Nizovi i redovi u financijskoj matematici

Ribić, Patricia

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematike

Patricia Ribić

Nizovi i redovi u financijskoj matematici

Završni rad

Rijeka, srpanj, 2024.

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematike

Patricia Ribić

Nizovi i redovi u financijskoj matematici

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivana Slamić

Rijeka, srpanj, 2024.

Sadržaj

Sažetak

U radu je prikazana primjena nizova u financijskoj matematici. Opisana je primjena geometrijskog i aritmetičkog niza u kamatnom računu pri čemu je razmatran dekurzivni ili anticipativni način obračuna. Opisana je i na primjerima ilustrirana primjena Taylorovog reda kod tri vrste vrijednosnih papira. Preciznije, u određivanju vrijednosti obveznice u prozvoljnom vremenskom trenutku zatim u odabiru optimalnog portfelja kod vrijednosnih papira s rizikom poput dionica i zaključno, u procujeni cijene opcija.

Ključne riječi: Aritmetički niz; geometrijski niz; kamata; dekurzivni obračun; anticipativni obračun; Taylorov red, vrijednosni papir; obveznica; opcija; dionica

1 Uvod

U suvremenom poslovnom svijetu, različite industrije kao što su investicijske banke, komercijalne banke te osiguravajuća društva, koriste kompleksne matematičke metode kako bi optimizirale svoje poslovanje. Kroz primjenu financijske matematike, ovi sektori ne samo da minimiziraju troškove i procjenjuju moguće gubitke, već i aktivno upravljaju rizicima, strukturiraju portfelje te procjenjuju vrijednosti izvedenih vrijednosnih papira. Ovaj integrirani pristup poslovanju naglašava važnost ekonomskih modela koji se oslanjaju na matematičke funkcije kao ključne alate u analizi i predviđanju poslovnih rezultata te uspjeha.

Pojam *niza* temeljni je koncept u matematici i predstavlja funkciju definiranu na skupu prirodnih brojeva. Budući da varijabla funkcija koje se koriste u financijskoj analizi predstavlja vrijeme (npr. dane, mjesece ili godine), nizovi se prirodno koriste za praćenje promjena određene veličine kroz vrijeme. Kod predviđanja vrijednosti u budućnosti, važnu ulogu ima određivanje graničnog ponašanja niza, odnosno pojma *limesa*, a također i pojam *reda*. Primjerice, ako napravimo ulog uz neku kamatu, važno je razumjeti kako će se dobit povećavati tijekom vremena. Za procjenu dobivene vrijednosti uloga nakon određenog vremenskog razdoblja koristimo *kamatni račun* (*jednostavni* ili *složeni*). Kako se u takvim ulozima u svakom vremenskom periodu vrijednost dobiti povećava za neki fiksan iznos, jasno je da će ulogu u određivanju nepoznatih vrijednosti imati *aritmetički niz*. Kod ulagatelja se nerijetko javlja potreba za određivanjem vrijednosti obveznice ili nekog drugog uloga u razlitčitim vremenskim periodima. Iako postoji matematički izraz pomoću kojeg se te vrijednosti određuju, ponekad ponovno izračunavanje vrijednosti funkcije može biti računalno zahtjevno te se stoga može koristi prikaz funkcije pomoću *Taylorovog reda*.

Cilj ovog rada je predstaviti i opisati neke od brojnih primjena nizova i redova u financijskoj matematici. U drugom, poglavlju razmatramo pojam niza i reda te neke osnovne pojmove vezane uz njih. Opisujemo osnovne karakteristike nizova sa specifičnim obilježjima poput aritmetičkog i geometrijskog niza. Nadalje, prikazujemo primjenu spomenutih nizova u kamatnom računu i ilustriramo na primjerima. Točnije, prikazujemo vrijednosti glavnica određenih pomoću složenog kamatnog računa kao geometrijski niz te opisujemo anticipativni i dekurzivni način obračuna kamata. U četvrtom poglavlju navodimo primjenu redova, točnije primjenu Taylorovog reda u financijskoj analizi obveznica kao i drugih vrijednosnih papira poput opcija i dionica.

2 Nizovi i redovi

2.1 Niz i konvergencija

Neka je S neprazan skup. Funkciju $\alpha : \mathbb{N} \to S$ zovemo *niz* u S. U ovom radu promatrat ćemo nizove realnih brojeva, odnosno nizove za koje je $S = \mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$ pišemo $\alpha(n) =: \alpha_n$ i nazivamo *n-tim članom niza.*

Definicija 2.1. Za niz realnih brojeva $(\alpha_n)_n$ kažemo da *konvergira* prema $\alpha \in \mathbb{R}$ ako

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_\epsilon \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \epsilon) \tag{1}$$

Tada α zovemo *limes* ili *granična vrijednost* niza $(\alpha_n)_n$.

Kažemo da je niz realnih brojeva $(\alpha_n)_n$ *ograničen* ako postoji $M > 0$ tako da vrijedi $|\alpha_n| < M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Na skupu realnih brojeva konvergentan niz u $\mathbb{R}$ je ograničen. Međutim, obrat općenito ne vrijedi.

Neki nizovi imaju specifična obilježja; ako je npr. razlika između svaka dva susjedna člana jednaka, kažemo da je niz *aritmetički*. Preciznije, niz brojeva $(\alpha_n)_n$ je aritmetički niz ako postoji realni broj d takav da je $\alpha_n - \alpha_{n-1} = d$, za svaki $n \geq 2$. Broj d zovemo *razlika* ili *diferencija*. Iz gornje definicije lako se uoči da se opći član niza α_n može izraziti pomoću prvog člana i razlike na sljedeći način:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Primjer 2.1. Jedan aritmetički niz je: $3, 5, 7, 9, 11 \ldots$. Ovdje razlika iznosi 2, odnosno $d = 2$, $a_1 = 3$ te $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2, n \in \mathbb{N}$.

Uočimo da aritmetički niz s diferencijom različitom od 0 nije ograničen pa onda divergira u $+\infty$ ili u $-\infty$, ovisno o predznaku te diferencije.

Osim razlike, možemo zahtijevati da je omjer svaka dva susjedna člana stalan. Takav niz zovemo geometrijski niz. Preciznije, niz brojeva $(\alpha_n)_n$ je *geometrijski* niz, ako postoji realan broj $q \neq 0$ takav da za svaki prirodni broj $n > 1$ vrijedi

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = q.$$

Uočimo da je tada $\alpha_n = \alpha_{n-1} q = \ldots = \alpha_1 q^{n-1}$. Dakle, opći član geometrijskog niza može se izraziti kao

$$\alpha_n = \alpha_1 q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Primjer 2.2. Primjer geometrijskog niza je: $3, 6, 12, 24, 48 \ldots$. Ovdje je $a_1 = 3$, $q = 2$ te $a_n = 3 \cdot q^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

Geometrijski nizovi su konvergentni ako su konstantni, odnosno ako je omjer svaka dva uzastopna člana jednak jedan ($q = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = 1$,) tada konvergiraju prema članu a_1, ili ako je $|q| < 1$, tada konvergiraju prema 0). Inače su divergentni.

2.2 Redovi realnih brojeva

Proizvoljan niz realnih brojeva $(\alpha_n)_n$ generira novi niz $(s_n)_n$, gdje je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Red je uređeni par $((\alpha_n)_n, (s_n)_n)$ nizova $(\alpha_n)_n$ i $(s_n)_n$. Element α_n zovemo *opći član reda*, a s_n je n-ta *parcijalna suma reda.* Kada postoji $\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$, kažemo da red *konvergira* i da je S *suma reda.* Tada pišemo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = S. \tag{4}$$

Ako je $(\alpha_n)_n$ geometrijski niz, tada red čiji je opći član α_n zovemo *geometrijski red.*

Promotrimo geometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Za $q = 1$ očito vrijedi $s_k = k$ pa je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^{n-1} = +\infty$. Iz

$$(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{k-1})(1 - q) = 1 - q^k,$$

za $q \neq 1$ slijedi

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} q^{n-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Za $|q| < 1$ vrijedi $q^k \to 0$ pa geometrijski red konvergira i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{1 - q}.$$

Za $q \geq 1$ je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = +\infty$, a za $q \leq -1$ niz (s_k) nema limes.

