

Kvazisimetrični dizajni

Mikić, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:196:315730>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-22**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Ivana Mikić

Kvazisimetrični dizajni

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2024.

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Ivana Mikić

Kvazisimetrični dizajni

Mentor: izv. prof. dr. sc. Andrea Švob

Diplomski rad
Rijeka, rujan 2024.

SAŽETAK

U ovom radu proučavaju se kvazisimetrični dizajni, posebna vrsta dizajna koja nudi veću fleksibilnost u odnosu na simetrične dizajne. Razmotreni su osnovni pojmovi teorije dizajna i teorije grafova, s posebnim naglaskom na jako regularne grafove. Detaljno su analizirani kvazisimetrični dizajni, obuhvaćajući njihove definicije, primjere i osnovna svojstva, a istražena je i njihova povezanost s jako regularnim grafovima i kodovima. U praktičnom dijelu rada prikazana je primjena GAP-a za konstrukciju blokovnih grafova i generirajućih matrica kodova, uključujući funkcije za provjeru jake regularnosti grafova i analizu osnovnih svojstava dizajna.

Ključne riječi: kvazisimetrični dizajni, simetrični dizajni, incidencijske matrice, jako regularni grafovi, konstrukcija blokovnih grafova, linearni kodovi, generirajuće matrice.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Osnovni pojmovi	2
2.1	Osnovni pojmovi teorije dizajna	2
2.2	Osnovni pojmovi teorije grafova	8
2.2.1	Jako regularni grafovi	12
3	Kvazisimetrični dizajni	15
3.1	Veza kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova	23
3.2	Kvazisimetrični dizajni i kodovi	33
4	Primjeri u GAP-u	35
	Zaključak	45
	Popis slika	46
	Literatura	47
	Prilozi	50

1 Uvod

Teorija dizajna, kao važan dio kombinatorike, proučava matematičke strukture poznate kao dizajni. Ove strukture imaju široku primjenu u analizi i planiranju eksperimenata, teoriji kodiranja i računalnim znanostima. Njezini korijeni sežu u 18. stoljeće, kada je Leonhard Euler [9] 1782. godine postavio temelje za proučavanje kombinatornih problema istraživanjem latinskih kvadrata i problema *36 časnika*, što je dovelo do razvoja različitih vrsta dizajna. Značajan napredak postignut je sredinom 19. stoljeća, kada je Thomas Kirkman [17] 1847. godine doprinio razumijevanju Steinerovih sustava trojki, čime je postavio temelje za daljnji razvoj teorije dizajna.

Daljnji značajan doprinos dao je Ronald A. Fisher [10] 1926. godine, kada je pokazao kako ortogonalni latinski kvadrati mogu unaprijediti eksperimentalni dizajn. Fisher je također 1938. godine, zajedno s Frankom Yatesom [11], objavio važnu knjigu *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, koja je postavila temelje za mnoge statističke metode u istraživanju. Razvoj teorije dizajna dodatno je oblikovan 1939. godine radom Raj C. Bosea [2], koji je uspostavio teoriju balansiranih nepotpunih blokovnih dizajna i pritom uveo terminologiju važnu za mnoge moderne primjene.

U ovom radu fokusirat ćemo se na kvazisimetrične dizajne, specifičnu vrstu dizajna blisku simetričnim dizajnim. Kvazisimetrični dizajni su posebni po tome što postoje točno dva različita broja x i y takva da se svaka dva različita bloka dizajna sijeku u x ili y točaka. Ovo svojstvo pruža veću fleksibilnost u odnosu na simetrične dizajne, čime omogućuje rješavanje problema u situacijama gdje simetrični dizajni nisu primjenjivi.

Na početku diplomskog rada razmotrit će se osnovni pojmovi teorije dizajna i teorije grafova, s posebnim naglaskom na jako regularne grafove. Sljedeći dio rada posvećen je kvazisimetričnim dizajnim, uključujući konkretne primjere i dokazivanje njihovih osnovnih svojstava, kao i istraživanje njihove povezanosti s jako regularnim grafovima i kodovima.

