

Abakus i mentalna aritmetika

Petrušić, Doris

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:196:465274>

Rights / Prava: [Attribution 3.0 Unported/Imenovanje 3.0](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-22**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI
FAKULTET ZA MATEMATIKU

Sveučilišni diplomski studij matematika i informatika
Smjer nastavnički

Doris Petrušić

ABAKUS I MENTALNA ARITMETIKA

Diplomski rad

Rijeka, srpanj 2024.

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
FAKULTET ZA MATEMATIKU**

**Sveučilišni diplomski studij matematika i informatika
Smjer nastavnički**

ABAKUS I MENTALNA ARITMETIKA

Studentica:

Doris Petrušić

Mentorica:

doc. dr. sc. Marina Šimac

Diplomski rad

Rijeka, srpanj 2024.

Sadržaj

Sažetak i ključne riječi	3
Uvod	4
1. Abakus	5
1.1. Povijesni pregled i vrste abakusa	5
2. Računanje Soroban (japanskim) abakusom.....	9
2.1. Korištenje Soroban (japanskog) abakusa.....	9
2.2. Zbrajanje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa	15
2.3. Oduzimanje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa	22
2.4. Množenje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa.....	26
2.5. Dijeljenje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa.....	31
2.6. Korjenovanje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa	37
3. Mentalna aritmetika	41
3.1. Uključenost mentalne aritmetike u nastavu matematike.....	42
3.2. Organizacije koje se bave mentalnom aritmetikom	43
Zaključak	45
Bibliografija	46
Popis slika	47

Sažetak i ključne riječi

Povijest matematike pruža dragocjene spoznaje za suvremeno matematičko obrazovanje, a drevni računalni alat, abakus, ističe se kao važan alat u radu s djecom. Japanski Soroban abakus nudi razne koristi u matematičkom obrazovanju, uključujući razumijevanje mentalne aritmetike, razvoj mentalne računalne sposobnosti, jasnu sliku o strukturi brojeva i motivaciju za matematiku.

U radu su opisane osnovne računske operacije poput zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i izračunavanja vrijednosti kvadratnih korijena koristeći japanski Soroban abakus. Detaljno su prikazani postupci izvođenja ovih operacija kako bi se demonstrirala praktična primjena abakusa.

Ključne riječi: abakus, povijest matematike, Soroban (japanski) abakus, matematičko obrazovanje, mentalna aritmetika, zbrajanje, množenje, dijeljenje i korjenovanje Soroban (japanskim) abakusom.

Uvod

Matematičko znanje razvijalo se spontano i instinktivno, u procesu rada i igre, te se prenosilo s generacije na generaciju. Rani period razvoja matematike karakterizira prije svega praktična aritmetika, odnosno postupni razvoj procesa računanja i mogućnosti njegove primjene. Zbog toga su stvoreni razni „alati“ za računanje, među kojima se svakako kao najpoznatiji ističe abakus.

Abakus, drevni kalkulator koji se koristio diljem svijeta stoljećima prije usvajanja modernih brojevnih sustava, predstavlja važan aspekt u razvoju matematike i računanja. U ovom radu se istražuje povijest abakusa, raznolikost njegovih inačica diljem svijeta te njegova uloga u razvoju računanja i mentalne aritmetike. Detaljnije se navodi korištenje Soroban (japanskog) abakusa te način izvođenja matematičkih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korjenovanja pomoću njega. Sve slike u radu za potrebe računanja izrađene su pomoću alata Japanski simulator abakusa (Soroban) ([5]).

Uz uporabu abakusa, tradicionalnog računalnog alata, koji olakšava izvođenje računskih operacija, često se povezuje i mentalna aritmetika. U radu se navodi važnost mentalne aritmetike kao ključne vještine u razvoju matematičkih sposobnosti kod djece i mladih. Ova tehnika omogućuje obavljanje matematičkih operacija isključivo pomoću uma, potičući brzo i precizno računanje bez korištenja papira, olovke ili kalkulatora.

U Republici Hrvatskoj, kao i u mnogim drugim obrazovnim sustavima, mentalna aritmetika nije zastupljena u kurikulumu matematike. Umjesto toga, naglasak je stavljen na računanje pomoću papira i olovke. Ovaj rad govori o važnosti uvođenja mentalne aritmetike i uporabe abakusa u obrazovanju djece i mladih.

1. Abakus

Abakus (lat. Abacus, grč. Abak) je ploča za pisanje i računanje, okvir za brojanje, alat koji se koristi od davnina. Prema nekim definicijama, abakus se smatra najstarijim računalom. Originalni tipovi abakusa bili su kamene ploče prekrivene prašinom s olovkom za označavanje brojeva. Kasnije se to razvilo u ploču s utorima gdje bi se kamenčići ili drugi brojači postavljali kako bi označili brojeve. Na kraju se to konačno razvilo u uređaj s okvirom s kuglicama koje klize duž bambusovih štapova. Dakle, današnji abakus sastoji se od nizova pokretnih zrnaca ili sličnih predmeta nanizanih na žice koji predstavljaju brojeve. Postavlja se jedan od dva broja, a zrcima se manipulira za izvođenje raznih računskih operacija. Najjednostavnija računski operacija na abakusu je zbrajanje, ali moguće je provoditi i složenije računski operacije poput množenja, dijeljenja, kvadriranja i korjenovanja. Unatoč napretku tehnologije i popularnosti računalnih sustava, abakus i dalje ima važnu ulogu u obrazovanju, posebice u Aziji – Rusiji, Kini i Japanu, gdje se i danas koristi za svakodnevno računanje te razvoj matematičkih vještina. Njegovim korištenjem pospješuje se razumijevanje osnova matematike, razvijaju se brze računski vještine te poboljšava mentalna aritmetika. Osim toga, abakus pruža uvid u različite kulture i povijesne kontekste u kojima je bio korišten, što ga čini važnim kulturnim i obrazovnim artefaktom.

1.1. Povijesni pregled i vrste abakusa

Prije uspostave modernih brojevnih sustava, abakus je bio ključni alat za brojanje i računanje korišten diljem svijeta. Iako njegovo porijeklo nije potpuno jasno, povijesni zapisi svjedoče o njegovoj uporabi u različitim dijelovima svijeta, uključujući Mezopotamiju, Egipat, antičku Grčku, Kinu i Rusiju. Različite kulture razvile su različite abakuse, od kojih su neki postali izuzetno poznati. Izvorni izgled abakusa bio je na kamenu, glini ili drvetu s pijeskom, na koji su ljudi obično pisali (Moon, 1971.). Najstarija sačuvana računalna ploča pronađena je 1864. godine i čuva se u Nacionalnom muzeju epigrafije u Ateni.

Sumeranski abakus, koji se koristio u okviru seksagezimalnog brojevnog sustava, datira između 2700. i 2300. godine prije Krista. Sumerani su razvili brojevni sustav s bazom 60, koji je zbog baze 60 nazvan seksagezimalni. U seksagezimalnom brojevnom sustavu brojevi su se pisali pomoću dva osnovna simbola Y i <. Simbol Y imao je vrijednost jedan i koristio se maksimalno devet puta uzastopno, dok je simbol < imao vrijednost 10 i koristio se maksimalno pet puta uzastopno (Hogben, 1970.).



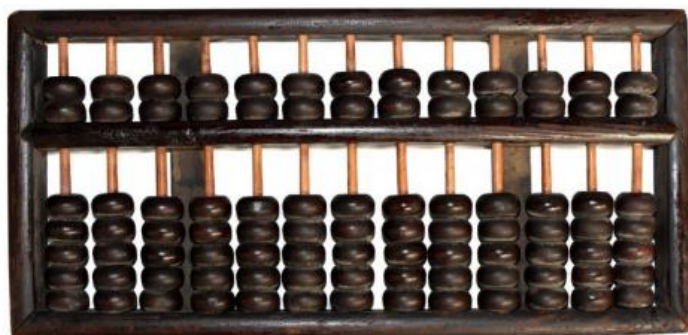
Slika 1: Julije Cezar kao dječak učio je brojati pomoću abakusa (Abakus - HistoryMaps)

Grčka verzija abakusa postala je poznata oko 5. stoljeća prije Krista, dok se vjeruje da su prvi prijenosni abakus napravili Rimljani. **Rimski abakus** izrađen je od bakra, pravokutnog je oblika i u brazdama ima kamenčiće u obliku kuglica (Slika 2).



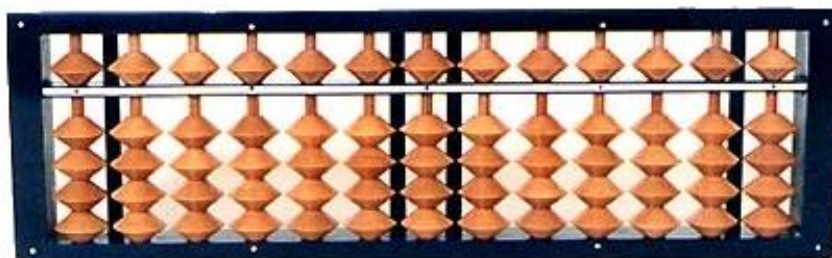
Slika 2: Rimski abakus (Škorvaga, 2011.)

Suan-pan ili kineski abakus pojavio se u 14. stoljeću. Modeliran je prema rimskom abakusu i prilagođen dekadskom i heksadecimalnom brojevnom sustavu. Kineski abakus pravokutnog je oblika i obično je izrađen od drvenog ili metalnog okvira koji ima 13 štapova postavljenih uspravno. Štapovi su podijeljeni na dva dijela prečkom. Na kraćem dijelu štapa nalaze se dva zrnca čija je vrijednost 5, dok se na duljem dijelu štapa nalazi pet zrnaca čija je vrijednost jedan (Banzić, 2017.).



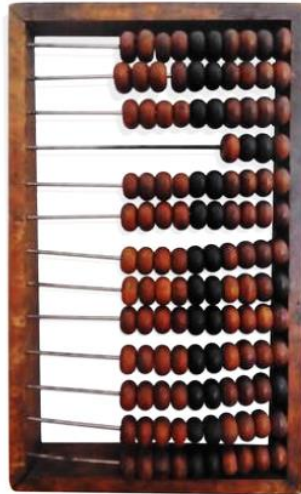
Slika 3: Kineski abakus Suan-pan (Škorvaga, 2011.)

Japanski abakus, poznat i kao **Soroban abakus**, pojavljuje se u 16. stoljeću. Jednostavniji je i lakši za korištenje od kineskog abakusa te je namijenjen samo za dekadski brojevni sustav. Pravokutnog je oblika i, za razliku od kineskog abakusa, na kraćem dijelu štapa ima jedno zrnce čija je vrijednost 5, dok su na duljem dijelu štapa četiri zrnca čija je vrijednost jedan. Samo ona zrnca koja dodirnu prečku utječu na vrijednost, tj. samo ta zrnca se koriste za određivanje rezultata. Ako se računaljka gleda s lijeva na desno, posljednja šipka predstavlja stupac jedinica, šipka pored nje predstavlja stupac desetica, sljedeća stupac stotica, zatim stupac tisućica, itd. (Banzić, 2017.).



Slika 4: Japanski abakus Soroban (O Abacusu - UAH)

Ruski abakus ili schory pojavljuje se u 17. stoljeću. Pravokutnog je oblika i ima 12 vodoravnih šipki na kojima su zrnca. Svi redci, osim četvrtog, imaju po 10 zrnaca, pri čemu su peto i šesto zrnice obojeni drugom bojom zbog lakšeg računanja. Četvrti red ima četiri zrnca, pri čemu su drugo i treće zrnice obojeni drugom bojom.



Slika 5: Ruski abakus ili schory (Škorvaga, 2011.)

Abakus je dugo vremena bio sastavni dio matematičkog obrazovanja u azijskim školama. Uspjeh koji učenici iz tih zemalja postižu na međunarodnim natjecanjima povezuje se s korištenjem abakusa i učincima koje ima na njihov kognitivni razvoj, mentalno računanje i konceptualno razumijevanje matematike (Starkey & Klein, 2008.). Kao drevni alat za računanje, abakus ostavlja dubok i trajan utjecaj u povijesti matematike i računanja. Njegova raznolikost, povijesni značaj i primjena u obrazovanju svjedoče o važnosti njegovog razumijevanja. Proučavanje abakusa omogućuje bolje razumijevanje kulturnih i povijesnih konteksta te potiče razvoj temeljnih računskih vještina i matematičkog razmišljanja.

2. Računanje Soroban (japanskim) abakusom

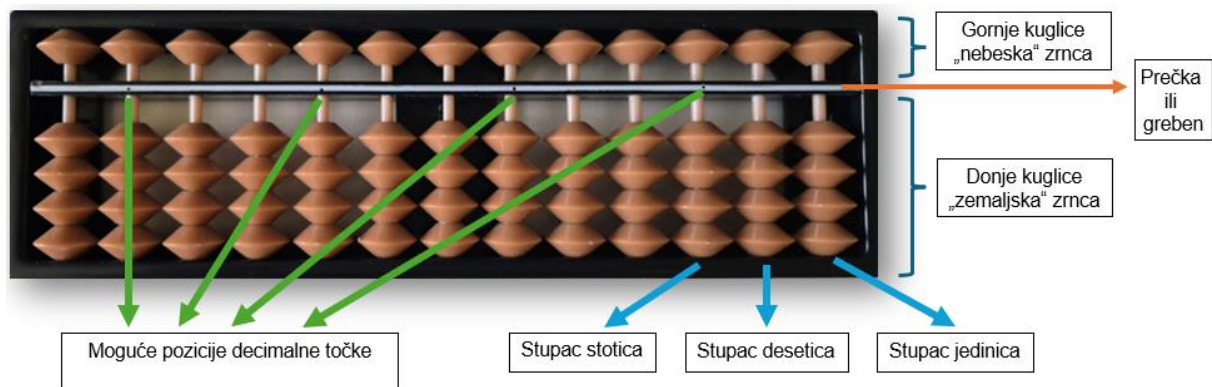
U prethodnom poglavlju spomenuti su **Suan-pan ili kineski abakus** te **Soroban ili japanski abakus** kao primjeri abakusa koji se i danas koriste. Ključne razlike između ova dva tipa abakusa su u tome što Suan-pan ima dva zrnca iznad prečke i 5 zrnaca ispod nje, dok Soroban ima jedno zrnce iznad prečke i četiri ispod nje. Izvorno je japanski Soroban izgledao slično kao kineski Suan-pan (5 zrnaca ispod i dva zrnca iznad prečke), ali je oko 1850. godine pojednostavljen na jedno zrnce iznad prečke, a kasnije, 1930. godine, na četiri zrnca ispod nje (Bernazzani, 2005.).

U radu će se detaljno obrađivati japanski Soroban abakus, koji ima jedno zrnce iznad prečke i četiri zrnca ispod prečke. Sve slike u radu za potrebe računanja izrađene su pomoću alata Japanski simulator abakusa (Japanski simulator abakusa (Soroban)). Prije objašnjenja načina provođenja različitih računskih operacija, bit će objašnjeno kako se koristi ovaj abakus.

2.1. Korištenje Soroban (japanskog) abakusa

U abakusu su zrnca raspoređena u stupce i razlikuju se gornja „nebeska“ zrnca te donja „zemaljska“ zrnca. Kada se zrnce pomakne prema prečki ili grebenu, „ima vrijednost“, dok „gubi vrijednost“ kada se odmakne od nje. Oblikovanje brojeva na abakusu ostvaruje se pomicanjem zrnaca prema prečki kako bi „imala vrijednost“. Gledano s desna na lijevo, prvi stupac je stupac jedinica, do njega je stupac desetica, zatim stupac stotica i tako dalje sve do kraja abakusa. Također je važno paziti da je vrijednost svakog donjeg zrnca jedan, ali vrijednost ovisi o tome u kojem se stupcu nalazi. Tako je vrijednost svakog donjeg zrnca u prvom stupcu, stupcu jedinica, jedan. U drugom stupcu, stupcu desetica, vrijednost svakog donjeg zrnca je 10, te se isti princip nastavlja na cijelom abakusu. Analogno vrijedi i za gornje zrnce, čija je vrijednost 5 u stupcu jedinica, 50 u stupcu desetica i tako dalje. Prema tome, najveći broj koji se može odrediti u stupcu jedinica je broj 9, u stupcu desetica broj 90, u stupcu stotica broj 900 i tako redom.

Na Slici 6 prikazan je osnovni položaj abakusa s kojim uvijek počinje računanje. Dakle, nijedno zrnce ne dira prečku ili greben; gornja zrnca su na vrhu okvira, dok su donja zrnca na dnu okvira.