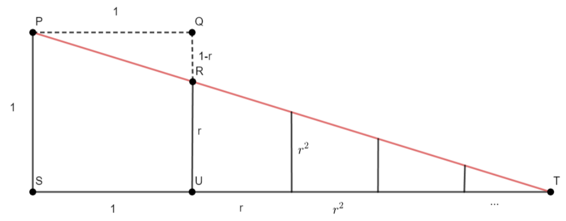
Postoje i vizualni dokazi formule za sumu geometrijskog reda (4). Na slici 1 označen je pravokutan trokut s katetama duljine $1, 1 - r$, te pravokutan trokut sa katetama duljine $1, 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$. Navedeni trokuti su slični te iz proporcionalnosti stranica slijedi izraz za sumu geometrijskog reda

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1 - r}. \tag{5}$$

U skladu s oznakama na slici 1, trokuti STP i PQR su pravokutni. Kako je pravac kojem pripada dužina $\overline{PT}$ transverzala pravaca kojima pripadaju dužine $\overline{PQ}$ i $\overline{ST}$, vrijedi da je $\sphericalangle STP \cong \sphericalangle PQR$ pa su prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta trokuti STP i PQR slični. Stoga imamo:

$$\frac{|ST|}{|PS|} = \frac{|PQ|}{|QR|}$$

iz čega slijedi (5).



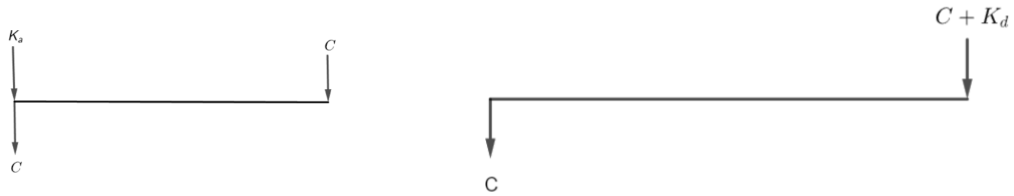
Slika 1: Vizualni dokaz formule za sumu geometrijskog reda

3 Primjena aritmetičkog i geometrijskog niza u kamatnom računu

3.1 Kamatni račun i primjena

Zamislite da ste odlučili uložiti novac u banku na određeno vremensko razdoblje (štednja) ili ste odlučili koristiti novčana sredstva iz banke (zajam, kredit). Taj proces je važan poslovni odnos koji je reguliran zakonima i ugovorom. Prije ugovaranja takvih ili sličnih poslova, potrebno je dobro poznavati pojmove koji su potrebni za njihovo ugovaranje. Jedna od najbitnijih stavki jest *kamata*. Kamata se najčešće objašnjava kao *naknada za raspolaganje tuđim novcem*. One se uvijek obračunavaju za neki osnovni vremenski interval, koji nazivamo *razdoblje ukamaćivanja* ili *razdoblje kapitalizacije* (najčešće jedna godina). *Kamatna stopa* je iznos koji zajmodavac naplaćuje za upotrebu imovine (novca) izražen u postotku glavnice. Kamatna stopa se obično definira na godišnjoj razini poznata i kao godišnja postotna stopa. Pod pojmom kamatna stopa podrazumijeva se iznos koji se plaća za 100 novčanih jedinica za neki osnovni vremenski interval. Ukoliko je zadana vrijednost glavnice C uz kamatnu stopu q, tada ćemo iznos jednostavnih kamata K odrediti tako da koristeći postotni račun odredimo postotni iznos na zadanu glavnicu.

Jednostavne kamate se izračunavaju na dva načina: *dekurzivno* ili *anticipativno* i najčešće se obračunavaju kod financijskih poslova. *Anticipativni način* obračuna kamata znači da se njihov obračun vrši i isplaćuje ili pribraja unaprijed za neko vremensko razdoblje, pri čemu se kamate obračunavaju od konačne vrijednosti iznosa. Ovaj način možemo ilustrirati kao na slici 2a.



(a) Anticipativni način obračuna (b) Dekurzivni način obračuna

Slika 2: Ilustracija obračuna kamata

Dakle, na početku jediničnog radoblja dužnik je posudio iznos C uz kamatnu stopu q. Zbog navedene posudbe dužnik će odmah platiti kamate u iznosu

$$K_a = \frac{C \cdot q}{100},$$

a osnovni dug u iznosu C vratiti će na kraju razdoblja. Kamata se uvijek računa na iznos kojim se raspolaže na početku razdoblja, ali se u tom trenutku, kada se primjenjuje gore navedeni način obračuna, taj iznos umanjuje za kamate. Iznos treba vratiti na kraju jediničnog razdoblja, pa tada u definiciji koristimo drugi termin.

Dekurzivni način obračuna kamata znači da se njihov obračun vrši i isplaćuje ili pribraja danom iznosu C na kraju danog vremenskog razdoblja, pri čemu se kamate obračunavaju od početne vrijednosti iznosa. Ovaj način možemo ilustrirati kao što je prikazano na slici 2b. Dakle, na početku razdoblja, dužnik je posudio iznos C uz kamatnu stopu p. Dužnik će na kraju razdoblja platiti kamate u iznosu

$$K_d = \frac{C \cdot p}{100}$$

uz početni dug C.

3.2 Jednostavni kamatni račun i aritmetički niz

Jednostavni kamatni račun se koristi ako se kamate izračunavaju na istu, početnu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja. Uočimo da kamate za neko vremensko razdoblje predstavljaju postotni dio glavnice koji dužnik mora platiti kao naknadu za korištenje posuđenog novca.

Neka je C glavnica, $p(G)$ fiksni godišnji kamatnjak, a n broj godina. Želimo odrediti iznos kamate K, ako računamo jednostavnim kamatnim računom, pri čemu podrazumijevamo da se kamate obračunavaju i pripisuju ili isplaćuju na kraju svake godine. Kao što smo ranije spomenuli, kamate predstavljaju postotni dio glavnice, pa ih određujemo iz razmjera

$$K : C = p(G) : 100,$$

odnosno

$$K = \frac{C \cdot p(G)}{100}.$$

Dakle, iznos kamate za prvu godinu je $K_1 = \frac{C \cdot p(G)}{100}$. Kako se kamate korištenjem jednostavnog kamatnog računa za svako razdoblje ukamaćivanja računaju na početnu glavnicu C, vrijedi da su to kamate i za svaku narednu godinu, odnosno za bilo koju od n razmatranih godina. Drugim riječima, jednostavne kamate za n godina n puta su veće od kamate za jednu godinu. Tada je iznos ukupne kamate za n godina jednak

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot n}{100}. \tag{6}$$

Kako je riječ o jednostavnom, godišnjem i dekurzivnom računu, konačna vrijednost glavnice na kraju prve godine iznosi

$$C_1 = C_0 + \frac{C_0 \cdot p(G)}{100} = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right).$$

Nakon druge godine iznosit će

$$C_2 = C_1 + \frac{C_0 \cdot p(G)}{100} = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) + \frac{C_0 \cdot p(G)}{100} = C_0 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot p(G)}{100}\right),$$

te na kraju n-te godine

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{n \cdot p(G)}{100}\right). \tag{7}$$

Možemo uočiti da konačne vrijednosti glavnice na kraju svake godine čine aritmetički niz (C_n), gdje je prvi član $a_1 = C_0$, a razlika je

$$d = \frac{C_0 \cdot p(G)}{100}.$$

Primjer 3.1. Izračunajmo konačnu vrijednost glavnice na koju će narasti glavnica od 5000,00€, ako je oročena na 4 godine uz godišnju kamatnu stopu od 5%. Obračun provodimo dekurzivnim jednostavnim kamatnim računom.

