Distancijski regularni grafovi

Sakač, Patricija

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Patricija Sakač

Distancijski regularni grafovi

Diplomski rad
Rijeka, rujan 2024.

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Patricija Sakač

Distancijski regularni grafovi

Mentor: doc. dr. sc. Nina Mostarac

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2024.

Sažetak

Ovaj rad obrađuje temu distancijski regularnih grafova. Na samom početku uvode se osnovni pojmovi teorije grafova te ponešto linearne algebre. Zatim se prelazi na glavni dio rada koji daje definiciju, svojstva i primjere distancijski regularnih grafova. Uvodi se pojam asocijacijske sheme kako bi se lakše došlo do odgovora na pitanje koje svojstvene vrijednosti ima distancijski regularan graf. Na kraju je poglavlje o nekim familijama takvih grafova s kratkim opisom i definicijama.

Ključne riječi

Graf, svojstvena vrijednost, distancijski regularan graf, intersekcijski niz, asocijacijska shema, jako regularan graf.

Sadržaj

1. Uvod

Pojam grafa koristi se u sve više grana znanosti te ima široku primjenu. Grafovi svoju primjenu pronalaze u raznim područjima poput računalne znanosti, matematike, operacijskih istraživanja, sociologije, biologije i mnogih drugih. Imaju veliku važnost za inovacijske tehnologije kod transportnih sustava i ostalih sustava s kompleksnim poveznicama.

Tema rada pripada području teorije grafova. Teorija grafova je grana matematike čiji je glavni pojam graf, ispituje njegova svojstva, vrste, algoritme povezane s grafovima i još mnogo toga. Osnovni pojmovi koji su vezani uz graf su brid, vrh, susjednost, povezanost,… Više o tome bit će u poglavlju *Osnovni pojmovi.*

Distancijski regularne grafove uveo je N. L. Biggs početkom 1970-tih. To su grafovi koji sadrže puno simetrije. Za proizvoljan uređeni par vrhova distancijski regularnog grafa na međusobnoj udaljenosti i, broj vrhova koji su na udaljenosti j od prvog vrha te na udaljenosti k od drugog vrha je konstantan i ovisi samo o i, j i k, a ne o izabranom paru vrhova. Poznati primjeri su Hammingovi i Johnsonovi grafovi. U trećem poglavlju detaljnije ćemo se baviti distancijski regularnim grafovima. Bit će dani neki jednostavni primjeri takvih grafova. Nakon toga uvest će se pojam spektra grafa, koji je definiran kao spektar njemu pripadne matrice susjedstva. Kako bi se odredile svojstvene vrijednosti distancijski regularnog grafa, obrađuje se pojam asocijacijske sheme, budući da relacije udaljenosti distancijski regularnog grafa dijametra d čine asocijacijsku shemu s d klasa. Zatim slijede primjeri nekih familija distancijski regularnih grafova. Među zanimljivijim familijama su jako regularni grafovi, Johnsonovi, Hammingovi i Grassmannovi grafovi.

2. Osnovni pojmovi

Potrebno je uvesti osnovne pojmove za lakše razumijevanje nastavka rada.

Definicija 2.1. *Graf je uređena trojka* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *gdje je:*

- $V(G) \neq \emptyset$ ***skup vrhova*** *od* G,
- $E(G)$ ***skup bridova*** *od* G, *disjunktan s* $V(G)$,
- ψ_G ***funkcija incidencije*** *koja svakom bridu grafa* G *pridružuje neuređeni par, ne nužno različitih, vrhova od* G *(tj. dvočlani multiskup vrhova grafa* G*).*

Oznake koje se koriste za broj vrhova i bridova grafa G *su* $\nu(G) = |V(G)|$ *i* $\varepsilon(G) = |E(G)|$.

Definicija 2.2. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf. Vrhovi* u *i* v *grafa* G *su* ***susjedni*** *ako postoji brid* $e \in E(G)$ *takav da je* $\psi_G(e) = \{u, v\}$ *(tj.* $\psi_G(e) = uv$*). Vrhove* u *i* v *tada zovemo* ***krajevima brida*** *e i kažemo da je brid e* ***incidentan*** *s vrhovima* u *i* v.

Dva su brida grafa susjedna ako imaju barem jedan zajednički kraj.

Definicija 2.3. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf.* ***Karika*** *ili* ***pravi brid*** *je brid s različitim krajevima.* ***Petlja*** *je brid incidentan samo s jednim vrhom. Dva ili više bridova s istim parom krajeva zovu se* ***višestruki bridovi****.*

Definicija 2.4. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf. Graf G je* ***jednostavan*** *ako je bez petlji i višestrukih bridova.* ***Prazan graf*** *ili* ***nul-graf*** *je graf G za koji je* $E(G) = \emptyset$, *a označava se s* N_ν. ***Trivijalan graf*** *je graf samo s jedinim vrhom.*

Definicija 2.5. ***Stupanj ili valencija vrha*** $v \in V(G)$ *je broj bridova incidentnih s njim, pri čemu po dogovoru svaku petlju u vrhu računamo kao dva brida incidentna s njim. Označavamo ga s* $d_G(v)$ *ili samo* $d(v)$. *Ako je* $d(v) = 0$, *tada je vrh* v *izoliran. Ako je* $d(v) = 1$, *tada je* v *list.*

Oznake za maksimalan i minimalan stupanj vrhova grafa su $\Delta G = \max\{d(v); v \in V(G)\}$, $\delta(G) = \min\{d(v); v \in V(G)\}$.

Definicija 2.6. ***Potpun graf*** *je jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova susjedan. Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf. Tada se potpun graf G označava s* K_n, *gdje je* $n = |V(G)|$ **.**

Definicija 2.7. *Graf je* ***regularan*** *ako su mu svi vrhovi istog stupnja. Graf je* ***k-regularan*** *ili* ***regularan stupnja k*** *ako je regularan s vrhovima stupnja* k.

Definicija 2.8. *Graf je **bipartitan** ako se skup vrhova može particionirati u dva disjunktna podskupa X i Y tako da vrhovi iz istog podskupa nisu međusobno susjedni, tj. tako da svaki brid ima jedan kraj u skupu X, a drugi u Y. Particiju (X, Y) skupa vrhova zovemo **biparticijom grafa**.*

Definicija 2.9. ***Potpun bipartitan graf*** *je jednostavan bipartitan graf, s biparticijom (X, Y) u kojem je svaki vrh iz X susjedan sa svakim vrhom iz Y. Označava se s $K_{m,n}$, gdje je $m \leq n, |X| = m, |Y| = n$.*

Definicija 2.10. *Graf je **r-partitan** ($r \geq 1$) ako se skup vrhova može podijeliti u r disjunktnih podskupova tako da vrhovi iz istog podskupa nisu međusobno susjedni.*

Definicija 2.11. ***Potpun r-partitan graf*** *je jednostavan r-partitan u kojem je svaki vrh susjedan sa svakim vrhom koji nije u istom podskupu r-particije.*

Definicija 2.12. ***Komplementaran graf*** *grafa $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ je jednostavan graf s istim skupom vrhova u kojem su dva vrha susjedna ako i samo ako nisu susjedni u G. Označava se s G^C ili $\bar{G}$.*

Definicija 2.13. *Graf $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ je podgraf grafa $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ ako je*

$$V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G),\ \psi_H = \psi_G|_{E(H)}.$$

U tom slučaju koristimo oznaku $H \subseteq G$.

Definicija 2.14. *Neka su $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ i $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ grafovi. Kažemo da su grafovi G i H **izomorfni** ako postoje bijekcije $\Theta: V(G) \longrightarrow V(H)$ i $\Phi: E(G) \longrightarrow E(H)$ takve da je očuvana relacija incidencije, tj. takve da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je $\Theta(v)$ incidentan s $\Phi(e)$ u H.*

*Uređeni par (Θ, ϕ) zove se **izomorfizam** sa G u H.*

Oznaka za izomorfizam grafa G i H je $G \approx H$.

Definicija 2.15. *Izomorfizam grafa na samog sebe zove se **automorfizam**.*

Lema 2.1. *(Lema o rukovanju) U svakom grafu je zbroj stupnjeva svih vrhova paran broj te je jednak:*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon.$$

Definicija 2.16. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf te neka je* $V(G) = \{v_1, \dots, v_\upsilon\}$ *i* $E(G) = \{e_1, \dots, e_\varepsilon\}$. ***Matrica incidencije*** *grafa* G *je* $\upsilon \times \varepsilon$ *matrica* $M(G) = [m_{i,j}]$, *gdje je* $m_{i,j} \in \{0,1,2\}$ *broj koji označuje koliko su puta vrh* v_i *i brid* e_j *incidentni* ($m_{i,j} = 2$ *ako je* e_j *petlja u* v_i). ***Matrica susjedstva*** *grafa* G *je* $\upsilon \times \upsilon$ *matrica* $A(G) = [a_{i,j}]$, *gdje je* $a_{i,j} \in \mathbb{N}_0$ *broj bridova čiji su krajevi* v_i *i* v_j.

Definicija 2.17. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf te neka je* $V(G) = \{v_1, \dots, v_\upsilon\}$ *i* $E(G) = \{e_1, \dots, e_\varepsilon\}$. ***Šetnja*** *u grafu* G *je konačan niz* $w = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ *čiji su članovi naizmjence vrhovi* v_j *i bridovi* e_i *od* G, *gdje su krajevi brida* e_i *vrhovi* v_{i-1} *i* v_i, $i = 1, \dots, k, k \leq \nu$.

Kažemo da je w *šetnja od* v_0 *do* v_k *ili* (v_0, v_k)*-šetnja, a broj* k *duljina šetnje. Šetnja je zatvorena ako je* $v_0 = v_k$.

Definicija 2.18. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf.* ***Staza*** *u grafu* G *je šetnja u kojoj su svi bridovi međusobno različiti (vrhovi se mogu ponavljati).*

Definicija 2.19. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf.* ***Put*** *u grafu* G *je staza u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti. Put s* n *vrhova označavat ćemo s* P_n.

Definicija 2.20. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf.* ***Ciklus*** *u grafu* G *je zatvorena šetnja u kojoj su svi vrhovi osim prvog i zadnjeg različiti. Ciklus s* n *vrhova označavat ćemo s* C_n.

Definicija 2.21. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf. Dva su vrha grafa* G **povezana** *u* G *ako u grafu* G *postoji put između njih. Graf* G *je* **povezan** *ako su svaka dva njegova vrha povezana putem.*

Definicija 2.22. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf.* ***Komponenta povezanosti*** *grafa* G *je maksimalan povezan podgraf. Broj komponenti povezanosti označavamo s* $w(G)$.

Za povezan graf je $w(G) = 1$. **Nepovezan graf** je unija povezanih grafova.

