikazuje se sljedećom jednadžbom:

$$1.25Gar + 0.25Chl + 2.0Mus = 1.0Biot + 4.0Ky + 1.0Qt + 2.0H_2O$$

1.4.3 Linearne jednadžbe u građevini

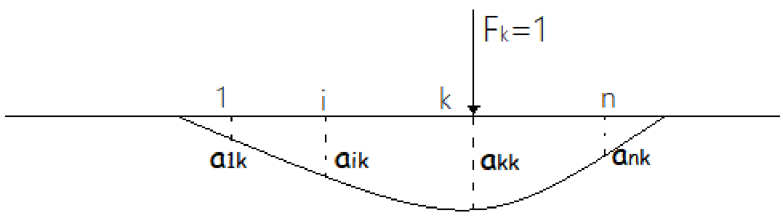
U građevini se za računanje nosivosti nosivih i nenosivih konstrukcija te određivanje njihovih dimenzija koristi linearna algebra. Uzevši u obzir određene norme i uvjete, koji su definirani iz matematičkog modela stvarnog svijeta (dakle, aproksimiraju stvarnu konstrukciju), radi se proračun za određeni građevinski element. Jedna od primjena linearnih jednadžbi u građevini je računanje sila koje uzrokuju progib (stupanj deformacije) nosivog elementa, na primjer grede.

Primjer 1.4.3 (Nalaženje sila iz zadanih progiba grede)

Neka je zadana greda (štap, štapna konstrukcija). Pod djelovanjem sila štap doživljava progib pa nas zanima kako iz zadanog progiba pronaći sile koje su uzrokovale taj progib. Zadajmo n točaka na štapu koje ćemo zvati *čvorovi. Promatrat ćemo štap kao da je njegova masa koncentrirana u tih n točaka. Sukladno tome slijedi da sile mogu djelovati samo u tim čvorovima. Također, progib promatramo samo u čvorovima. Polazimo od dvije osnovne pretpostavke, koje u matematici zovemo **svojstvo linearnosti**. U fizici i građevini se ova pravila zovu princip **superpozicije sila**. To su sljedeća pravila:*

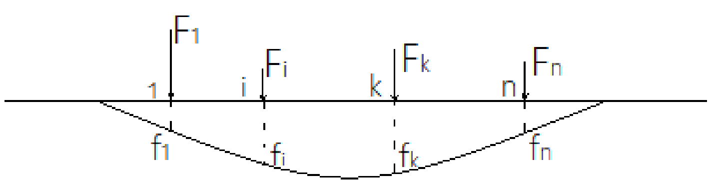
1. *Pri istovremenom djelovanju dviju sila progibi se zbrajaju.*
2. *Koliko puta povećamo silu, toliko puta se poveća progib.*

Označimo s a_{ik} progib u čvoru i pod djelovanjem jedinične sile u čvoru k.



Slika 1.1: Pomak štapa pod djelovanjem jedinične sile u čvoru k

Označimo s $f_1, \ldots, f_n$ ukupne progibe, a s $F_1, \ldots, F_n$ sile u čvorovima.



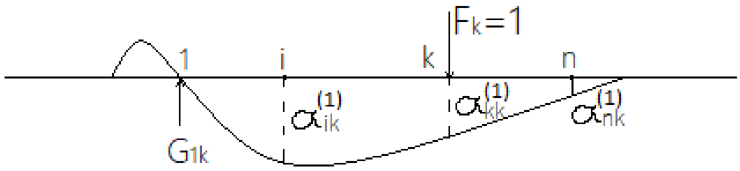
Slika 1.2: Pomak štapa pod djelovanjem različitih sila u čvorovima

Problem nalaženja sila iz zadanih progiba svodimo na rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

Tada vrijede sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}F_1 + \alpha_{12}F_2 + \cdots + \alpha_{1n}F_n &= f_1 \\
\alpha_{21}F_1 + \alpha_{22}F_2 + \cdots + \alpha_{2n}F_n &= f_2 \\
&\vdots \\
\alpha_{n1}F_1 + \alpha_{n2}F_2 + \cdots + \alpha_{nn}F_n &= f_n
\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da u čvoru 1 *djeluje sila* G_{1k} *koja poništava utjecaj jedinične sile u čvoru* k *na čvor* 1.