Poznata nam je vrijednost glavnice, $C_0 = 5000,00$. Također znamo i broj godina, $n = 4$ te $p(G) = 5$. Kada poznate vrijednosti uvrstimo u formulu (7), dobivamo

$$C_4 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 5}{100}\right) = 6000,00€.$$

Uočimo, određivanjem glavnice za svaku godinu, dobijemo aritmetički niz iznosa u eurima:

$$5250, 5500, 5750, 6000, 6250...$$

Možemo odrediti i ukupne kamate prema formuli (6)

$$K = \frac{5000 \cdot 5 \cdot 4}{100} = 1000.$$

Ovako definiran kamatni račun zovemo *kamatni račun od 100*, međutim u slučajevima kada je poznata vrijednost glavnice uvećane ili umanjene za iznos kamata, a potrebno je odrediti iznos glavnice ili kamata, koristimo *kamatni račun više ili niže sto*. Krećemo od osnovnog razmjera za jednostavni kamatni račun od 100

$$C : 100 = K : (p(G) \cdot n).$$

Tada slijedi

$$C : K = 100 : (p(G) \cdot n).$$

Nadalje, prema svojstvu razmjera koje kaže da razmjer ostaje valjan ako se zbroj (razlika) članova lijevog omjera odnosi prema zbroju (razlici) članova desnog omjera kao što se odnose po redu članovi lijevog prema članovima desnog omjera, imamo

$$(C \pm K) : (100 \pm p(G) \cdot n) = C : 100,$$

odnosno

$$(C \pm K) : (100 \pm p(G) \cdot n) = K : (p(G) \cdot n).$$

Iz ovih razmjera za vrijeme određeno godinama slijedi izraz za kamate K

$$K = \frac{(C \pm K) \cdot p(G) \cdot n}{100 \pm p(G) \cdot n}. \tag{8}$$

Ukoliko je vrijeme zadano u mjesecima imamo

$$K = \frac{(C \pm K) \cdot p(G) \cdot m}{1200 \pm p(G) \cdot m}. \tag{9}$$

Primjer 3.2. Neka osoba danas posudi 5000€ uz uvjet da će taj iznos vratiti za godinu dana. Ako je dogovoren dekurzivni način obračuna uz godišnji kamatnjak $q(G) = 8.5$, koliko i kada će dužnik morati platiti da bi podmirio dug na ugovoreni način?

S obzirom da je dogovoren dekurzivni način obračuna, dužnik mora platiti kamate u iznosu

$$K_d = \frac{C \cdot q}{100} = \frac{5000 \cdot 8.5}{100} = 425.$$

3.3 Složeni kamatni račun i geometrijski niz

Složene kamate su kamate koje se izračunavaju za svako razdoblje kapitalizacije od promjenljive glavnice, tj. uz kamate glavnice obračunavaju se i kamate na kamate. Kao i kod jednostavnog kamatnog računa, obračun može biti dekurzivan ili anticipativan. Složene kamate primjenjuju se kod financijskih operacija koje traju duže od godinu dana.

3.3.1 Dekurzivni način obračuna

Dekurzivni obračun kamata je obračun kamata na kraju razdoblja ukamaćivanja od promjenjive glavnice s početka tog razdoblja. Pri obračunu složenih kamata u svakom razdoblju ukamaćivanja tijekom vremena kapitalizacije glavnica je promjenjiva. Budući da je obračun kamata dekurzivan, godišnji i složen, konačna je vrijednost glavnice na kraju prve godine

$$C_1 = C_0 + \frac{C_0 \cdot p(G)}{100} = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right),$$

na kraju druge godine će iznositi

$$C_2 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^2,$$

te na kraju n-te godine:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^n. \tag{10}$$

Navedene vrijednosti glavnice čine geometrijski niz (C_n), gdje je početni član $a_1 = C_0$, a $q = 1 + \frac{p}{100}$. Opći član a_{n+1} je konačna vrijednost glavnice na kraju n-te godine, tj. $C_n = a_{n+1}$. Broj $r = 1 + \frac{p}{100}$ zovemo *dekurzivni kamatni faktor*. Uvrštavanjem tog izraza u formulu (10) imamo

$$C_n = C_0 \cdot r^n. \tag{11}$$

Tada ukupne kamate za složeni dekurzivni način obračuna dobivamo prema

$$I = C_n - C_0. \tag{12}$$

Primjer 3.3. Neka osoba uloži iznos od $12000,00$€. Kolika će biti vrijednost tog uloga nakon 8 godina, ako je kamatnjak 5%?

Poznato nam je, $C_0 = 12000$, $n = 8$ te $p(G) = 5$. Ako uvrstimo dane informacije u formulu (10), imamo

$$C_8 = 12000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^8 = 17729,47.$$

Stoga je vrijednost uloga nakon 8 godina jednaka 17729,47€.

3.3.2 Anticipativni način obračuna

Anticipativni obračun kamata je obračun kamata na početku razdoblja ukamaćivanja. Kod obračuna kamata u svakom razdoblju ukamaćivanja tijekom trajanja kapitalizacije glavnica se može mijenjati, odnosno promjenjiva je. Promatramo vrijednosti od početka uplate do kraja n-te godine. Vrijednost glavnice računajući pomoću anticipativnog načina, za prvu godinu je

$$C_0 = C_1 - \frac{C_1 \cdot q(G)}{100}, \quad \text{pa je} \quad C_1 = C_0 \cdot \frac{100}{100 - q(G)},$$

za drugu godinu iznosit će

$$C_1 = C_2 - \frac{C_2 \cdot q(G)}{100}, \quad \text{pa je tada} \quad C_2 = C_1 \cdot \frac{100}{100 - q(G)} = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100 - q(G)}\right)^2,$$

te za n-tu godinu

$$C_{n-1} = C_n - \frac{C_n \cdot q(G)}{100} = C_{n-1},$$

iz čega slijedi

$$C_n = C_0 \cdot \frac{100}{100 - q(G)} \cdot \left(\frac{100}{100 - q(G)}\right)^n.$$

Prethodno definirane vrijednosti glavnice čine geometrijski niz (C_n), pri čemu je prvi član $a_1 = C_0$, kvocijent je $q = \frac{100}{100-q(G)}$, a konačna vrijednost na kraju n-te godine je opći član niza. Kako je $a_n = a_1 q^{n-1}$ opći član geometrijskog niza, imamo

$$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100 - q(G)}\right)^n. \tag{13}$$

3.4 Proračunske tablice

Proračunske tablice su koristan alat za rješavanje financijskih problema jer se jasno vidi napredak ulaganja, učinak promjene kamatnih stopa ili plaćanja. Provedimo malo istraživanje pomoću proračunske tablice složenih kamata. Kada istražujemo opcije s financijskim problemom, takvo istraživanje na engleskom nazivamo "what if analysis".