Definicija 2.23. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf.* ***Udaljenost*** *dva vrha* u *i* v *u grafu* G, *u oznaci* $d_G(u, v)$ *je duljina najkraćeg puta između njih. Ako nisu povezani onda je* $d_G(u, v) = \infty$.

Definicija 2.24. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf.* ***Dijametar*** *grafa* G *je najveća udaljenost dva vrha u grafu, tj. :*

$$diam(G) = \max\{d_G(u, v); u, v \in V(G)\}.$$

Definicija 2.25. *Neka je* $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ *graf.* ***Radijus*** *grafa* G *je minimalni ekscentricitet vrha iz* G*, tj. :*

$$r(G) = min_{v \in V(G)}\{max_{u \in V(G)} d_G(u, v)\},$$

gdje je $e(v) = max_{u \in V(G)} d_G(u, v)$ *ekscentricitet vrha* v.

U nastavku rada promatrat ćemo jednostavne grafove.

3. Distancijski regularni grafovi

U ovom poglavlju bit će opisani distancijski regularni grafovi i njihova osnovna svojstva te njima pridružene svojstvene vrijednosti.

3.1. Definicija

Navedimo glavnu definiciju rada, definiciju distancijski regularnih grafova. Prije toga potrebno je još uvesti definiciju sfere grafa oko nekog vrha.

Definicija 3.1.1. *Neka je $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ graf. Skup svih vrhova grafa G koji su od vrha $v \in V(G)$ udaljeni za i naziva se **i −sfera** grafa G oko vrha v i označava se s $G_i(v)$.*

Napomena 3.1.1. Neka je G povezan graf dijametra d. Tada i-sfere oko vrha γ grafa G, za $i = 0, \ldots, d$, daju particiju skupa vrhova od G:

$$X = G_0(\gamma) \cup G_1(\gamma) \cup \ldots \cup G_d(\gamma).$$

Primijetimo da je $G_0(\gamma) = \{\gamma\}$ te da je $G_1(\gamma)$ skup svih susjeda vrha γ u G.

Definicija 3.1.2. *Neka je $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ povezan graf te neka je $V(G) = \{v_1, \ldots, v_\upsilon\}$ i $E(G) = \{e_1, \ldots, e_\varepsilon\}$. Za povezan graf G kažemo da je **distancijski regularan graf** ako za bilo koja dva vrha γ i δ grafa G na udaljenosti $i = d_G(\gamma, \delta)$, vrijedi da:*

- *postoji točno c_i susjeda od δ u $G_{i-1}(\gamma)$,*
- *postoji točno b_i susjeda od δ u $G_{i+1}(\gamma)$.*

Napomena 3.1.2. Iz definicije distancijski regularnog grafa slijedi da je takav graf regularan graf, stupnja regularnosti $k = b_0$. Naime, za vrhove γ i δ distancijski regularnog grafa G na udaljenosti 0, odnosno za $\gamma = \delta$, vrijedi da je broj b_0 jednak broju susjeda od δ u $G_1(\delta)$. Slijedi da je b_0 jednak ukupnom broju susjeda od δ u grafu G, tj. stupnju vrha δ, za proizvoljan vrh $\delta \in V(G)$. Zaključujemo da je G regularan graf sa stupnjem regularnosti $k = b_0$.

Definicija 3.1.3. *Neka je $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ distancijski regularni graf. Niz*

$$\iota(G) = \{b_0, b_1, \ldots b_{diam(G)-1};\ c_1, c_2, \ldots, c_{diam(G)}\}$$

*zove se **intersekcijski niz** grafa G.*

Vrijednosti c_i, b_i, a_i gdje je

$$a_i = k - b_i - c_i, za\ i = 0, \dots, diam(G),$$

broj susjeda od δ u $G_i(\gamma)$, za $i = d_G(\gamma, \delta)$, zovu se ***intersekcijski brojevi*** *od G.*

Napomena 3.1.3. Uočimo da za vrhove $\gamma\ i\ \delta$ distancijski regularnog grafa G koji su na udaljenosti i, svaki od k susjeda od δ može biti udaljen od γ jedino za $i-1$, i ili $i+1$. Dakle, zaista je:

$$k = |G_1(\delta) \cap G_{i-1}(\gamma)| + |G_1(\delta) \cap G_i(\gamma)| + |G_1(\delta) \cap G_{i+1}(\gamma)| = c_i + a_i + b_i.$$

Važno je za napomenuti kako vrijednosti $c_i = |G_1(\delta) \cap G_{i-1}(\gamma)|$ i $b_i = |G_1(\delta) \cap G_{i+1}(\gamma)|$ ne ovise o izboru vrhova γ i δ već samo o udaljenosti i između γ i δ , $i = 0, \dots, diam(G)$.

Štoviše, za distancijski regularan graf G vrijedi da broj $\left|G_i(\gamma) \cap G_j(\delta)\right|$, odnosno broj vrhova grafa G koji su na udaljenosti i od γ te na udaljenosti j od δ, ovisi samo o indeksima i, j te o međusobnoj udaljenosti vrhova $\gamma\ i\ \delta$, a ne ovisi o izboru vrhova $\gamma\ i\ \delta$ grafa G.

Dakle, brojevi $p_{i,j}^k = |G_i(\gamma) \cap G_j(\delta)|$, za γ i δ na udaljenosti k, ne ovise o izboru vrhova γ i δ. Za intersekcijske brojeve distancijski regularnog grafa G i ovako definirane brojeve $p_{i,j}^k$ vrijedi:

$$a_i = p_{i,1}^i,\ b_i = p_{i+1,1}^i,\ c_i = p_{i-1,1}^i.$$

Zbog jednostavnosti, u nastavku koristimo oznaku $diam(G) = d$.

Napomena 3.1.4. Uočimo što još slijedi iz definicije 3.1.2.

Neka je G distancijski regularan graf, te neka su γ i δ vrhovi grafa na udaljenosti 0. Dakle, $\gamma = \delta$.

Kako je c_0 broj susjeda od δ u $G_{-1}(\delta)$ te vrhovi ne mogu biti na udaljenosti koja je jednaka negativnoj vrijednosti, vrijedi da je $c_0 = 0$.

Neka je G distancijski regularan graf te neka su sada γ i δ vrhovi grafa G na udaljenosti 1. Kako je c_1 broj susjeda od δ u $G_0(\gamma)$ te je $G_0(\gamma) = \{\gamma\}$, vrijedi da je $c_1 = 1$.

Neka je G distancijski regularan graf te neka su γ i δ vrhovi grafa G na udaljenosti d. Intersekcijski broj b_d jednak je broju susjeda od δ u $G_{d+1}(\gamma)$. Skup $G_{d+1}(\gamma)$ je skup vrhova na udaljenosti $d+1$ od γ, a kako je d dijametar grafa, tada je $b_d = 0$.

Navedimo i dokažimo propoziciju o nekim svojstvima intersekcijskih brojeva distancijski regularnih grafova.

Propozicija 3.1.1. *Za distancijski regularni graf G dijametra d i stupnja regularnosti k vrijedi:*

i. $k = b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{d-1} > b_d = 0$ *i* $1 = c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_d \leq k$,
ii. *Ako je* $i + j \leq d$ *tada je* $c_i \leq b_j$.

Dokaz.

Pokažimo prvu tvrdnju propozicije.

Neka su γ i δ vrhovi grafa G takvi da je $\delta \in G_{i+1}(\gamma)$, gdje je $i \in \{0, \dots, d-1\}$ te neka je $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{i+1} = \delta$ put duljine $i + 1$ između njih u grafu G. Vrijednost b_i je broj susjeda od γ_{i+1} u $\mathrm{G}_{i+1}(\gamma_1)$ jer su γ_1 i γ_{i+1} na udaljenosti i. Odnosno bit će $b_i = |G_{i+1}(\gamma_1) \cap G_1(\gamma_{i+1})|$. Vrijednost b_{i+1} je broj susjeda od γ_{i+1} u $\mathrm{G}_{i+2}(\gamma_0)$, jer su γ_0 i γ_{i+1} na udaljenosti $i + 1$. Stoga je $b_{i+1} = |G_{i+2}(\gamma_0) \cap G_1(\gamma_{i+1})|$.

Pretpostavimo da je $z \in G_{i+2}(\gamma_0) \cap G_1(\gamma_{i+1})$. Pošto je z susjed od γ_{i+1} te je $d(\gamma_0, z) = i + 2$, slijedi da je $z \in G_{i+1}(\gamma_1)$. Stoga slijedi da je $G_{i+2}(\gamma_0) \cap G_1(\gamma_{i+1}) \subseteq G_{i+1}(\gamma_1) \cap G_1(\gamma_{i+1})$. Zaključujemo da je $b_i \geq b_{i+1}$, $i \in \{0, \dots, d-1\}$.

Analogno se pokazuje da je $1 = c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_d \leq k$.

Pokažimo drugu tvrdnju propozicije.

Prebrojavanjem susjeda od γ_i na udaljenosti od $i - 1$ od γ_0 slijedi navedena tvrdnja.

$\square$

Neka su γ i δ vrhovi distancijski regularnog grafa G takvi da je $d(\gamma, \delta) = i$ te neka vrijednost k_i predstavlja broj elemenata u $\mathrm{G_i}(\gamma)$, tj. $k_i = |\,\mathrm{G_i}(\gamma)|$, za $i \in \{0, \dots, d\}$. Vrijedi da je $k_0 = 1, k_1 = k$. Sljedeća lema pokazuje kako rekurzivno odrediti k_i pomoću k_{i-1}, c_i i b_{i-1}.

Lema 3.1.1. *Neka je G distancijski regularan graf dijametra d, stupnja regularnosti k i intersekcijskog niza $\{b_0, b_1, \dots b_{d-1};\ c_1, c_2, \dots, c_d\}$. Tada vrijedi*

$$k_{i-1}b_{i-1} = c_i k_i, i \in \{1, \dots, d\}.$$

Dokaz.

Dokaz leme dajemo prebrojavanjem parova susjednih vrhova tako da je jedan vrh u $\mathrm{G_{i-1}}(\gamma)$, a drugi u $\mathrm{G_i}(\gamma)$, za neki vrh γ grafa G, $i \in \{1, \dots, d\}$.

Neka je γ vrh distancijski regularnog grafa G dijametra d i intersekcijskog niza $\{b_0, b_1, \dots b_{d-1};\ c_1, c_2, \dots, c_d\}$.

Znamo da je $k_{i-1} = |\,\mathrm{G_{i-1}}(\gamma)|$ te da je svaki vrh iz $\mathrm{G_{i-1}}(\gamma)$ susjedan s točno b_{i-1} vrhova iz $\mathrm{G_i}(\gamma)$. S druge strane, vrijedi da je $k_i = |\,\mathrm{G_i}(\gamma)|$ te je svaki vrh iz $\mathrm{G_i}(\gamma)$ susjedan s točno c_i vrhova iz $\mathrm{G_{i-1}}(\gamma)$. Dakle, vrijedi $k_{i-1}b_{i-1} = c_i k_i,\ i \in \{1, \dots, d\}$.