Na kraju će biti predstavljena praktična primjena u GAP-u. Demonstrirat će se metode za konstrukciju blokovnih grafova i generirajućih matrica linearnih kodova iz incidencijskih matrica kvazisimetričnih dizajna.

2 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju navest ćemo osnovne pojmove i tvrdnje koje ćemo koristiti u nastavku ovog rada. Najprije ćemo navesti osnovne pojmove teorije dizajna te potom i osnovne pojmove teorije grafova. Dokaze teorema u potpoglavljima 2.1 i 2.2 koji su navedeni bez dokaza možete pronaći u [29] i [35].

2.1 Osnovni pojmovi teorije dizajna

Budući da su dizajni incidencijske strukture, započnimo s njihovom definicijom. **Incidencijska struktura** \mathcal{D} je uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, pri čemu je \mathcal{P} neprazni skup čije elemente nazivamo točkama, \mathcal{B} familija podskupova od \mathcal{P} čije elemente nazivamo blokovima i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$ relacija incidencije.

Definicija 2.1. *Neka su v, k i λ prirodni brojevi. Incidencijska struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ je t - (v, k, λ) **dizajn** ako vrijedi:*

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. svaki element skupa \mathcal{B} incidentan je s točno k elemenata skupa \mathcal{P} ,
3. svakih t elemenata skupa \mathcal{P} incidentno je s točno λ elemenata skupa \mathcal{B} .

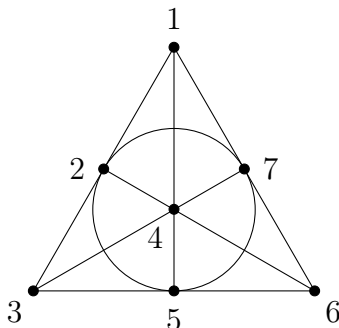
Ako su dva bloka u dizajnu jednaka, kažemo da se blokovi ponavljaju. Za dizajn ćemo reći da je jednostavan ako ne sadrži ponovljene blokove.

Definicija 2.2. *Neka su v, k i λ prirodni brojevi takvi da je $v > k \geq 2$. Incidencijska struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ je (v, k, λ) -**balansirani nepotpuni blok dizajn**, tj. (v, k, λ) -**BIBD** ako vrijedi:*

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. svaki element skupa \mathcal{B} incidentan je s točno k elemenata skupa \mathcal{P} ,
3. svaki par različitih elemenata skupa \mathcal{P} incidentno je s točno λ elemenata skupa \mathcal{B} .

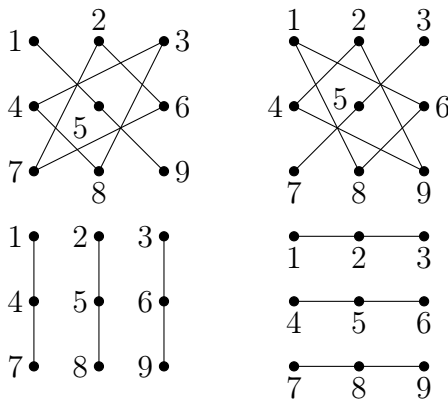
Napomena 2.1. (v, k, λ) -BIBD je zapravo blokovni (v, k, λ) dizajn, tj. t - (v, k, λ) dizajn za kojeg je $t = 2$.

Primjer 2.1. Na Slici 1 prikazan je $(7, 3, 1)$ -BIBD, poznat i kao Fanova ravnina. Vrijedi: $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ te $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}$.



Slika 1: Fanova ravnina

Primjer 2.2. Dizajne s parametrom $\lambda = 1$ nazivamo **Steinerovi dizajni**. Primjer jednog takvog dizajna je $(9, 3, 1)$ -BIBD sa skupom točaka $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ te familijom blokova $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}, \{1, 5, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}, \{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \{3, 5, 7\}\}$.



Slika 2: $(9, 3, 1)$ -BIBD

Teorem 2.1. Neka je $\mathcal{D} (v, k, \lambda)$ -BIBD. Svaka točka pojavljuje se u dizajnu \mathcal{D} točno

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} \quad (2.1)$$

puta te dizajn \mathcal{D} ima točno

$$b = \frac{vr}{k} = \frac{\lambda(v^2-v)}{k^2-k} \quad (2.2)$$

blokova.