Kako povećavamo broj razdoblja uračunavanja, kamata se za svako razdoblje smanjuje,a povećavanjem godišnje kamatne stope, kamata za svako razdoblje

Uloženi iznos	**5000**		
Godišnja kamatna stopa	14		
Razdoblje	12		
Razdoblje po mjesecima	**Početno stanje**	**Kamate**	**Završno stanje**
1	5000,00	58,33	5058,33
2	5058,33	59,01	5117,35
3	5117,35	59,70	5177,05
4	5177,05	60,40	5237,45
5	5237,45	61,10	5298,55
6	5298,55	61,82	5360,37
7	5360,37	62,54	5422,91
8	5422,91	63,27	5486,17
9	5486,17	64,01	5550,18
10	5550,18	64,75	5614,93
11	5614,93	65,51	5680,44
12	5680,44	66,27	5746,71

Tablica 1: Proračunska tablica

raste. Vrijednosti u ćelijama $C6, ..., C17$ izračunali smo pomoću formule: $Ci = (Bi \cdot B2/100)/B3$ za svaki $i = 1, ..., 12$, a vrijednosti u ćelijama Di, za svaki $i = 6, ..., 17$ kao sumu $Bi + Ci$. Mijenjanjem gore navedenih vrijednosti, promijeniti će se i vrijednosti u tablici.

4 Primjena Taylorovog reda u financijskog matematici

U ovom ćemo poglavlju opisati primjenu Taylorovovog reda u financijskoj analizi obveznica. *Obveznice* su vrijednosni papiri[1], one nisu štednja, ali jesu jedan oblik ulaganja. Predstavljaju vrstu zajma pri kojem ulagatelj u obveznice posuđuje novčana sredstva izdavatelju na određeno razdoblje. U zamjenu za novčana sredstva izdavatelj obveznica ulagateljima plaća kamatu (*kupon*) u unaprijed određenim vremenskim intervalima (obično jednom godišnje ili polugodišnje) i vraća glavnicu na *datum dospijeća*, okončavajući zajam. Tipični izdavatelji obveznica su države, jedinice lokalne samouprave i kompanije. Opisat ćemo kako primjena Taylorovog reda omogućuje analitičarima da pristupe obveznicama na jednostavniji način, olakšavajući proučavanje njihove vrijednosti.

Teorem 4.1 (Taylorov teorem)**.** Pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ funkcija $f : I \to \mathbb{R}, c \in I$ ima neprekidnu derivaciju $f^{(n+1)}$ na $I = \langle a, b\rangle$. Tada za prozivoljnu točku $x \in I$ postoji točka $\xi = \xi(x)$, $\xi \in \langle c, x\rangle$ takva da je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \tag{14}$$

Polinom s desne strane jednakosti (14) zovemo *Taylorov polinom n-tog stupnja* funkcije f u okolini točke c. Red $\sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, n \in \mathbb{N}$ zovemo Taylorov red, a Taylorovi polinomi predstavlja n-tu parcijalnu sumu Taylorovog reda. *Taylorov polinom n-tog stupnja* označavamo s $T_n(f, c; x)$, a izraz $r_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ predstavlja ostatak (pogrešku aproksimacije). Taylorov red funkcije f oko točke c konvergira prema f na I ako i samo ako $r_n(x)$ konvergira prema 0, kada $n \to \infty$ za svaki x iz I. U tom slučaju vrijedi:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots . \tag{15}$$

4.1 Primjena u procjeni vrijednosti obveznica

Pokažimo sada kako se Taylorov red može upotrijebiti u analizi obveznica.

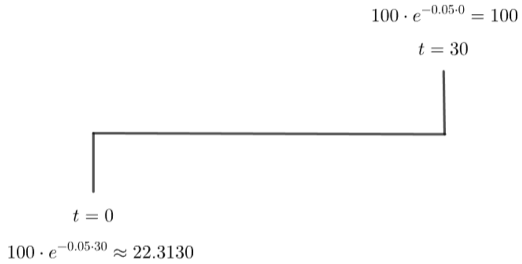
Primjer 4.1. Pretpostavimo da je neka osoba odlučila uložiti u nulkuponsku obveznicu. Glavnica obveznice je 100€, a dogovoreno je da prinos iznosi 5% te trajanje obveznice 30 godina. Osoba koja je uložila u obveznice želi znati koliko će u kojem vremenskom trenutku iznositi njena vrijednost.

Najprije moramo odrediti funkciju h koja predstavlja vrijednost obveznice u nekom trenutku. Varijabla t funkcije h predstavlja vrijeme. Glavnica obveznice je 100€, a prinos 5% znači da svake godine ulagatelj dobije 5% od glavnice. Međutim,

[1] *Vrijednosni papir* je jednostrani pravni akt u obliku isprave ili elektroničkoga zapisa koji ovlašteniku daje pravo na ostvarenje nekoga imovinskoga prava, odnosno kojim se izdavatelj obvezuje ispuniti neku imovinskopravnu obvezu.

prinos se smanjuje kako obveznica stari te je riječ o kontinuiranom prinosu. Kontinuirani prinos obveznice odnosi se na prinos koji investitori ostvaruju kroz vremensko razdoblje tijekom trajanja obveznice. Umjesto da se promjene u prinosu prate u diskretnim vremenskim intervalima, kao što su dnevni ili godišnji prinosi, kontinuirani prinos uzima u obzir prinos koji se neprekidno mijenja tijekom vremena. Kada se promatra vrijeme na ovaj način, koristimo eksponencijalnu funkciju, odnosno prinos od 5% zapisujemo kao $e^{-0.05}$. Nadalje, trajanje obveznice je 30 godina, što znači da je ukupno razdoblje 30 godina, pa imamo $e^{-0.05(30-t)}$, gdje $(30-t)$ predstavlja broj godina koje su prošle od početka trajanja obveznice. Sada dobivamo:

$$f(t) = 100e^{-0.05(30-t)}.$$



Slika 3: Vrijednosti obveznice prve i tridesete godine

Sada ako ulagatelj, primjerice, želi odrediti vrijednost obveznice nakon 16 godina, pomoću funkcije h može to izračunati uvrštavanjem poznatih vrijednosti:

$$f(16) = 100 \cdot e^{-0.05 \cdot (30-16)} \approx 49.6585$$

Međutim, u financijskom svijetu, ponovno izračunavanje vrijednosti zadane funkcije, izravno, može biti poprilično računalno skupo. Aproksimacija funkcije pomoću Taylorovih polinoma je brža za izračunavanje, što je posebno korisno u računalnim simulacijama i modeliranju. Pritom možemo procijeniti koliko je dobra aproksimacija funkcije u određenom intervalu oko zadane vrijednosti.

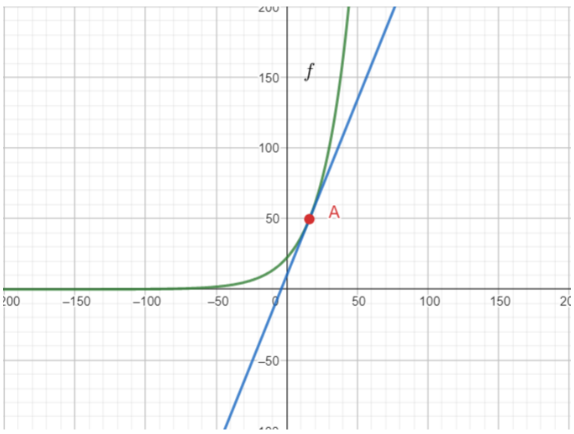
Pokažimo to na primjeru određivanja vrijednosti $f(16.5)$, odnosno vrijednosti obveznice nakon 16.5 godina, pri čemu koristimo aproksimaciju linearnom funkcijom vezanu uz od prije poznatu vrijednostu $f(16)$. Drugim riječima, tražimo pravac koji najbolje aproksimira funkciju f u okolini te točke. Budući da je pravac zadan pomoću jednadžbe

$$y = ax + b$$

pri čemu je a nagib pravca, a koeficijent b predstavlja odsječak na y-osi, imamo $g(t) = at + b$. Pretpostavimo da su vrijednosti funkcija f i g u točki $t = 16$ jednake, odnosno da je $f(16) = g(16)$. U tom slučaju, taj pravac predstavlja tangentu na graf funkcije f. Kada tražimo nagib pravca koji predstavlja tangentu grafa, tražimo nagib tangente. Znamo da je ta vrijednost jednaka prvoj derivaciji funkcije u zadanoj točki. Stoga je $a = f'(16)$. Rješavanjem sustava

$$a = f'(16)$$
$$f(16) = a \cdot 16 + b$$

dobivamo $g(t) = 2.4829t + 9.9321$, odnosno $g(16.5) = 50.8995$.



