Tolerancijski fuzzy grafovi

Šprajc, Sanja

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Sanja Šprajc

Tolerancijski fuzzy grafovi

Završni rad

Rijeka, lipanj, 2024.

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Sanja Šprajc

Tolerancijski fuzzy grafovi

Mentor: izv. prof. dr. sc. Andrea Švob

Završni rad

Rijeka, lipanj, 2024.

Sažetak

Glavna tema ovog rada su posebna vrsta grafova, tolerancijski fuzzy grafovi. U ovom radu najprije ću definirati intervalne grafove, zatim tolerancijske grafove kao proširenje pojma intervalnog grafa. Nakon toga ću definirati pojam fuzzy skupova i fuzzy grafova. Zatim ću pomoću tolerancijskih i fuzzy grafova definirati tolerancijske fuzzy grafove. Na kraju rada ću navesti gdje se i na koji način tolerancijski fuzzy grafovi primijenjuju.

Ključne riječi: intervalni graf, tolerancijski graf, fuzzy skup, fuzzy graf, tolerancijski fuzzy graf

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Teorija grafova je grana matematike nastala u 18. stoljeću koja se bavi proučavanjem grafova. Euler je uveo grafove za rješavanje problema sedam Königsberških mostova. U ovom završnom radu glavna tema su posebna vrsta grafova, tolerancijski fuzzy grafovi. Oni se mogu primijeniti na rješavanje problema rasporeda kao i za modeliranje širenja bolesti prenosivih zrakom, što ću u ovom radu i objasniti.

U prvom dijelu rada definirat ću tolerancijske i intervalne grafove. Zatim ću definirati pojam fuzzy skupa na temelju kojeg se definiraju fuzzy grafovi. Koristeći do tada definirane pojmove, uvest ću glavnu temu ovog rada, tolerancijske fuzzy grafove. Na kraju rada objasnit ću kako i za rješavanje kojih problema se oni koriste.

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju navest ćemo neke osnovne definicije iz teorije grafova za lakše razumijevanje daljnjeg teksta. Definicije su preuzete iz [4].

Definicija 2.1. *Graf G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, koja se sastoji od nepraznog skupa $V = V(G)$, čiji su elementi vrhovi od G, skupa $E = E(G)$ disjunktnog sa $V(G)$, čiji su elementi bridovi od G i funkcije incidencije ψ_G, koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova od G.*

Vrhovi u i v su susjedni ako $\exists e \in E(G)$ t.d. $\psi_G(e) = \{u, v\}$. Tada kažemo da su u i v krajnji vrhovi brida e.

Definicija 2.2. *Težinski graf G je uređeni par (G, w_G) gdje je G graf, a w_G preslikavanje $w_G : E(G) \to \mathbb{R}^+$ koje svakom bridu grafa G pridružuje težinu, tj. neki pozitivan realan broj.*

Definicija 2.3. *Graf H je podgraf od G, u oznaci $H \subseteq G$, ako je $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, a $\psi_H = \psi_G|_{E(H)}$, tj. ψ_H je restrikcija od ψ_G na $E(H)$.*

Definicija 2.4. *Podgraf od G induciran sa V', u oznaci $G[V']$ je graf čiji je skup vrhova $\emptyset \neq V' \subseteq V(G)$, a skup bridova je podskup bridova iz $E(G)$ čija su oba kraja u V'.*

Definicija 2.5. *Graf je jednostavan ako nema petlje (brid koji spaja vrh u sa samim sobom) i nikoja dva brida ne spajaju isti par vrhova, tj. nema višestrukih bridova.*

Definicija 2.6. *Jednostavan graf je potpun ako je svaki par vrhova spojen bridom.*

Definicija 2.7. *Klika jednostavnog grafa G je podgraf od G čiji je skup vrhova $S \subseteq V(G)$, tako da je $G[S]$ potpun graf.*

Definicija 2.8. *Kažemo da je k-bojanje vrhova grafa G funkcija* $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ *koja svakom vrhu iz G pridruži neku boju* $1, 2, \ldots, k$. *Ako je f takva da su susjedni vrhovi obojani različitim bojama tada kažemo da je bojanje grafa pravilno. Kažemo da je G k-obojiv ako dopušta pravilno k-bojanje vrhova.*

Definicija 2.9. *Kromatski broj grafa G je* $\gamma(G) = min\{k | G \text{ je } k\text{-obojiv}\}$.