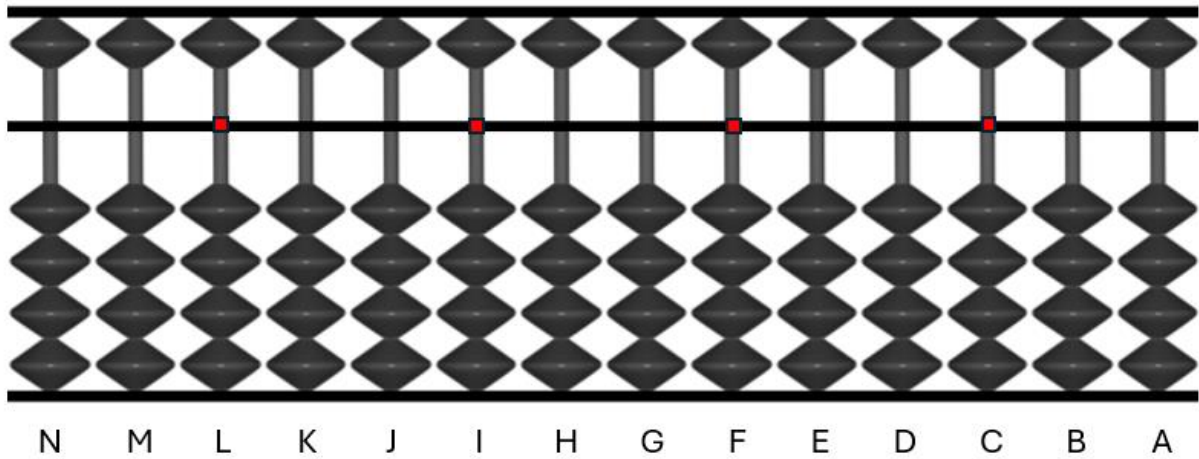


Slika 6: Osnovni položaj abakusa

Važno je spomenuti da se na abakusu može računati i s brojevima u decimalnom zapisu. U tom slučaju pomažu točke na prečki ili grebenu. Gledano s desna na lijevo, nakon svaka tri stupca nalazi se točka. Dakle, ako se želi računati s brojem u decimalnom zapisu, najprije se mora utvrditi koliko decimalnih mjesta imaju brojevi s kojima se računa. U slučaju da broj ima tri decimalna mjesta, odabrat će se prva točka na abakusu (s desna na lijevo), koja će predstavljati decimalnu točku. Desno od točke nalazit će se desetinke, stotinke i tisućinke, na stupcu s točkom bit će jedinice, a lijevo desetice, stotice i tako dalje.

Ako se računa s prirodnim brojevima, početni položaj brojeva ne mora nužno biti takav da prvi desni stupac bude stupac jedinica; stupac jedinica može biti bilo koji stupac označen točkom. Važno je na početku odlučiti koji će se položaj koristiti i pridržavati se toga do kraja računanja. U radu će se za prirodne brojeve najčešće koristiti prvi desni stupac kao stupac jedinica, dok će se u slučaju decimalnog zapisa, ovisno o broju decimalnih mjesta, odabrati prva moguća točka gledajući s desna na lijevo.

Zbog jednostavnosti objašnjenja, svaki stupac gledano s desna na lijevo označit će se slovom A, B, C, D, E, F, G, H... Za izradu slika u radu za potrebe računanja koristi se alat Japanski simulator abakusa (Japanski simulator abakusa (Soroban)). Na slici ispod prikazan je početni položaj abakusa.



Slika 7: Početni položaj abakusa s oznakama

Postoje posebna pravila za računanje na abakusu:

- Abakus se uvijek stavlja na ravnu površinu. Kada se računa, drži se lijevom rukom (kod ljevaka desnom) i počinje se od osnovnog položaja.
- Promjene na abakusu rade se desnom rukom (kod ljevaka lijevom) tako da se donja, „zemaljska“ zrnca dodaju palcem, a oduzimaju kažiprstom, dok se gornja, „nebeska“ zrnca dodaju kažiprstom i oduzimaju palcem. Pokret „stiska“ koriste se kako bi se u istom stupcu dodali ili oduzeli brojevi veći od 5.
- Kada se završi računanje, abakus se „čisti“ tako da ga se vrati u osnovni položaj.
- Na abakusu se s brojevima uvijek računa s lijeva na desno, što je najefikasniji način. Ne treba „upadati“ u stare navike pokušavajući zbrajati i oduzimati počevši s desne strane (kao što bi se radilo olovkom i papirom).

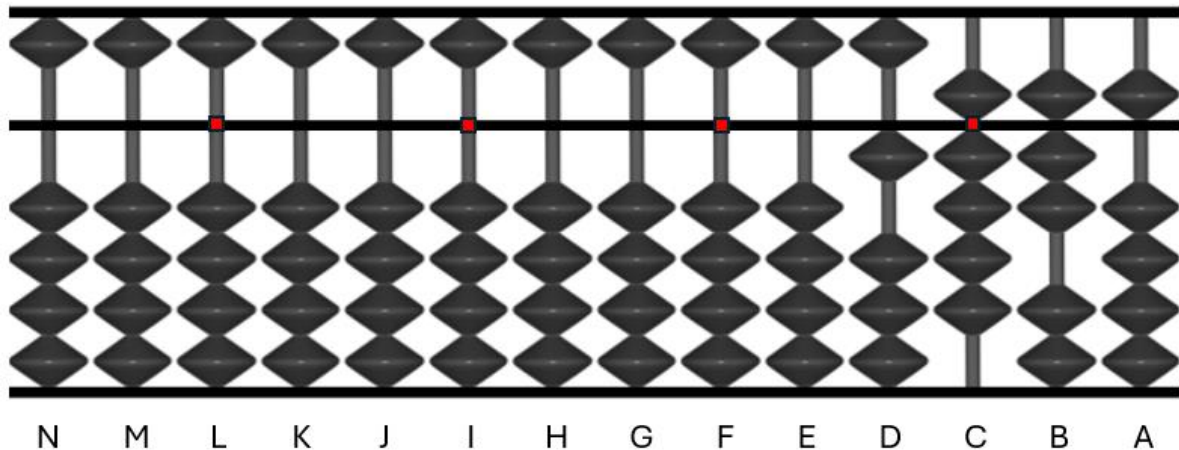
1. PRIMJER

Postavimo sljedeće brojeve na abakus:

- a) 1975
- b) 53.935

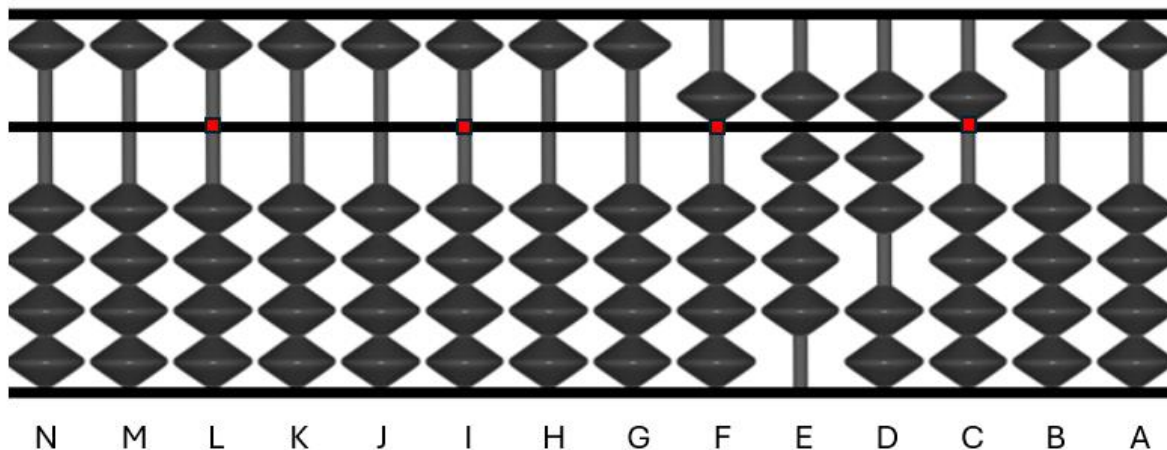
Rješenje uz objašnjenje:

- a) Broj 1975 postavlja se na abakus s lijeva na desno. Dakle, najprije se postavi 1 na četvrti stupac (stupac tisućica, stupac D) tako da se doda jedno „zemaljsko“ zrnce. Zatim se postavi 9 na treći stupac (stupac stotica, stupac C) tako da se dodaju četiri „zemaljska“ zrnca i jedno „nebesko“ zrnce. Nakon toga se 7 postavi na drugi stupac (stupac desetica, stupac B) tako da se doda jedno „nebesko“ i dva „zemaljska“ zrnca tehnikom „stiska“. Za kraj, 5 se postavi na prvi stupac (stupac jedinica, stupac A) tako da se doda jedno „nebesko“ zrnce. U tom slučaju položaj abakusa kada je na njemu postavljen broj 1975 je:



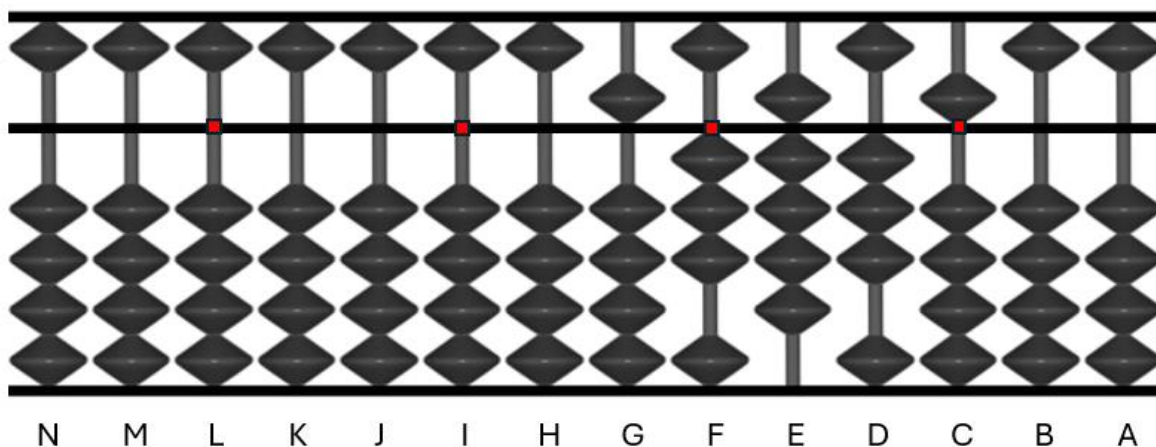
Slika 8: Prikaz broja 1975 na prva četiri stupca D,C,B,A

Ovo nije jedini način postavljanja broja 1975 na abakus. Broj se može postaviti tako da znamenka jedinica bude na bilo kojem stupcu označenom točkom. Na primjer, 1975 se može postaviti na stupce LKJI, IHGF i FEDC. Izgled abakusa kada je 1975 postavljen na stupce FEDC je sljedeći:



Slika 9: Prikaz broja 1975 na stupcima F,E,D,C

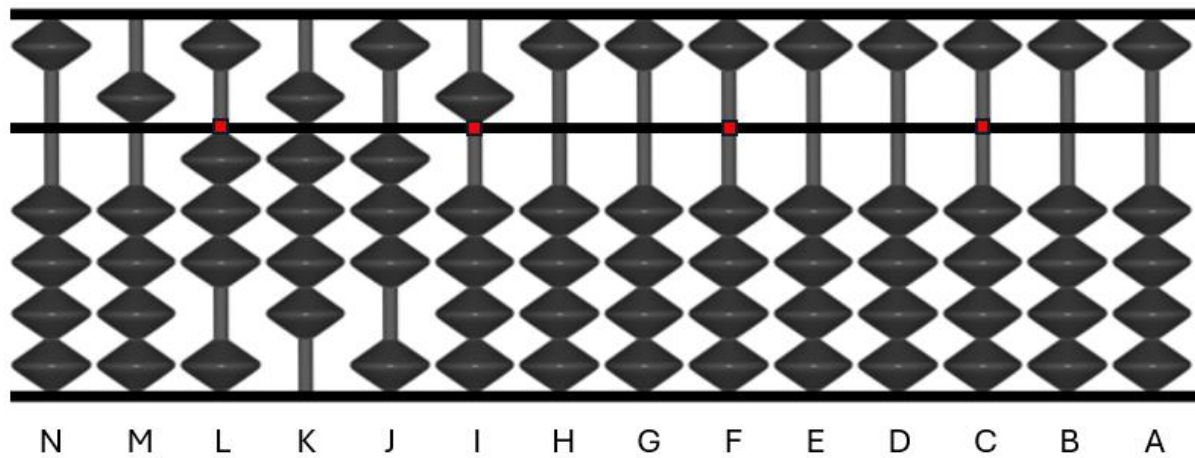
- b) Broj 53.935 postavlja se na abakus s lijeva na desno. U ovom slučaju mora se paziti da jedinice budu postavljene na stupac označen točkom. Kako broj ima tri decimalna mjesta, prvi mogući stupac jedinica je stupac F. Dakle, najprije se postavi 5 na stupac G (stupac desetica) tako da se doda jedno „nebesko“ zrnce. Zatim se postavi 3 na stupac F (stupac jedinica) tako da se dodaju tri „zemaljska“ zrnca. Nakon toga se 9 postavi na stupac E (stupac desetinki) tako da se doda jedno „nebesko“ i četiri „zemaljska“ zrnca tehnikom „stiska“. Zatim se 3 postavi na stupac D (stupac stotinki) tako da se dodaju tri „zemaljska“ zrnca. Za kraj se 5 dodaje na stupac C (stupac tisućinki) tako da se doda jedno „nebesko“ zrnce. U tom slučaju položaj abakusa kada je na njemu postavljen broj 53.935 je:



Slika 10: Prikaz broja 53.935 na stupcima G, F, E, D, C

Prema položaju zrnaca na abakusu može biti nejasno je li prikazani broj u decimalnom zapisu 53.935 ili cijeli brojevi poput 53935 ili 5393500. Stoga je važno naglasiti gdje se nalazi decimalna točka, gdje je stupac jedinica i je li riječ o prirodnom ili racionalnom broju.

Ovo nije jedini način postavljanja broja 53.935 na abakus. Broj se može postaviti tako da znamenka jedinica bude na bilo kojem stupcu, lijevo od stupca F, označenom točkom. Na primjer, 53.935 se može postaviti na stupce JHGF i MLKJU. Izgled abakusa kada je broj postavljen na stupce MLKJU je sljedeći:



Slika 11: Prikaz broja 53.935 na stupcima M, L, K, J, I

2.2. Zbrajanje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa

Zbog jednostavnosti razumijevanja, pribrojnici će biti zapisani na sljedeći način:

$$a = \overline{a_m \dots a_1}, b = \overline{b_n \dots b_1}, m, n \text{ broj znamenaka od } a \text{ i } b \quad (1)$$

gdje su a_i, b_i znamenke brojeva a, b pri čemu a_i predstavlja odgovarajući $i - ti$ stupac abakusa. Kao što je već navedeno, stupac jedinica je stupac A, zatim stupac desetica je stupac B, i tako dalje. Prema tome, znamenku a_1 promatramo u stupcu A, a_2 u stupcu B i tako redom.

Postupak zbrajanja na abakusu počinje tako da se prvo zapiše prvi pribrojnik, a zatim se drugi pribrojnik „nadodaje“ prvom. Važno je obratiti pažnju na to da se uvijek računa s lijeva na desno.

Objašnjenje postupka na stupcu jedinica:

Znamenki jedinica a_1 prvog pribrojnika dodaje se znamenka jedinica b_1 drugog pribrojnika u stupcu A. Moguća su 2 slučaja:

- I. $a_1 + b_1 < 10$, u ovom slučaju $a_1 + b_1$ može se jednostavno postaviti u stupac A bez potrebe za prijenosom u sljedeći stupac.
- II. $a_1 + b_1 \geq 10$, u ovom slučaju zbroj se ne može zapisati u stupac A te se prenosi na prvi lijevi stupac. U ovom slučaju to je stupac B na kojem se dodaje jedno „zemaljsko“ zrnce. Dodavanjem zrnca u stupcu B doda se vrijednost 10, što znači da se u stupcu A mora oduzeti $10 - b_1$ kako bi se dobio točan rezultat.

Opisani postupak obavlja se slijedno, s lijeva na desno (znamenki a_i dodajemo znamenku b_i primjenjujući jedan od dva moguće slučaja).