$\square$

Napomena 3.1.5. Primijetimo da je ukupan broj vrhova distancijski regularnog grafa dijametra d jednak:

$$v = 1 + k_1 + .. + k_d.$$

3.2. Primjeri

Navest ćemo nekoliko primjera distancijski regularnih grafova.

Neke klase distancijski regularnih grafova su potpuni grafovi K_n, potpuni bipartitni grafovi $K_{n,n}$, potpuni tripartitni grafovi $K_{n,n,n}$, ciklusi C_n, prazan graf, Hadammardovi grafovi, hiperkubni grafovi Q_n, Kneserovi grafovi $K(n,2)$ te neparni grafovi O_n.

U nastavku ćemo opisati nekoliko jednostavnih primjera.

Primjer 3.2.1. Kocka je primjer 3-regularnog grafa koji je također i distancijski regularan. Pokažimo da je to zaista tako određivanjem intersekcijskog niza kocke.

Označimo kocku kao graf G. Dijametar kocke je 3, tj. $d = 3$. Stoga, intersekcijski niz grafa G bit će oblika $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\}$. Odredimo intersekcijske brojeve.

$\underline{i = 0}$:

Vrh koji je na udaljenosti 0 od nekog drugog vrha je sam taj vrh . Susjedi vrha γ su α, δ i κ kao što je označeno na slici 1. Iz Napomene 3.1.2. i Napomene 3.1.4. slijedi da je $b_0 = 3$, $c_0 = 0$.

$\underline{i = 1}$:

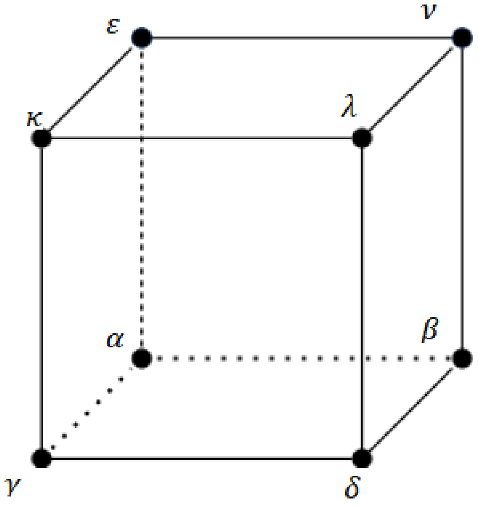
Neka su γ i δ vrhovi grafa G na udaljenosti 1. Vrijednost b_1 je broj susjeda od δ u $G_2(\gamma)$. Skup $G_2(\gamma)$={$\varepsilon, \beta, \lambda$}, gdje su ε, β i λ kao na slici 1. Stoga, $b_1 = 2$, budući da su samo dva vrha iz tog skupa susjedna s δ . Iz Napomene 3.1.4. slijedi da je $c_1 = 1$.

$\underline{i = 2:}$

Neka su γ i β vrhovi grafa na udaljenosti 2. Vrijednost b_2 je broj susjeda od β u $G_3(\gamma)$. Skup $G_3(\gamma)$={ν}. Stoga, $b_2 = 1$. Vrijednost c_2 je broj susjeda od β u $G_1(\gamma) = \{\alpha, \delta, \kappa\}$. Stoga je $c_2 = 2$.

$\underline{i = 3:}$

Neka su γ i ν vrhovi grafa na udaljenosti 3. Vrijednost c_3 je broj susjeda od ν u $G_2(\gamma) = \{\varepsilon, \beta, \lambda\}$. Stoga je $c_3 = 3$. Iz Napomene 3.1.4. slijedi da je $b_3 = 0$.



Slika 1. Kocka

Dakle, intersekcijski niz za kocku je {3,2,1; 1,2,3}.

Primjer 3.2.2. Ciklusi su primjeri distancijski regularnih grafova stupnja regularnosti 2. Ako ciklus ima paran broj vrhova tada će njegov intersekcijski niz biti oblika:

$$\{2,1,1, \dots ,1; 1,1, \dots ,2\}.$$

Ako ciklus ima neparan broj vrhova tada će njegov intersekcijski niz biti oblika:

$$\{2,1,1,\dots,1;1,1,\dots,1\}.$$

Naime, iz Napomene 3.1.2. i Napomene 3.1.4. slijedi da je $b_0 = 2$, $c_1 = 1$.

Neka je G ciklus s parnim brojem vrhova, te neka su γ i δ vrhovi na udaljenosti $i \geq 1$. Kako je graf G ciklus, te svaki vrh ima točno dva susjeda, postoji samo jedan susjed od δ na udaljenosti $i+1$ od γ, osim za $i = d$ kada ih je 0. Dakle, $b_i = 1$, za $1 \leq i \leq d-1$. Kako graf ima paran broj vrhova, susjeda od δ u dvočlanom skupu $G_{i-1}(\gamma)$ biti će 2 samo ako su γ i δ na maksimalnoj udaljenosti, tj. za $d(\gamma,\delta) = d$. Inače će biti točno jedan jer vrh na udaljenosti $i-1$ od γ koji je susjed od δ.

Analogni zaključci vrijede i za ciklus neparne duljine, osim što za $i = d$ tada postoji samo jedan susjed od δ na udaljenosti $d-1$ od γ, tj. u tom je slučaju $c_d = 1$.

Primjer 3.2.3. Petersonov graf je također distancijski regularan graf. To je 3-regularan graf prikazan na slici 2. Odredimo mu intersekcijski niz.

Označimo ga kao graf G. Dijametar grafa je 2, tj. $d = 2$. Stoga, intersekcijski niz grafa G bit će oblika $\{b_0, b_1; c_1, c_2\}$. Odredimo intersekcijske brojeve.

<u>$i = 0$:</u>

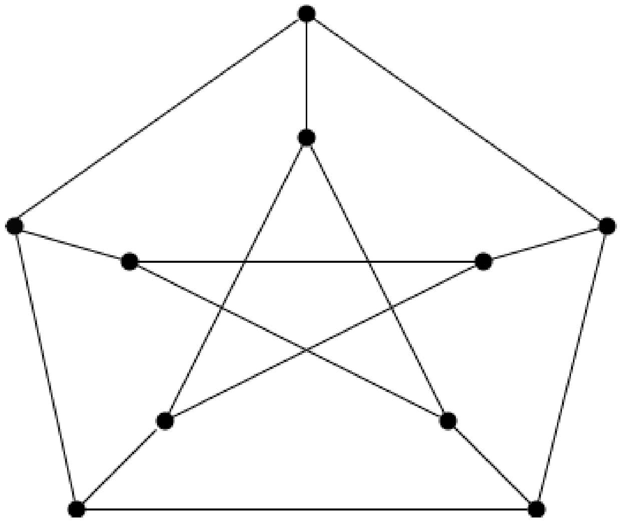
Iz Napomene 3.1.2. slijedi da je $b_0 = 3$, $c_0 = 0$.

<u>$i = 1$:</u>

Neka su γ i δ vrhovi grafa na udaljenosti 1. Vrijednost b_1 je broj susjeda od δ u $G_2(\gamma)$. Stoga, $b_1 = 2$, , budući da su preostala dva susjeda od δ, osim γ, oba na udaljenosti 2 od γ. Iz Napomene 3.1.4. slijedi da je $c_1 = 1$.

<u>$i = 2$:</u>

Neka su γ i μ vrhovi grafa na udaljenosti 2. Vrijednost c_2 je broj susjeda od μ u $G_1(\gamma)$, a takav je samo jedan. Stoga je $c_2 = 1$.



Slika 2. Petersonov graf

Dakle, intersekcijski niz Petersenovog grafa je $\{3,2;1,1\}$.

3.3. Asocijacijske sheme

U ovom potpoglavlju uvodimo asocijacijske sheme. One čine particiju potpunog grafa tako da blokovi particije čine regularne razapinjuće podgrafove koji su međusobno povezani određenim svojstvima.

Uvedimo definiciju asocijacijske sheme.

Definicija 3.3.1. *Neka je X konačan skup.* ***Asocijacijska shema*** *s d klasa je uređen par $(X,\mathcal{R})$ takav da je:*

- $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_d\}$ *particija od* $X \times X$,
- $R_0 = \Delta \coloneqq \{(x,x) | x \in X\}$,
- $R_i = R_i^T$, *tj.* $(x,y) \in R_i \Longrightarrow (y,x) \in R_i$ *za* $i \in \{0,\dots,d\}$,
- *postoje brojevi* p_{ij}^k *takvi da za svaki par* $(x,y) \in R_k$, *broj elemenata* $z \in X$, *za koje vrijedi da je* $(x,z) \in R_i$ *i* $(z,y) \in R_j$, *je jednak* p_{ij}^k.

Brojevi p_{ij}^k *zovu se* ***intersekcijski brojevi asocijacijske sheme*** $(X,\mathcal{R})$.

Uvodimo oznake $n_i = p_{ii}^0$. Vrijednost n_i za $z \in X$ se zove ***valencija relacije R_i*** *te za broj elemenata od X, n vrijedi*

$$n = |X| = \sum_{i=0}^{d} n_i.$$

Napomena 3.3.1. Uočimo $n_0 = 1$.

Napomena 3.3.2. Ako za distancijski regularan graf dijametra d uzmemo da je par $(\gamma, \delta) \in R_i$ ukoliko su vrhovi γ i δ grafa G na udaljenosti i, tada opisane relacije udaljenosti R_i ($i = 0, \ldots, d$) grafa G čine asocijacijsku shemu s d klasa. Naime, $R = \{R_0, .., R_d\}$ će particionirati $V(G) \times V(G)$, svaki vrh iz $V(G)$ će biti na udaljenosti nula jedino sam od sebe, sve relacije R_i će biti simetrične (ako je γ na udaljenosti i od δ, tada je i δ na udaljenosti i od γ). Također, postoje intersekcijski brojevi $p_{i,j}^k$ koji su u ovom slučaju jednaki:

$$p_{i,j}^k = |G_i(\gamma) \cap G_j(\delta)|,$$

za proizvoljne vrhove γ i δ grafa G na udaljenosti k.

Lema 3.3.1. *Parametri n_i i p_{ij}^k asocijacijske sheme s d klasa zadovoljavaju sljedeće:*

i. $p_{0j}^k = \delta_{jk}$,

ii. $p_{ij}^0 = \delta_{ij} n_j$,

iii. $p_{ij}^k = p_{ji}^k$,

iv. $p_{ij}^k n_k = p_{ik}^j n_j$,

v. $\sum_j p_{ij}^k = n_i$,

vi. $\sum_l p_{ij}^l p_{lk}^m = \sum_r p_{ir}^m p_{jk}^r$.