Definicija 2.10. *Graf G je savršen ako je kromatski broj svakog induciranog podgrafa jednak broju vrhova u najvećoj kliki tog podgrafa.*

Poglavlje 3

Intervalni i tolerancijski grafovi

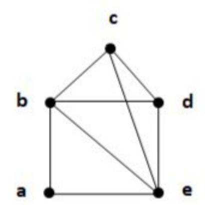
Glavna tema ovog rada su tolerancijski fuzzy grafovi koji se temelje na tolerancijskim grafovima. Za njihovo razumijevanje najprije ću uvesti pojmove intervalnog i tolerancijskog grafa. Definicije u ovom poglavlju preuzete su iz [3].

Motivacija za uvođenje intervalnih i tolerancijskih grafova leži u činjenici da se teorija grafova često primjenjuje na rješavanje problema rasporeda te je stoga prirodno pitanje kako se iz nekih zadanih intervala može dobiti graf.

Definicija 3.1. *Graf $G = (V, E)$ je intervalni graf ako se svakom vrhu $v \in V$ može pridružiti realni zatvoreni interval $I_v \subseteq \mathbb{R}$ tako da je brid $uv \in E \iff I_u \cap I_v \neq \emptyset$. Skup intervala $\{I_v : v \in V\}$ naziva se reprezentacija intervalnog grafa G.*

Na sljedećem primjeru dan je skup intervala i njima pridruženi intervalni graf. No, intervalni graf nije nužno samo onaj koji je dobiven iz skupa zatvorenih intervala. Naime, svaki graf G za kojeg se može pronaći bilo kakav skup intervala i pridružiti svaki interval jednom vrhu tako da vrijedi da su vrhovi susjedni ako i samo ako se intervali preklapaju je intervalni graf.

Primjer 3.1. *Neka je $\{I_a, I_b, I_c, I_d, I_e\}$ skup zatvorenih intervala zadan na sljedeći način. $I_a = [0, 3]$, $I_b = [2, 8]$, $I_c = [5, 9]$, $I_d = [6, 9]$, $I_e = [1, 7]$. Da bi dobili intervalni graf G čija je ovo reprezentacija, najprije primjetimo da će pridruženi graf imati 5 vrhova $\{a, b, c, d, e\}$ jer je zadano 5 intervala. Zatim promatramo presjeke svaka dva intervala. Lako se vidi da je $I_a \cap I_b = [2, 3] \neq \emptyset$. Dakle, postoji brid koji povezuje vrhove a i b u grafu G. S druge strane, $I_a \cap I_c = \emptyset$, dakle ne postoji zajednički brid vrhova a i c. Na analogan način dobiva se skup svih bridova grafa G. Na slici 3.1 je graf dobiven prateći ove korake.*



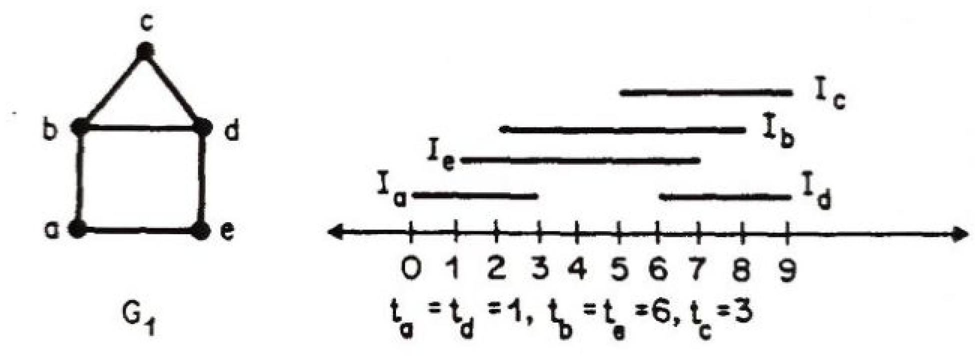
Slika 3.1: Primjer intervalnog grafa

Sam intervalni graf nije dovoljan za rješavanje nekih problema rasporeda. Na primjer, pretpostavimo da intervali predstavljaju raspored predavanja na koje neki student mora otići. Dalje pretpostavimo da svaki profesor dopušta kašnjenje na nastavu ili raniji odlazak sa nastave. Student može biti prisutan na dva predavanja čiji se termini preklapaju ako je taj interval preklapanja unutar dopuštenog vremena kašnjenja ili ranijeg odlaska. Zbog sličnih problema su na 13. jugoistočnoj konferenciji kombinatorike, teorije grafova i računarstva 1982. godine u Floridi Golumbic i Monma definirali tolerancijske grafove kao poopćenje intervalnih grafova.