Teorem 2.2. *Neka je incidencijska struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ dizajn s parametrima t - (v, k, λ) . Tada je \mathcal{D} ujedno s - (v, k, λ_s) dizajn, za svaki $s \in \{0, \dots, t\}$ i za*

$$\lambda_s = \lambda \cdot \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}. \quad (2.3)$$

Teorem 2.3 (Fisherova nejednakost). *Ako postoji (v, b, r, k, λ) -BIBD, onda vrijedi da je $b \geq v$.*

Iz Fisherove nejednakosti, primjenom (2.1) i (2.2), također slijedi $r \geq k$ te $\lambda(v - 1) \geq k^2 - k$.

Definicija 2.3. *Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ konačna incidencijska struktura takva da je $|\mathcal{P}| = v$ i $|\mathcal{B}| = b$. Označimo elemente skupa \mathcal{P} sa P_1, \dots, P_v i elemente skupa \mathcal{B} sa x_1, \dots, x_b . **Matrica incidencije** incidencijske strukture \mathcal{D} je $v \times b$ matrica $M = (m_{ij})$ za koju vrijedi:*

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & (P_i, x_j) \in \mathcal{I}, \\ 0, & (P_i, x_j) \notin \mathcal{I}. \end{cases}$$

Primjer 2.3. Matrica incidencije M dizajna s parametrima 2-(7, 3, 1) iz Primjera 2.1 je:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorem 2.4. *Neka je M $v \times b$ $(0-1)$ matrica. Matrica M je incidencijska matrica (v, b, r, k, λ) -BIBDa ako i samo ako vrijedi:*

1. $MM^T = \lambda J_v + (r - \lambda)I_v$,
2. $u_v M = k u_b$.

Napomena 2.2. Oznake iz prethodnog teorema koje ćemo koristiti u ostatku rada:

- I_n - $n \times n$ jedinična matrica,
- J_n - $n \times n$ matrica čiji su svi elementi jednaki 1,
- u_n - vektor duljine n čiji su svi elementi jednaki 1.

Definicija 2.4. Incidencijska struktura $\mathcal{D}^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{I}^*)$, gdje je $\mathcal{P}^* = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{P}$, $\mathcal{I}^* = \{(x, P) \mid (P, x) \in \mathcal{I}\}$ naziva se **dualna struktura** incidencijske strukture \mathcal{D} .

Definirajmo sada i posebnu vrstu dizajna, simetrične dizajne koje ćemo generalizirati u nastavku rada.

Definicija 2.5. Balansirani nepotpuni blokovni dizajn za kojeg vrijedi da je $b = v$ (ili ekvivalentno $r = k$, $\lambda(v - 1) = k^2 - k$) se naziva **simetrični BIBD**.

Primjer 2.4. $(7, 3, 1)$ -BIBD iz Primjera 2.1 je simetrični dizajn. Naime, iz (2.1) i (2.2) slijedi $b = 7$ pa vrijedi $b = v = 7$. S druge strane, $(6, 3, 2)$ -BIBD primjer je dizajna koji nije simetričan budući da vrijedi $10 = b \neq v = 6$.

Teorem 2.5. Neka je $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetrični (v, k, λ) -BIBD te neka je $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_v\}$. Tada vrijedi $|B_i \cap B_j| = \lambda$, za $1 \leq i, j \leq v$, $i \neq j$.

U nastavku prikazujemo načine konstrukcije novih dizajna iz postojećih.

Teorem 2.6 (Konstrukcija sumom). Ako postoje (v, k, λ_1) -BIBD i (v, k, λ_2) -BIBD, tada postoji i $(v, k, \lambda_1 + \lambda_2)$ -BIBD.

Korolar 2.1 (Konstrukcija višekratnika dizajna). Ako postoji (v, k, λ) -BIBD, tada postoji i $(v, k, s\lambda)$ -BIBD za svaki cijeli broj $s \geq 1$.