Napomena 3.3.3. U prethodnoj lemi δ_{ij} predstavlja Kroneckerov simbol koji se definira na sljedeći način:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

3.3.1. Bose-Mesner algebra

Bose-Mesner algebra je algebra koja se gradi iz matrica susjedstva relacija asocijacijske sheme. Njena primjena bit će u narednom poglavlju.

Definicija 3.3.1.1. *Skup $\mathcal{A}$ naziva se* ***algebra*** *(nad poljem $\mathbb{K}$) ako je $(\mathcal{A},+,\cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i ako je definirana operacija $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ za koju vrijedi sljedeće:*

- $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$, *za sve* $a, b, c \in A$
- $(a + b) \circ c = a \circ c + a \circ b$, *za sve* $a, b, c \in A$,
- $\alpha \cdot (a \circ b) = (\alpha \cdot a) \circ b = a \circ (\alpha \cdot b)$, *za sve* $a, b \in A$ *i* $\alpha \in \mathbb{K}$.

Neka je $(X, \mathcal{R})$ asocijacijska shema s d klasa takva da je $|X| = n$.

Svakoj relaciji R_i pridružena je matrica susjedstva A_i, za $i \in \{0, \dots, d\}$. Stoga, matrice susjedstva A_i definirane su kao:

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1, (x, y) \in R_i \\ 0, (x, y) \notin R_i \end{cases}.$$

Matrice A_i su simetrične $n \times n$ matrice.

Četiri svojstva iz definicije asocijacijske sheme mogu se u terminima matrica susjedstva A_i relacija R_i iskazati kao:

i. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
ii. $A_0 = I$,
iii. $A_i = A_i^T$,
iv. $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$.

Iz i. slijedi da su A_i, za $i \in \{0, \dots, d\}$, linearno nezavisne. Iz iii. i iv. slijedi da će one generirati $(d + 1) -$ dimenzionalnu komutativnu algebru simetričnih matrica. Ta algebra naziva se ***Bose-Mesner algebra sheme*** i označava s $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

Bose-Mesner algebra ima još jednu istaknutu bazu, koja se sastoji od simetričnih idempotentnih matrica, gdje se kvadratna matrica M naziva idempotentnom ako je $M = M^2$.

Ta baza sastoji se od u parovima ortogonalnih idempotentnih matrica $E_0, E_1, \dots, E_d$ za koje vrijedi:

i. $E_o = \frac{1}{n}J$,

ii. $\sum_{j=0}^{d} E_j = I$,

iii. $A_i E_j = P_{ji} E_j$, za neke parametre P_{ji},

iv. $r(E_j) = tr(E_j), j \in \{0,..,d\}$.

Iz i. i iii. slijedi da je

$$A_i = A_i I = A_i \sum_{j=0}^{d} E_j = \sum_{j=0}^{d} P_{ji} E_j.$$

Matrice $E_0, E_1, \dots, E_d$ nazivamo ***glavnim idempotentama od $\mathcal{B}$***.

Iz tvrdnje iii. također možemo zaključiti kako vrijednosti P_{ji} predstavljaju svojstvene vrijednosti matrice A_i, koje će biti svojstvene vrijednosti Bose-Mesner algebre.

Kako matrice $A_0, A_1, \dots, A_d$ čine bazu Bose-Mesnerove algebre, vrijedi da se matrice $E_0, E_1, \dots, E_d$ mogu prikazati kao

$$E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} Q_{ji} A_j.$$

Vrijednosti Q_{ij} nazivat ćemo dualnim svojstvenim vrijednostima Bose-Mesnerove algebre.

Definicija 3.3.1.2. *Matrica P definirana na sljedeći način*

$$(P)_{i,j} = P_{ij}$$

naziva se ***svojstvena matrica asocijacijske sheme****, a matrica Q definirana na način*

$$(Q)_{i,j} = Q_{ij},$$

zove se ***dualna svojstvena matrica asocijacijske sheme****.*

Vrijedit će $PQ = QP = nI$.

Ako se vrijednosti P_{ij} i Q_{ij} mogu prikazati kao vrijednosti polinoma u nekoj točki, tada se asocijacijska shema naziva P-polinomijalna asocijacijska shema, odnosno Q -polinomijalna asocijacijska shema. Uvedimo njenu definiciju.

Definicija 3.3.1.3. *Neka su P i Q svojstvene matrice asocijacijske sheme s d klasa. Shema se naziva* ***P-polinomijalna shema*** *ako postoje polinomi p_k stupnja k s realnim koeficijentima i realni brojevi $z_0, .., z_d$ takvi da vrijedi $P_{ik} = p_k(z_i)$, za $0 \leq i, k \leq d$. Analogno tome, shema je*

***Q*-polinomijalna** ako postoje polinomi q_k stupnja k s realnim koeficijentima i realni brojevi $z_0, \ldots, z_d$ takvi da vrijedi $Q_{ik} = q_k(z_i)$, za $0 \leq i, k \leq d$.*

3.4. Svojstvene vrijednosti

U ovom potpoglavlju uvest ćemo pojam svojstvene vrijednosti grafa te reći nešto više o svojstvenim vrijednostima distancijski regularnih grafova. Za početak uvodimo neke pojmove poznate iz linearne algebre.

Definicija 3.4.1. *Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je **svojstvena vrijednost** kvadratne matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F}), n \in \mathbb{N}$, ako postoji vektor $v \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{F}), v \neq \ominus$, takav da je $Av = \lambda v$.*

*Vektor v zove se **svojstveni vektor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A zove se **spektar** matrice A.*

Definicija 3.4.2. ***Svojstveni (karakteristični) polinom** k_A kvadratne matrice A reda n**,** dan je sa $k_A(\lambda) = \det(F - \lambda I)$, gdje je I jedinična matrica reda n.*

Definicija 3.4.3. *Neka je λ svojstvena vrijednost matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Skup $S(\lambda) = \{v \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{F}) \big|\ Av = \lambda v\}$ zove se **svojstveni potprostor** matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.*

Definicija 3.4.4. *Dimenziju svojstvenog potprostora pridruženog svojstvenoj vrijednosti λ zovemo **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti λ.*

Propozicija 3.4.1. *Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma matrice A.*

Definicija 3.4.5. *Neka je λ_0 svojstvena vrijednost matrice A te neka je k_A njen karakteristični polinom. Broj k u $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k p(\lambda), p(\lambda) \neq 0$, zove se **algebarska kratnost** svojstvene vrijednosti λ_0.*

Napomena 3.4.1. Neka je A kvadratna matrica reda n. Vrijedi:

i) Matrica A ima n svojstvenih vrijednosti, uključujući i njihove kratnosti (dakle ne moraju sve biti različite).

ii) Suma n svojstvenih vrijednosti od A jednaka je tragu od A, odnosno zbroju elemenata na glavnoj dijagonali od A.

iii) Produkt n svojstvenih vrijednosti od A jednak je determinanti od A.

iv) Skup svojstvenih vektora od A, pri čemu svaki od njih odgovara drugoj svojstvenoj vrijednosti od A, je linearno nezavisan.

Navedimo još jednu lemu čiji će se iskaz koristiti u nastavku.

Lema 3.4.1. *Neka je θ svojstvena vrijednost kvadratne matrice A te neka je p anihilirajući polinom od A, tj. neka je p(A)=0. Tada je θ nultočka od p, odnosno p(θ)=0.*

Za matricu T kažemo da je nenegativna ako su svi njeni elementi nenegativni te tada pišemo $T \geq 0$.

Definicija 3.4.6. *Za nenegativnu kvadratnu matricu T reda n kažemo da je* ***primitivna*** *ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $T^k > 0$, odnosno takav da su svi elementi matrice T^k pozitivni.*

Nenegativna realna kvadratna matrica T reda n je ireducibilna ako za svaki par i, j postoji takav $k \in \mathbb{N}$ da je element $T_{i,j}^k > 0$. Period d ireducibilne matrice T je najveći zajednički djelitelj cijelih brojeva k za koje je $T_{i,j}^k > 0$. Period je neovisan o izabranom indeksu i.

Navedimo teorem koji će se koristiti u nastavku.

Teorem 3.4.1. *Svojstvene vrijednosti simetrične matrice su realni brojevi.*

Slijedi Perron-Frobeniusov teorem koji daje neka svojstva svojstvenih vrijednosti nenegativnih i ireducibilnih matrica.

Teorem 3.4.2. *Neka je T realna ireducibilna, nenegativna $n \times n$ matrica. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

i. *Postoji realan broj θ_0 i realan vektor x_0 takav da $T\,x_0 = \theta_0\,x_0$, $x_0 > 0, \theta_0 > 0$. Ako je $x \geq 0, x \neq 0$ i $T\,x \geq \theta x$, onda je $\theta_0 \geq \theta$.*

ii. *Svojstvena vrijednost θ_0 od T ima algebarsku i geometrijsku kratnost jednaku 1.*

iii. *Za svaku svojstvenu vrijednost θ od T vrijedi $|\theta| \leq \theta_0$. Ako je T primitivna tada iz $|\theta| = \theta_0$ slijedi $\theta = \theta_0$. Generalno, ako T ima period d, tada T ima točno d svojstvenih vrijednosti θ takvih da $|\theta| = \theta_0$, to su $\theta = \theta_0 e^{2\pi i j/d}$, za $j = 0, \dots, d-1$.*

iv. *Bilo koji ne-nula nenegativan lijevi ili desni svojstveni vektor od T ima svojstvenu vrijednost θ_0. Generalno ako je $x \geq 0, x \neq 0$ i $T\,x \leq \theta x$ tada je $x > 0$ i $\theta \geq \theta_0$. Štoviše, $\theta = \theta_0$ ako i samo ako $T\,x = \theta x$.*

v. *Ako je $0 \leq S \leq T$ i $S \neq T$, onda svaka svojstvena vrijednost σ od S zadovoljava $|\sigma| < \theta_0$.*

Teorem 3.4.3. *Graf je povezan ako i samo ako je njegova matrica susjedstva ireducibilna.*

Analogno svojstvenim vrijednostima matrica želimo definirati svojstvene vrijednosti grafa.

U poglavlju *Osnovni pojmovi* dali smo definiciju matrice susjedstva. Uvedimo pojam spektra grafa.

Definicija 3.4.7. ***Svojstvene vrijednosti grafa G*** *definiraju se kao svojstvene vrijednosti matrice susjedstva grafa G.* ***Spektar grafa G*** *je skup svih svojstvenih vrijednosti njemu pripadne matrice susjedstva. Označavat ćemo ga sa $S_p(G)$.*

Najveća apsolutna vrijednost elemenata spektra grafa zove se **spektralni radijus***.*

Dva različita grafa mogu imati jednake spektre, odnosno jednake svojstvene vrijednosti.