Definicija 3.2. *Graf $G = (V, E)$ je tolerancijski graf ako se svakom vrhu $v \in V$ može pridružiti zatvoreni interval I_v i tolerancija $t_v \in \mathbb{R}^+$ tako da je brid $uv \in E$ ako i samo ako je $|I_u \cap I_v| \geq min\{t_u, t_v\}$. Familija $\{(I_v, t_v)\,|v \in V(G)\}$ je reprezentacija tolerancijskog grafa G. Ukoliko je tolerancija svakog vrha manja od duljine pridruženog intervala tada je to ograničeni tolerancijski graf.*

Drugim riječima, intervalni graf je posebna vrsta tolerancijskog grafa u kojem je svakom vrhu pridružena tolerancija $t_v = 0$. Za lakše razumijevanje uvodim sljedeći primjer tolerancijskog grafa dobiven iz prethodnog primjera.

Primjer 3.2. *Uzmimo tolerancijski graf G i njegovu reprezentaciju iz primjera 3.1. Neka je $t_a = t_d = 1$, $t_c = 3$ i $t_b = t_e = 6$. To znači da se kod spajanja vrhova mogu ignorirati presjeci kojima je duljina manja ili jednaka od 1, 3, odnosno 6. Pridruženi tolerancijski graf bit će podgraf grafa G kojem su izbačeni bridovi be i ce jer je $|I_b \cap I_e| = 5 < min\ \{t_b, t_e\} = 6$. Analogno je $|I_c \cap I_e| = 2 < min\ \{t_c, t_e\} = 3$. S druge strane, ostali će bridovi ostati u skupu $E(G)$ zato što je npr $|I_a \cap I_e| = 2 \geq min\,\{t_a, t_e\} = 1$. Na slici 3.2 prikazan je skup intervala i njemu pridružen tolerancijski graf.*



Slika 3.2: Tolerancijski graf i njegova reprezentacija (preuzeto iz [2])

Tolerancijski grafovi također nisu dovoljni za rješavanje svih problema rasporeda. Na primjer, stavimo li da intervali predstavljaju vrijeme kada je neka osoba provela u prostoriji u kojoj boravi zarazna osoba. U grafu će vrhovi predstavljati te intervale. Dva vrha u i v su spojena u pripadnom intervalnom grafu ako je zaražena osoba u prenijela bolest na osobu v. Ako osoba v nije provela vrijeme u istoj prostoriji sa zaraznom osobom u, tada sigurno ne postoji brid između dva vrha koja predstvljaju intervale u kojima su osoba u i v bile u prostoriji. Mogućnost zaraze zatim raste s vremenom provedenim u istoj prostoriji, no ne mora doseći 100 posto. Za opisati ovakav slučaj potrebne su nam definicije koje uvodim u sljedećim poglavljima.

Poglavlje 4

Fuzzy skupovi i fuzzy grafovi

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam fuzzy skupova i grafova kao podlogu za razumijevanje tolerancijskih fuzzy grafova. Fuzzy grafove definirao je L. A. Zadeh 1965. godine kako bi rješio probleme u kojima se ne može odrediti je li nešto element nekog skupa ili nije. Definicije fuzzy skupova i grafova uzete su iz [1].

Definicija 4.1. *Fuzzy skup je uređeni par* (U, m), *gdje je* U *skup, a* $m : U \to [0, 1]$ *funkcija pripadnosti. Neka je* $x \in U$. *Ako je* $m(x) = 0$, *tada kažemo da* x *nije član od* U, *tj.* x *ne pripada skupu* U. *Ako je* $m(x) = 1$ *tada je* x *puni član od* U *te ako je* $m(x) \in \langle 0, 1\rangle$ *tada je* x *fuzzy član skupa* U.