Slika 1.3: Pomak štapa pod djelovanjem jedinične sile u čvoru k, nakon uravnoteženja u čvoru 1

Sada označimo s $\alpha_{ik}^{(1)}$ *progib u čvoru* i *uslijed djelovanja jedinične sile u čvoru* k. *Tada vrijedi:*

$$\alpha_{ik}^{(1)} = G_{1k}\alpha_{i1} + \alpha_{ik},\ za\ i = 1, \ldots, n.$$

Posebno, u čvoru 1 *imamo:*

$$0 = G_{1k}\alpha_{11} + \alpha_{1k}.$$

Odavde slijedi:

$$G_{1k} = -\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{11}},$$

a onda je

$$\alpha_{ik}^{(1)} = \alpha_{ik} - \alpha_{i1}\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{11}},\ za\ i = 2, 3, \ldots, n.$$

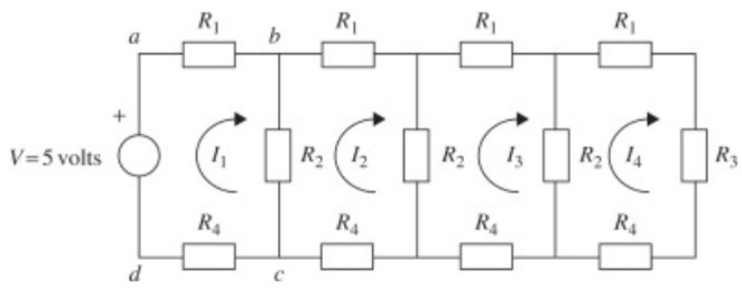
Nakon što tako učinimo za svaki $k = 2, 3, \ldots, n$, *dobijemo koeficijente nakon prvog koraka u Gaussovoj metodi. Slično, može se pokazati da se koeficijenti nakon drugog koraka dobiju kad u prva dva čvora djeluju sile koje poništavaju progibe pod djelovanjem jedinične sile u ostalim čvorovima, itd.*

1.4.4 Linearne jednadžbe u fizici

Kako bismo prikazali nastajanje sustava linearnih jednadžbi u modeliranju određenih fizikalnih problema, za primjer ćemo razmotriti kako se mjere strujni tokovi u jednostavnoj električnoj mreži.

Primjer 1.4.4 (Računanje napona u otpornicima složenog strujnog kruga istosmjerne struje)

U ovom primjeru ćemo koristiti metodu strujne petlje primjenjujući Ohmov zakon i Kirchhoffov zakon napona. Pretpostavlja se da struja kruži oko svake petlje u mreži.



Slika 1.4: Složeni strujni krug istosmjerne struje

Dakle, u mreži prikazanoj na slici 1.4, struja petlje kruži oko zatvorenog strujnog kruga "abcd". Tako struja teče kroz spoj koji povezuje b i c. Ohmov zakon kaže da je napon na idealnom otporniku proporcionalan struji koja teče kroz otpornik. Na primjer, za spoj koji povezuje b i c,

$$V_{bc} = R_2(I_1 - I_2),$$

gdje je R_2 vrijednost otpornika u spoju koji povezuje b i c. Kirchhoffov zakon napona kaže da je algebarski zbroj svih napona u zatvorenom strujnom krugu jednak nula. Primjenjujući ove zakone na krug "abcd" sa slike 1.4 imamo

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = V.$$

Zamjena umnoška struje i otpora za napon daje

$$R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) + R_4 I_1 = V.$$

Ovaj postupak možemo ponoviti za svaku petlju pa dobivamo sljedeće četiri jednadžbe:

$$\begin{aligned}(R_1 + R_2 + R_4)I_1 - R_2I_2 &= V\\ (R_1 + 2R_2 + R_4)I_2 - R_2I_1 - R_2I_3 &= 0\\ (R_1 + 2R_2 + R_4)I_3 - R_2I_2 - R_2I_4 &= 0\\ (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)I_4 - R_2I_3 &= 0.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $R_1 = R_4 = 1\omega, R_2 = 2\omega, R_3 = 4\omega$ i $V = 5$ volti istosmjerne struje (DC), sustav postaje:

$$\begin{aligned}4I1 - 2I2 &= 5\\ -2I1 + 6I2 - 2I3 &= 0\\ -2I2 + 6I3 - 2I4 &= 0\\ -2I3 + 8I4 &= 0.\end{aligned}$$