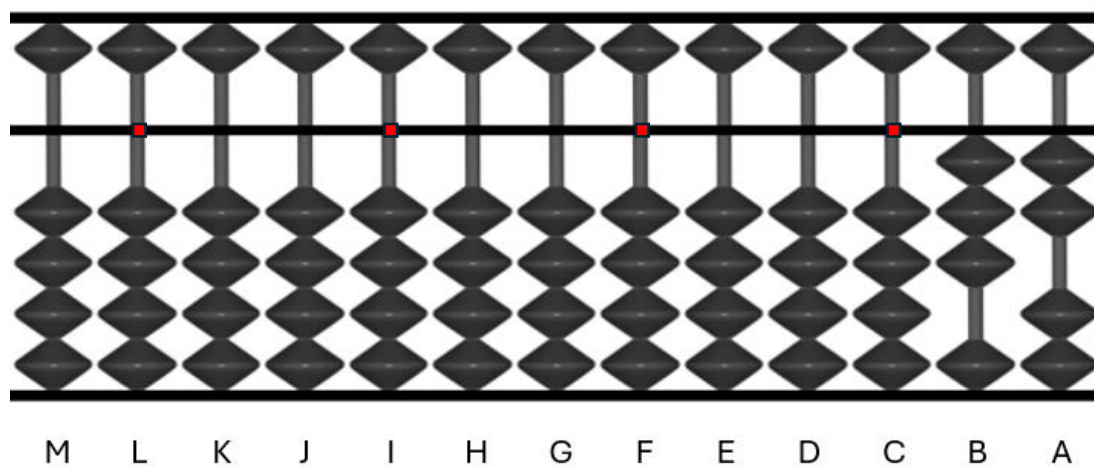
Zbog boljeg shvaćanja, postupak zbrajanja dva broja pomoću Sorobana (japanskog) abakusa bit će detaljno objašnjen kroz primjere.

1. PRIMJER (I. slučaj)

Odredi zbroj brojeva 32 i 7.

Rješenje uz objašnjenje:

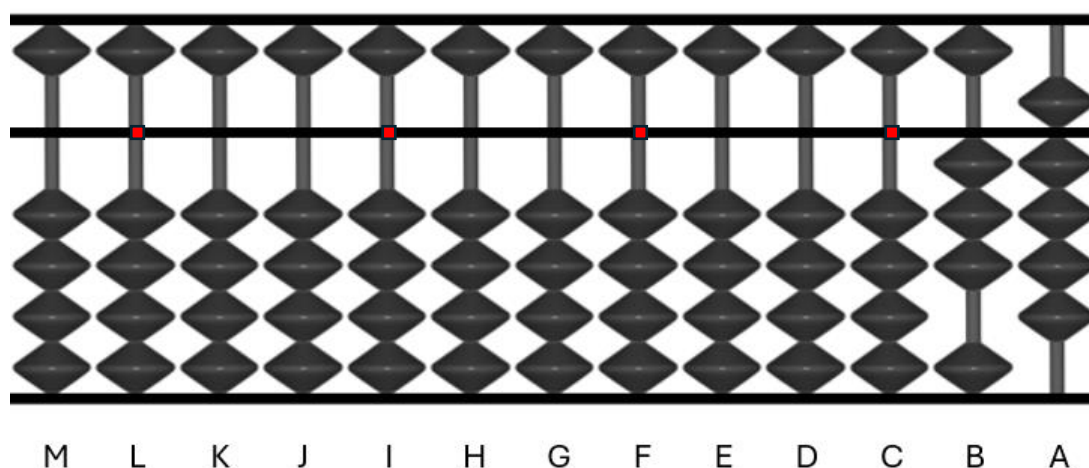
Prije početka računanja abakus se postavlja u početni položaj. Nakon toga, prvo se postavlja broj 32, odnosno $a_2 = 3$ postavlja se na drugi stupac (stupac desetica, stupac B), $a_1 = 2$ postavlja se na prvi stupac (stupac jedinica, stupac A). U tom slučaju položaj abakusa je:



Slika 12: Prikaz broja 32

Dakle, stupac B (stupac desetica, $a_2 = 3$) postavlja se na tri tako da se tri „zemaljska“ zrnca pomaknu do prečke, dok se stupac A (stupac jedinica $a_1 = 2$) postavlja na dva tako da se dva „zemaljska“ zrnca pomaknu do prečke. Važno je znati da brojeve uvijek postavljamo s lijeva na desno, kao što ih i čitamo, te da nam je stupac jedinica prvi desni stupac, odnosno stupac A. U nastavku rada koristit će se izraz „postaviti broj“ bez objašnjenja postavljanja.

Nakon postavljanja broja 32, na taj položaj abakusa postavlja se, odnosno dodaje broj 7, odnosno $b_1 = 7$, što znači da se radi na prvom stupcu (stupac jedinica, stupac A), te je položaj abakusa sljedeći:



Slika 13: Dodavanje broja 7 broju 32

U ovom slučaju, budući da je $2 + 7 = 9$, što je manje od 10, što spada u prvi slučaj. Kako nema dovoljno „zemaljskih“ zrnaca za postavljanje tog broja, koristi se jedno „nebesko“ zrnice kojem je vrijednost 5, te dva „zemaljska“ zrnca kojima je vrijednost jedan.

Pri postavljanju brojeva treba paziti na pravilnu tehniku prstiju opisanu ranije - koristi se palac za pomicanje dva „zemaljska“ zrnca i kažiprst za pomicanje jednog „nebeskog“ zrnca. Ovo se može učiniti jednim pokretom koristeći tehniku „stiska“ koja je vrlo učinkovita.

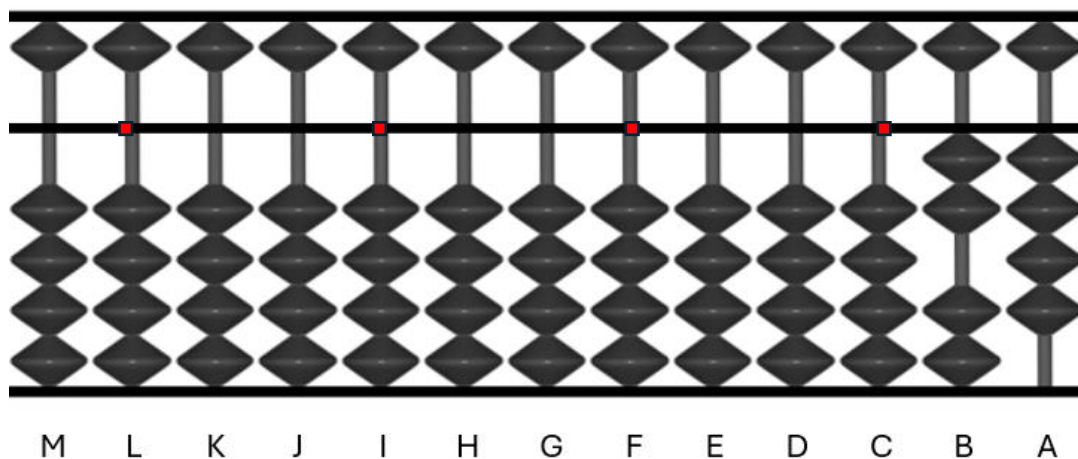
Nakon dodavanja broja 7, na abakusu se može očitati rezultat. Stupac B ima vrijednost tri, a kako je to stupac desetica, njegova vrijednost je 30, dok stupac A ima vrijednost 9. Prema tome, dobiveni zbroj je 39, odnosno $32 + 7 = 39$.

2. PRIMJER

Broju 24 dodaj broj 1.

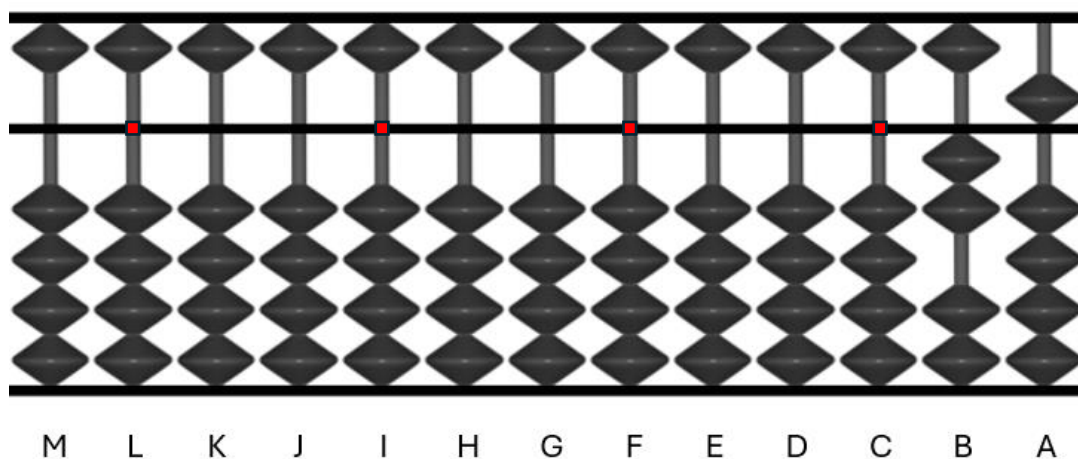
Rješenje uz objašnjenje:

Najprije se na abakusu postavi broj 24 pa imamo sljedeći položaj:



Slika 14: Prikaz broja 24

Sada treba dodati 1 na ovaj položaj. To bi bilo vrlo jednostavno kada bi postojalo jedno dostupno „zemaljsko“ zrnice na stupcu A, ali su sva „zemaljska“ zrnca već iskorištena jer su smještena na prečku. U ovom slučaju, kako je još uvijek dostupno jedno „nebesko“ zrnice na stupcu A, čija je vrijednost 5, dodaje se ono, a oduzmu se četiri „zemaljska“ zrnca kako bi se vrijednost povećala samo za jedan. Prema tome, položaj abakusa je sljedeći:



Slika 15: Dodavanje broja 1 broju 24

Sada se lako može odrediti da je traženi zbroj 25.

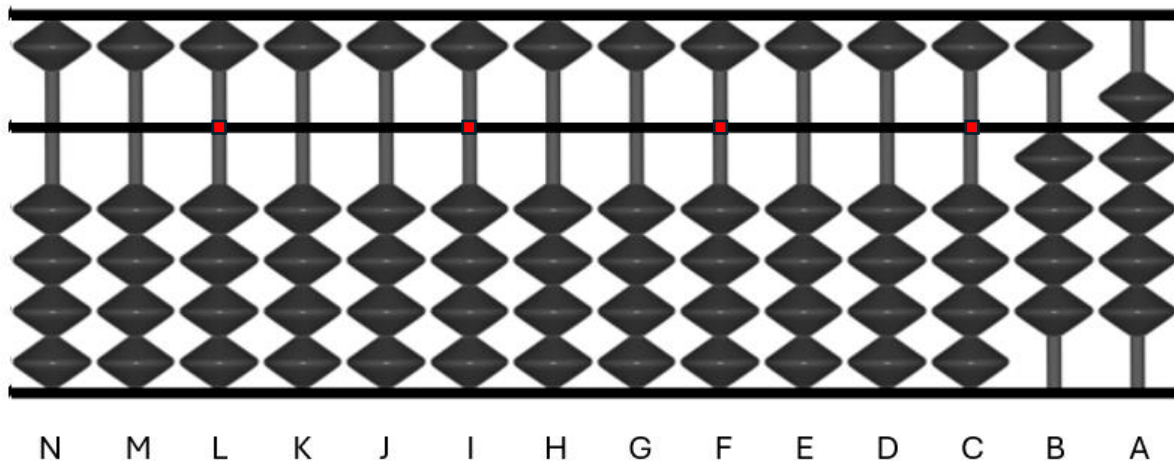
3. PRIMJER (II. slučaj)

Dobivenom zbroju iz 1. primjera dodaj broj 16.

Rješenje uz objašnjenje:

U 1. primjeru je dobiven zbroj 39 pa će se ovaj primjer riješiti dodavanjem broja 16 na broj 39.

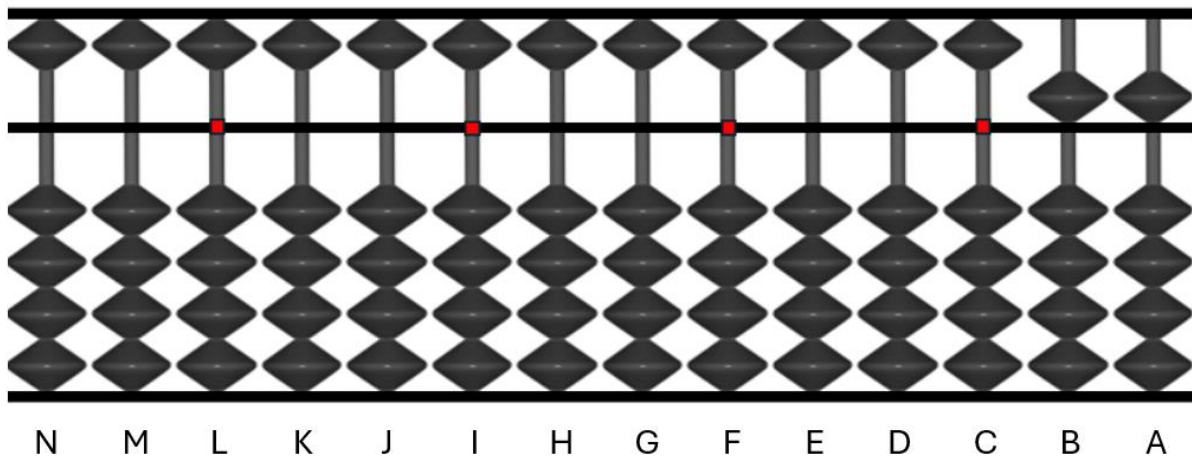
Kako broj 16 ima jednu deseticu i šest jedinica, dodat će se jedno „zemaljsko“ zrnice na stupac B te šest zrnaca, odnosno jedno „nebesko“ i jedno „zemaljsko“ zrnice, na stupac A. Položaj nakon dodavanja jedne desetice stupcu B je sljedeći:



Slika 16: Dodavanje jedne desetice broju 39

Zasad je na abakusu broj 49, koji nije konačno rješenje. Još se na ovaj položaj mora dodati 6 jedinica na stupac A. U tom slučaju dolazi do problema jer na stupcu A nema dostupnih 6 zrnaca, što spada u drugi slučaj ($9 + 6 = 15$, što je veće od 10). Zato se na stupcu oduzmu četiri „zemaljska“ zrnca, a na stupcu B doda jedno „zemaljsko“ zrnice (čija je vrijednost 10 jer je to stupac desetice). Ovim postupkom, dodavanjem 10 i oduzimanjem 4, zapravo se dodaje 6. U ovom slučaju uvijek se radi s trenutnim stupcem, pomicanjem prvo četiri „zemaljska“ zrnca dalje od prečke za računanje na A, a zatim jednog „zemaljskog“ zrnca prema prečki na B. Kako su na stupcu B već četiri „zemaljska“ zrnca, dodavanjem još jednog trebalo bi ih biti 5. Do ovog položaja dolazi

se tako da se od prečke odmaknu četiri „zemaljska“ zrnca i doda jedno „nebesko“ zrnce. Prema tome, položaj zrnaca je sljedeći:



Slika 17: Zbroj brojeva 39 i 16

Iz toga se može očitati rezultat, odnosno $39 + 16 = 55$.

Ako bi se u ovom slučaju razmišljalo na dosad naučeni način, reklo bi se da se dodavanjem 6 na stupac A čija je vrijednost 9 dobiva 15, što se može postaviti na abakus. Takav način razmišljanja čini procesiranje na abakusu vrlo sporim. Stoga se koristi opisani način u objašnjenju te se dodaje jedno „zemaljsko“ zrnca na stupcu B i oduzima $10 - b_1$ na stupcu A kako bi se dodao traženi broj. Ovaj način razmišljanja brzo se uči i omogućava nevjerojatnu učinkovitost pri radu sa Sorobanom.

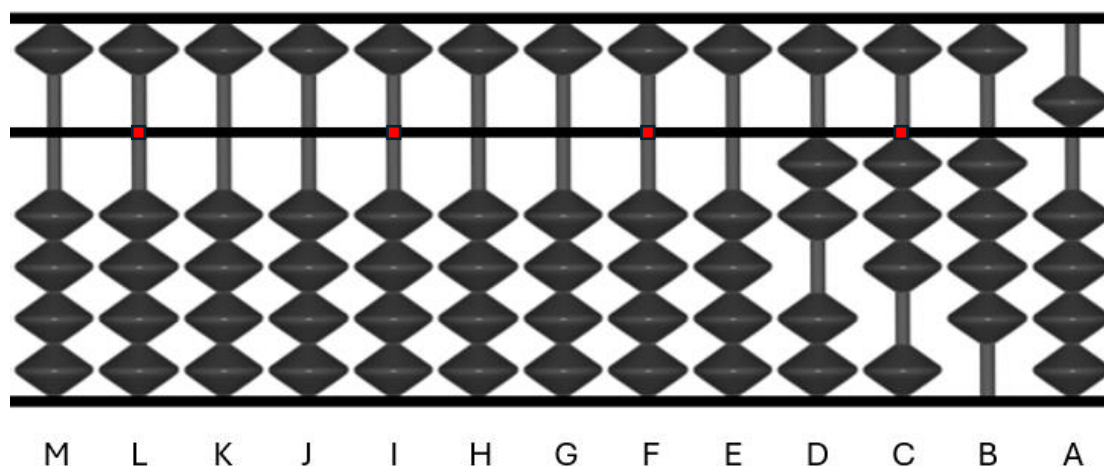
Nakon detaljnih objašnjenja za sve situacije koje se mogu dogoditi, u sljedećem primjeru zbrojit će se veći brojevi.