Funkciju m u definiciji 4.1 možemo promatrati kao funkciju koja govori o vjerojatnosti da se neki element nalazi u skupu. Ako je $m(x) = 0$, tada on nije član skupa U, to jest on se pojavljuje u U sa 0 vjerojatnosti. S druge strane, ako je $m(x) = 1$, x je elementi skupa U u 100% slučajeva. Ostali element pojavljuju se u U s nekom drugom vjerojatnošću. Dakle, ovisno o promatraču, U može, ali ne mora sadržavati te elemente. Slijedi jedan od primjera koje je dao i L. A. Zadeh u [5] kao motivaciju za definiranje fuzzy skupova.

Primjer 4.1. *Neka je* $A \subset \mathbb{R}$ *fuzzy skup svih brojeva koji su mnogo veći od* 1. *Na primjer, broj* 100 *jest veći od* 1 *pa on jest član ovog skupa, no je li mnogo veći je relativno pitanje i ovisi o skupu brojeva koji promatramo. Broj* 100 *je mnogo veći od jedan ako ga uspoređujemo sa brojem* 2, *no nije mnogo veći usporedimo li ga sa* 500. *Funkcija pripadnosti* m_A *može se definirati na način da je* m_A *rastuća funkcija kojoj je* $m_A(0) = 0$, $m_A(1) = 0$, $m_A(5) = 0.01$, $m_A(10) = 0.2$, $m_A(100) = 0.95$ *i* $m_A(500) = 1$. *Na taj je način opisana i relativnost odnosa svakog broja sa* 1.

Funkcija pripadnosti definirana kod fuzzy skupova vrlo je bitna za definiranje fuzzy grafova. To je graf G kojem nisu svi vrhovi v potpuni članovi skupa $V(G)$, te bridovi e koji nisu svi potpuni članovi skupa $E(G)$.

Definicija 4.2. *Fuzzy graf $\widetilde{G}$ grafa $G = (V, E)$ je uređena trojka (G, σ, μ) gdje su $\sigma : V \to [0, 1]$ i $\mu : E \to [0, 1]$ preslikavanja takva da je $\mu(uv) \leq min\{\sigma(u), \sigma(v)\}, \forall u, v \in V$. Funkcija σ, odnosno μ nazivaju se funkcije pripadnosti vrhova, odnosno bridova.*

Funkcija μ definirana je kao broj manji ili jednak minimumu funkcija pripadnosti krajnjih vrhova tog brida. Zbog toga se ne može dogoditi situacija da je neki brid u fuzzy grafu $\widetilde{G}$, a jedan od njegovih krajnjih vrhova nije član skupa $V(\widetilde{G})$. Dakle, graf $\widetilde{G}$ je dobro definiran. Lako se vidi da se za $\sigma(v) \in \{0, 1\}, \forall v \in V$, fuzzy graf može poistovjetiti sa težinskim grafom kojem je težina svakog brida element iz intervala $[0, 1]$. U ovom radu, promatrat ću samo fuzzy grafove čija je funkcija pripadnosti vrhova konstanta i jednaka jedan. Naime, na temelju takvih fuzzy grafova definirat će se glavni pojam ovog rada, tolerancijski fuzzy grafovi.
U sljedećem primjeru ću pomoću fuzzy skupa zadanog u primjeru 4.1 konstruirati fuzzy graf.

Slika 4.1: Fuzzy grafovi

Primjer 4.2. *Neka je $V(G) = \{0, 1, 5, 10, 100, 500\}$ s definiranim preslikavanjem $\sigma : V \to [0, 1]$ kao u prethodnom primjeru. Uzmimo da je G potpuni graf s tim skupom vrhova. Kako su $\sigma(0) = 0$ i $\sigma(1) = 0$ iz definicije fuzzy grafa slijedi da je za $v_0 = 0$*

$$0 \leq \mu(v_0 v) \leq min\{\sigma(v_0), \sigma(v)\} = min\{0, \sigma(v)\} = 0, \forall v \in V,$$