Slika 4: Aproksimacija linearnim polinomom

Na slici 4 možemo uočiti kako je za vrijednosti domene koje su u okolini točke $c = 16$ odstupanje vrijednosti funkcije g od f relativno malo, međutim udaljavanjem od $c = 16$ odstupanje vrijednosti funkcije g od funkcije f je sve veće. Pogledajmo sada kako izgleda aproksimacija kvadratnom funkcijom. Koristimo kvadratnu funkciju

$$h(t) = at^2 + bt + c$$

gdje je a vodeći, b linearni i c slobodni član. Najprije odredimo prve dvije derivacije.

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2at + b \\ h''(t) &= 2a. \end{aligned}$$

Nadalje, kako bismo bili sigurni da je aproksimacija dobra, moramo postaviti neke uvjete; neka je $f(16) = h(16)$, $f'(16) = h'(16)$ te $f''(16) = h''(16)$. Izračunamo vrijednosti od f i njezine prve dvije derivacije u $t = 16$ i dobivamo sljedeći sustav:

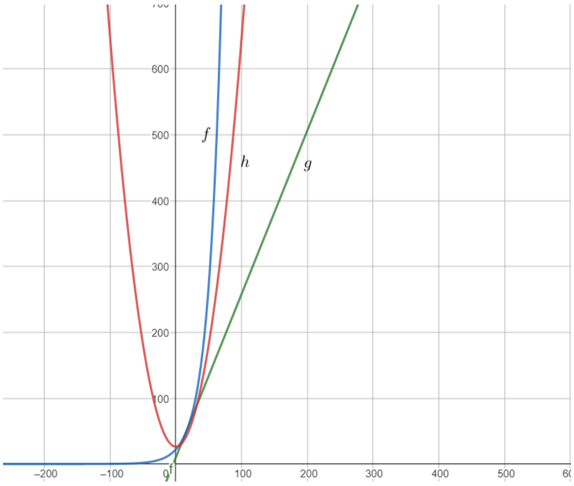
$$\begin{cases} 49.6585 = f(16) & = a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c \\ 2.4829 = f'(16) & = 2a \cdot 16 + b \\ 0.12415 = f''(16) & = 2a \end{cases}$$

Rješavanjem sustava dobivamo $a \approx 0.062075$, $b \approx 0.49666$ i $c \approx 25.882202$, odnosno:

$$h(t) = 0.062075t^2 + 0.49666t + 25.882202.$$

Sada vrijednost glavnice 16.5 godina godina iznosi približno 50.9168, što je u usporedbi sa stvarnom vrijednosti 50.9156 vrlo dobra aproksimacija. Na slici 5 vidimo da je aproksimacija polinomom drugog stupnja bolja. Graf funkcije h predstavlja drugu aproksimaciju, a graf funkcije g prvu.

Iz Taylorovog teorema slijedi da će aproksimacija biti bolja što veći stupanj polinoma odaberemo, međutim, odabirom većeg stupnja gubimo na efikasnosti. U financijskom svijetu, najčešće je dovoljno odrediti prvu ili drugu aproksimaciju. Pokažimo



Slika 5: Aproksimacija polinomom drugog stupnja

sada postupak određivanja aproksimacije u proizvoljnoj točki domene t u okolini promatrane točke t_0. Ako u funkciju $h(t) = 0.062075t^2 + 0.49666t + 25.882202$, umjesto t uvrstimo $t_0 + \Delta t$, odnosno stavimo $t = t_0 + \Delta t$, pri čemu je t_0 poznato vrijeme, a Δt predstavlja odstupanje od poznate vrijednosti vremena, odnosno od t_0, imamo:

$$h(t) = 0.062075(t_0 + \Delta t)^2 + 0.4966(t_0 + \Delta t) + 25.82202.$$

Ako uvrstimo vrijednost za t_0, imamo:

$$h(t) = 0.062075(16 + \Delta t)^2 + 0.4966(16 + \Delta t) + 25.82202$$

odnosno:

$$h(t) = 0.062075 \cdot 16^2 + 0.4966 \cdot 16 + 25.82202 + 0.06207(\Delta t)^2 + 2 \cdot 16 \cdot \Delta t \cdot 0.06207 + 0.4966\Delta t$$

$$h(t) = h(16) + \frac{1}{2}h''(16) \cdot (\Delta t)^2 + (2 \cdot 16 \cdot 0.06207 + 0.4966)\Delta t$$

$$h(t) = h(16) + \frac{1}{2}h''(16) \cdot (\Delta t)^2 + \Delta t \cdot h'(16)$$

Uočimo da je dobivena aproksimacija funkcije f upravo Taylorov polinom drugog stupnja, odnosno:

$$f(t) = h(t_0) + h'(t_0) \cdot \Delta t + \frac{1}{2}h''(t_0)(\Delta t)^2$$

Možemo uočiti da pomoću već definirane funkcije, računanje vrijednosti obveznice u različitom razdoblju na vrlo jednostavan i brz način računamo sve potrebne vrijednosti. Upravo iz tog razloga, u suvremenom financijskom okruženju, gdje brzina i preciznost često određuju uspjeh ili neuspjeh investicija, Taylorov red postaje važan alat u analizi obveznica i drugih financijskih instrumenata. Ovaj matematički koncept omogućuje nam da bolje razumijemo složene funkcije koje definiraju vrijednost obveznica, čime se olakšava proučavanje njihovih karakteristika, rizika i dinamike tržišta.

4.2 Primjena Taylorovog reda u analizi srednje vrijednosti

U ovoj cjelini ćemo opisati primjenu Taylorovog reda u tzv. *mean-variance analizi* (analizi srednje vrijednosti i varijance) koja se odnosi na vrijednosne papire s rizikom. Za razliku od obveznica koje su vrijednosni papiri bez rizika definirani tako da je unaprijed poznata isplata za uloženi iznos, postoje vrijednosni papiri kod kojih taj iznos nije unaprijed određen već ovisi o drugim faktorima. Jedan primjer takve vrste vrijednosnih papira su *dionice*, gdje isplata za uloženi iznos ovisi o tržišnoj cijeni dionice, ekonomskim uvjetima te o ponudi i potražnji. Uočimo da je analiza obveznica jednostavnija zbog gore navedenih uvjeta, dok je u ovoj vrsti ulaganja riječ o slučajnim povratima. Zbog toga su iznosi koje ulagač može dobiti veći. S obzirom da vrijednost dionice nije unaprijed određena, za opisivanje mogučih vrijednosti u tom trenutku biti će potrebni pojmovi iz teorije vjerojatnosti.