Ovo je sustav linearnih jednadžbi s četiri nepoznate varijable, $I_1, \ldots, I_4$. U matričnom prikazu:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 6 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 6 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1\\ I_2\\ I_3\\ I_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Sustav ima oblik $Ax = b$, gdje je A kvadratna matrica poznatih koeficijenata, odnosno vrijednosti otpornika u krugu. Vektor b je vektor poznatih koeficijenata, odnosno napon primijenjen na svaku strujnu petlju. Vektor x je vektor nepoznatih struja. Matrica sustava je regularna što znači da postoji jedinstveno rješenje koje glasi:

$$I_1 = 1.5426, I_2 = 0.5851, I_3 = 0.2128, I_4 = 0.0532.$$

1.4.5 Linearne jednadžbe u strojarstvu

Primjer 1.4.5 (Rastezanje elastične membrane)

Elastična membrana je opnasti uređaj koji dijeli ili razdvaja dva fluida (kontrola tlaka tekućine bez pomoćnog napajanja, pri čemu je senzorni element fleksibilna membrana, podložna tlaku, npr. dijafragma, mijeh...). Elasntična membrana u dvodimenzionalnoj ravnini s graničnim krugom

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

je rastegnuta tako da se točka

$$P(x_1, x_2)$$

preslika u točku

$$Q(y_1, y_2)$$

što je zadano preslikavanjem:

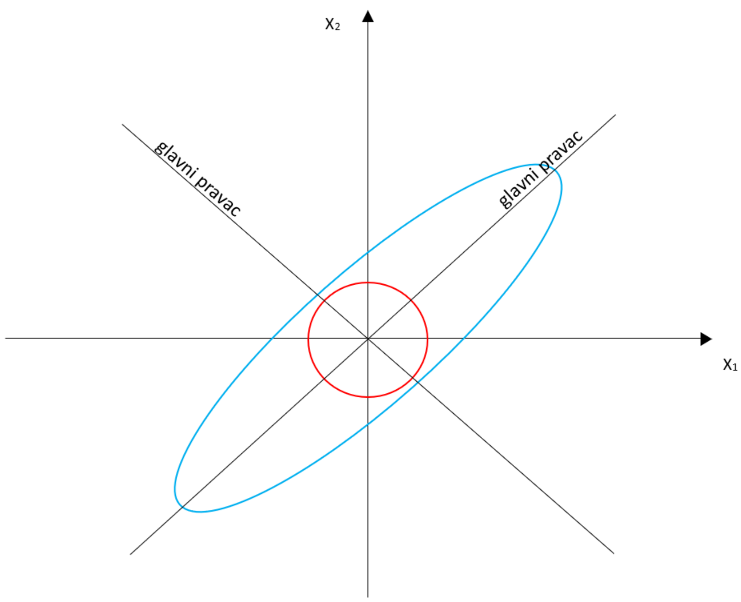
$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

U komponentama:

$$y_1 = 5x_1 + 3x_2$$

$$y_2 = 3x_1 + 5x_2$$

Zadatak: Pronađite glavne smjerove, odnosno smjerove vektora X (točke P) za koje je smjer vektora položaja Y (od Q) isti ili točno suprotan. Kakav položaj poprima granična kružnica pod ovom deformacijom? *Slika:*



Slika 1.5: Nedeformirana (kružnica) i deformirana (elipsa) membrana

Rješenje:

Tražimo vektore X takve da je $Y = \lambda X$. Budući da je $Y = AX$, dobivamo da je $AX = \lambda X$, odnosno jednadžbu problema svojstvenih vrijednosti. Dobivamo jednadžbe:

$$5x_1 + 3x_2 = \lambda x_1$$
$$3x_1 + 5x_2 = \lambda x_2$$

$$(5-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0$$
$$3x_1 + (5-\lambda)x_2 = 0$$