Uočimo da dizajni dobiveni Korolarom 2.1 nisu jednostavni, čak i kada je početni dizajn jednostavan, budući da sadrže ponovljene blokove.

Teorem 2.7 (Konstrukcija komplementarnog dizajna). Ako postoji (v, b, r, k, λ) -BIBD, onda postoji $(v, b, b - r, v - k, b - 2r + \lambda)$ -BIBD.

Definicija 2.6. Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetrični (v, k, λ) -BIBD i $B_0 \in \mathcal{B}$. Tada je

$$Der(\mathcal{P}, \mathcal{B}, B_0) = (B_0, \{B \cap B_0 \mid B \in \mathcal{B}, B \neq B_0\}, \mathcal{I})$$

derivirani dizajn dizajna \mathcal{D} s obzirom na blok B_0 . Dizajn

$$Res(\mathcal{P}, \mathcal{B}, B_0) = (\mathcal{P} \setminus B_0, \{B \setminus B_0 \mid B \in \mathcal{B}, B \neq B_0\}, \mathcal{I})$$

je *rezidualni dizajn* dizajna \mathcal{D} s obzirom na blok B_0 .

Teorem 2.8. Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetrični (v, k, λ) -BIBD i $B_0 \in \mathcal{B}$. Tada je $Res(\mathcal{P}, \mathcal{B}, B_0)$ $(v - k, v - 1, k, k - \lambda, \lambda)$ -BIBD.

Primjer 2.5. Neka je \mathcal{D} simetrični $(7, 3, 1)$ -BIBD iz Primjera 2.1 te neka je $B_0 = \{2, 4, 6\}$. Tada je $(4, 2, 1)$ -BIBD rezidualni dizajn dizajna \mathcal{D} obzirom na blok B_0 te vrijedi $\mathcal{P} = \{1, 3, 5, 7\}$ i $\mathcal{B} = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 5\}\}$.

Označimo parametre $(v - k, v - 1, k, k - \lambda, \lambda)$ rezidualnog dizajna s $(v', b', r', k', \lambda')$. Ti parametri zadovoljavaju jednakost $r' = k' + \lambda'$. (v, b, r, k, λ) -BIBD koji zadovoljava uvjet $r = k + \lambda$ nazivamo **kvazi-rezidualan dizajn**. Kvazi-rezidualni (v, b, r, k, λ) -BIBD može se konstruirati kao rezidualni BIBD simetričnog $(v + r, r, \lambda)$ -BIBDa pod uvjetom da takav dizajn postoji.

Primjer 2.6. Neka je \mathcal{D} dizajn s parametrima 2 - $(6, 3, 2)$ sa skupom točaka $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i familijom blokova $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}\}$. Ovaj dizajn je jedinstven za navedene parametre. Budući da iz (2.1) slijedi da je $r = 5$ i s obzirom na to da vrijedi $5 = r = k + \lambda = 3 + 2$, zaključujemo da je \mathcal{D} kvazi-rezidualan dizajn.

Opišimo sada i specijalnu vrstu dizajna, Hadamardove dizajne, koje ćemo koristiti u nastavku rada. Započet ćemo s definicijom Hadamardove matrice.

Definicija 2.7. *Hadamardova matrica* reda m je $m \times m$ matrica $H = [h_{i,j}]$, $h_{i,j} \in \{-1, 1\}$, za koju je $HH^T = mI_m$.

Primjer 2.7. Sljedeće matrice su Hadamardove matrice reda 1, 2 i 4, respektivno.

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, H_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naime, vrijedi $h_{i,j} \in \{-1, 1\}$ i

$$H_1 H_1^T = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, H_2 H_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } H_4 H_4^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teorem 2.9. *Hadamardova matrica reda m postoji ako i samo ako postoji $(m - 1, \frac{1}{2}m - 1, \frac{1}{4}m)$ -BIBD*

Simetričan blokovni dizajn s parametrima $(m - 1, \frac{1}{2}m - 1, \frac{1}{4}m - 1)$ naziva se **Hadamardov blokovni dizajn**.