4. PRIMJER

Zbroji brojeve 2345 i 6789 ($2345 + 6789 = 9134$).

Rješenje uz objašnjenje:

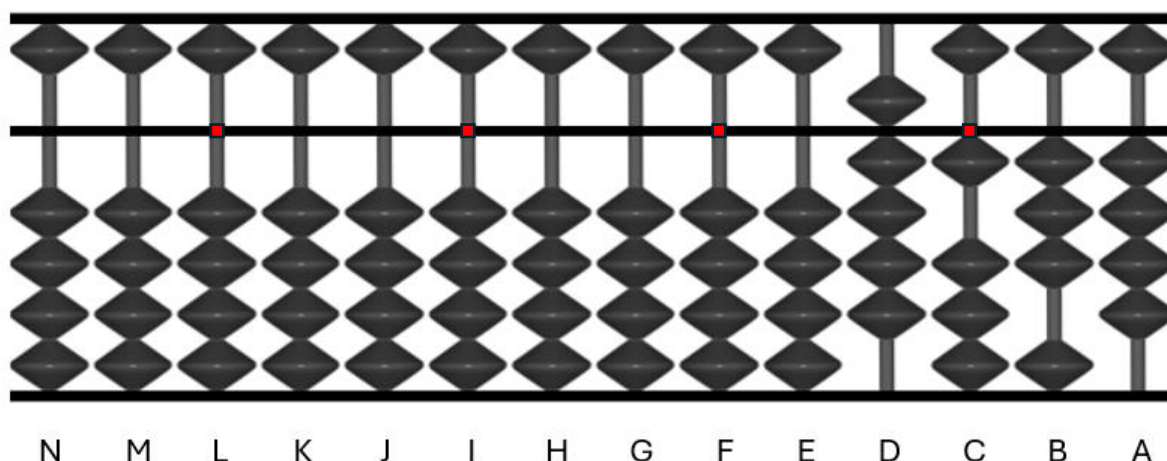
Najprije se na abakus postavi broj 2345:



Slika 18: Prikaz broja 2345

Računajući s lijeva na desno, na ovaj položaj dodaje se broj 6 na stupac D (stupac tisućica) tako da se doda jedno „zemaljsko“ i jedno „nebesko“ zrnice tehnikom „stiska“. Zatim se u stupcu C (stupac stotica) dodaje 7, ali kako nema dovoljno zrnaca, od stupca C oduzmu se tri „zemaljska“ zrnca, a stupcu D doda jedno „zemaljsko“ zrnice ($1000 - 300 = 700$) te je rezultat na abakusu 3045.

Zatim se na stupac B (stupac desetica) dodaje 8. Kako ni u tom stupcu nema dovoljno zrnaca, od stupca B oduzmu se dva „zemaljska“ zrnca, a stupcu C doda jedno „zemaljsko“ zrnice ($100 - 20 = 80$), nakon čega je rezultat na abakusu 3125. Za kraj, na stupac A (stupac jedinica) dodaje se 9. Kako nema slobodnih 9 zrnaca, oduzet će se vrijednost 1 sa stupca A te dodati jedno „zemaljsko“ zrnice stupcu B, nakon čega je rezultat na abakusu konačan zbroj traženih brojeva i iznosi 9134. Položaj abakusa nakon svih radnji je:



Slika 19: Zbroj brojeva 2234 i 6789

Iz prethodnih primjera vidi se da je prijenos s jednog stupca na drugi uobičajen i čest. Nakon uvježbavanja ovaj postupak postaje vrlo jednostavan i može se obavljati veoma brzo, jednako brzo kao što se mogu čitati brojevi. Problem poput ovog može se činiti čudnim ili čak nezgrapnim na početku, ali s malo prakse rješavanje ovakvih problema trebalo bi trajati svega nekoliko sekundi. Čak je brže i preciznije nego što bi se to moglo uraditi na papiru (Bernazzani, 2005.).

2.3. Oduzimanje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa

Postupak oduzimanja na abakusu vrlo je sličan postupku zbrajanja. Umjesto dodavanja zrnaca kao kod zbrajanja i prijenosa na prvi lijevi stupac, sada se radi oduzimanje zrnaca i posudba od prvog lijevog stupca. Brojevi se i dalje pišu s lijeva na desno. Najprije se zapiše prvi broj – umanjnik, od kojeg se oduzima drugi broj – umanjitelj. Ako ima dovoljno zrnaca na trenutnom stupcu, jednostavno se oduzme željeni broj. Međutim, ako nema dovoljno zrnaca, "posuđuje" se jedno zrnice od prvog stupca s lijeve strane te se zatim dodaju zrnca u trenutni stupac kako bi se nadoknadila razlika.

Za potrebe razmatranja pretpostavlja se da je $a > b$ i traži se razlika $a - b$ na abakusu, gdje su a, b prikazani kao u (1).

Objašnjenje postupka na stupcu jedinica:

Za oduzimanje b_1 od a_1 najprije se postavi broj a_1 , nakon čega se ponovno mogu dogoditi dva slučaja:

- I. Ako je $a_1 \geq b_1$, od a_1 se oduzima b_1 u stupcu A.
- II. Ako je $a_1 < b_1$, mora se posuditi jedno „zemaljsko“ zrnice iz stupca B (oduzme se jedno „zemaljsko“ zrnice od B). Time se previše oduzelo, pa se to nadoknadi u stupcu A tako da se doda $10 - b_1$.

Opisani postupak obavlja se slijedno na svim stupcima, s lijeva na desno (znamenki a_i oduzima se znamenka b_i primjenjujući jedan od dva moguća slučaja).

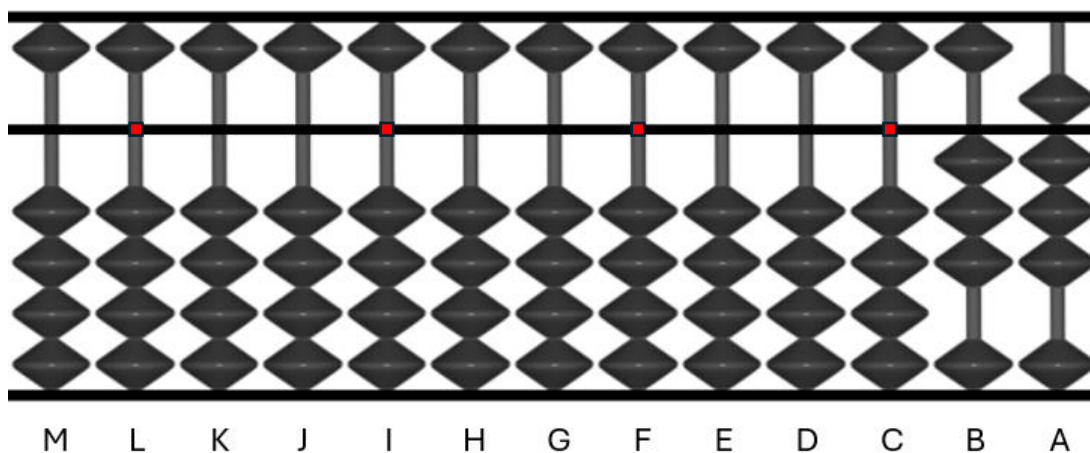
Kao i kod zbrajanja, ovaj postupak će se najbolje shvatiti na primjerima.

1. PRIMJER (I. slučaj)

Od broja 38 oduzmi broj 11.

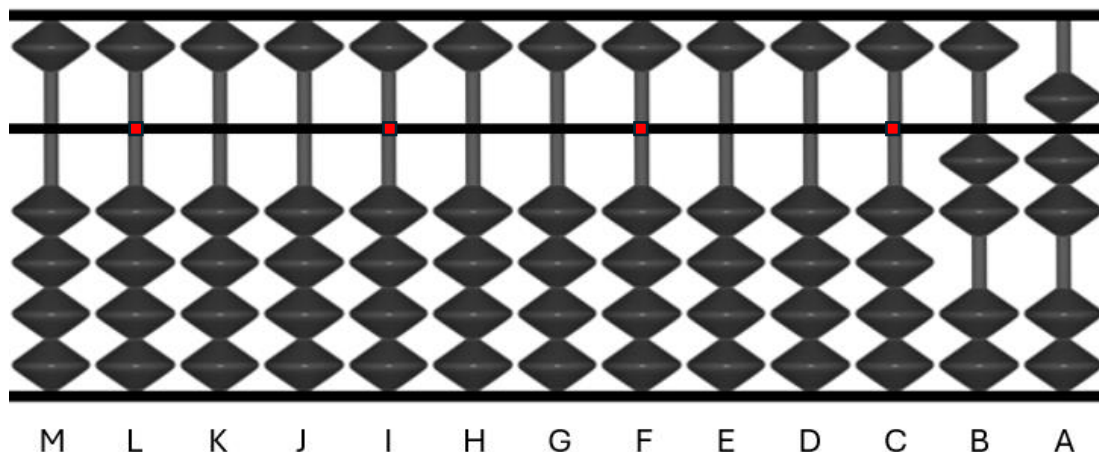
Rješenje uz objašnjenje:

Najprije se na abakusu postavi broj 38:



Slika 20: Prikaz broja 38

Nakon toga treba oduzeti broj 11. To se radi tako da se na stupcu B najprije oduzme 1, što se lako postiže pomicanjem jednog „zemaljskog“ zrnca dalje od prečke za računanje. Vrijednost na abakusu u tom slučaju je 28, što još uvijek nije konačan rezultat. Nakon toga se na stupcu A oduzme jedno zrnca pomicanjem jednog „zemaljskog“ zrnca dalje od prečke za računanje. To daje konačnu razliku 27:



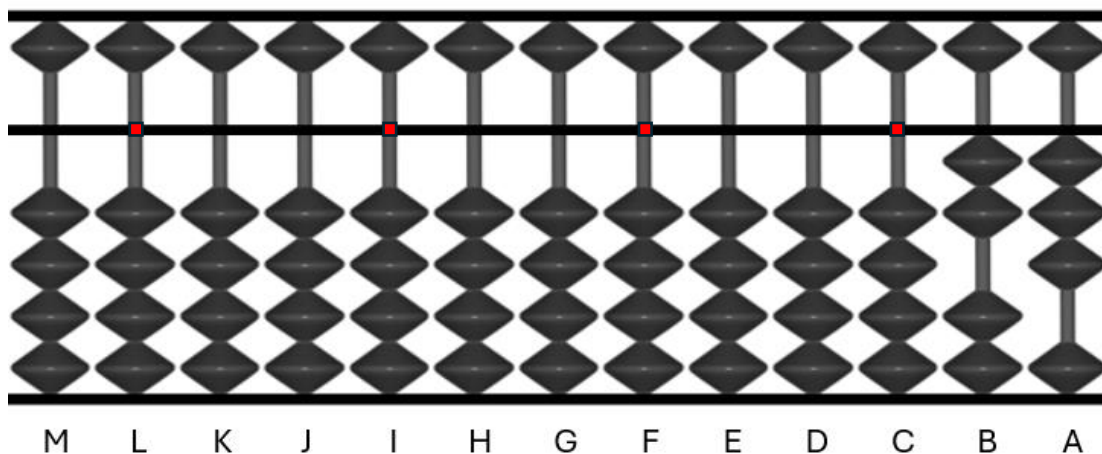
Slika 21: Razlika brojeva 38 i 11

2. PRIMJER

Od dobivene razlike u 1. primjeru oduzmi broj 4.

Rješenje uz objašnjenje:

Kako je abakus postavljen na 27 iz prethodnog primjera, odmah se prelazi na oduzimanje broja 4 na stupcu A. Nailazi se na problem jer nema dovoljno „zemaljskih“ zrnaca za oduzimanje 4. Umjesto toga, potrebno je oduzeti 5 i dodati 1 na tom stupcu kako bi se postigao isti učinak. Dakle, pomiče se jedno „nebesko“ zrnca dalje od prečke za računanje i jedno „zemaljsko“ zrnca do prečke za računanje kako bi se dobio željeni rezultat. Sada se dobiva konačan odgovor da je $27 - 4 = 23$:



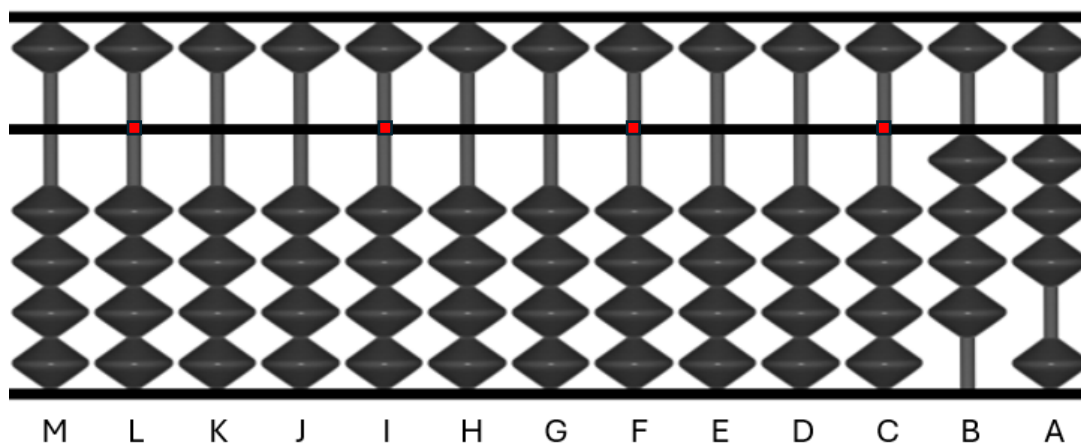
Slika 22: Razlika brojeva 27 i 4

3. PRIMJER (II. slučaj)

Od broja 43 oduzmi broj 16.

Rješenje uz objašnjenje:

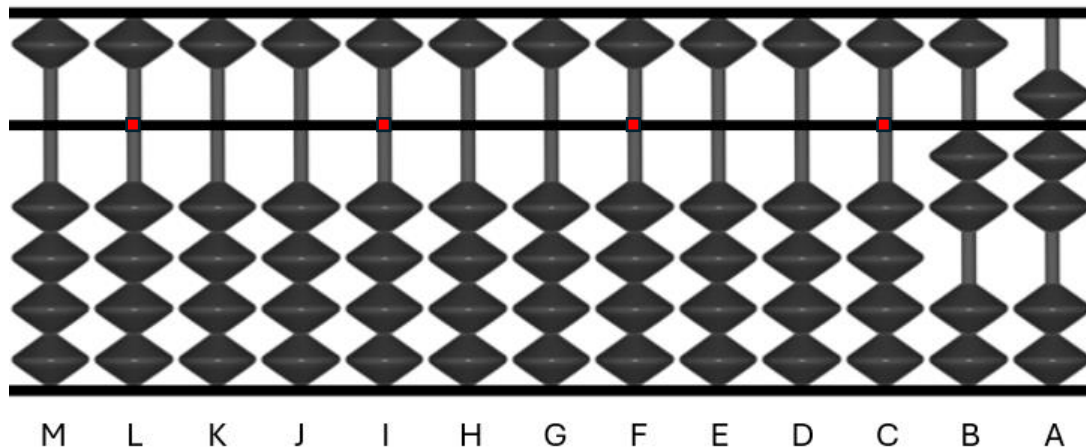
Najprije se na abakusu postavi broj 43:



Slika 23: Prikaz broja 43

Sada treba oduzeti broj 16, i to tako da se najprije na stupcu B oduzme 1, što je jednostavno. Rezultat koji se dobije je 33. Nakon toga se na stupcu A oduzima 6 pri čemu se nailazi na problem. Kako su na stupcu A tri zrnca, što spada u drugi slučaj ($3 < 6$) pa umjesto da se oduzme 6 na stupcu A, posuđuje se jedno zrnice iz stupca B i

na stupac A dodaje se 4 kako bi se dobio isti rezultat. U ovom slučaju opet se nailazi na problem jer u stupcu A nemaju dostupna 4 zrnca pa se dodaje 5 i oduzima 1. Da bi se to postiglo, najprije se na stupcu B oduzme jedno „zemaljsko“ zrnce, nakon čega na stupcu A treba dodati četiri „zemaljska“ zrnca. Kako nisu dostupna četiri „zemaljska“ zrnca, dodaje se jedno „nebesko“ zrnce i oduzima jedno „zemaljsko“ zrnce. Prema tome, konačni rezultat je $43 - 16 = 27$.