Karakteristična jednadžba:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = 0$$

Rješenja istog sustava (kvadratne jednadžbe) su $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$. Brojevi λ_1, λ_2 su tražene svojstvene vrijednosti. Za $\lambda = \lambda_1 = 8$, naš sustav postaje sljedeće:

$$-3x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

Rješenje: $x_1 = x_2$, x_1 proizvoljan realan broj, npr. uzmimo $x_1 = x_2 = 1$. Za $\lambda_2 = 2$ naš sustav je sljedeći:

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

Rješenje: $x_2 = -x_1, x_1 \in \mathbb{R}$.

Uzmimo npr. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Tako dobivamo kao svojstvene vrijednosti od A, na primjer $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ odgovara λ_1, a $\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ odgovara λ_2, ili je neki od njih pomnožen skalarom različitim od nule. Ovi vektori zatvaraju kutove od 45° i 135° s pozitivnim dijelom x_1-osi i oni određuju glavne pravce.
Svojstvene vrijednosti pokazuju da je membrana na glavnim pravcima rastegnuta faktorima 8 i 2, respektivno. Prema tome, ako uzmemo ove pravce kao smjerove novog Kartezijevog sustava, u_1u_2 umjesto x_1x_2, recimo s

pozitivnom u_1-poluosi u drugom kvadrantu u x_1x_2 sustavu, te ako stavimo $u_1 = r\cos\phi$ i $u_2 = r\sin\phi$, tada granična točka nerastegnute kružne membrane ima koordinate $\cos\phi \sin\phi$.

Tako nakon rastezanja vrijedi:

$$z_1 = 8\cos\phi, z_2 = 2\sin\phi.$$

Pošto je $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, dobivamo da je deformirana granica elipsa

$$\frac{z_1^2}{8^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1.$$

U sljedećem primjeru su za rješavanje problema primjenjene linearne jednadžbe u matričnom obliku pa se prvo uvodi opis modela problema.

1.4.6 Linearne jednadžbe u biologiji

Primjer 1.4.6 Pojednostavljeni problem populacijske dinamike

Leslijev model rasta populacije je model kojim možemo odrediti dobnu raspodjelu, npr. životinja. Svojstvenim vrijednostima Leslijeve matrice se određuje struktura neke populacije nakon određenog (duljeg) vremenskog perioda. Leslijev model opisuje rast populacije s obzirom na određenu dob. Neka je najstarija dob ženske populacije neke životinje 9 godina. Neka se populacija dijeli na tri klase od 3 godine po svakoj. Neka je Leslijeva matrica dana sa:

$$L = \left[\ l_j k\ \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

gdje je $l_1 k$ prosječan broj kćeri rođenih od jedne ženke tijekom vremena kad je u dobnoj klasi k, a $l_{j,j-1}$, $j = 1, 2$, je podjela ženki u dobnoj klasi $j-1$ koje će preživjeti i prijeći u klasu j.
(a) Koliko će ženki biti u svakoj klasi nakon $3, 6, 9$ godina, ako svaka klasa u početku ima 400 ženki?
(b) Za koju će se početnu raspodjelu broj ženki u svakom razredu promijeniti u istom omjeru? Kolika je to stopa promjene?

***Rješenje**:*

(a) Za početak,

$$x_{(0)} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} = (400, 400, 400)$$

Nakon 3 *godine,*

$$x_{(3)} = L_{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1080 \\ 240 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Slično, nakon 6 *godina je broj ženki u svakoj klasi dan sa*

$$x_{(6)} = L_{x_{(3)}} = (600, 648, 72)\,,$$

a nakon 9 *godina sukladnim izračunom dobivamo*

$$x_{(9)} = L_{x_{(6)}} = (1519.2, 360, 194.4)\,.$$

(b) Proporcionalna promjena znači da tražimo vektor raspodjele X *takav da je* $LX = \lambda X$*, gdje je* λ *stopa promjene (rast populacije za* $\lambda > 1$*, pad za* $\lambda < 1$*).*
Karakteristična jednadžba (dobivena razvojem karakteristične determinante po prvom retku) je sljedeća:

$$det(L - \lambda I) = -\lambda^3 - 0.6(-2.3\lambda - 0.3 \cdot 0.4) = -\lambda^3 + 1.38\lambda + 0.072 = 0.$$