Primjer 2.8. Dizajn s parametrima $2-(7, 3, 1)$ zadovoljava uvjet Teorema 2.9 za $m = 8$ pa zaključujemo da je riječ o Hadamardovu dizajnu. Odredimo stoga pripadnu Hadamardovu matricu reda 8.

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 2.8. *Dizajn $\mathcal{D}^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{I}^*)$ dobiven iz Hadamardovog $(m - 1, \frac{1}{2}m - 1, \frac{1}{4}m - 1)$ dizajna na sljedeći način:*

- $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$,
- $\mathcal{B}^* = \{B \cup \{\infty\} \mid B \in \mathcal{B}\} \cup \{P \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$,

je $3-(m, \frac{1}{2}m, \frac{1}{4}m - 1)$ dizajn i naziva se **Hadamardov 3-dizajn**.

Primjer 2.9. U Primjeru 2.8 pokazali smo da je dizajn s parametrima $2-(7, 3, 1)$ Hadamardov dizajn. Odredimo stoga i Hadamardov 3-dizajn koji je dobiven iz ovog dizajna. Za skup točaka i familiju blokova vrijedi:

- $\mathcal{P} = \{\infty, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
- $\mathcal{B} = \{\{\infty, 1, 2, 3\}, \{\infty, 1, 4, 5\}, \{\infty, 1, 6, 7\}, \{\infty, 2, 4, 6\}, \{\infty, 2, 5, 7\}, \{\infty, 3, 4, 7\}, \{\infty, 3, 5, 6\}\} \cup \{\{4, 5, 6, 7\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 7\}\}$.

Dobiveni Hadamardov 3-dizajn ima parametre 3-(8, 4, 1) i matricu incidencije:

$$M' = \left[\begin{array}{cccccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

2.2 Osnovni pojmovi teorije grafova

U nastavku rada ćemo opisati vezu grafova i kvazisimetričnih dizajna, stoga u nastavku navodimo osnovne definicije i tvrdnje vezane uz grafove.

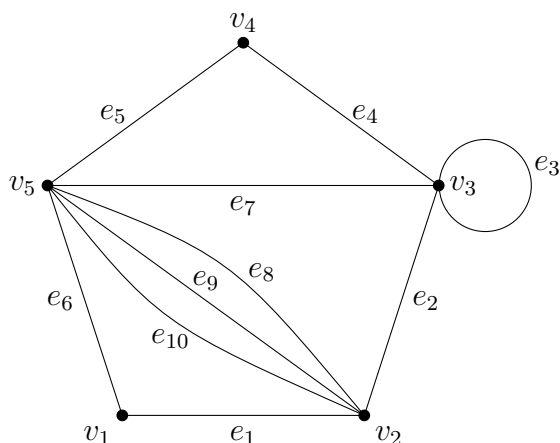
Definicija 2.9. *Graf* G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, koja se sastoji od nepraznog skupa $V = V(G)$, čije elemente nazivamo **vrhovima** grafa G , skupa $E = E(G)$ disjunktne s $V(G)$, čiji su elementi **bridovi** od G i **funkcije incidencije** ψ_G , koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par, ne nužno različitih, vrhova od G .

Ako za $e \in E(G)$ i $u, v \in V(G)$ vrijedi $\psi_G(e) = uv$, tada kažemo da brid e **spaja** vrhove u i v te da su u i v **krajevi** brida e . Također, u tom slučaju kažemo i da su vrhovi u i v **incidentni** s bridom e , i obratno, te da su ti vrhovi **susjedni**.

Brid kojemu se krajevi podudaraju nazivamo **petlja**, dok brid kojemu su krajevi različiti nazivamo **pravi brid** ili **karika**. Ukoliko dva ili više bridova imaju isti par krajeva, nazivamo ih **višestruki bridovi**.

Stupanj vrha v grafa G je broj bridova od G incidentnih s vrhom v , pri čemu se svaka petlja računa kao dva brida. Stupanj vrha v označavamo s $d_G(v)$, ali možemo pisati $d(v)$ umjesto $d_G(v)$ ukoliko je jasno o kojem se grafu radi.