Slika 24: Razlika brojeva 43 i 16

2.4. Množenje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa

Množenje na abakusu temelji se na principu ponovljenog zbrajanja, ali za praktične potrebe postoje specifične tehnike koje omogućuju brže i preciznije izvođenje množenja. Ovdje će se opisati metoda koju je odobrio Japanski odbor za abakus (Japan Abacus Committee) i koja se pokazala najmanje sklonom greškama te vrlo jednostavnom nakon što se savlada osnovna tehnika. Da bi se koristila ova metoda, sve što je potrebno znati je tablica množenja do devet.

Objašnjenje postupka množenja:

Da bi se pomnožila dva broja, najprije se postavi jedan od dva faktora na sredinu abakusa tako da mu posljednja znamenka bude u stupcu jedinica koji je označen točkom na prečki. Nakon toga se postavlja drugi faktor lijevo od prvoga, i to tako da između njih ostanu dva prazna stupca (nije bitno da znamenka jedinica drugog faktora

bude postavljena na stupac označen točkom). Postupak množenja provodi se desno od prvog faktora tako da se ostave dva stupca prazna.

Najprije se množe znamenke jedinica faktora i desno od prvog faktora zapisuje se umnožak, a znamenka jedinica prvog faktora uklanja se s abakusa. Ni u ovom slučaju nije bitno da se umnožak postavi tako da mu znamenka jedinica bude na stupcu označenom točkom. Nakon toga množe se znamenke desetice faktora i dodaju se na dotad dobiveni umnožak. Pri tome se mora paziti da se pomakne za jedno mjesto ulijevo te da se desetice prvog faktora uklone s abakusa. Analogni postupak provodi se za stotice, tisućice itd. Nakon završetka postupka uklanja se drugi faktor s abakusa i iščitava umnožak.

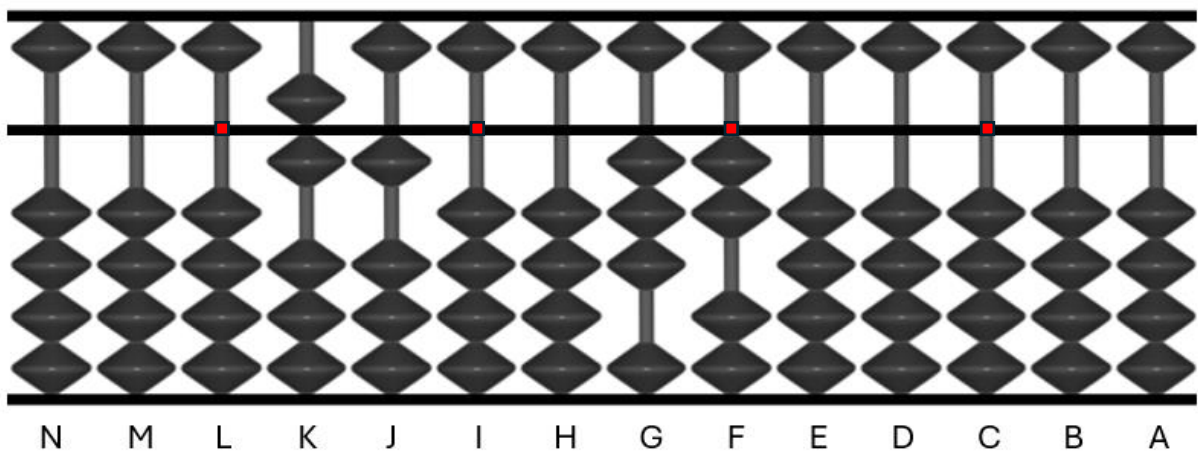
Kao i dosad, ovaj postupak će se najbolje shvatiti na primjeru.

1. PRIMJER

Pomnoži broj 61 brojem 32.

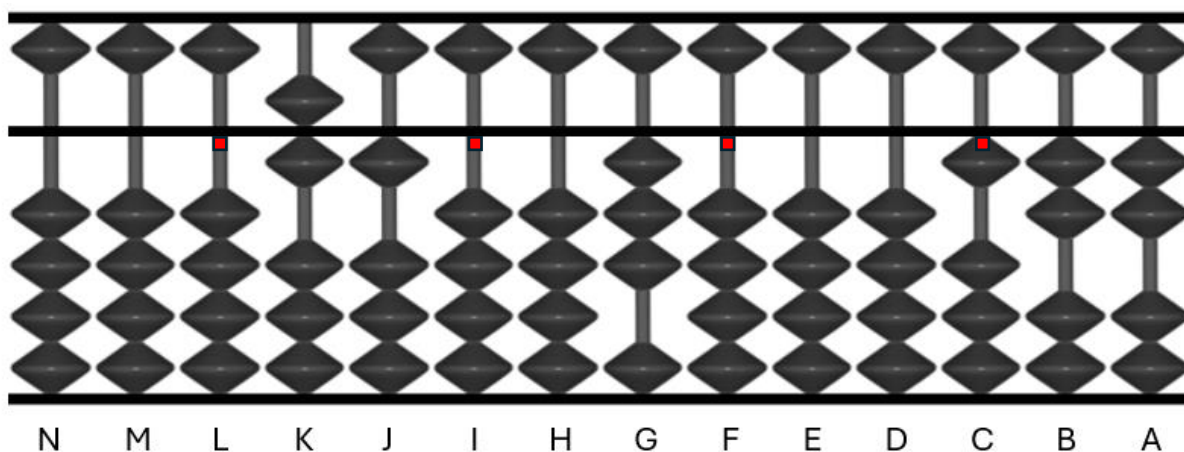
Rješenje uz objašnjenje:

Na sredinu abakusa najprije se postavi faktor 32 – u stupce G i F, te lijevo od njega, s dva stupca razmaka, faktor 61 – u stupce K i J (mogao se postaviti najprije faktor 61 te lijevo od njega faktor 32).



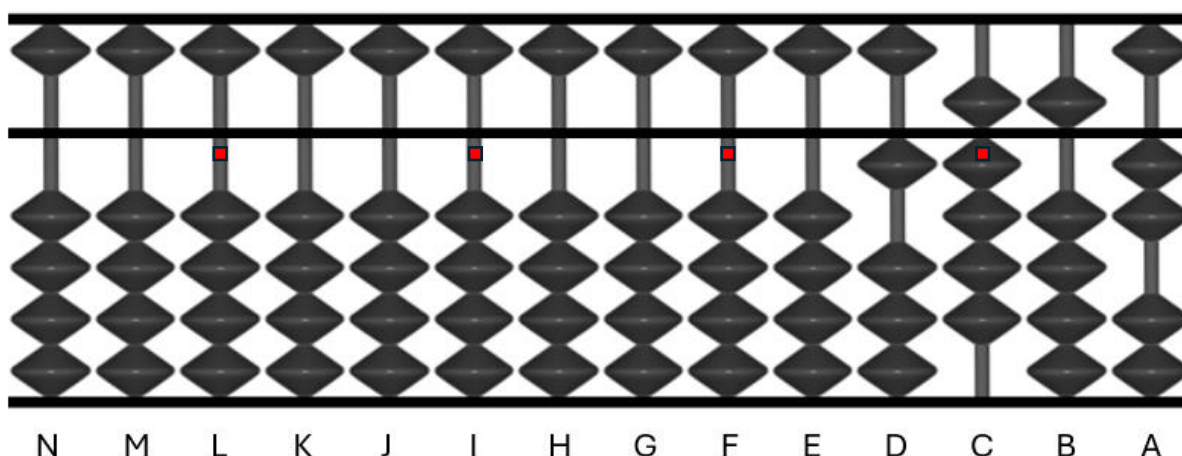
Slika 25: Prikaz brojeva 61 i 32

Sada znamenkom jedinica faktora 32, odnosno brojem 2, množimo faktor 61, i to tako da se najprije pomnože brojevi 2 i 6 te umnožak 12 smjesti na stupce C i B. Nakon toga pomnože 2 i 1 te umnožak 2 smjesti na stupac A. Sada se znamenka 2 može ukloniti s abakusa. Nakon svega navedenog, abakus izgleda ovako:



Slika 26: Umnožak broja 2 i faktora 32

Sada se isti postupak provodi i sa znamenkom desetica faktora 32, odnosno broj 3 množi se faktorom 61. Najprije se pomnože brojevi 3 i 6 te umnožak 18 zapisuje na stupce D i C, a nakon toga se pomnože brojevi 3 i 1 te se umnožak 3 zapisuje na stupac B (kako se prešlo s jedinice na deseticu, zapis se pomaknuo za jedno mjesto ulijevo). Nakon toga s abakusa se mogu ukloniti broj 3 i faktor 61. Abakus nakon toga izgleda ovako:



Slika 27: Umnožak broja 3 i faktora 32 te uklanjanje drugog faktora

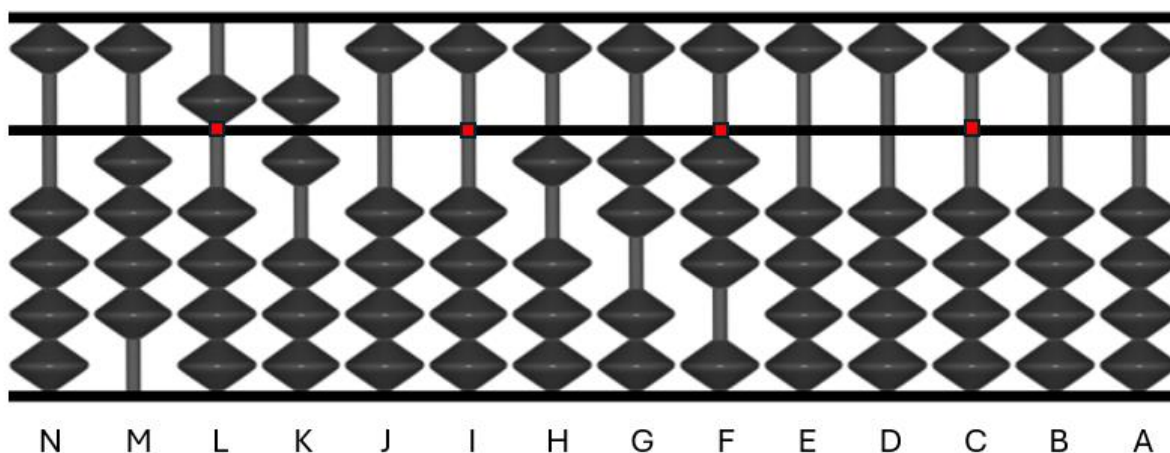
Iz ovoga se može iščitati da je umnožak brojeva 61 i 32 jednak 1952.

2. PRIMJER:

Pomnoži broj 123 brojem 456.

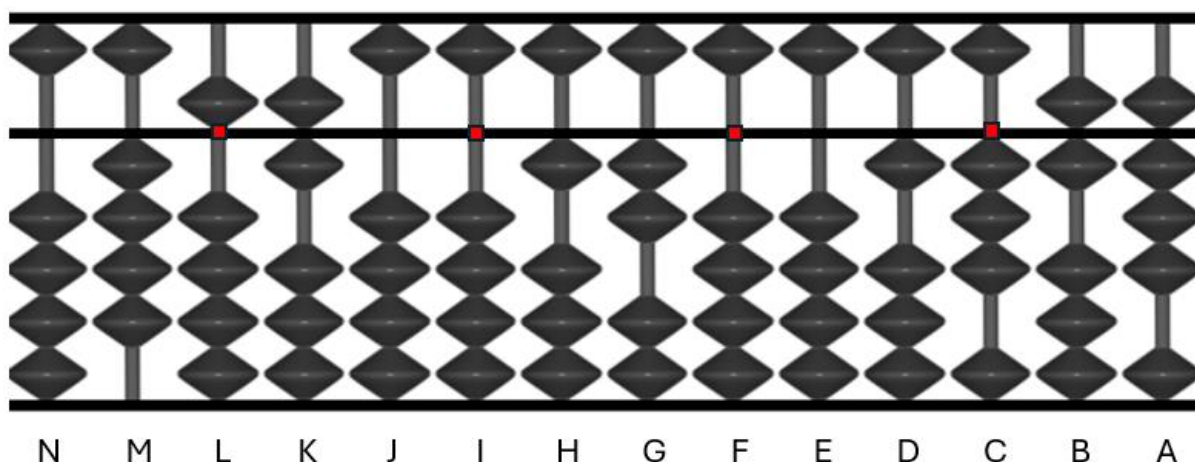
Rješenje uz objašnjenje:

Na sredinu abakusa postavlja se faktor 456 – u stupce H, G i F, te lijevo od njega, s dva stupca razmaka, faktor 123 – u stupce M, L i K (mogao se postaviti najprije faktor 123 te lijevo od njega faktor 456).



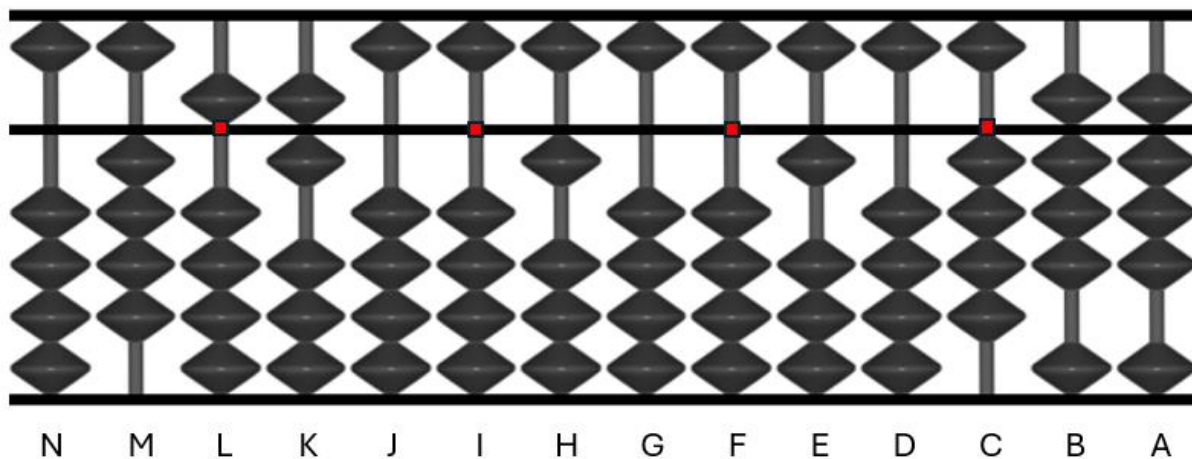
Slika 28: Prikaz brojeva 456 i 123

Sada znamenkom jedinica faktora 123, odnosno brojem 3 množi se faktor 456. Najprije se pomnože brojevi 3 i 4 te se umnožak 12 smjesti na stupce D i C. Zatim se pomnože brojevi 3 i 5 te se umnožak 15 smjesti na stupce C i B. Nakon toga se pomnože brojevi 3 i 6 te se umnožak 18 smjesti na stupce B i A. Sada se znamenka 3 može ukloniti s abakusa. Nakon svega navedenog abakus izgleda ovako:



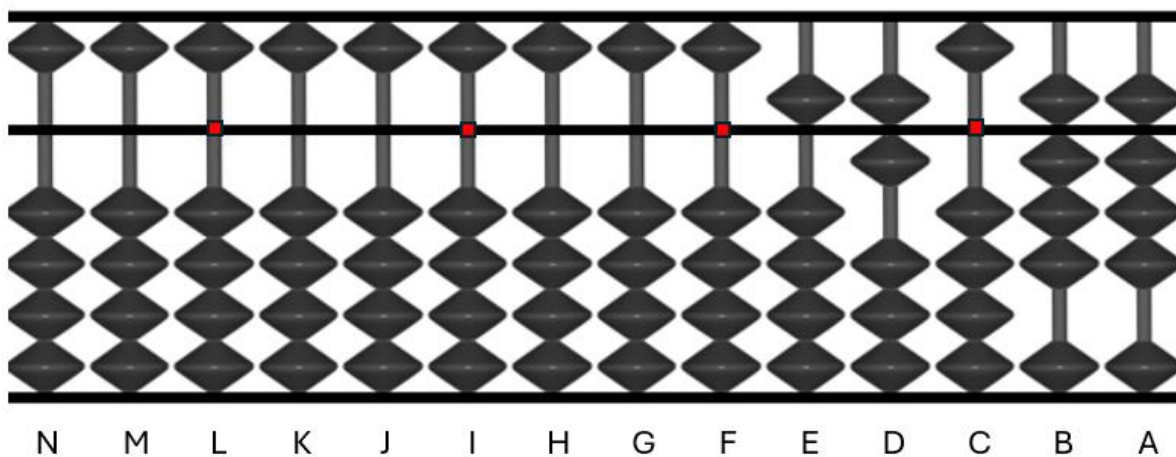
Slika 29: Umnožak broja 3 i faktora 456

Sada se isti postupak provodi i sa znamenkom desetica faktora 123, odnosno brojem 2 množi se faktor 456 i znamenka 2 se uklanja s abakusa. Nakon toga abakus izgleda ovako:



Slika 30: Umnožak broja 2 i faktora 456

Sada se isti postupak provodi i sa znamenkom stotica faktora 123, odnosno brojem 1 množi se faktor 456 i s abakusa se uklanja znamenka 1 i faktor 456. Nakon svega navedenog abakus izgleda ovako:



Slika 31: Umnožak broja 1 i faktora 456 te uklanjanje drugog faktora

Iz ovoga se može iščitati da je umnožak brojeva 123 i 456 jednak 56088.