tj. funkcija pripadnosti bridova poprima vrijednost 0 za svaki brid kojem je jedan od krajnjih vrhova jednak 0. Analogan zaključak slijedi i za svaki brid kojem je jedan od *krajnjih vrhova jednak* 1. *Iz definicije fuzzy grafa slijedi da bridovi nisu jedinstveni. Za isti skup vrhova* $V(G)$ *s pripadajućom funkcijom pripadnosti vrhova mogu se dobiti dva različita fuzzy grafa* $\widetilde{G_1}$ *i* $\widetilde{G_2}$. *Lijevi graf na slici 4.1 dobiven je tako da je* $\mu_1(e) = 0, \forall e \in E(G)$, *a desni tako da je* $\mu_2(uv) = min\{\sigma(u), \sigma(v)\}, \forall u, v \in V(G)$. *Dakle, u desnom grafu je na primjer* $\mu_2(10, 100) = min\{\sigma(10), \sigma(100)\} = min\{0.2, 0.95\} = 0.2$. *Zbog načina na koji su zadane funckije* μ_1 *i* μ_2 *slijedi da je vrh* 500 *jedini vrh koji je potpuni član skupa* $V(\widetilde{G_1})$, *odnosno, skupa* $V(\widetilde{G_2})$. *Nijedan brid nije potpuni član skupa* $E(\widetilde{G_1})$, *odnosno* $E(\widetilde{G_2})$. *Štoviše, nijedan brid nije ni fuzzy član skupa* $E(\widetilde{G_1})$, *tj. taj skup je prazan.*

Poglavlje 5

Tolerancijski fuzzy grafovi

Nakon razumijevanja pojmova intervalnih i fuzzy grafova može se uvesti glavna tema rada. Definicija preuzeta iz [1], bazira se na Zadehovoj definiciji fuzzy skupa.

Definicija 5.1. *Neka je $G = (V, E)$ intervalni graf i neka je $\{t_v \in \mathbb{R}^+ | v \in V\}$ skup tolerancija tog grafa. Nadalje, neka je $\varphi_v : \mathbb{R}^+ \to [0,1], v \in V$ rastuća funkcija za koju je $\varphi_v(0) = 0, v \in V$ i neka je $\widetilde{G} = (G, 1, \mu)$ njegov pripadni fuzzy graf za kojeg je*

$$\mu(uv) = \begin{cases} \varphi_u\left(|I_u \cap I_v|\right), & t_u \leq t_v \\ \varphi_v\left(|I_u \cap I_v|\right), & t_v < t_u \end{cases}.$$

Neka je $G^* = (V, E^*)$ slučajan graf gdje je $E^* \subseteq E$ takav da se brid $e \in E^*$ pojavljuje s vjerojatnošću $\mu(e)$. Kako graf G^* nije jedinstven, tolerancijskim fuzzy grafom smatramo familiju svih takvih G^* podskupova od G.

U ovoj definiciji funkcija pripadnosti vrhova je konstanta i jednaka jedan. Kao i kod definicije fuzzy grafa, tolerancijske fuzzy grafove možemo promatrati kao težinske grafove kojem je težina svakog brida između 0 i 1. Za lakše razumijevanje definicije iskoristit ću graf iz primjera 3.1, sa tolerancijama zadanim u primjeru 3.2 te ću definirati nekoliko njemu pripadnih tolerancijskih fuzzy grafova.

Primjer 5.1. *Uzmimo graf G definiran u primjeru 3.2 s pripadnim tolerancijama. Ako pretpostavimo da je $\varphi_u = \varphi_v$, $\forall u, v \in V$, tada pripadni fuzzy graf $\widetilde{G} = (G, 1, \mu)$ ovisi o izboru funkcije $\mu(uv) = \varphi\left(|I_u \cap I_v|\right)$. Kako je slika od μ između 0 i 1, možemo definirati $\mu(uv) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(|I_u \cap I_v|\right)$, $u, v \in \{a, b, c, d, e\}$. Iz definicije funkcije pripadnosti bridova je $\mu(ab) = \frac{2}{\pi}\arctan(1) = \frac{1}{2}$, to jest, brid između vrhova a i b će se u pripadnom tolernacijskom fuzzy grafu pojavljivati sa vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Analogno se izračuna vjerojatnost* *pojavljivanja preostalih bridova. Očito je da je graf G sam sebi i pripadni tolerancijski fuzzy graf, no isto tako pripadni G^* je i graf kojem je skup vrhova $V(G^*) = \{a, b, c, d, e\}$, a skup bridova $E(G^*) = \{ae, bd\}$. Kako oni imaju različit broj bridova, slijedi da su ta dva grafa različita iako im je funkcija pripadnosti jednaka i dobiveni su iz istih intervala. Zbog toga ima smisla tolerancijski fuzzy graf promatrati kao familiju grafova G^*.*

Tolerancijski fuzzy grafovi su podgrafovi intervalnih grafova definirani pomoću fuzzy grafova. No, sam tolerancijski fuzzy graf G^* u familiji tolerancijskih fuzzy podskupova od G je poseban slučaj fuzzy grafa kojem su svi vrhovi i bridovi potpuni članovi grafa G^*. Također, graf G^* nije nužno tolerancijski graf. Naime, u [2] iskazan je i dokazan sljedeći teorem.