Primjer 2.10. Na Slici 3 prikazan je primjer grafa G sa skupom vrhova $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ te skupom bridova $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.



Slika 3: Primjer grafa G

Matrični prikaz relacija incidencije i susjedstva u grafu često može biti vrlo koristan. Stoga ćemo definirati matricu incidencije i matricu susjedstva. Neka je G graf sa skupom vrhova $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ te skupom bridova $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Definicija 2.10. *Matrica incidencije grafa G je $n \times m$ matrica $M = M(G) = [m_{ij}]$, gdje je $m_{ij} \in \{0, 1, 2\}$ broj koji označava koliko su puta vrh v_i i brid e_j incidentni.*

Napomena 2.3. Za elemente m_{ij} matrice incidencije grafa vrijedi:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{vrh } v_i \text{ i brid } e_j \text{ nisu incidentni,} \\ 1, & \text{brid } e_j \text{ je pravi brid incidentan s vrhom } v_i, \\ 2, & \text{brid } e_j \text{ je petlja u vrhu } v_i. \end{cases}$$

Također vrijedi da je suma elemenata u retku matrice $M(G)$ jednaka stupnju odgovarajućeg vrha te da je suma elemenata u stupcu jednaka 2 budući da svaki brid ima 2 kraja.

Primjer 2.11. Odredimo matricu incidencije grafa G prikazanog u Primjeru 2.10.

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 2.11. *Matrica susjedstva* grafa G je $n \times n$ matrica $A = A(G) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj bridova koji spajaju vrhove v_i i v_j .

Napomena 2.4. Matrica susjedstva $A(G)$ je simetrična matrica čiji su članovi ne-negativni cijeli brojevi.

Primjer 2.12. Odredimo sada i matricu susjedstva $A(G)$ grafa G iz Primjera 2.10.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

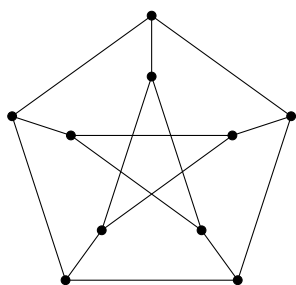
Ukoliko je zadan poredak vrhova i bridova grafa, matrica incidencije i matrica susjedstva su jedinstvene te u potpunosti određuju graf.

Definirajmo sada i neke vrste grafova koje ćemo spominjati u nastavku rada. Kažemo da je graf **jednostavan** ukoliko nema petlje i višestruke bridove. Jednostavan graf u kojemu je svaki par vrhova spojen bridom naziva se **potpun graf** te ga označavamo s K_n , pri čemu je $n = |V(G)|$. Ukoliko graf nije potpun, kažemo da je graf **nepotpun**. Nadalje, kažemo da je graf G d -regularan ako je $d(v) = d$, za svaki $v \in V(G)$, a **regularan** ako je d -regularan za neki $d \geq 0$.

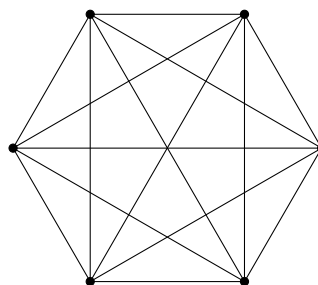
Pored toga, za graf G kažemo da je **bipartitan** ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X , a drugi u Y . Particija (X, Y) zove se biparticija grafa. Regularan bipartitni graf stupnja

1 zovemo *ljestve*¹, a njegov komplement *cocktail party graf*. S druge strane, **potpun bipartitni** graf jednostavan je bipartitni graf s biparticijom (X, Y) u kojem je svaki vrh iz X spojen sa svakim vrhom iz Y . Ako je $|X| = m$ i $|Y| = n$, takav graf označava se s $K_{m,n}$.

Primjer 2.13. Petersenov graf prikazan na Slici 4 je regularan budući da je svaki vrh stupnja 3. Nadalje, s obzirom da postoje vrhovi koji nisu susjedni, graf je nepotpun. S druge strane, graf K_6 prikazan na Slici 5 ujedno je i potpun i 5-regularan graf.