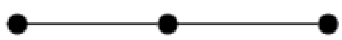
Definicija 3.4.8. ***Karakteristični polinom grafa****, čija je matrica susjedstva A, definiran je kao $p_A(\theta) = \det(\theta I - A)$.*

Pokažimo primjer spektra grafa.

Primjer 3.4.1. Neka je graf G zadan matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadani graf G je na slici 3.



Slika 3. Graf G

Odredimo karakteristični polinom grafa.

Prema definiciji je

$$p_A(\theta) = \det(\theta I - A) = \begin{vmatrix} \theta & -1 & 0 \\ -1 & \theta & -1 \\ 0 & -1 & \theta \end{vmatrix}$$

$$= \theta(\theta^2 - 1) + (-\theta)$$

$$= \theta(\theta^2 - 1) - \theta$$

$$= \theta(\theta - \sqrt{2})(\theta + \sqrt{2}).$$

Korijeni karakterističnog polinoma su $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. Stoga je spektar grafa $S_p(G) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Iz definicije matrice susjedstva grafa zaključujemo da je matrica susjedstva svakog grafa nenegativna. Također, ako je graf neusmjeren njegova matrica susjedstva bit će simetrična.

Iz teorema 3.3.1 slijedi da će matrica susjedstva grafa imati realne svojstvene vrijednosti.

U nastavku ćemo odrediti neka svojstva spektra i matrice susjedstva distancijski regularnih grafova.

Uočimo, iz prethodnih definicija i tvrdnji zaključujemo da je distancijski regularan graf povezan, neusmjeren i $b_0 -$ regularan. Stoga, možemo zaključiti da će njegova matrica susjedstva biti nenegativna, simetrična i ireducibilna. Također, njegova matrica susjedstva će imati realne svojstvene vrijednosti.

Neka je G distancijski regularan graf čija je matrica susjedstva A, X skup vrhova, $|X| = n$ te je d dijametar grafa.

Uvedimo oznake za lakše praćenje sljedećeg sadržaja.

Neka je A_i matrica za koju vrijedi da je

$$(A_i)_{\delta,\gamma} = 1 \text{ ako je } d(\delta,\gamma) = i,$$

$$(A_i)_{\delta,\gamma} = 0 \text{ ako je } d(\delta,\gamma) \neq i, \text{ za } i = 0, \dots, d.$$

Tada je $A_0 = I$ jer samo za $\delta = \gamma$ vrijedi $d(\delta,\gamma) = 0$ te $A_1 = A$ jer samo za susjedne vrhove δ i γ vrijedi $d(\delta,\gamma) = 1$.

Sve su matrice A_i za $i = 0, \dots, d$ reda n, te se one nazivaju *i-te matrice udaljenosti*.

Uočimo da vrijedi:

$$A_0 + \cdots + A_d = J,$$

$$A_{-1} = A_{d+1} = 0.$$

Također vrijedi:

$$AA_i = c_{i+1}A_{i+1} + a_iA_i + b_{i-1}A_{i-1},\ i = 0, \dots, d.$$

Štoviše, može se pokazati sljedeća lema.

Lema 3.4.2. *Graf G je distancijski regularan graf ako i samo ako se AA_i može zapisati kao linearna kombinacija A_{i+1}, A_i i A_{i-1}, $i = 0, \dots, d$.*

Dokaz.

Pokažimo prvi smjer.

Pretpostavimo da je graf G distancijski regularan te neka su γ i δ vrhovi grafa G.

Uočimo što vrijedi za elemente matrice AA_i na poziciji (γ, δ). Matrica A na poziciji (γ, δ) ima 1 ako su γ i δ susjedni, a matrica A_i na poziciji (γ, δ) ima 1 ako su γ i δ na udaljenosti i. Također, prisjetimo se da ako su γ i δ na udaljenosti k, tada susjed od γ može od δ biti udaljen jedino za $k-1, k$ ili $k+1$. Zaključujemo da ukoliko $d(\gamma, \delta) \notin \{i-1, i, i+1\}$, tada ne može postojati susjed od γ na udaljenosti i od δ, odnosno tada je $|G_1(\gamma) \cap G_i(\delta)| = 0$. Kad bi postojao susjed od γ na udaljenosti i od δ, tada bi γ i δ morali biti udaljeni ili za $i+1, i$ ili $i-1$. Stoga,

$$(AA_i)_{\gamma\delta} = |G_1(\gamma) \cap G_i(\delta)| = \begin{cases} b_{i-1}, & za\ d(\gamma, \delta) = i-1 \\ a_i, & za\ d(\gamma, \delta) = i \\ c_{i+1}, & za\ d(\gamma, \delta) = i+1 \\ 0, & inače \end{cases}$$

Iz toga slijedi da je:

$$AA_i = c_{i+1}A_{i+1} + a_iA_i + b_{i-1}A_{i-1},\ i = 0, \dots, d. \tag{1}$$

Pokažimo drugi smjer.

Neka je G graf čija je matrica susjedstva A te pretpostavimo da vrijedi (1). Specijalno će vrijediti:

$$AA_{i-1} = c_iA_i + a_{i-1}A_{i-1} + b_{i-2}A_{i-2}, \tag{2}$$

$$AA_{i+1} = c_{i+2}A_{i+2} + a_{i+1}A_{i+1} + b_iA_i. \tag{3}$$

Da bi pokazali da je graf distancijski regularan, moramo mu odrediti intersekcijske brojeve. Neka su γ i δ vrhovi na udaljenosti i. Tada će matrica A_i na poziciji (γ,δ) imati 1, a preostale matrice udaljenosti će imati 0. Znamo da za b_i mora vrijediti da je $b_i = |G_1(\gamma) \cap G_{i+1}(\delta)|$. Iz (3) vrijedit će da AA_{i+1} na poziciji (γ,δ) imati b_i. Iz (2) slijedi vrijedit će da AA_{i-1} na poziciji (γ,δ) imati c_i, a za c_i mora vrijediti da je $c_i = |G_1(\gamma) \cap G_{i-1}(\delta)|$. Stoga, graf G je distancijski regularan.

□

Sljedeća lema pokazuje kako se matrice udaljenosti mogu dobiti kao vrijednost polinoma u A.

Lema 3.4.3. *Matrice udaljenosti A_i mogu se dobiti kao vrijednosti polinoma stupnja i u A, tj.*

$$v_i(A) = A_i\ , i \in \{0, \dots, d\}.$$

Dokaz.

Uočimo $A_0 = I, A_1 = A$. Iz (1) slijedi da je

$$AA_1 = c_2A_2 + a_1A_1 + b_0A_0$$

$$\Rightarrow A^2 = c_2A_2 + a_1A + b_0I$$

$$\Rightarrow -c_2A_2 = a_1A - A^2 + b_0I$$

$$\Rightarrow A_2 = -\frac{a_1}{c_2}A + \frac{1}{c_2}A^2 - \frac{b_0}{c_2}I$$

Zadajmo polinome v_i rekurzivno kao:

$$v_0(x) = 1, v_1(x) = x, v_2(x) = \frac{1}{c_2}x^2 - \frac{a_1}{c_2}x - \frac{b_0}{c_2}.$$

Tada će vrijediti $v_0(A) = I, v_1(A) = A, v_2(A) = A_2$.

Odredimo sada A_3. Iz (1) slijedi

$$AA_2 = c_3A_3 + a_2A_2 + b_1A_1$$

$$\Rightarrow -c_3A_3 = a_2A_2 + b_1A - AA_2$$

$$\Rightarrow -c_3A_3 = (a_2 - A)A_2 + b_1A$$

$$\Rightarrow A_3 = \frac{A_1 - a_2}{c_3}A_2 - \frac{b_1}{c_3}A_1$$

U tom je slučaju $v_3(x)$ definiran je kao

$$v_3(x) = \frac{x-a_2}{c_3} v_2(x) - \frac{b_1}{c_3} v_1(x),$$

pa je $v_3(A) = A_3$.

Nastavljajući dalje dobili bi definiciju polinoma v_i stupnja i kao

$$v_{-1}(x) = 0, v_0(x) = 1, v_1(x) = x,$$

$$v_{i+1}(x) = \frac{x-a_i}{c_{i+1}} v_i(x) - \frac{b_{i-1}}{c_{i+1}} v_{i-1}(x), i \in \{0, \dots, d\}.$$

$\square$

Stoga se matrice A_i mogu zapisati kao vrijednosti polinoma u A stupnja i, točnije

$$v_i(A) = A_i \, , i \in \{0, \dots, d+1\},$$

gdje su v_i polinomi stupnja i, definirani rekurzivno na sljedeći način:

$$v_{-1}(x) = 0, \; v_0(x) = 1, v_1(x) = x \, ,$$

$$c_{i+1} v_{i+1}(x) = (x - a_i) v_i(x) - b_{i-1} v_{i-1}(x), i \in \{0, \dots, d\}.$$

Možemo zaključiti da će vrijediti

$$A_i A_j = \sum_{l=0}^{d} p_{ij}^{l} A_l,$$

za neke brojeve p_{ij}^k.

Posebno, $p_{i,j}^l$ su cijeli brojevi te vrijedi:

$$p_{0,i}^l = \delta_{i,l}, \; p_{i,j}^0 = \delta_{i,j} \cdot k_i, \; p_{i,j}^k = p_{j,i}^k,$$

$$p_{i,j}^l = 0 \text{ za } l > i + j \text{ ili } l < |i - j|.$$

Brojeve $p_{i,j}^l$ možemo odrediti pomoću intersekcijskog niza, jer vrijedi:

$$p_{1,i}^l = \begin{cases} c_l, & i = l - 1 \\ a_l, & i = l \\ b_l, & i = l + 1 \\ 0, & inače \end{cases}$$

Također, vrijedi i sljedeća rekurzija:

$$b_{i-1}p_{i-1,j}^{l} + a_i p_{i,j}^{l} + c_{i+1}p_{i+1,j}^{l} = p_{i,j}^{l-1}c_l + p_{i,j}^{l}a_l + p_{i,j}^{l+1}b_l,$$

iz koje se rješavanjem po $p_{i+1,j}^{l}$ rekurzivno određuje $p_{i,j}^{l}$. Rekurzija se dobiva određivanjem $(AA_i)A_j = A(A_iA_j)$ te uspoređivanjem elemenata na poziciji (γ,δ) za vrhove δ i γ na udaljenosti l.

Usporedbom elemenata na poziciji (γ,δ) može se vidjeti da je za vrhove δ i γ na udaljenosti l, broj $p_{i,j}^{l}$ točno jednak broju vrhova od G koji su na udaljenosti i od γ te na udaljenosti j od δ $(i, j, l = 0, \ldots, d)$.

Uočimo da su matrice A_i, za $i = 0, \ldots, d$, matrice susjedstva P-polinomijalne asocijacijske sheme s d klasa nad skupom vrhova distancijski regularnog grafa s relacijama udaljenosti. Stoga će vrijediti da su one linearno nezavisne.