Teorem 5.2. *Tolerancijski graf je savršen graf.*

Sad ću pokazati da tolerancijski fuzzy graf nije nužno savršen.

Lema 5.3. *Tolerancijski fuzzy graf nije savršen.*

Dokaz. Neka je $G(V, E)$ potpuni graf sa 5 vrhova $\{a, b, c, d, e\}$ i $\mu(e) \in < 0, 1 >, \forall e \in E$. Nadalje, definiramo G^* tako da je skup bridova jednak $\{ab, bc, cd, de, ea\}$. Najveća klika grafa G^* je podgraf od 2 susjedna vrha, no kromatski broj grafa je 3 jer je G^* neparan ciklus. Dakle, pronašli smo tolerancijski fuzzy graf G^* koji nije savršen graf. Iz toga slijedi da tolerancijski fuzzy graf nije savršen. □

Zbog teorema 5.2 je svaki tolerancijski graf savršen, a iz prethodne leme slijedi da tolerancijski fuzzy graf nije savršen. Iz tih dviju činjenica možemo zaključiti da tolerancijski fuzzy grafovi nisu poseban slučaj tolerancijskih grafova. Dalje ću u ovom poglavlju navesti primjenu tolerancijskih fuzzy grafova.

5.1 Primjena tolerancijskih fuzzy grafova na modeliranje širenja bolesti zrakom

U ovom potpoglavlju ću pojasniti na koji način se tolerancijski fuzzy grafovi primijenjuju kako bi se simuliralo širenje bolesti zrakom.

Pretpostavimo da se bolest širi zrakom s vjerojatnošću p ako su dvije osobe u kontaktu t ili više minuta. No, vjerojatnost zaraze je manja ako su osobe u kontaktu manje od t

minuta. Dakle, postoji rastuća funkcija $\mu : \mathbb{R}^+ \to [0, p]$ takva da je slika od $x \in \mathbb{R}^+$ jednaka vjerojatnosti širenja bolesti nakon x minuta kontakta. Budući da je p vjerojatnost slijedi da je $p \in [0, 1]$. Sada je vidljivo da je moguće konstruirati tolerancijski fuzzy graf G^* kojem svaki vrh i predstavlja interval koji je osoba i provela na mjestu gdje se može zaraziti. Funkcija pripadnosti bridova je funkcija μ. Nadalje, u tom grafu označimo sa S skup svih vrhova koji predstavljaju zaraženu osobu i označimo sa $N_{G^*}(v)$ skup svih vrhova susjednih vrhu $v \in V$ u grafu G^*. Broj novo zaraženih se dobiva kao

$$\left| \bigcup_{v \in S} N_{G^*}(v) \setminus S \right|$$

, gdje je $N_{G^*}(v)$ skup susjednih vrhova od v u grafu G^*.
Kako bih simulirala prenošenje neke bolesti zrakom, gdje je poznat postotak zaraznosti, koristit ću programski jezik *Python* ([6]), čiji kod stavljam u nastavku.

Primjer 5.4. *Za neku bolest procijenjeno je da je mogućnost zaraze zdrave osobe jednaka* 45% *ako je ona u kontaktu sa zaraženom osobom* 15 *ili više minuta. Također, možemo procijeniti da je mogućnost zaraze nakon s minuta jednaka $3 \cdot s \cdot 10^{-2}$, gdje je s manje od* 15. *Pretpostavimo sada da neku ambulantu, koja radi* 12 *sati ili* 720 *minuta dnevno, svaki dan posjeti* 100 *ljudi i svatko po* 30 *minuta. Kako bi simulirali širenje bolesti u jednom danu definirat ću tolerancijski fuzzy graf $\widetilde{G}$. Neka je I_i vremenski interval koji je osoba i provela u ambulanti te neka su $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ vrhovi intervalnog grafa gdje je v_i pridružen intervalu $I_i, \forall i \in [1, 100]$. Njemu pripadni tolerancijski fuzzy graf definiramo pomoću funkcije pripadnosti bridova na sljedeći način:*

$$\mu(v_i v_j) = \begin{cases} 3 \cdot |I_i \cap I_j| \cdot 10^{-2}, & |I_i \cap I_j| < 15 \\ 0.45, & |I_i \cap I_j| \geq 15 \end{cases}$$