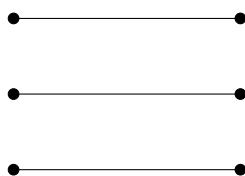


Slika 4: Petersenov graf



Slika 5: Potpuni graf K_6

Primjer 2.14. Na Slici 6 prikazan je primjer grafa kojeg zovemo ljestve.



Slika 6: Graf ljestve

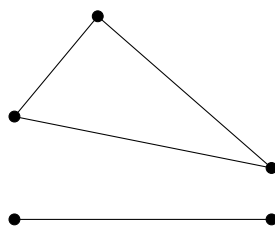
Kako bi definirali i povezane grafove, najprije moramo navesti definiciju puta u grafu.

Definicija 2.12. *Put* u grafu G je konačan niz $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$, čiji su članovi naizmjenice međusobno različiti vrhovi v_j i međusobno različiti bridovi e_i grafa G , gdje su krajevi brida e_i vrhovi v_{i-1} i v_i , za $i = 1, \dots, k$.

Kažemo da su dva vrha povezana u grafu G ako postoji put između njih te kažemo da je graf **povezan** ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem.

¹engl. *ladder graph*

Primjer 2.15. Grafovi prikazani na Slikama 3, 4 i 5 su primjeri povezanih grafova. S druge strane, graf prikazan na Slici 7 primjer je nepovezanog grafa.

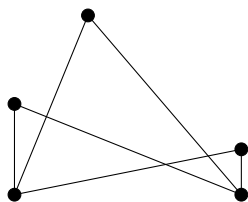


Slika 7: Primjer nepovezanog grafa

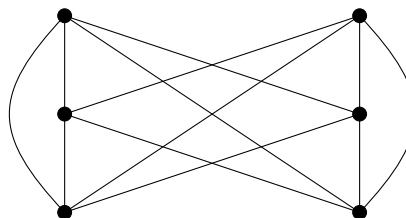
Definicija 2.13. *Komplementaran graf* jednostavnog grafa G je jednostavan graf s istim skupom vrhova V , u kojem su dva vrha susjedna ako i samo ako nisu susjedna u G .

Komplementaran graf grafa G označavamo s G^c ili \overline{G} .

Primjer 2.16. Na Slikama 8 i 9 prikazani su komplementarni grafovi grafova iz Primjera 2.15 i 2.14, respektivno.



Slika 8: Komplementaran graf



Slika 9: Cocktail party graf

2.2.1 Jako regularni grafovi

Kao što je već navedeno ranije, u radu će se posebno opisati veza kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova. Definirajmo stoga i jako regularne grafove.

Definicija 2.14. Za graf G kažemo da je **jako regularan**² s parametrima $SRG(v, a, c, d)$ ako je a -regularan graf reda v te ako zadovoljava sljedeća dva uvjeta:

- (i) svaka dva susjedna vrha imaju c zajedničkih susjeda,
- (ii) svaka dva nesusjedna vrha imaju d zajedničkih susjeda.

²engl. *strongly regular graph*

Primjer 2.17. Ispitajmo je li Petersenov graf prikazan na Slici 4 jako regularan. U Primjeru 2.13 pokazali smo da je Petersenov graf 3-regularan. Nadalje, uočimo da svaka dva susjedna vrha nemaju zajedničkih susjeda, dok svaka dva nesusjedna vrha dijele jednog zajedničkog susjeda. Stoga zaključujemo da je Petersenov graf jako regularan graf s parametrima $SRG(10, 3, 0, 1)$.

Pokažimo sada da je komplement jako regularnog grafa G također jako regularan i istražimo kako su parametri komplementarnog grafa \overline{G} povezani s parametrima grafa G .