4.2.1 Matematičko očekivanje, slučajna varijabla i varijanca

Uređena trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gdje je $\mathcal{F}$ σ-algebra na nepraznom skupu Ω i $\mathbb{P}$ vjerojatnost na $\mathcal{F}$, zovemo *vjerojatnosni prostor.* U radu će biti dovoljno promatrati samo konačan ili prebrojiv skup Ω te $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Takav prostor zovemo *diskretnim vjerojatnosnim prostorom.*

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ diskretan vjerojatnosni prostor. *Slučajna varijabla* je proizvoljna realna funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Diskretne slučajne varijable zadajemo tako da zadamo prebrojiv skup vrijednosti koje ta slučajna varijabla može primiti, tj. skup

$$R(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

i njima pridružene vjerojatnosti $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. To zapisujemo u obliku tablice

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

Ovu tablicu nazivamo *tablica distribucije, distribucija* ili *zakon razdiobe* slučajne varijable X. Distribucija ima sljedeća svojstva:

1. $x_i \neq x_j$ čim je $i \neq j$;
2. $p_i \geq 0, \forall i$;
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$

Definicija 4.1. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ diskretan vjerojatnosni prostor, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ i X slučajna varijabla na Ω. Ako red $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ apsolutno konvergira, onda njegovu sumu zovemo *matematičko očekivanje* (ili kraće očekivanje) slučajne varijable X i označujemo sa

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Definicija 4.2. Neka je X slučajna varijabla i neka EX postoji. Varijanca od X definira se sa

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right], \tag{16}$$

ako očekivanje u (16) postoji.

4.2.2 Portfelj

Vratimo se na primjer vrijednosnog papira s rizikom, odnosno dionice. Pretpostavlja se da ishodima određivanja vrijednosti dionica možemo pridružiti vjerojatnosti. Na taj način definirana je jedna slučajna varijabla te sukladno tome možemo promatrati *očekivani povrat*. Uzmimo na primjer da je vrijednost dionice u trenutku $t = 0$ jednaka 100 eura, a na kraju vremenskog razdoblja se može povećati s vjerojatanošću 0.5 za 100 eura ili smanjiti za 50 eura s vjerojatnošću od 0.5. Tada je očekivani povrat R jednak

$$\mathbb{E}(R) = 0.5 \cdot 100 + 0.5 \cdot (-50) = 25.$$

Prirodno se postavlja pitanje je li pojedinac spreman napraviti ulog samo na temelju očekivanog povrata. Uočimo da je u prethodnom primjeru moguć dobitak, ali i gubitak. Stoga takve vrijednosne papire, osim očekivanog povrata karakterizira pojam *rizika*.Pitanje je kako matematički opisati rizik, a jedan od pristupa je mjeriti varijancu.

Na primjer, zamislimo da moramo izabrati bolju od sljedeće dvije mogućnosti. Imamo dva lutrijska listića, prvi nam osigurava 200000 eura (tj. vjerojatnost da osvojimo taj iznos je 100%), a za drugi vrijedi da s vjerojatnošću od 80% osvajamo 150000 eura, 50000 eura uz vjerojatnost 16% i 0 eura dobivamo uz vjerojatnost od 4%. Ako dobitke shvatimo kao slučajne varijable, onda su njihovi zakoni razdiobe dani s

$$X \sim \begin{pmatrix} 200000 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 150000 & 500000 & 0 \\ 0.8 & 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Odredimo sada njihovo matematičko očekivanje.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 200000 \cdot 1 = 200000, \\
\mathbb{E}[Y] &= 150000 \cdot 0.8 + 500000 \cdot 0.16 + 0 \cdot 0.04 = 200000.
\end{aligned}$$

Uočimo da je očekivani povrat jednak za oba lutrijska listića. Međutim, ako odredimo pripadne varijance imamo

$$\begin{aligned}
Var[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 400000 - 400000 = 0, \\
Var[Y] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 1.8 \cdot 10^{10}.
\end{aligned}$$

Uočimo da je varijanca slučajne varijable Y znatno veća, što znači da je rizik dobivanja očekivanog povrata drugog listića veći u odnosu na prvi. Iz tog je razloga prvi listić poželjniji pojedincu koji nije sklon riziku.

Vrijednosni papiri, novac ili druga financijska sredstva koja su u vlasništvu jedne osobe ili tvrtke pripadaju portfelju. *Portfelj* je skup financijskih sredstava koje neki pojedinac ili poduzeće posjeduje. Uzmimo na primjer portfelj koji je opisan sljedećom tablicom.

Dionica	Vrijednost (EUR)	Očekivani povrat (EUR)
A	100,000	10,000
B	200,000	10,000
C	200,000	30,000

Tablica 2: Podaci o portfelju

Ukupna vrijednost portfelja je 500000 eura. Dionica A čini 20%, dok dionice B i C čine svaka 40% ukupne vrijednosti. Množenjem težine pojedine investicije sa njihovim očekivanim povratom dobivamo očekivani povrat za dionice A,B i C redom 2000 eura, 4000 eura i 12000 eura. Za izračun varijance, koriste se podaci povratne stope (vrijednosti su iskazane u eurima) iz prethodnih godina koje navodimo u tablici 3.

Godina	Dionica A	Dionica B	Dionica C
Prva godina	5000	20000	30000
Druga godina	10000	-10000	-20000
Prosječna stopa povrata	7500	5000	5000

Tablica 3: Povratne stope za dionice A, B i C

Standardna devijacija se izračunava kao kvadratni korijen varijance. Dobivene vrijednosti prikazane su tablicom 4

Dionica	Varijanca	Standardna devijacija
A	6250000	2,500 EUR
B	225000000	15,000 EUR
C	625000000	25,000 EUR

Tablica 4: Vrijednosti varijanci i standardnih devijacija

Slijedi da je standardna devijacija dionice A 2%, dionice B 5% i dionice C 9%. Analizirajući ove rezultate, investicije B i A imaju slične povrate, ali investicija A ima niži rizik. Za optimizaciju portfelja, može se razmotriti zamjena investicije B za investiciju s većim povratima ili nižim rizikom.

4.2.3 Odabir optimalnog portfelja

Određivanjem poželjnijeg portfelja ulagač zapravo određuje koliki udio novca želi uložiti u pojedini vrijednosni papir. Ako kao kriterij uzmemo maksimizaciju povrata i minimizaciju rizika, dolazimo do mean-variance analize. Analiza srednje vrijednosti i varijance dio je moderne teorije portfelja koja mjeri rizik ulaganja u odnosu na potencijalni povrat. Ulagači koriste ovu analizu kako bi procijenili odluke o ulaganjima tako što procjenjuju koliki rizik treba preuzeti u odnosu na to koliko bi isto ulaganje moglo donijeti profita. Idealan omjer je veliki povrat za istu razinu rizika ili nizak rizik za istu razinu nagrade. Na primjer, ako dva različita ulaganja imaju isti potencijal za povrat u smislu profita, ulaganje s najmanjim rizikom, odnosno potencijalom za gubitak novca, je bolje ulaganje.

Stavove pojedinca prema gubitku, dobitku i riziku možemo opisati pojmom *korisnost*. U terminima korisnosti, vrijednost stvari nije određena cijenom koju netko želi platiti za nju, već korisnošću koju ona ima za vlasnika. Na primjer, iznos od 100 eura osobi koja živi u siromaštvu ima puno veću korisnost, nego za nekoga tko ima stabilan visoki prihod. Iako je nominalna vrijednost novca jednaka u oba slučaja, dvije osobe u različitim situacijama mogu različito percipirati njenu vrijednost. Budući da je oblik funkcije korsnosti određen sklonostima pojedinca, određivanje te funkcije može zahtijevati promatranja i istraživanja kroz stvarne podatke i eksperimente. Kako bi se olakšao postupak određivana funkcije korisnosti koristimo aproksimaciju Taylorovim polinomom. Kako bi zaista vrijedilo da je aproksimacija Taylorovim polinomom dobro rješenje za problem odabira optimalnog portfelja, moraju vrijediti određene pretpostavke. Važno je osigurati da predložena aproksimacija konvergira uniformno za sve dopuštene alokacije portfelja. Također su potrebne pretpostavke o ograničenim povratima imovine te mala odstupanja od srednje vrijednosti. Kada su ove pretpostavke zadovoljene, Taylorova aproksimacija može biti vrlo korisna jer omogućava jednostavno računanje očekivanja i varijance korisnosti te pruža intuitivnu interpretaciju odnosa između rizika i prinosa. Neka je