2.5. Dijeljenje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa

Dijeljenje na abakusu može se činiti složenim procesom, ali uz pravilnu tehniku i praksu može postati jednostavno i intuitivno. Postoji nekoliko metoda za izvođenje dijeljenja, ali u ovom radu će biti opisana jedna od najčešće korištenih metoda koja je jednostavna za razumijevanje i primjenu. Da bi se koristila ova metoda, također je potrebno znati tablicu množenja do devet.

Objašnjenje postupka dijeljenja:

Kako bi se podijelila dva broja, najprije se postavi djeljenik na desni dio abakusa tako da mu znamenka jedinica bude na stupcu označenom točkom. Nakon toga se postavi djelitelj lijevo od djeljenika s dovoljnim razmakom kako bi se između ta dva broja mogao zapisati količnik (npr. ako djeljenik ima 5 znamenaka, bilo bi dobro ostaviti 5 stupaca između djeljenika i djelitelja). Također treba paziti da količnik bude zapisan tako da mu znamenka jedinice bude na stupcu označenom točkom.

Postupak počinje određivanjem količnika brojeva određenog prvim znamenkama djeljenika i djelitelja. Količnik se postavlja lijevo od djeljenika, a od djeljenika se oduzima umnožak broja koji se dobije i djelitelja.

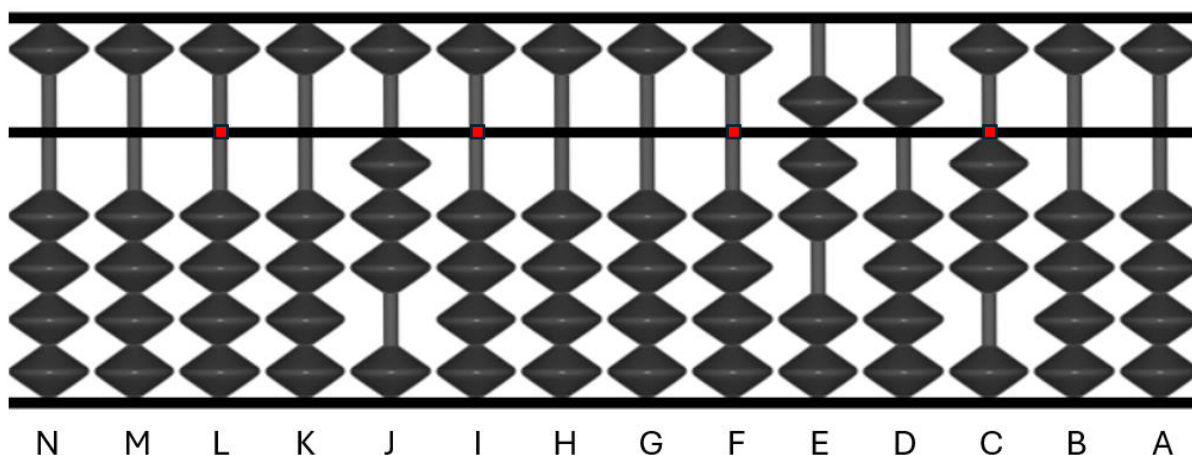
Postupak će se najbolje shvatiti na primjeru.

1. PRIMJER

Podijeli broj 753 brojem 3.

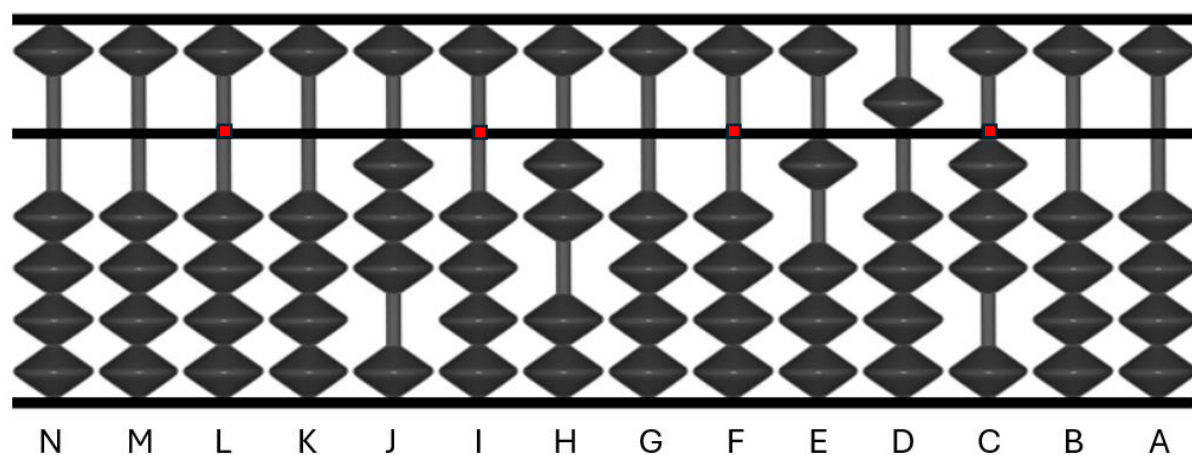
Rješenje uz objašnjenje:

Da bi se na abakusu podijelila ova dva broja, najprije ih treba postaviti na gore opisani način. Na stupce C, D, i E postaviti će se djeljenik 753, te na stupac J djelitelj 3.



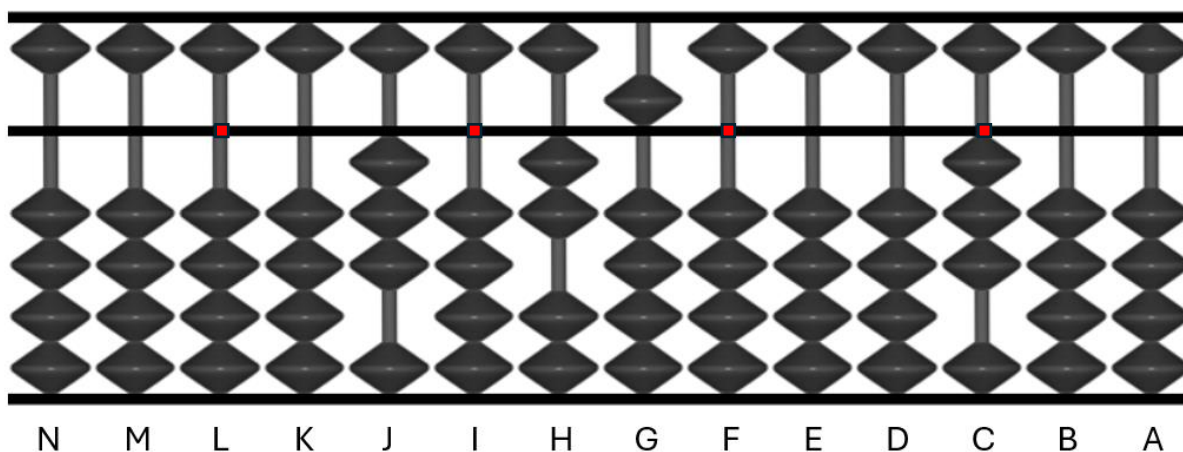
Slika 32: Prikaz brojeva 3 i 753

Treba utvrditi koliko iznosi količnik brojeva 7 i 3. Količnik je približno 2 pa se broj zapisuje na stupac H. Zatim se odredi umnožak broja 2 i djelitelja 3. Umnožak brojeva 2 i 3 je 6 te se on oduzima od znamenke stotica broja 753. Time se dobiva novi djeljenik 153. Abakus nakon toga izgleda ovako:



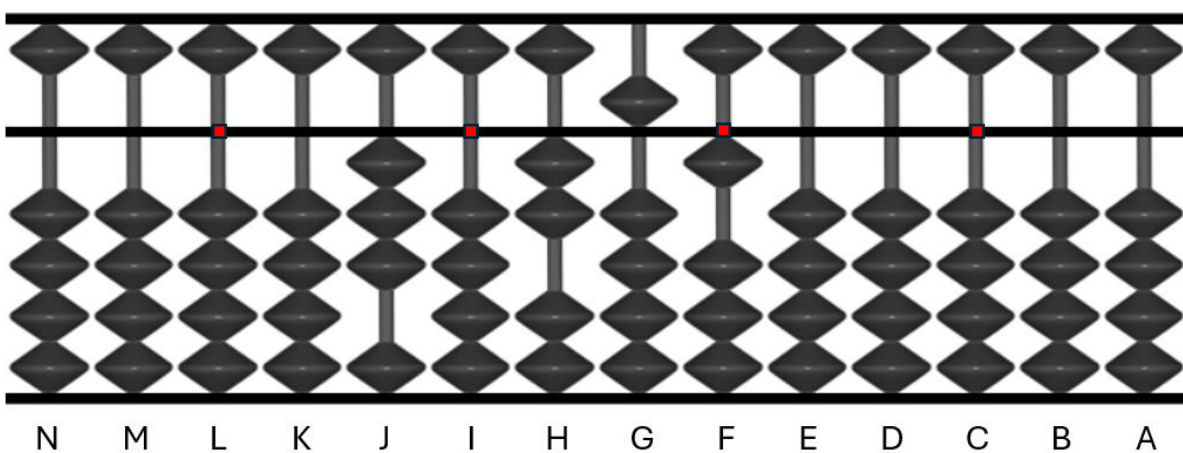
Slika 33: Stotica količnika 2 i ostatak 153

Sada je potrebno odrediti količnik brojeva 15 i 3. Količnik iznosi 5 pa se broj zapisuje u stupac G. Zatim se broj 5 pomnoži djeliteljem 3. Umnožak brojeva 5 i 3 je 15, što se oduzima od stotica i desetica broja 153. Time se dobiva novi djeljenik 3 te imamo sljedeću situaciju na abakusu:



Slika 34: Desetica količnika 5 i ostatak 3

Za kraj još treba podijeliti broj 3 djeliteljem 3, što daje 1. U stupac F zapisuje se 1, a umnožak brojeva 3 i 1 jednak je 3, te se na stupcu C uklone 3 zrnca. Situacija na abakusu je sljedeća:



Slika 35: Jedinica količnika 1 i ostatak 0

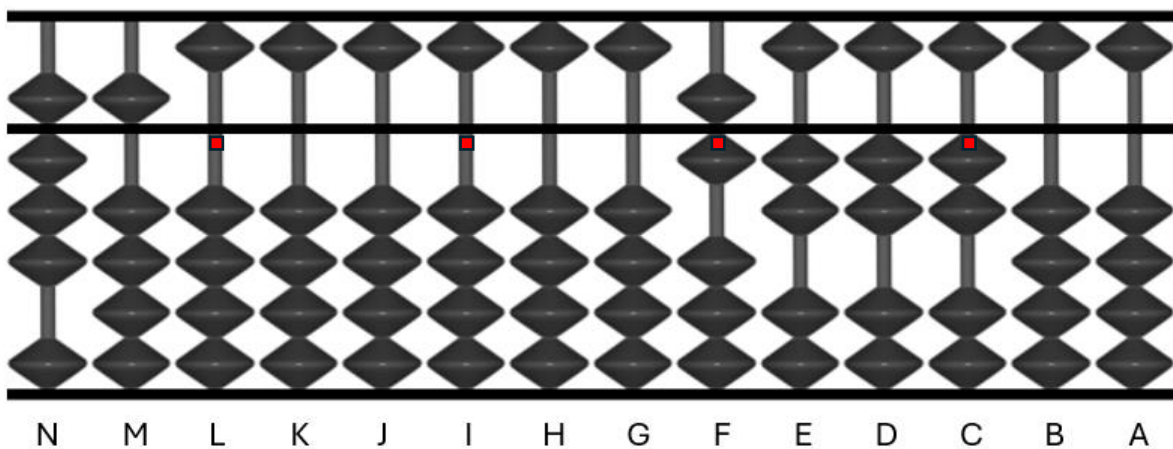
Dakle, dijeljenjem 753 brojem 3 dobiva se količnik 251.

2. PRIMJER

Podijeli broj 6222 brojem 85.

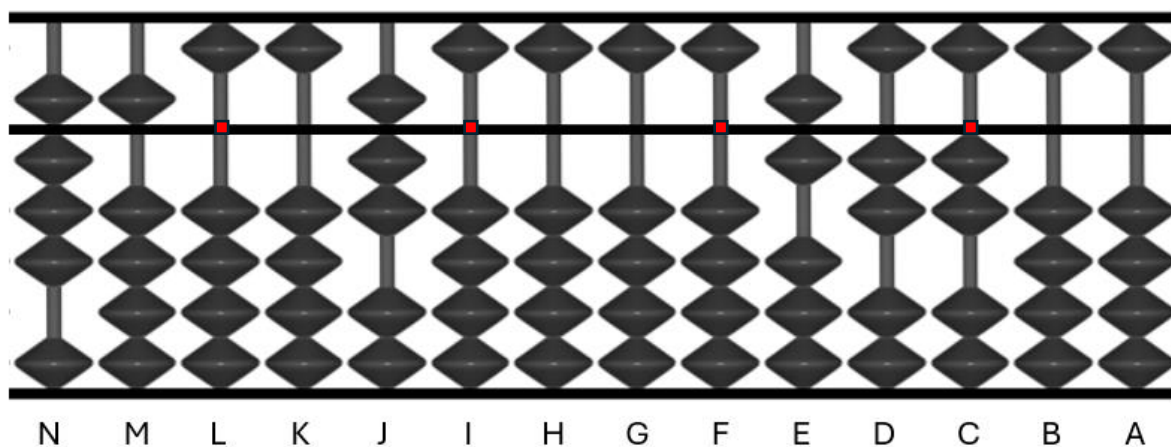
Rješenje uz objašnjenje:

Da bi se podijelila ova dva broja na abakusu, najprije ih treba postaviti na abakus na gore opisani način. S obzirom da će količnik sadržavati dvije znamenke u dekadskom dijelu, na stupce C, D, E i F postaviti će se djeljenik 6222, a na stupce M i N djelitelj 85. Količnik se počinje zapisivati na stupcu J te je situacija na abakusu sljedeća:



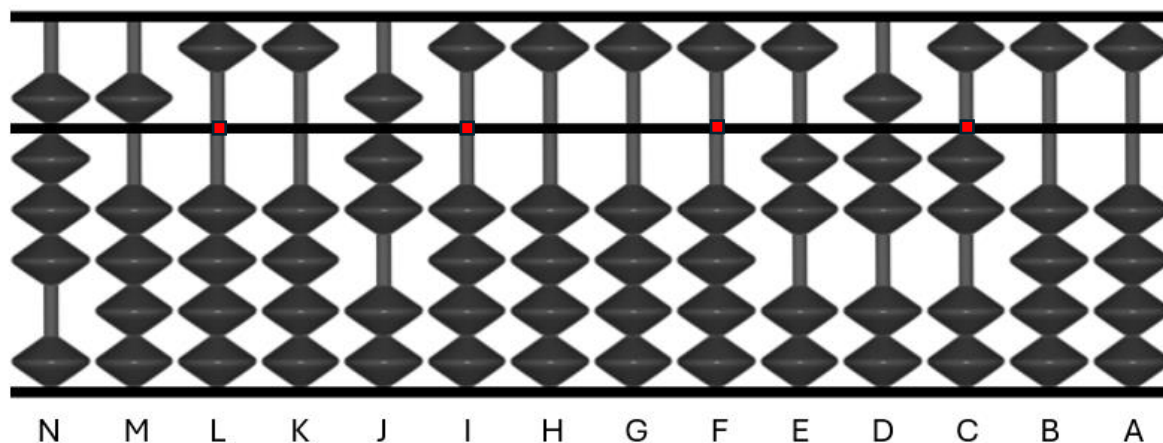
Slika 36: Prikaz brojeva 85 i 6222

Količnik brojeva 622 i 85 je približno sedam, što se zapisuje na stupac J. Kako umnožak brojeva 7 i 8 iznosi 56, od 62 se oduzima 56, što daje ostatak 6. Dobiva se novi djeljenik 622. Nakon ovoga na abakusu je sljedeća situacija:



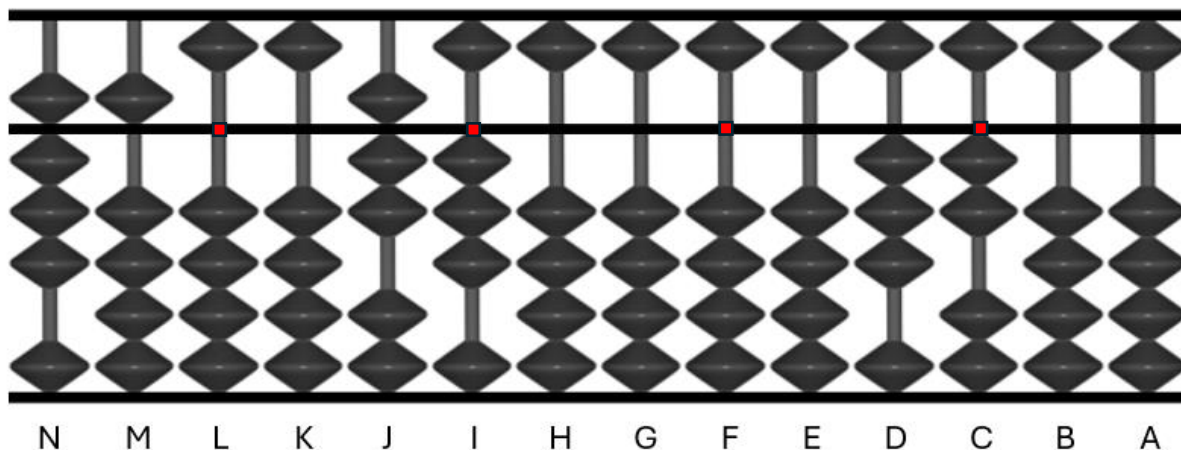
Slika 37: Desetica količnika 7 i ostatak 622

Analogan postupak je potrebno provesti i za znamenku jedinica djelitelja. Umnožak brojeva 7 i 5 je 35. Razlika brojeva 62 i 35 je 27 pa je sada novi djeljenik 272. Situacija na abakusu je sljedeća:



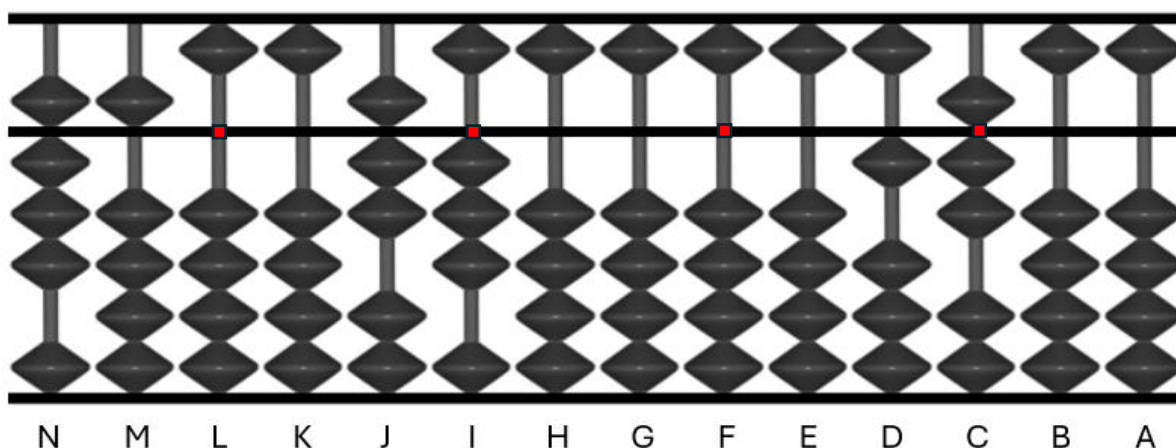
Slika 38: Konačni ostatak 272

Zatim se nastavlja dijeliti 272 djeliteljem 85, Količnik je približno 3, što se zapisuje u stupac I. Nakon toga se od 27 oduzima umnožak brojeva 8 i 3. Time se dobiva novi djeljenik 32. Situacija na abakusu je sljedeća:



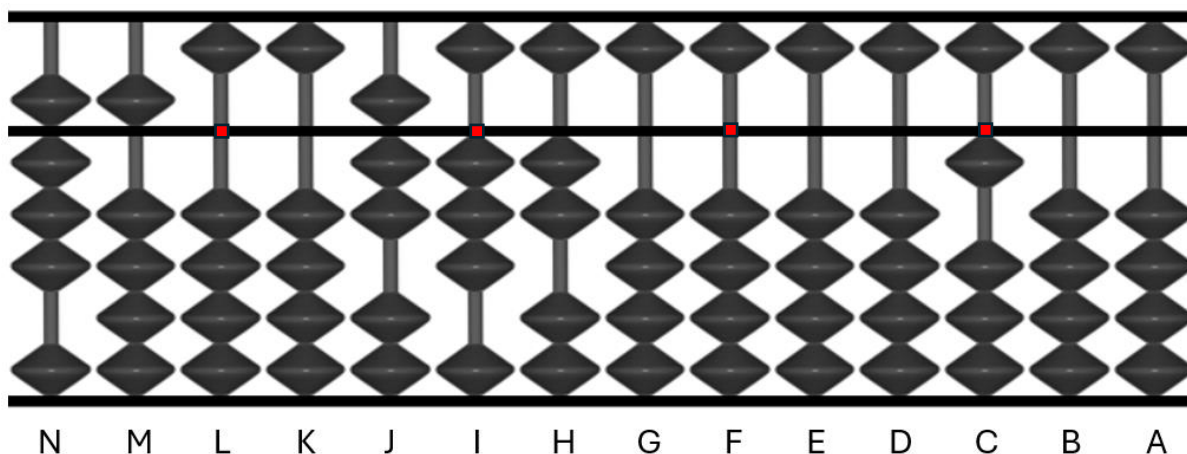
Slika 39: Jedinica količnika 3 i ostatak 32

Sada još od 32 treba oduzeti umnožak brojeva 3 i 5. Tako, na abakusu, količnik zasad iznosi 73, a ostatak je 17. Situacija na abakusu je sljedeća:



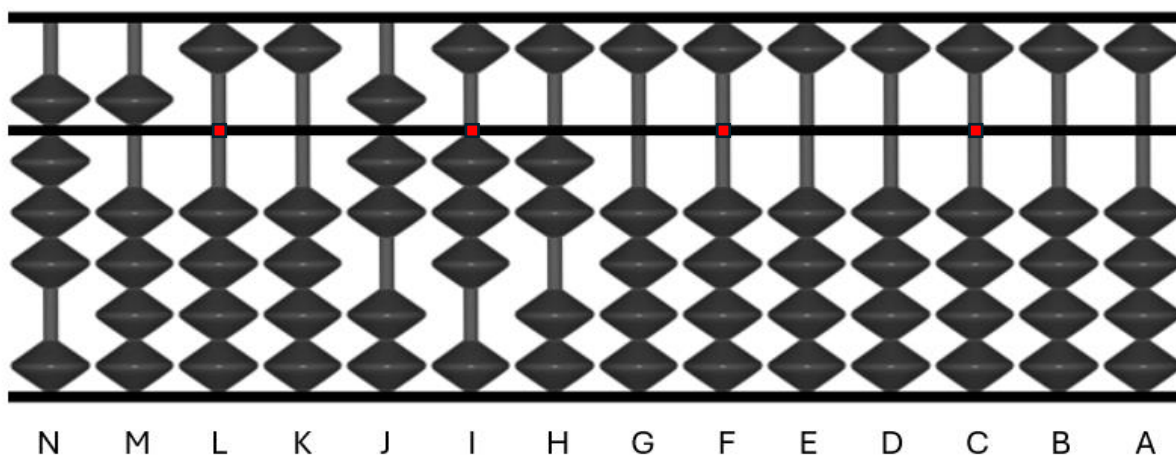
Slika 40: Ostatak 17

Kao što se vidi, došlo se do stupca jedinica u količniku 73, pa se može zaključiti da količnik neće biti prirodan broj, nego ćemo ga zapisati u decimalnom zapisu. Postupak se nastavlja kao i do sada. Potrebno je utvrditi količnik brojeva 17 i 8 što je približno 2, to se zapisuje u stupac H, koji u ovom slučaju predstavlja stupac desetinki. Zatim se od djeljénika 17 oduzima umnožak brojeva 2 i 8, što daje novi djeljénik 1. Situacija na abakusu je sljedeća:



Slika 41: Desetinka količnika 2 i ostatak 1

Nakon toga, od djeljénika 1 oduzima se umnožak brojeva 2 i 5, ali kako je riječ o 2 desetinke, umnožak je zapravo 1 (jer je $0.2 \cdot 5 = 1$) i dobiva se da je ostatak 0. Konačno rješenje na abakusu je:



Slika 42: Količnik 732 i ostatak 0

Prema tome, količnik brojeva 6222 i 85 je broj 73.2.

2.6. Korjenovanje korištenjem Soroban (japanskog) abakusa

Korjenovanje na abakusu, konkretno izračunavanje vrijednosti kvadratnih korijena, tehnika je koja se temelji na jednostavnim matematičkim operacijama, no proces može biti složen i zahtijevati puno pažnje.

Postupak izračunavanja kvadratnog korijena: (Bernazzani, 2005.)

1. **Postavljanje argumenta:** Radikand se postavlja na desnu stranu abakusa. Taj broj se naziva kvadratnim brojem.
2. **Grupiranje znamenki:** broj se razdvaja u grupe znamenaka po dvije, počevši od decimalne točke u oba smjera. Na primjer, broj 17362.236 razdvaja se na 1 73 62 23 i 60.
3. **Pronalazak najvećeg potpunog kvadrata:** iz prve grupe znamenaka određuje se najveći potpun kvadrat koji je manji ili jednak toj grupi i taj potpun

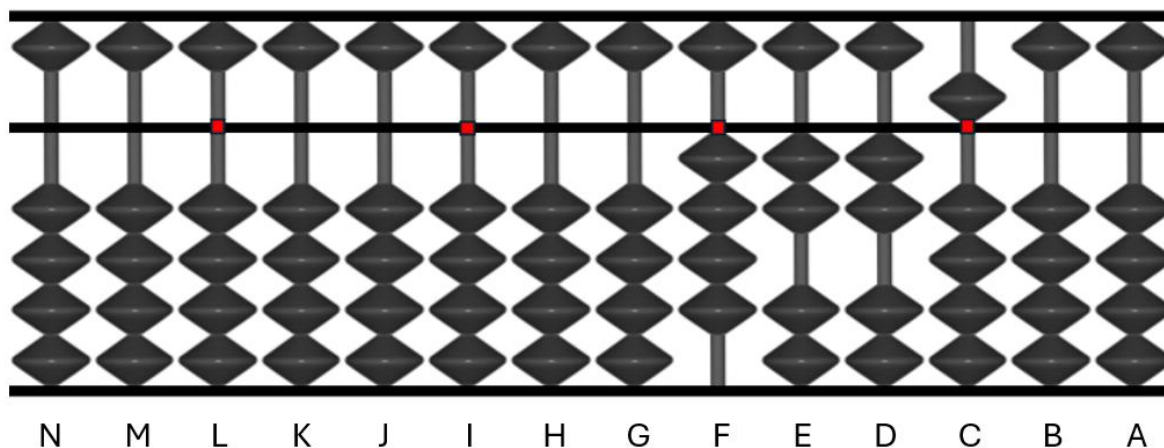
kvadrat oduzima se od prve grupe znamenaka. Na primjer, za grupu 1, najveći potpun kvadrat je 1, za grupu 73, najveći potpun kvadrat je 64.

4. **Postavljanje kvadratnog korijena:** na lijevu stranu abakusa postavlja se vrijednost kvadratnog korijena potpunog kvadrata. Na primjer, vrijednost kvadratnog korijena broja 1 je 1, pa se 1 postavlja na lijevu stranu; vrijednost kvadratnog korijena broja 64 je 8 pa se 8 postavlja na lijevu stranu.
5. **Množenje brojem 2 korijenskog broja:** dobivena vrijednost u prethodnom koraku pomnoži se brojem 2 na abakusu. Zatim se određuje najveći broj koji se, pomnožen dobivenim umnoškom, može oduzeti od sljedeće grupe znamenaka. Taj broj postavlja se pored prve znamenke u rezultatu.
6. **Kvadriranje kvocijenta:** dobiveni broj u prethodnom koraku kvadrira se i oduzima od znamenaka na desnoj strani abakusa. Na primjer, ako je drugi kvadratni broj 8, onda se 8 kvadrira, što je 64, i taj broj se oduzima od desne strane.
7. **Nastavak postupka:** postupak se nastavlja sve dok se ne iscrpe sve grupe znamenaka. Ako ostatak na desnoj strani abakusa nije nula, nakon decimalne točke može se dodati grupa 00 i nastaviti postupak.
8. **Dijeljenje brojem 2 korijenskog broja:** kada je ostatak na desnoj strani abakusa nula, broj koji je udvostručen u 5. koraku dijeli se brojem 2. Zapisani broj na abakusu je vrijednost zadanog kvadratnog korijena.

1. PRIMJER

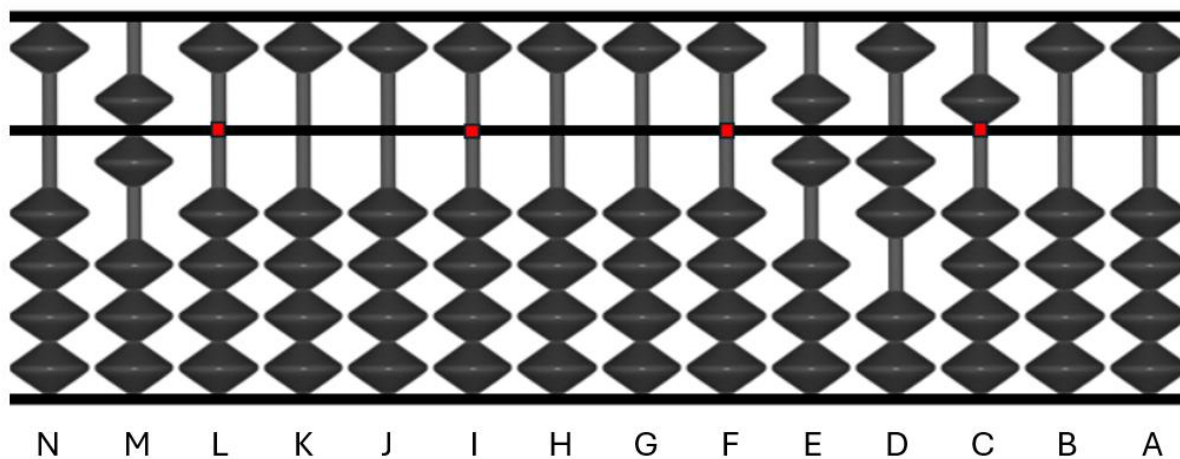
Izračunaj vrijednost kvadratnog korijena od 4225.