Budući da je za $i \in \{0, \ldots, d\}$, $v_i(A) = A_i$ polinom stupnja i u varijabli A te vrijedi $v_{d+1}(A) = A_{d+1} = 0$, odnosno v_{d+1} je anihilirajući polinom za A, iz Leme 3.4.1 slijedi da svojstvene vrijednosti od A moraju biti nultočke od v_{d+1}.

Kako je v_{d+1} polinom stupnja $d+1$ vrijedi da ima $d+1$ nultočaka. Dakle, matrica A ima najviše $d+1$ različitih svojstvenih vrijednosti. Točnije, ona ima točno $d+1$ svojstvenih vrijednosti.

Sada je cilj odrediti te svojstvene vrijednosti.

Neka su $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$ svojstvene vrijednosti matrice A.

Iz

$$AA_i = c_{i+1}A_{i+1} + a_iA_i + b_{i-1}A_{i-1} \text{ i } v_i(A) = A_i\ , i \in \{0, \ldots, d\}$$

slijedi da za svaku svojstvenu vrijednost θ od A vrijedi

$$\theta v_i(\theta) = c_{i+1}v_{i+1}(\theta) + a_iv_i(\theta) + b_{i-1}v_{i-1}(\theta)\ , i \in \{0, \ldots, d\}.$$

Uočimo da će vrijediti $A \cdot 1 = k \cdot 1$, za $1 = [1,1, \ldots ,1]^T$, $k = b_0$. Stoga, k je jedna svojstvena vrijednost grafa G.

Uvodimo nove polinome u_i definirane na način

$$u_i(\theta) \coloneqq \frac{v_i(\theta)}{k_i}, i \in \{-1, \dots, d+1\},$$

gdje vrijedi $k_i = v_i(k)$.

Niz $(u_0(\theta), \dots, u_d(\theta))$ zove se standardni niz od G koji odgovara svojstvenoj vrijednosti θ.

Za standardni niz vrijedit će

$$u_{-1}(\theta) = 0, u_0(\theta) = 1, u_1(\theta) = \frac{\theta}{k},$$

$$\theta u_i(\theta) = c_i u_{i-1}(\theta) + a_i u_i(\theta) + b_i u_{i+1}(\theta)\ , i \in \{0, \dots, d\}.$$

Vrijedit će da će svojstvene vrijednosti distancijski regularnog grafa biti svojstvene vrijednosti trodijagonalne $(d+1) \times (d+1)$ matrice L_1:

$$L_1 \ := \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & O & \\ & c_2 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & O & & \cdot & \cdot & b_{d-1} \\ & & & & c_d & a_d \end{bmatrix}$$

4. Neke familije distancijski regularnih grafova

U ovom poglavlju opisat ćemo neke poznatije familije distancijski regularnih grafova.

4.1. Jako regularni grafovi

Jako regularni grafovi imaju zanimljiva svojstva te će u nastavku će biti pokazano kako su to primjeri distancijski regularnih grafova. Koriste se u teoriji kodiranja, algebarskoj teoriji grafova i teoriji dizajna.

Slijedi definicija i nekoliko primjera ovakvih grafova.

Definicija 4.1.1. *Neka je $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ graf, te neka je $V(G) = \{v_1, \dots, v_\upsilon\}$ i $E(G) = \{e_1, \dots, e_\varepsilon\}$. Za povezan k-regularan graf G kažemo da je* ***jako regularan graf*** *ako postoje pozitivni realni cijeli brojevi λ i μ takvi da:*

- *svaki par susjednih vrhova ima λ zajedničkih susjeda,*
- *svaki par nesusjednih vrhova ima μ zajedničkih susjeda.*

Regularan graf koji nije jako regularan zove se ***slabo regularan graf****.*

Vrijednosti (ν, k, λ, μ) zovu se ***parametrima jako regularnog grafa****.*

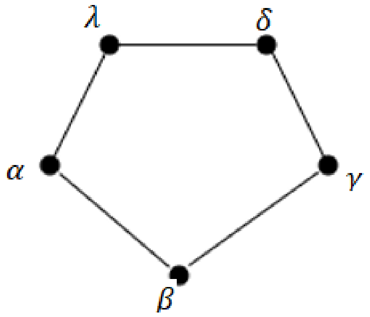
Neki primjeri jako regularnih grafova te odgovarajući parametri dani su u sljedećoj tablici.

$(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$	**Graf**
(4,2,0,2)	Kocka Q_3
(5,2,0,1)	Peterokut C_5
(10,3,0,1)	Petersenov graf
(14,7,0,7)	Potpun bipartitan graf $K_{7,7}$
(9,6,3,6)	Potpun tripartitan graf $K_{3,3,3}$

Tablica 1 Primjeri jako regularnih grafova

Primjer 4.1.1. Peterokut C_5 je primjer jako regularnog grafa. Odredimo njegove parametre. Graf je dan na slici 4.

Svi susjedni parovi vrhova grafa su $(\alpha,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\delta),(\delta,\lambda),(\lambda,\alpha)$. Uočimo, svaki par ima točno 0 zajedničkih susjeda. Svi nesusjedni parovi su (β,δ), $(\gamma,\lambda),(\delta,\alpha),(\lambda,\beta),(\alpha,\gamma)$ te svaki od njih ima točno jednog zajedničkog susjeda. Graf ima 5 vrhova i svaki je stupnja 2. Stoga, parametri peterokuta kao jako regularnog grafa su (5,2,0,1).



Slika 4. Peterokut

Sljedeći teorem daje poveznicu između jako regularnih i distancijski regularnih grafova.

Teorem 4.1.1. *Povezan graf koji nije potpun je jako regularan ako i samo ako je distancijski regularan dijametra 2. Tada će intersekcijski niz tog grafa čiji su parametri* (ν, k, λ, μ) *biti jednak* $\{k, k - \lambda - 1; 1, \mu\}$.

Dokaz.

Pokažimo prvi smjer.

Pretpostavimo da je graf G distancijski regularan graf dijametra 2 intersekcijskog niza $\{b_0, b_1; c_1, c_2\}$. Prema definiciji distancijski regularnog grafa slijedi

$$b_1 = |G_2(\gamma) \cap G_1(\delta)|, \text{ za } d(\gamma, \delta) = 1$$

$$c_2 = |G_1(\gamma) \cap G_1(\delta)|, \text{ za } d(\gamma, \delta) = 2,$$

$$b_0 = k, c_1 = 1.$$

Kako bi pokazali da je G jako regularan, moramo odrediti parametre λ i μ s traženim svojstvima.

Neka su α i β proizvoljni par susjednih vrhova grafa G, tj. $d(\alpha, \beta) = 1$. Moramo odrediti koliko oni imaju zajedničkih susjeda.

Kako znamo da u distancijski regularnom grafu, vrijednosti b_0, b_1, c_0 i c_1 ne ovise o izboru vrhova, za α i β vrijedit će sljedeće.

Svaki je vrh stupnja k, prema tome, broj zajedničkih susjeda mora biti manji od k. Broj susjeda od α, ne uključujući β, je $k - 1$. Kako je graf dijametra 2, postoje vrhovi grafa koji su na udaljenosti 2 od α. U $G_2(\alpha) \cap G_1(\beta)$ nalaze se nesusjedni vrhovi od α i susjedni od β, prema tome oni sigurno nisu zajednički susjedi od α i β. Zaključujemo da je $\lambda = k - b_1 - 1$.

Neka su α i β proizvoljni par nesusjednih vrhova grafa G, tj. $d(\alpha,\beta) = 2$. Moramo odrediti koliko oni imaju zajedničkih susjeda. U $G_1(\alpha) \cap G_1(\beta)$ nalaze se susjedi od α i β, prema tome $\mu = c_2$.

Pokažimo drugi smjer.

Pretpostavimo da je graf G povezan jako regularan graf s parametrima (ν, k, λ, μ) koji nije potpun. Kako bi dokazali da je on distancijski regularan dijametra 2, moramo pokazati da vrijedi definicija 3.1.2 te odrediti vrijednosti b_0, b_1, c_1 i c_2. Iz definicije 3.2.2.1 slijedi da za svaka dva vrha $\gamma, \delta \in V(G)$ vrijedi

$$|G_1(\gamma) \cap G_1(\delta)| = \begin{cases} \lambda, & d(\gamma,\delta) = 1 \\ \mu, & d(\gamma,\delta) \neq 1 \end{cases}.$$

Jasno je da je $\mu \geq 0$. Pretpostavimo da je $\mu = 0$. Relacija „biti susjedan“ u tom slučaju je relacija ekvivalencije. Tada bi vrhovi grafa G činili klasu ekvivalencije, što bi značilo da je G potpun ili disjunktna unija potpunih grafova. Pretpostavka da je G potpun daje kontradikciju. Pretpostavka da je G disjunktna unija potpunih grafova znači da bi G bio nepovezan što također daje kontradikciju. Stoga vrijedi $\mu > 0$ pa je $d(\gamma,\delta) \leq 2$, za $\forall \gamma, \delta \in V(G)$. Kako G nije potpun, nisu svi vrhovi susjedni pa postoji barem jedan par vrhova na udaljenosti 2. Stoga je dijametar grafa jednak 2.

Moramo odrediti vrijednosti b_0, b_1, c_1 i c_2.

Neka su vrhovi γ i δ takvi da $d(\gamma,\delta) = 0$, tj. $\gamma = \delta$. Vrijedi da je $b_0 = |G_1(\gamma) \cap G_1(\gamma)| = |G_1(\gamma)| = k$.

Neka su vrhovi γ i δ takvi da $d(\gamma,\delta) = 1$, tj. oni su susjedni vrhovi. Vrijedi da je $b_1 = |G_2(\gamma) \cap G_1(\delta)|$. Broj susjeda od δ mora biti manji od k. Vrh γ mu je jedan susjed. Vrijednost λ je broj njihovih zajedničkih susjeda, što znači da među njima nema vrhova koji su od γ udaljeni za 2. Prema tome, $b_1 = k - \lambda - 1$.

Vrijedi da je $c_1 = |G_0(\gamma) \cap G_1(\delta)|$. Kako je $G_0(\gamma) = \{\gamma\}$, vrijediti će $c_1 = 1$.

Neka su vrhovi γ i δ takvi da $d(\gamma,\delta) = 2$, tj. oni su nisu susjedni vrhovi. Vrijedi da je $c_2 = |G_1(\gamma) \cap G_1(\delta)| = \lambda$.

Stoga, graf G je distancijski regularan graf dijametra 2 intersekcijskog niza $\{k, k - \lambda - 1; 1, \mu\}$.

$\square$

Dakle, distancijski regularni grafovi dijametra 2 su upravo jako regularni grafovi.

Želimo odrediti svojstvene vrijednosti jako regularnog grafa. Odredimo prvo svojstva njegove matrice susjedstva.