$$U = U(x) \tag{17}$$

gdje U označava korisnost, funkcija korisnosti mjeri preferencije za određeni skup dobara ili usluga. Neka je x povrat imovine za koji možemo pretpostaviti da je slučajna varijabla s očekivanjem $\mu = \mathbb{E}(x)$ i varijancom $\sigma^2 = \mathbb{E}(x-\mu)^2$. Povrat imovine smatra se slučajnom varijablom jer postoji više ishoda kod kojih možemo procijeniti pripadne vrijednosti. Koristeći Taylorovu formulu funkciju korisnosti možemo zapisati kao

$$U(x) = U(\mu) + (x-\mu)U'(\mu) + \frac{1}{2}(x-\mu)^2 U''(\mu) + R. \tag{18}$$

Kako izraz $x - \mu$ predstavlja odstupanje povrata od njegove srednje vrijednosti, tada je očekivanje tog odstupanja 0. Pretpostavljajući da je ostatak zanemariv te uvrštavanjem $\mu = \mathbb{E}(x)$ i $\sigma^2 = \mathbb{E}(x-\mu)^2$, možemo izraziti očekivanu korisnost kao

$$\mathbb{E}(U) = U(\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2 U''(\mu). \tag{19}$$

Dakle, očekivana korisnost ovisi samo o srednjoj vrijednosti i varijanci povrata. Ako gornje pretpostavke vrijede,tada su odluke temeljene na analizi srednje vrijednosti i varijance ekvivalentne odlukama temeljenim na maksimizaciji očekivane korisnosti. Naposljetku, primijetite da za fiksnu vrijednost očekivane korisnosti, recimo, $\mathbb{E}(U) = U_0$, imamo

$$U' d\mu + \frac{1}{2} U'' d\sigma^2 = 0, \tag{20}$$

jer je očekivana korisnost U konstanta pa je tada derivacije iste jednaka nuli. Dakle,

$$\frac{d\mu}{d\sigma^2} = -\frac{U''}{2U'}.$$

Gornja jednadžba pokazuje odnos između rizika i prinosa. Kako bi ostao indiferentan na promjenu rizika, σ^2, investitor zahtijeva povećanje prinosa od $-\frac{U''}{2U'}$. Što je potrebna naknada veća, to je stupanj tolerancije rizika investitora veći. Stoga se

$$v = -\frac{U''}{U'}$$

uzima kao mjera tolerancije prema riziku, pa ovim postpukom olakšavamo proces pronalaženja optimalnog portfelja

4.3 Primjena Taylorovog reda u određivanju cijena opcija

U prethodnoj cjelini promatrali smo dionice koje su vrijednosni papiri s rizikom. Kod ulaganja u takvu vrstu vrijednosnih papira, možemo uložiti u izvedeni vrijednosni papir čija je imovina promatrani vrijednosni papir s rizikom (na primjer, dionica). Jedan takav izvedeni vrijednosni papir je *opcija*.

Opcija je vrsta ugovora koji svom vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu da kupi ili proda određenu količinu naznačenog instrumenta (obično dionice) po određenoj cijeni i u određenom vremenskom razdoblju. Postoje dvije vrste opcija, *call* i *put*. Call opcija omogućuje da ulagatelj kupi dionice po određenoj cijeni, dok put opcija omogućuje prodaju dionica. Razlikujemo ih i prema datumu dospijeća. *Europske* opcije su opcije gdje imovinu možemo kupiti ili prodati do određenog datuma ili na taj dan, dok *američke* opcije dozvoljavaju trgovinu do datuma koji je unaprijed određen.

Kao za sve investicije, prije ulaganja u opcije, kako bi ulagatelj bio spreman uložiti u iste, cijena opcije mora biti adekvatno izabrana. Postoji nekoliko modela i formula pomoću kojih možemo računati cijene opcija. Neke od poznatijih su binomna metoda, Carr-Madan i Black-Scholes model. Black-Scholesov model je razvijen 1973. godine od strane fizičara i ekonomista Fischera Blacka i Myrona Scholesa, zajedno s doprinosima Roberta Mertona. Za svoj rad na razvoju modela za procjenu vrijednosti opcija, Black, Scholes i Merton nagrađeni su Nobelovom nagradom za ekonomiju. Njihov model omogućuje precizno određivanje cijene opcija uzimajući u obzir faktore kao što su trenutna cijena osnovnog vrijednosnog papira, cijena izvršenja, preostalo vrijeme do dospijeća, očekivana volatilnost[2] i stopa bez rizika[3]. Parcijalna diferencijalna jednadžba oblika:

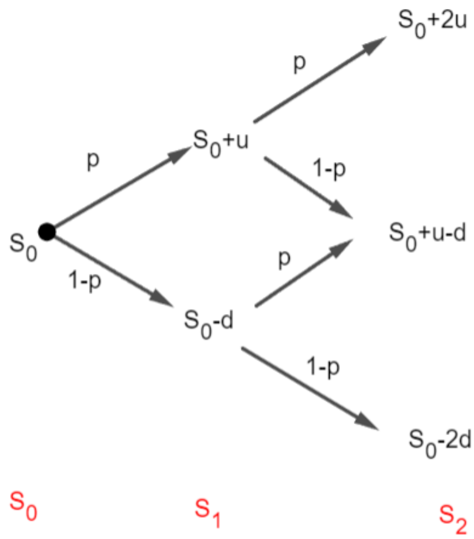
$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \tag{21}$$

zove se Black-Scholesova jednadžba i implicitno opisuje cijenu europske call opcije C u odnosu na cijenu osnovne dionice S, vrijeme t, standardnu devijaciju povrata dionice σ i bezrizične kamatne stope r.

Prethodno je spomenuta i binomna metoda. Binomna metoda je matematički model temeljen na pretpostavci da se cijena opcije može opisati sa dvije vrijednosti za svako vremensko razdoblje. U svakom koraku pretpostavljamo da cijena financijskog instrumenta može porasti ili pasti s određenim vjerojatnostima. Ideja je započeti s početnom cijenom dionice S_0, zatim dodati u eura sa vjerojatnošću p ili oduzeti d eura s vjerojatnošću $1-p$.

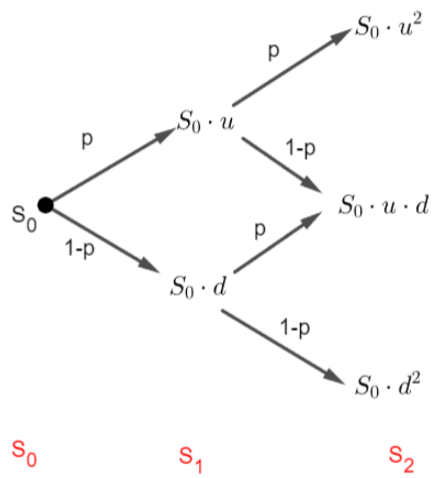
[2]Volatilnost nekog financijskog instrumenta, odnosno bilo koje imovine daje informaciju o veličini promjena njegove cijene u proteklom razdoblju i najčešće se računa kao standardna devijacija promjene cijene u tom razdoblju.

[3]Stopa bez rizika je kamatna stopa koja predstavlja minimalni očekivani prinos bez izloženosti riziku gubitka glavnice i koristi se kao referentna točka za procjenu rizičnosti i potencijalnog prinosa drugih investicija koje uključuju rizik.