U ovoj simulaciji intervali u kojem su pacijenti posjećivali ambulantu bit će odabrani na slučajan način. Generirat ću 100 *slučajnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ koji će predstavljati vrijeme dolaska pacijenta u minutama nakon otvaranja ambulante za taj dan. Pacijent i je boravio u ambulanti u intervalu $[x_i, x_i + 30], \forall i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$. Nakon toga, u tolerancijskom grafu G postojat će brid uv ako i samo ako je razlika između vremena doslaska osobe u i osobe v manje od* 30 *minuta, to jest ako su osoba u i osoba v boravile u ambulanti u isto vrijeme. Dobiveni graf G u ovom slučaju ima* 100 *vrhova i* 412 *bridova. Nakon konstruiranja intervalnog grafa, pomoću grafa G i funkcije pripadnosti konstruiram tolerancijske fuzzy grafove $G_1^*, G_2^*, \ldots, G_{10}^*$. Također, zarazni pacijenti su nasumično odabrani* *u svakom od grafova* $G_i^*, i = 1, 2, \dots, 10$ *i označimo sa* $S_i, i = 1, 2, \dots, 10$ *skup od* 5 *vrhova koji predstavljaju osobe koje su zaražene ušle u ambulantu. Vrhove koje promatramo biramo nasumično jer ne znamo koje osobe prenose bolest zrakom. Kada bi to bila poznata činjenica, tih* 5 *vrhova bi se odredilo u grafu* G, *prije kreiranja tolerancijskih fuzzy grafova i skup vrhova koji predstavljaju zarazne osobe* S *bi bio isti za svaki tolerancijski fuzzy graf* $G_i^*, i = 1, 2, \dots, 10$. *Dalje, kako se bolest prenosi zrakom, zarazan pacijent može zaraziti zdravog samo ako se u isto vrijeme nalaze u prostoriji. Pretpostavimo da novo zaražena osoba ne može prenijeti bolest. Sada je broj novo zaraženih na kraju dana dobiven kao broj susjednih vrhova zaraženih pacijenata u svakom od grafova* G_i^*. *Prosječan broj novo zaraženih je*

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} \left| \bigcup_{v \in S} N_{G_i^*}(v) \setminus S_i \right|}{10}$$

U tablici 5.1 prikazani su podatci dobiveni nakon 10 *simulacija širenja bolesti na istom grafu* G, *to jest sa istim intervalima kad su pacijenti bili u ambulanti, no sa različito odabranim zaraženim osobama. Prosječan broj novo zaraženih osoba na kraju radnog dana ambulante je* 15.9 *od* 100 *ukupnih pacijenata.*

graf	broj bridova	broj novo zaraženih osoba
G_1^*	156	9
G_2^*	149	15
G_3^*	136	17
G_4^*	134	29
G_5^*	136	11
G_6^*	146	20
G_7^*	164	15
G_8^*	136	12
G_9^*	152	14
G_{10}^*	158	17
Prosječan broj novo zaraženih		15.9