Neka je G jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ) te neka je A njegova matrica susjedstva.

Kako je graf G neusmjeren, matrica A bit će simetrična. Graf ne sadrži petlje, prema tome dijagonala matrice A sadržavati će samo 0.

Graf je povezan i k −regularan stoga svaki vrh ima barem jednog susjeda. Svaki par susjednih vrhova imaju λ zajedničkih susjeda, prema tome svaki vrh ima barem $1 + \lambda$ susjeda. Svaki vrh je stupnja k. Slijedi da preostali broj susjeda svakog vrha je $k - 1 - \lambda$. Suma elementa u svakom stupcu/retku matrice A biti će $1 + \lambda + (k - 1 - \lambda)$, tj. k.

Iz definicije 3.2.2.1 slijedi da postoji točno λ stupaca $s_1, \dots, s_\lambda$ matrice A takvih da za redak i i redak j, koji odgovaraju susjednim vrhovima v_i i v_j, vrijedi $A_{i,s_m} = 1$ i $A_{j,s_m} = 1$, za $i, j = 1, \dots, v, m = 1, \dots, \lambda$. Analogno vrijedi za stupce.

Odredimo A^2. Kako A sadrži samo 0 i 1, A^2 na dijagonali sadrži samo k. Kod množenja retka i stupca koji pripadaju vrhovima koji su susjedni dobivamo samo vrijednosti λ, jer se oni „podudaraju u jedinicama" točno λ puta. Analogno tome, kod množenja retka i stupca koji pripadaju vrhovima koji nisu susjedni dobivamo samo vrijednosti μ.

Odnosno vrijedi

$$A_{i,j}^2 = \begin{cases} k, \ za\ v_i = v_j \\ \lambda, za\ d(v_i, v_j) = 1, \\ \mu, za\ d(v_i, v_j) > 1 \end{cases}$$

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A) = (\lambda - \mu)A + \mu J + (k - \mu)I,$$

gdje je J matrica koja na svim pozicijama ima 1.

Osim toga, jasno je da $AJ = JA = kJ$.

Ponovimo teorem iz linearne algebre koji će nam trebati u nastavku.

Teorem 4.1.2. *Neka je M simetrična matrica takva da su njeni elementi realni brojevi. Tada su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.*

Nakon nekih navedenih i pokazanih tvrdnji možemo odrediti svojstvene vrijednosti grafa G. Uočimo, trivijalna svojstvena vrijednost $k -$ regularnog grafa je k za svojstveni vektor $1 = [1,1,\dots,1]^T$.

Želimo odrediti preostale svojstvene vrijednosti jako regularnog grafa. Broj različitih svojstvenih vrijednosti matrice A jednak je njenom rangu. Prema tome, A ima najviše v svojstvenih vrijednosti.

Jedan svojstveni vektor matrice A je 1. Iz Teorema 4.1.2. slijedi da su preostali svojstveni vektori matrice A ortogonalni na 1.

Uočimo da je 1 svojstveni vektor i za matricu J, za svojstvenu vrijednost v. Neka je x svojstveni vektor od A , što prema Teoremu 4.1.2. znači da je x ortogonalan na 1.

Za $x = [x_1, \dots, x_v]$ vrijedi

$$x \cdot 1 = 0 \iff x_1 + \cdots + x_v = 0.$$

Uočimo, $Jx = 0$. Što znači da svaki vektor koji je ortogonalan na 1 je svojstveni vektor od J za svojstvenu vrijednost 0.

Iz svega navedenog vrijedi

$$A^2x = (\lambda - \mu)Ax + (k - \mu)x.$$

Pošto je $Ax = \theta x$, za neki $\theta \in \mathbb{R}$, slijedi

$$\theta^2 = (\lambda - \mu)\theta + (k - \mu).$$

Stoga, preostale dvije svojstvene vrijednosti matrice A dane su kao rješenja prethodne jednadžbe.

Svojstvene vrijednosti r i s dane su kao sljedeće

$$r, s = \frac{1}{2}(\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu}).$$

Upravo smo vidjeli da su distancijski regularni grafovi dijametra 2 zapravo jako regularni grafovi. Distancijski regularni grafovi dijametra 3 ili više mogu se klasificirati u četiri (ne isključujuće) klase:

i. grafovi s klasičnim parametrima,
ii. particijski grafovi,

iii. regularni skoro poligoni,

iv. preostali distancijski regularni grafovi.

Svaka od ovih klasa je podijeljena je u primitivne i imprimitivne grafove.

U sljedećim potpoglavljima opisat ćemo neke od navedenih klasa grafova.

4.2. Distancijski regularni grafovi s klasičnim parametrima

Definicija 4.2.1. *Neka je G distancijski regularan graf G s dijametrom $d \geq 3$. Graf G je* ***distancijski regularan graf s klasičnim parametrima*** $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ *ako njegovi intersekcijski brojevi b_i i c_i zadovoljavaju sljedeće uvjete:*

$$b_i = \left(\begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right)\left(\beta - \alpha \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$c_i = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\left(1 + \alpha \begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

za $i = 0, \dots, d$, gdje je

$$\begin{bmatrix} i \\ l \end{bmatrix} = \begin{cases} \prod_{j=0}^{l-1} \frac{i-j}{l-j} = \binom{i}{l}, ako\ je\ b = 1 \\ \prod_{j=0}^{l-1} \frac{b^i - b^j}{b^l - b^j}, ako\ je\ b \neq 1 \end{cases}$$

Gaussov binomni koeficijent s bazom b.

Iz gornjih uvjeta za b_i i c_i slijedi da je

$$k = \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix}\beta, \qquad \mu = (1+b)(1+\alpha),$$

$$a_i = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}(\beta - 1 + \alpha(\begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix})).$$

Distancijski regularni grafovi s klasičnim parametrima i dijametrom $d \geq 3$ imaju određeno svojstvo koje je dano u sljedećem teoremu.

Teorem 4.2.1. *Intersekcijski brojevi distancijski regularnog grafa dijametra $d \geq 3$ s klasičnim parametrima (d, b, α, β) zadovoljavaju uvjet:*

$$c_{i+1} > c_i, i = 0, \dots, d-1.$$

Poznati su svi distancijski regularni grafovi dijametra $d \geq 3$ s klasičnim parametrima (d, b, α, β) takvi da je $b = 1$, a neki od njih dani su u sljedećoj tablici.

$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{\alpha + 1}$	$\boldsymbol{\beta + 1}$	***Graf***
d	*1*	*2*	$n - d + 1$	*Johnsonov graf* $J(n, d), n \geq 2d$
d	*1*	*1*	n	*Hammingov graf* $H(n, d)$
d	q	$q + 1$	$\begin{bmatrix} n-d+1 \\ 1 \end{bmatrix}$	*Grassmannov graf,* $n \geq 2d$
3	*1*	*5*	*10*	*Gosset graf* $E_7(1)$

Tablica 2 Neki distancijski regularni grafovi dijametra $d \geq 3$ s klasičnim parametrima (d, b, α, β) (d, n pozitivni cijeli brojevi, q potencija prostog broja)

Sada ćemo reći nešto više o beskonačnim familijama distancijski regularnih grafova s klasičnim parametrima. Familije koje će biti opisane su Johnsonovi grafovi, Hammingovi grafovi i Grassmannovi grafovi.

4.2.1. Johnsonovi grafovi

Krenimo s Johnsonovim grafovima.

Definicija 4.2.1.1. *Neka je X konačan skup.* ***Johnsonov graf e- skupova iz X*** *je graf čiji je skup vrhova jednak $\binom{X}{e}$, odnosno vrhovi su podskupovi od X kardinaliteta e. Dva vrha δ i γ su susjedna ako je $\delta \cap \gamma$ kardinaliteta $e - 1$.*

Napomena 4.2.1.1. Ako je $|X| = n$, tada se skup vrhova umjesto $\binom{X}{e}$ zapisuje kao $\binom{n}{e}$ te se kao oznaka za graf koristi $J(n, e)$.

Grafovi $J(n, 2)$ nazivaju se *triangularni grafovi*, a za njih se ponekad koristi oznaka $T(n)$.

U sljedećem primjeru dan je $J(4,2)$.

Primjer 4.2.1.1. Neka je $X = \{1,2,3,4\}$. Svi 2-člani podskupovi od X su $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$ i $\{3,4\}$, što znači da će $J(4,2)$ imati $\binom{4}{2} = 6$ vrhova. Radi lakšeg praćenja, uvedimo oznake:

$$\alpha = \{1,2\}, \beta = \{1,3\}, \gamma = \{1,4\}, \delta = \{2,3\}, \lambda = \{2,4\} \text{ i } \mu = \{3,4\}.$$

Odredimo susjedne vrhove.

Određujući presjeke vrhova, zaključujemo sljedeće:

susjedni vrhovi vrha α: $\beta, \gamma, \delta, \lambda$,

susjedni vrhovi vrha β: $\alpha, \gamma, \delta, \mu$,

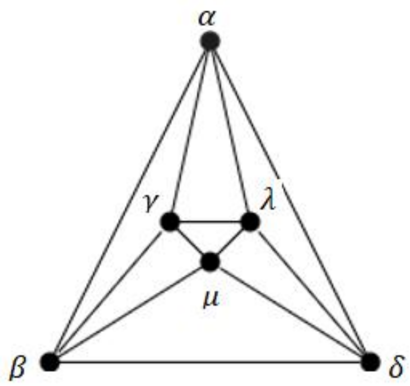
susjedni vrhovi vrha γ: $\alpha, \beta, \lambda, \mu$,

susjedni vrhovi vrha δ: $\alpha, \beta, \lambda, \mu$,

susjedni vrhovi vrha λ: $\alpha, \gamma, \delta, \mu$,

susjedni vrhovi vrha μ: $\beta, \gamma, \delta, \lambda$.

Graf $J(4,2)$ prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 5. J(4,2)

Petersenov graf je komplement Johnsonovog grafa $J(5,2)$. Dakle, Petersenov graf je graf s $\binom{5}{2} = 10$ vrhova, koje možemo promatrati kao dvočlane podskupove 5-članog skupa. U njemu će dva različita vrha biti susjedna ukoliko nemaju točno $e - 1 = 2 - 1 = 1$ element u presjeku, odnosno ukoliko su disjunktni.

Potpun graf K_n je također Johnsonov graf, točnije $J(n, 1)$.

Slijedi lema koja govori kada su dva Johnsonova grafa skupova iz X međusobno izomorfna.

Lema 4.2.1.1 *Neka je $|X| = e + f$. Tada su Johnsonov graf e- skupova iz X i Johnsonov graf f- skupova iz X izomorfni.*

Dokaz.

Izomorfizam je dan s $\gamma \longrightarrow X \backslash \gamma$.

$\square$

4.2.2. Hammingovi grafovi

Sljedeća familija distancijski regularnih grafova s klasičnim parametrima su Hammingovi grafovi. Slijedi definicija takvih grafova.