Dobiveni pozitivni korijen je $\lambda = 1.2$*. Odgovarajući svojstveni vektor* X *može biti određen iz karakteristične matrice*

$$A - 1.2I = \begin{pmatrix} -1.2 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1.2 \end{pmatrix},$$

pri čemu je

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.125 \end{pmatrix},$$

gdje je $x_3 = 0.125$ *odabran,* $x_2 = 0.5$ *slijedi iz* $0.3x_2 - 1.2x_3 = 0$ *i* $x_1 = 1$ *iz* $-1.2x_1 + 2.3x_2 + 0.4x_3 = 0$.
Kako bismo dobili početnu populaciju od 1200 *kao prije, pomnožimo* X *sa* $1200/(1 + 0.5 + 0.125) = 738$.
Zaključak: Proporcionalni rast broja ženki u tri klase će se dogoditi ako su početne vrijednosti $738, 369, 92$ *u klasama* $1, 2, 3$ *respektivno. Stopa rasta će biti* 1.2 *svake* 3 *godine.*

Poglavlje 2

Zaključak

Linearne jednadžbe koristimo u svakodnevnom životu. Neke jednostavnije, primjerice s jednom nepoznanicom koriste gotovo svi u raznim djelatnostima. Pravilno formiranje linearne jednadžbe ili sustava linearnih jednadžbi je korisno i primjenjivo u mnogim situacijama. Primjerice, u računanju zarade, potrošnje, štednje i slično te za predviđanje istih. Dakle, osim u matematici, linearne jednadžbe se koriste i u drugim znanostima i djelatnostima. U ovom radu su dani neki problemi koji se pojavljuju u drugim znanostima te se za njihovo rješavanje primjenjuju linearne jednadžbe, odnosno sustavi linearnih jednadžbi, te svojstvene vrijednosti matrice. Iz navedenih činjenica možemo zaključiti da su primjena i važnost navedenih pojmova vrlo značajne u svakodnevnom životu. Svi navedeni sustavi linearnih jednadžbi se mogu lako riješiti uz pomoć matematičkih alata kao što su MATLAB [10], Mathematica, Microsoft Excel i mnogih drugih.

Literatura

[1] *Rak, M−Gelo, D: Proračun konstrukcija, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.*

[2] *Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, Zagreb, 1999.*

[3] *Salih Suljagić: MATEMATIKA III, 1999.*
URL: $https://master.grad.hr/nastava/matematika/mat3_99_00/node7.html$ *[17.5.2022.]*

[4] *Ihsanullah Hamid: Balancing Chemical Equations by Systems of Linear Equations, 2019.*
URL: $https://www.scirp.org/journal/paperinformation.aspx?paperid = 93664$ *[17.5.2022.]*

[5] *M. Burt Donald i dr.: Characterization of METAMORPHISM through MINERAL EQUILIBRIA, BookCrafters, Chelsea, Michigan, 1986.*

[6] *Bakić, Damir: LINEARNA ALGEBRA, Zagreb, 2008.*
URL: $https://web.math.pmf.unizg.hr/$ *bakic/la/linearna*$_a$*lgebra*$_s$*k*$_7$*.pdf [15.5.2022.]*

[7] *Lindfield, G.−Penny, J.: Numerical Methods Using MATLAB, Academic Press, 2019.*
URL: $https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/linear - equation - system$ *[18.5.2022.]*

[8] *J. Demmel, Applied numerical linear algebra, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.*

[9] *Wiley, Advanced Engineering Mathematics Kreyszig E. 9th Ed, 2006*

[10] *Truhar, Ninoslav: Numerička linearna algebra, Osijek, 2010.*

[11] *SlapniÄar, I.: Matematika 1, Kartular, Split, 2018.*

Popis slika