Tablica 5.1: Broj novo zaraženih osoba

Broj novo zaraženih osoba ovisi o izboru vrhova čije susjede gledamo. Uzmemo li na prethodnom primjeru da su zaraženi pacijenti zadnjh 5 koji su posjetili ambulantu, broj novo zaraženih će biti znatno manji od prosječnog slučaja. Isto tako, uzmemo li drugi broj osoba koje prenose zarazu dobit ćemo druge rezultate. U stvarnom svijetu rijetko ćemo pronaći slučaj gdje se svaka osoba u ambulanti nalazila točno 30 minuta, no u primjeni tolerancijskih fuzzy grafova i takav se slučaj lako opiše jer tolerancijski grafovi ne ograničavaju duljinu intervala koji predstavlja vrh. U nastavku navodim izrađeni kod u *Pythonu*.

```
import random
class IntervalniGraf:
    def __init__(self, L):
        self.vrhovi=L
        bridovi=[]
        for i in range(0,len(L)):
            for j in range(i+1,len(L)):
                if abs(L[i]-L[j])<30:
                    bridovi.append((L[i],L[j]))
        self.bridovi=bridovi

class FuzzyGraf:
    def __init__(self, G):
        self.vrhovi=G.vrhovi
        bridovi=[]
        for i in range(0,len(G.bridovi)):
            x=int(f(G.bridovi[i])*100)
            if random.randint(0,100)<=x:
                bridovi.append(G.bridovi[i])
        self.bridovi=bridovi

def susjedi(G, v):
    N=[]
    for i in G.bridovi:
        if i[0]==v:
            N.append(i[1])
```

```
        elif i[1]==v:
            N.append(i[0])
    return N

def f(E):
    x=abs(E[0]-E[1])
    if x>=15:
        return 0.45
    else:
        return (3*x)/100

mog=range(0,690)
L=[]
for i in range(0,100):
    L.append(random.choice(mog))
L.sort()
G=IntervalniGraf(L)
print("Broj bridova u grafu G: ", len(G.bridovi))
for k in range(0,10):
    H=FuzzyGraf(G)
    print("Broj bridova u H je ", len(H.bridovi))
    Zarazeni=[]
    for i in range(0,5):
        Zarazeni.append(H.vrhovi[random.choice(range(0,len(H.vrhovi)))])
    zarazeni=0
    for i in Zarazeni:
        zarazeni=zarazeni+len(susjedi(H,i))
        zarazeni=zarazeni
    print("Broj novo zarezenih je ",zarazeni, "\n")
```

Poglavlje 6

Zaključak

Glavna tema ovog rada jesu tolerancijski fuzzy grafovi. Za njihovo uvođenje najprije sam uvela pojam intervalnog grafa pa tolerancijskog grafa kao poopćenje intevralnog grafa. Nakon toga definirala sam fuzzy skupove i fuzzy grafove dobivene pomoću funkcija pripadnosti. Sljedeće sam definirala tolerancijski fuzzy graf kao familiju podgrafova tolerancijskog grafa. U tim se podgrafovima bridovi pojavljuju sa nekom slučajnosti, koja ovisi o funkcji pripadnosti definiranoj kod fuzzy grafova.

Ovo je područje teorije grafova za koje nema mnogo dostupne literature na hrvatskom jeziku. Ova bi se tema trebala više istražiti zbog vrlo velike primjene. Tolerancijski fuzzy grafovi primijenjuju se za određivanje očekivanog broja zaraženih osoba kad je poznata zaraznost bolesti i interval u kojem se osoba susrela sa zaraženom. Za razliku od intervalnih i tolerancijskih grafova, tolerancijski fuzzy grafovi primjenjivi su i za probleme stvarnog svijeta, gdje tolerancija intervala nije konstantna i raste s duljinom presjeka dva intervala.

Ljudima je teško shvatljivo da je neki brid ili vrh fuzzy član skupa bridova, odnosno vrhova fuzzy grafa. S druge strane, tolerancijski fuzzy graf predstavlja familiju podskupova tolerancijskog grafa u kojem je svaki brid i vrh potpuni član pripadnog podgrafa. Taj se brid ili vrh u toj familiji pojavljuje sa vjerojatnosti p. Ovo je puno prirodniji način gledanja na vjerojatnosti.

Popis slika

Popis tablica

Bibliografija

[1] Crnković, D. - Švob, A: *Tolerance fuzzy graphs*, J.Intell.Fuzzy Systems 45 (2023), 4023-4029.

[2] Golumbic, M.C. - Monma, C.L. - Trotter, W.T.: *Tolerance Graphs*, Elsevier Science Publishers B.V.(North-Holland), Discrete Applied Mathematics 9 (1984), 157-170.

[3] Golumbic, M.C. - Trenk, A.N.: *Tolerance graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[4] Veljan, D.: *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[5] Zadeh, L. A.: *Fuzzy sets*, Information and Control 8(1965), 338-353.

[6] Python, https://www.python.org/, 17.5.2024.