Definicija 4.2.2.1. *Neka je X konačan skup kardinaliteta $q \geq 2$.* ***Hammingov graf G nad X dijametra d*** *je graf kojem je skup vrhova jednak $X^d = \underset{i=1}{\overset{d}{\times}} X$, Kartezijev produkt d kopija od X. Dva vrha grafa G su susjedna ako se razlikuju u točno jednoj koordinati. Odnosno, dva vrha γ i δ su na udaljenosti j ako i samo ako se razlikuju u točno j koordinata.*

Oznaka Hammingovog grafa dijametra d nad X je $H(d, q)$.

Raspišimo primjer Hammingovog grafa.

Primjer 4.2.2.1. Neka je $X = \{1,2\}$ te neka je $d = 2$. Vrhovi Hammingovog grafa $H(2,2)$ nad X su (1,1), (1,2), (2,1) i (2,2).

Iz definicije Hammingovog grafa zaključujemo koji su vrhovi susjedni;

susjedni vrhovi vrha (1,1): (1,2), (2,1),

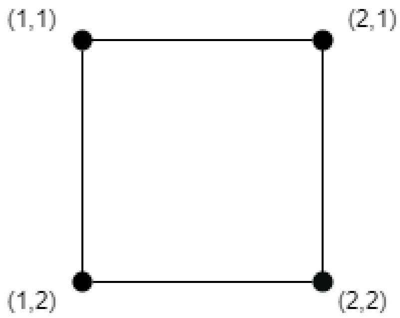
susjedni vrhovi vrha (1,2): (1,1), (2,2),

susjedni vrhovi vrha (2,1): (1,1), (2,2),

susjedni vrhovi vrha (2,2): (1,2), (2,1).

Hammingov graf $H(2,2)$ prikazan je na sljedećoj slici.

Jednostavniji primjeri Hammingovih grafova su potpuni grafovi K_q (u oznaci Hammingovog grafa $H(1, q)$), K_1 (u oznaci Hammingovog grafa $H(d, 1)$) i d-kocke (u oznaci Hammingovog grafa $H(d, 2)$).



Slika 6. H(2,2)

4.2.3. Grassmannovi grafovi

Posljednja familija grafova koje ćemo spomenuti u ovom djelu su Grassmannovi grafovi.

Definicija 4.2.3.1. *Neka je $\mathbb{F}$ polje, a V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. **Grassmannov graf e- potprostora od V** je graf čiji je skup vhova jednak $\begin{bmatrix} V \\ e \end{bmatrix}$, odnosno vrhovi su linearni potprostori od V dimenzije e. Dva vrha δ i γ su susjedna ako je dimenzija potprostora $\delta \cap \gamma$ jednaka $e - 1$. Linearni potprostor od V dimenzije e naziva se e-prostor od V.*

4.3. Regularni skoro-poligoni

Prvo ćemo uvesti definiciju skoro-poligona te nakon toga regularnog skoro-poligona.

Za vrh γ grafa G, s $\gamma^{\perp}$ označit ćemo skup vrhova od G koji sadrži γ i njegove susjede. Za skup vrhova A, neka je $A^{\perp} = \bigcap_{\gamma \in A} \gamma^{\perp}$ skup svih vrhova na udaljenosti najviše jedan od svakog vrha iz A.

Definicija 4.3.1. ***Singularni pravac*** *grafa G je skup oblika $\{\gamma, \delta\}^{\perp\perp}$gdje su γ i δ susjedni vrhovi.*

Definicija 4.3.2. *Povezan graf G dijametra $d \geq 2$ je* ***skoro- poligon*** *ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

- *i.* *graf G nema induciranih podgrafova oblika $K_{1,1,2}$,*
- *ii.* *ako je γ vrh grafa, a L singularni pravac grafa G takav da je $d(\gamma, L) < d$, tada postoji jedinstvena točka singularnog pravca L koja je najbliža vrhu γ.*

Graf iz prethodne definicije naziva se još i skoro n −gon, gdje je $n = 2d + 1$ ako postoji vrh grafa koji je na udaljenosti d od nekog singularnog pravca, inače je $n = 2d$.

Definicija 4.3.3. ***Regularan skoro-poligon*** *je skoro-poligon koji je ujedino i distancijski regularan graf.*

Važna klasa regularnih skoro $n -$ poligona su generalizirani skoro- poligoni.

Definicija 4.3.4. ***Generaliziran 2d-gon reda (s, t)*** *je regularan skoro-poligon za čije parametre vrijedi*

$$k = s(t+1), \lambda = s-1, c_i = 1, i = 0, .., d-1, c_d = t+1.$$

Sljedeći teorem daje uvjete kada je distancijski regularan graf ujedno i regularan skoro- poligon.

Teorem 4.3.1. *Distancijski regularan graf G s dijametrom d i intersekcijskim nizom brojeva $\iota(G) = \{b_0, b_1, \dots b_{d-1}; \ c_1, c_2, \dots, c_d\}$ je regularan skoro-poligon ako i samo ako vrijedi sljedeće:*

i. *graf G nema induciranih podgrafova oblika $K_{1,1,2}$,*
ii. *postoji cijeli broj λ takav da je $b_i = k - (\lambda + 1)c_i$ za $i = 0, \dots, d-1$.*

U tom slučaju je

$$k \geq (\lambda + 1)c_d,$$

te ako vrijedi jednakost u prethodnom izrazu, tada je G skoro $2d$-gon, a inače je G skoro $(2d + 1)$ −gon.

4.4. Preostali primjeri distancijski regularnih grafova

Preostali primjeri distancijski regularnih grafova koje ćemo navesti i definirati su Mooreovi grafovi, kavezi, a osim njih poznati su i imprimitivni regularni skoro-poligoni i antipodalni distancijski regularni grafovi.

Definicija 4.4.1. ***Mooreov graf tipa*** $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{g})$ *je regularan graf valencije k i struka g, čiji je broj vrhova jednak v, koji je neparnog struka te za koji vrijedi jednakost u sljedećoj donjoj ogradi za v:*

$$v \geq \begin{cases} 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{g-3/2}, ako\ je\ g\ neparan \\ 2\left(1 + (k-1) + \cdots + (k-1)^{g-2/2}\right), ako\ je\ g\ paran \end{cases}.$$

Vrijedi da je struk Mooreovog grafa dijametra d jednak $g = 2d + 1$.

Neki primjeri Mooreovih grafova dani su u sljedećoj tablici.

$(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{g})$	**Graf**
(3,5)	Petersenov graf
(3,6)	Heawoodov graf
(7,5)	Hoffman-Singletonov graf

Tablica 3. Neki primjeri Mooreovih grafova

Teorem 4.4.1. *Mooreov graf valencije* $k = 2$ *je poligon i svaki* $(2d + 1) -$ *poligon je Mooreov graf. Mooreov graf valencije* $k \geq 3$ *je dijametra 2 te je* $k \in \{3,7,57\}$.

Uvedimo sada definiciju kaveza i dajmo vezu između kaveza i Mooreovih grafova.

Neka je $k \geq 2$ i $g \geq 3$.

Definicija 4.4.2. $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{g})$ ***kavez*** *je regularan graf valencije* k, *struka* g *i s minimalnim brojem vrhova* $v = v(k, g)$.

Za poznate vrijednosti k i g, teško je odrediti broj vrhova v, međutim može se odrediti donja granica za v.

Donja granica n za v, za koju vrijedi $n \leq v$, definirana je kao

$$n = \begin{cases} 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{g-3/2}, ako\ je\ g\ neparan \\ 2\left(1 + (k-1) + \cdots + (k-1)^{g-2/2}\right), ako\ je\ g\ paran \end{cases}$$

Uočimo, ukoliko je $v = n$ kada je g neparan, tada će kavez biti Mooreov graf.

U sljedećoj tablici dano je nekoliko primjera kaveza.

$(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{g})$	**Graf**
(3,3)	K_4
(3,5)	Petersenov graf

$(4,3)$	K_5
$(7,5)$	Hoffman-Singleton graf
$(4,5)$	Robertsonov graf

Tablica 4. Nekoliko primjera kaveza

5. Zaključak

Distancijski regularni grafovi su grafovi kod kojih za bilo koji par vrhova na udaljenosti i, broj vrhova koji su na udaljenosti j od prvog vrha te na udaljenosti k od drugog vrha je konstantan te ovisi o i, j i k, ali ne i o izabranom paru vrhova. Također, svaki takav graf je definiran svojim intersekcijskim nizom brojeva. Ovakvi grafovi imaju točno $d + 1$ svojstvenih vrijednosti, gdje je d dijametar grafa, a one se mogu odrediti kao svojstvene vrijednosti matrice L_1. Ovisno o dijametru, primjere familija distancijski regularnih grafova možemo podijeliti u 2 skupine. Distancijski regularni grafovi čiji je dijametar jednak 2 su upravo jako regularni grafovi. Kada pričamo o dijametru većem od 2, tada takve grafove možemo podijeliti u 4 neisključive klase. Jedna od zanimljivijih klasa su distancijski regularni grafovi s klasičnim parametrima. Primjeri takvih grafova su Johnsonovi, Hammingovi i Grassmannovi grafovi.

Popis slika

Literatura

[1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[2] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer, Amsterdam, 2010.

[3] A. E. Brouwer, H.V. Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Amsterdam, 2021.

[4] I.Petovari, *Spektar grafa*, Osijek, 2018.

[5] K. Škufca, *Distancijsko regularni grafovi*, Zagreb, 2022.

[6] E.W.Weisstein, *Distance-Regular Graph*, dostupno na https://mathworld.wolfram.com/Distance-RegularGraph.html (pristup sadržaju stranice: 22.03.2024.)

[7] E.W.Weisstein, *Strongly Regular Graph*, dostupno na https://mathworld.wolfram.com/StronglyRegularGraph.html (pristup sadržaju stranice: 04.05.2024.)

[8] E.W.Weisstein, *Grassmann Graph*, dostupno na https://mathworld.wolfram.com/GrassmannGraph.html (pristup sadržaju stranice: 02.06.2024.)

[9] E.W.Weisstein, *Hamming Graph*, dostupno na https://mathworld.wolfram.com/HammingGraph.html (pristup sadržaju stranice: 05.06.2024.)

[10] E.W.Weisstein, *Johnson Graph*, dostupno na https://mathworld.wolfram.com/JohnsonGraph.html (pristup sadržaju stranice: 06.06.2024.)

[11] E.W.Weisstein, *Cage Graph*, dostupno na https://mathworld.wolfram.com/CageGraph.html (pristup sadržaju stranice: 16.06.2024.)

[12] E.W.Weisstein, *Moore Graph*, dostupno na

https://mathworld.wolfram.com/MooreGraph.html (pristup sadržaju stranice: 16.06.2024.)