Slika 6: Binomna metoda

Očito, cijena opcije u bilo kojem vremenskom trenutku je član niza. Ovaj model je najjednostavniji, ali nije i naučinkovitiji model za određivanje cijena opcije. Uočimo, ovakvim načinom možemo dobiti negativne cijene opcija što nije poželjno. Kako bismo smanjili nedostatke ovakve binome metode, možemo prijeći na multiplikativni binomni model određen sljedećim binarnim stablom.



Slika 7: Multiplikativna binomna metoda

Ova metoda je korisnija jer pruža veću realnost (cijene opcija nikada neće biti manje od 0). Jedna od pretpostavki korištenja binomne metode je načelo bez arbitraže. Arbitraža se odnosi na mogućnost ostvarivanja profita prilikom kupovanja neke imovine na jednom tržištu i istovremenom prodajom te iste imovine na drugom tržištu po višoj cijeni. U skladu s tim, uvjet bez arbitraže tvrdi da "nema besplatnog ručka", odnosno nema mogučnosti ostvarivanja profita bez rizika. Taj uvjet nam osigurava jedinstven zapis vjerojatnosti p pomoću u i d.

Oznake $S_i, i \in \mathbb{N}$ na slikama 6 i 7 predstavljaju niz slučajnih varijabli koje mogu poprimiti vrijednosti čvorova stabla na visini i. Uočimo da vrijedi $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot P(S_n = s_i)$. Također zbog uvjeta bez arbitraže imamo da je $S_0 = \mathbb{E}(S_1)$, pa slijedi $S_0 = p \cdot S_0 \cdot u + (1-p) \cdot S_0 \cdot d$, odnosno $p = \frac{1-d}{u-d}$. Ta jedinstvenost nam daje jedinstvenost rješenja problema određivanja cijena opcija ovakvim binomnim modelom.

Kratkoročna aproksimacija

Kratkoročna aproksimacija odnosi se na tehniku kojom se procjenjuje vrijednost funkcije u bliskoj budućnosti temeljem njezine trenutne vrijednosti i stope promjene. Financijski gledano, ideja kratkoročne aproksimacije nastaje ako na primjer želimo odrediti cijenu opcije koju će poprimiti sutra. Ako imamo vrijednost funkcije $f(x) = y$, tada vrijednost funkcije nakon određenog vremena možemo aprokimirati pomoću Talorovog polinoma.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)(\Delta x)^2 \cdots .$$

Budući da je riječ o kratkoročnoj aproksimaciji možemo se fokusirati na prva dva člana odnosno na linearnu aprokismaciju

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Slijedi

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Također, kada $\Delta x \to 0$ vrijedi:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

međutim, ova aproksiamcija je valjana ako je f neprekidna i diferencijabilna. Kako smo gore spomenuli, binomna metoda je diskretna metoda, odnosno koristi diskretne vremenske korake (dan, tjedan, mjesec..), pa moramo konstruirati novu neprekidnu funkciju $C(t)$ za cijenu opcije. Metoda koja zadovoljava te uvjete je Black-Scholesova metoda. Black-Scholesova formula (21) može biti diskretizirana pomoću kratkoročne aproksimacije,

$$C(t + \Delta t) \approx C(t) + C'(t)\Delta t.$$

Zaključno, kratkoročna aproksimacija Black-Scholesove formule omogućuje jednostavnije računanje vrijednosti opcija u diskretnim vremenskim koracima. Umjesto rješavanja parcijalne diferencijalne jednadžbe u kontinuiranom vremenu, koristimo linearnu aproksimaciju koja uključuje prvi izvod cijene opcije po vremenu. Ova metoda je korisna jer omogućuje brže iterativno računanje vrijednosti opcija s malim vremenskim koracima, čime se pojednostavljuje prilagodba promjenjivim tržišnim uvjetima i preciznije upravljanje financijskim rizicima.

5 Zaključak

U radu su opisane neke primjene nizova i redova u financijskoj matematici. Najprije prikazujemo na koji način pomoću nizova modeliramo procese koji kao rezultat daju promijenjive vrijednosti u ovisnosti od vremena. Kroz primjer prikazujemo primjenu aritmetičkog niza u jednostavnom kamatnom računu te ulogu geometrijskog niza u složenom računu. Kasnije, primjenjujemo redove, točnije Taylorov red u procjenu vrijednosti vrijednosnih papira. Primjerom pokazujemo kako je zbog zahtjevnosti računanja određenih vrijednosti funkcija, korisno tu funkciju aproksimirati polinomom određenog stupnja, odnosno, koristi njen razvoj u Taylorov red. Upravo iz tog razloga, u suvremenom financijskom okruženju, gdje brzina i preciznost često određuju uspjeh ili neuspjeh investicija, Taylorov red postaje važan alat u analizi obveznica i drugih financijskih instrumenata. Osim obveznica, dajemo primjenu u vrijednosnim papirima s rizikom. Pokazujemo kako aproksimacijom funkcije korisnosti pomoću Taylorovog polinoma dolazimo do mjere tolerancije rizika za pojedinca i tim postupcima dajemo novu razinu mean-variance analize. Naposlijetku, nailazimo na aritmetički i geometrijski niz slučajnih varijabli u procjeni cijena opcija. Ponovno aproksimacijom Black-Scholes formule za određivanje cijena opcija dolazimo do polinoma koji se mogu brzo evaluirati i koristiti u financijskim modelima.

Prirodno, ovaj rad bi se mogao proširiti mnogim drugim primjenama nizova i redova u financijama. Osim aritmetičkog i geometrijskog niza, važnu ulogu imaju i vremenski nizovi koji doprinose u području modeliranja i prognoziranja vremenskih serija. Također, značajna je primjena Fourierovih redova u financijskoj matematici kao aproksimacija trigonometrijskim funkcijama. Ovaj pristup obuhvaća korištenje nekih složenih pojmova koji su izvan okvira ovog rada , međutim izuzetno je koristan u analizi cikličkih kretanja na tržištu, procjeni volatilnosti i modeliranju sezonskih obrazaca.

Na samom kraju, primjena nizova i redova, osim sto je potreba za modeliranje važnih pojmova i izraza u financijama, ponekad optimizira proces izračuna. Doprinosi brzini i olakšava računalne procešto je ključno u današnjem svijetu, gdje brzina i točnost određuju uspjeh u dinamičnom financijskom okruženju.

Popis slika

Popis tablica

Literatura

[1] Cvitanić J., Zapatero F, *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Makets*, Cambridge, Massachusetts, London,2004.

[2] Guljaš, B (2018), Matematička analiza 1 i 2, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, raspoloživo na:https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/MATANALuR.pdf[Pristupljeno travanj, 2024.]

[3] Kurepa S., *Matematička analiza 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987

[4] Mathematical Preparation for Finance, raspoloživo na: https://www.softcover.io/read/bf34ea25/math_for_finance/first_finance_applications[Pristupljeno lipanj, 2024]

[5] Option Pricing Formulae using Fourier Transform: Theory and Application, raspoloživo na: https://pfadintegral.com/docs/Schmelzle2010%20Fourier%20Pricing.pdf[Pristupljeno lipanj, 2024]

[6] Probability models for economic decisions by Roger Myerson, raspoloživo na: https://home.uchicago.edu/~rmyerson/teaching/util206.pdf[Pristupljeno lipanj, 2024]

[7] Sarapa N, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002

[8] Šego B., *Financijska matematika*, Ekonomski fakultet u Rijeci, Zagreb,2012.

[9] Šegota A., *Financijska matematika*, Ekonomski fakultet, Zagreb,2014.

[10] The Taylor Series and Its Applications, raspoloživo na: https://alecospapadopoulos.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/10/taylor-series-tutorial.pdf[Pristupljeno travanj, 2024.]