Najprije se na desnu stranu abakusa postavlja broj 4225. Neka to bude na stupcima F, E, D i C. Situacija na abakusu je sljedeća:



Slika 43: Kvadratni broj 4225

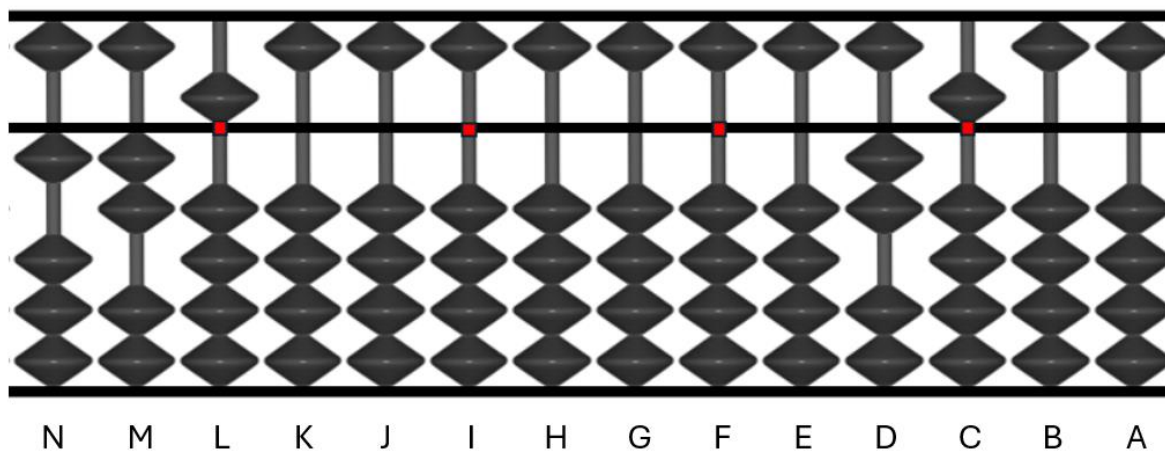
Brojevi se podijele u grupe znamenaka 42 i 25. Gleda se prva grupa (u ovom slučaju 42 na stupcima F i E). Traži se najveći potpun kvadrat koji je manji ili jednak broju 42. Kako je to 36, na lijevu stranu abakusa, na primjer, na stupac M stavlja se vrijednost 6 ($\sqrt{36} = 6$). Nakon toga od grupe 42 na stupcima F i E oduzima se 36 te se dobiva razlika 6. Dakle, prva znamenka rezultata je 6. Situacija na abakusu je sljedeća:



Slika 44: Desetica korijenskog broja 6 i ostatak 625

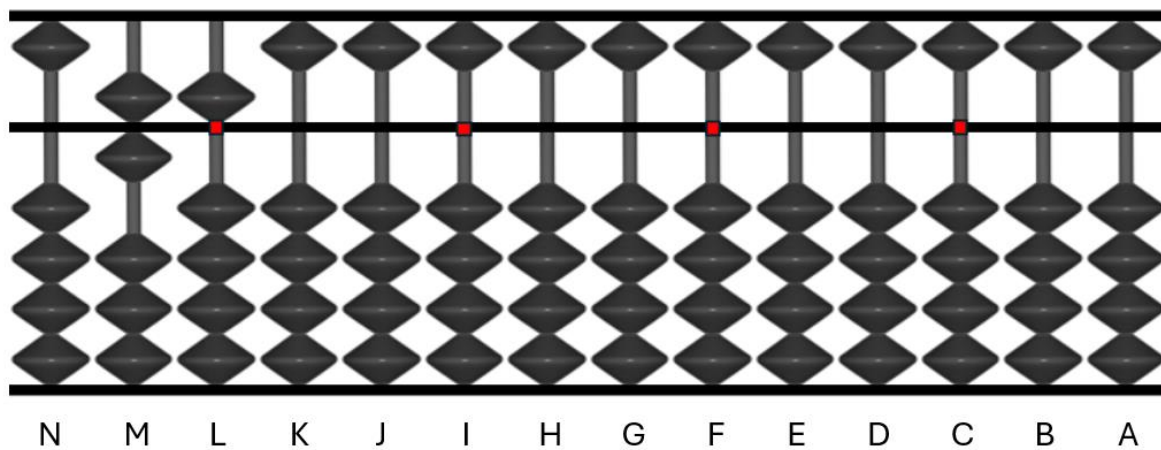
Zatim se broj 6 pomnoži brojem 2 i dobije se broj 12 zapisan u stupcima N i M. Potrebno je utvrditi koji se broj, pomnožen brojem 12, može oduzeti od 62. Napamet se može izračunati da je to 5. Broj 5 zapisuje se na stupac L te se od broja određenog stupcima

E i D oduzima umnožak brojeva 5 i 12. Na stupcu E ostaje 0, a na stupcu D ostaje 2. Situacija na abakusu je sljedeća:



Slika 45: Jedinica korijenskog broja 6 i ostatak 25

Za kraj, kvadrira se 5, što je 25, i oduzima se od broja određenog stupcima C i D, što je nula. Kako je u prvom koraku 6 pomnoženo brojem 2, sada ga treba podijeliti istim brojem da bi se dobio prvotni broj 6. Situacija na abakusu je sljedeća:



Slika 46: Korijenski broj 65 i ostatak 0

Prema tome, iz abakusa se može iščitati da je $\sqrt{4225} = 65$.

3. Mentalna aritmetika

Mentalna aritmetika je tehnika koja omogućuje izvođenje matematičkih operacija isključivo uz pomoć uma, bez korištenja papira, olovke ili kalkulatora. Ova vještina uključuje brzo i precizno izvođenje osnovnih matematičkih operacija poput zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja.

Prednosti mentalne aritmetike su brojne, osobito za učenike nižih razreda. Prakticiranjem mentalne aritmetike djeca razvijaju svoje matematičke sposobnosti, koncentraciju, pažnju i brzinu razmišljanja. Ova tehnika potiče brzo razmišljanje jer učenici moraju izračunavati rezultate u svojoj glavi u kratkom vremenskom roku. Uspjeh u mentalnoj aritmetici povećava samopouzdanje učenika u njihove matematičke sposobnosti, što često dovodi do boljih rezultata i u drugim matematičkim područjima.

Rad s mentalnom aritmetikom također potiče apstraktno matematičko razmišljanje i razumijevanje matematičkih koncepata. Ona pomaže u izgradnji snažnih temelja za matematiku jer učenici moraju temeljito razumjeti koncepte zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja.

Mentalna aritmetika je izuzetno važna za učenike nižih razreda jer im omogućuje razvoj ključnih vještina koje će im kasnije koristiti u školi i životu. U ranom djetinjstvu mozak je posebno spreman za učenje i razvoj matematičkih sposobnosti. Mentalna aritmetika pruža interaktivnu i angažiranu metodu učenja matematike, čineći ovu disciplinu zanimljivijom i razumljivijom. Također, pomaže učenicima da steknu samopouzdanje u rješavanju matematičkih problema, olakšavajući im daljnje usvajanje složenijih matematičkih koncepata kako napreduju u školovanju.

3.1. Uključenost mentalne aritmetike u nastavu matematike

Kada je riječ o kurikulumu nastavnog predmeta matematike u Republici Hrvatskoj, uključujući osnovnoškolski i srednjoškolski kurikulum, mentalna aritmetika ili korištenje abakusa nisu izričito navedeni kao tema. U našem obrazovnom sustavu mentalna aritmetika nije zastupljena, nego se inzistira na računanju, odnosno zbrajanju, oduzimanju, množenju i dijeljenju pomoću papira i olovke. Ovakva situacija karakteristična je u većini razreda osnovne škole, dok u srednjoj školi većina učenika za bilo kakvo računanje koristi kalkulator.

Implementacija mentalne aritmetike u nastavu može biti korisna za razvoj matematičkih sposobnosti učenika, posebno u nižim razredima. Kroz redovnu praksu i primjenu ovih vještina, učenici mogu postići veću sigurnost u računanju te razviti brže i efikasnije strategije za rješavanje matematičkih problema. Jedan od alata koji može biti veoma koristan pri razvoju ove vještine je svakako abakus.

Mentalna aritmetika bi se mogla implementirati u nastavu u Hrvatskoj na razne načine. Neke od ideja su:

- **Uključivanje u redovnu nastavu:** iako možda nije posebno navedena u kurikulumu, mentalna aritmetika može biti integrirana u redovnu nastavu matematike kao dodatni aspekt učenja. Nastavnici matematike mogu uvesti aktivnosti koje potiču brzo računanje bez upotrebe kalkulatora, pružajući učenicima priliku da razvijaju svoje mentalne matematičke vještine.
- **Dodatne aktivnosti i radionice:** škole mogu organizirati dodatne aktivnosti ili radionice iz mentalne aritmetike kao dio izvannastavnih programa. Te aktivnosti mogu biti opcionalne za učenike koji žele dodatno vježbati brzo računanje i razvijati svoje matematičke sposobnosti.
- **Korištenje digitalnih alata:** nastavnici mogu koristiti digitalne alate i aplikacije koje potiču mentalno računanje. Postoje različiti online resursi i aplikacije koje pružaju interaktivne zadatke za brzo računanje, što može biti korisno učenicima. Na primjer, aplikacije poput Khan Prodigy Math Game nudi razne vježbe i igre koje pomažu učenicima da razviju svoje matematičke vještine.

- **Natjecanja iz mentalne aritmetike:** organiziranje natjecanja iz mentalne aritmetike može biti motivirajuće za učenike i potaknuti ih na usvajanje tih vještina. Škole mogu surađivati s organizacijama koje se bave mentalnom aritmetikom kako bi omogućile sudjelovanje učenika na takvim natjecanjima.
- **Uključivanje abakusa u dodatnu nastavu matematike:** abakus može biti uključen kao alat u dodatnoj nastavi matematike kako bi se učenicima omogućilo vizualno i taktilno iskustvo učenja. Korištenje abakusa može pomoći učenicima da bolje razumiju osnovne matematičke koncepte i razvijaju vještine mentalnog računanja. Nastavnici mogu planirati posebne lekcije i aktivnosti koje uključuju korištenje abakusa, čime će obogatiti nastavni program i pružiti učenicima dodatne načine za učenje matematike.

3.2. Organizacije koje se bave mentalnom aritmetikom

Neke od organizacije koje se bave mentalnom aritmetikom i računanjem abakusom:

- **ALOHA Mentalna aritmetika** je izvorni i najveći međunarodni program mentalnog i intelektualnog razvoja za djecu – zlatni standard u mentalnoj aritmetici. Temelj programa su znanstvena istraživanja o mozgu, a glavni cilj je stvoriti jači mozak pomoću abakusa i mentalnog računanja.
- **UCMAS (Universal Concept Mental Arithmetic System)** je globalna organizacija koja promovira mentalnu aritmetiku kao sredstvo za razvoj kognitivnih sposobnosti djece. Njihov program uključuje tečajeve mentalne aritmetike temeljene na abakusu, koji se provode kroz obrazovne institucije i specijalizirane centre. UCMAS također organizira međunarodna natjecanja iz mentalne aritmetike koja potiču natjecateljski duh i usavršavanje matematičkih vještina.

- **EAMA (European Association of Mental Arithmetic)** okuplja stručnjake i entuzijaste iz različitih zemalja radi razmjene iskustava i promicanja mentalne aritmetike diljem Europe.
- **SOROBAN Abacus Europe** fokusira se na promicanje tradicionalne japanske tehnike računanja abakusom (Soroban) u Europi. Kroz svoje programe i seminare, ova organizacija educira nastavnike i roditelje o važnosti abakusa u razvoju dječjih matematičkih sposobnosti. Također, SOROBAN Abacus Europe organizira radionice i edukativne događaje za učenike kako bi ih potaknula na istraživanje ovog jedinstvenog načina računanja.
- **Mental Arithmetic Academy (MAA)** je organizacija koja kombinira tradicionalne metode abakusa sa suvremenim pristupima mentalnoj aritmetici. Njihov cilj je razviti vještine brzog računanja, koncentracije i samopouzdanja kod djece putem interaktivnih tečajeva i programa. MAA također nudi online resurse za učitelje i roditelje kako bi podržali učenje mentalne aritmetike kod kuće ili u školi.

Zaključak

U ovom radu govori se o abakusu kao drevnom kalkulatoru s bogatom poviješću i širokom primjenom diljem svijeta i naglašava njegovu važnost u mentalnom razvoju. Abakus nije samo arhaični alat, nego ključni instrument u razvoju matematičkog znanja i računanja, posebno u kontekstu mentalne aritmetike. Unatoč napretku tehnologije i dostupnosti modernih kalkulatora, abakus ostaje relevantan jer potiče brzo i precizno razmišljanje te pruža osjećaj zadovoljstva prilikom rješavanja matematičkih problema.

Uvođenje abakusa u suvremene obrazovne programe može biti ključno za razvoj matematičkih sposobnosti djece. Implementacija abakusa u nastavne programe može imati pozitivan utjecaj na razumijevanje matematike i poticanje interesa učenika za računanje i mentalnu aritmetiku. Širenje svijesti o važnosti abakusa u suvremenom obrazovanju i poticanje integracije ove tradicionalne tehnike u kurikulum osigurali bi sveobuhvatan razvoj matematičkih sposobnosti učenika.

Učenje korištenja abakusa ne samo da pruža klasičnu vještinu računanja, već razvija koncentraciju, brzinu razmišljanja i samopouzdanje kod učenika. Osim toga, čini proces učenja matematike i računanja zanimljivijim te priprema učenike za složenije matematičke izazove u budućnosti.

Bibliografija

1. *Abakus - HistoryMaps*. (n.d.). Preuzeto 26. 3. 2024. iz HistoryMaps: <https://history-maps.com/hr/story/History-of-Mathematics/event/Abacus>
2. Banzić, D. (2017.). *Mentalna aritmetika*. Beograd: Finesa.
3. Bernazzani, D. (2005.). *The Soroban / Abacus Handbook. (Rev 1.03 8. 6. 2004.)*. Dohvaćeno iz https://www.sliderulemuseum.com/Abaci/THE_ABACUS_HANDBOOK.pdf
4. Hogben, L. (1970.). *Sve o matematici*. Zagreb: Mladost.
5. *Japanski simulator abakusa (Soroban)*. (n.d.). Preuzeto 27. 3. 2024. iz <http://www.alcula.com/soroban.php>
6. Maričić, B., & Lazić, D. (2020.). Abacus computing tool – from history to application in mathematical education. *Inovacije u nastavi - časopis za savremenu nastavu*(33), str. 57-71.
7. Moon, P. (1971.). *The abacus: its history, its design, its possibilities in the modern world*. New York: Gordon & Breach Science Publishers.
8. *O Abacusu - UAH*. (n.d.). Preuzeto 27. 3. 2024. iz Udruga abacus Hrvatska: <https://www.abacus-hrvatska.hr/o-abacusu>
9. *Seksagezimalni sustav*. (2013. - 2024.). Preuzeto 26. 3. 2024. iz Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/seksagezimalni-sustav>
10. Starkey, P., & Klein, A. (2008.). Sociocultural influences on young children's mathematical knowledge. *Contemporary perspectives on mathematics in early childhood education*, str. 253–276.
11. Škorvaga, S. (2011.). *Računska ograničenja kineskog abakusa*. Osijek: Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku.

Popis slika

Slika 1: Julije Cezar kao dječak učio je brojati pomoću abakusa (Abakus - HistoryMaps)	6
.....	6
Slika 2: Rimski abakus (Škorvaga, 2011.)	6
Slika 3: Kineski abakus Suan-pan (Škorvaga, 2011.)	7
Slika 4: Japanski abakus Soroban (O Abacusu - UAH)	7
Slika 5: Ruski abakus ili schory (Škorvaga, 2011.)	8
Slika 6: Osnovni položaj abakusa	10
Slika 7: Početni položaj abakusa s oznakama	11
Slika 8: Prikaz broja 1975 na prva četiri stupca D,C,B,A	12
Slika 9: Prikaz broja 1975 na stupcima F,E,D,C	13
Slika 10: Prikaz broja 53.935 na stupcima G, F, E, D, C	13
Slika 11: Prikaz broja 53.935 na stupcima M, L, K, J, I	14
Slika 12: Prikaz broja 32	16
Slika 13: Dodavanje broja 7 broju 32	17
Slika 14: Prikaz broja 24	18
Slika 15: Dodavanje broja 1 broju 24	18
Slika 16: Dodavanje jedne desetice broju 39	19
Slika 17: Zbroj brojeva 39 i 16	20
Slika 18: Prikaz broja 2345	21
Slika 19: Zbroj brojeva 2234 i 6789	22
Slika 20: Prikaz broja 38	23
Slika 21: Razlika brojeva 38 i 11	24
Slika 22: Razlika brojeva 27 i 4	25
Slika 23: Prikaz broja 43	25
Slika 24: Razlika brojeva 43 i 16	26
Slika 25: Prikaz brojeva 61 i 32	27
Slika 26: Umnožak broja 2 i faktora 32	28
Slika 27: Umnožak broja 3 i faktora 32 te uklanjanje drugog faktora	28
Slika 28: Prikaz brojeva 456 i 123	29
Slika 29: Umnožak broja 3 i faktora 456	29
Slika 30: Umnožak broja 2 i faktora 456	30

Slika 31: Umnožak broja 1 i faktora 456 te uklanjanje drugog faktora	30
Slika 32: Prikaz brojeva 3 i 753	32
Slika 33: Stotica količnika 2 i ostatak 153	32
Slika 34: Desetica količnika 5 i ostatak 3	33
Slika 35: Jedinica količnika 1 i ostatak 0	33
Slika 36: Prikaz brojeva 85 i 6222	34
Slika 37: Desetica količnika 7 i ostatak 622	34
Slika 38: Konačni ostatak 272	35
Slika 39: Jedinica količnika 3 i ostatak 32	35
Slika 40: Ostatak 17	36
Slika 41: Desetinka količnika 2 i ostatak 1	36
Slika 42: Količnik 732 i ostatak 0	37
Slika 43: Kvadratni broj 4225	39
Slika 44: Desetica korijenskog broja 6 i ostatak 625	39
Slika 45: Jedinica korijenskog broja 6 i ostatak 25	40
Slika 46: Korijenski broj 65 i ostatak 0	40