Propozicija 2.1. *Neka je G jako regularan graf s parametrima $SRG(v, a, c, d)$. Tada je i njegov komplement \overline{G} jako regularan s parametrima $SRG(v, v - 1 - a, v - 2a + d - 2, v - 2a + c)$.*

Dokaz: Budući da su u komplementarnom grafu \overline{G} vrhovi susjedni s vrhovima s kojima nisu susjedni u grafu G , komplement grafa je regularan stupnja $\bar{a} = v - 1 - a$. Nadalje, ako su dva vrha u G nesusjedna, tada su ukupno susjedna s $2a - d$ vrhova. To znači da oba vrha nisu susjedna s $v - 2a + d - 2$ vrhova u G , što predstavlja parametar \bar{c} komplementa. Analogno tome možemo odrediti parametar $\bar{d} = v - 2a + c$. \square

Navedimo sada posebnu vrstu jako regularnih grafova koju ćemo spominjati u nastavku.

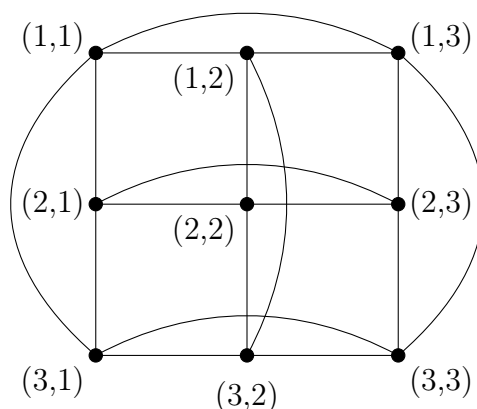
Definicija 2.15. *Rešetkasti graf³ $L_2(n)$, za $n > 2$, ima skup vrhova $S \times S$, gdje je S skup s kardinalnošću n . Dva različita vrha (i_1, j_1) i (i_2, j_2) su povezana bridom ako i samo ako imaju zajedničku koordinatu, tj. ako i samo ako je $i_1 = i_2$ ili $j_1 = j_2$.*

Napomena 2.5. Graf $L_2(n)$ je jako regularan s parametrima $SRG(n^2, 2(n - 1), n - 2, 2)$. Naime, graf $L_2(n)$ kao skup vrhova ima skup $S \times S$, pri čemu je S n -člani skup pa direktno slijedi da $L_2(n)$ ima n^2 vrhova. Nadalje, ako u proizvoljnom vrhu (i, j) fiksiramo koordinatu i , tada je vrh (i, j) susjedan s još $n - 1$ vrhova (i, l) , pri čemu je $l \neq j$. Analogno, ako fiksiramo koordinatu j , tada je vrh (i, j) susjedan s još $n - 1$ vrhova (k, j) , gdje je $k \neq i$. Dakle, slijedi da je svaki vrh stupnja $2(n - 1)$. Potom, ako pretpostavimo da su proizvoljni vrhovi (i_1, j_1) i (i_2, j_2) susjedni, tada

³engl. *lattice graph*

vrijedi ili $i_1 = i_2 = i$ ili $j_1 = j_2 = j$. U oba slučaja, vrhovi (i_1, j_1) i (i_2, j_2) imaju $n - 2$ zajedničkih susjeda: (i, l) , za $l \neq j_1, j_2$ u prvom ili (k, j) , za $k \neq i_1, i_2$ u drugom slučaju. Konačno, ako su vrhovi (i_1, j_1) i (i_2, j_2) nesusjedni tada su im jedini zajednički susjedi vrhovi (i_1, j_2) i (i_2, j_1) .

Primjer 2.18. Neka je $S = \{1, 2, 3\}$. Tada je skup vrhova rešetkastog grafa $L_2(3)$ definiran kao $V = S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Graf $L_2(3)$ prikazan je na slici u nastavku.



Slika 10: Graf $L_2(3)$

U nastavku navodimo svojstvo matrice susjedstva jako regularnih grafova. Također navodimo teorem koji opisuje da, za određene tipove jako regularnih grafova, graf ili njegov komplement je ili *graf ljestve* ili zadovoljava specifične parametre, što je dokazano u [7]. Ovo svojstvo i teorem bit će korišteni pri dokazivanju teorema koji slijede.

Propozicija 2.2. *Simetrična $(0, 1)$ -matrica A je matrica susjedstva jako regularnog grafa s parametrima $SRG(v, a, c, d)$ ako i samo ako*

$$A^2 = aI + cA + d(J - I - A). \quad (2.4)$$

Dokaz: Uočimo da A_{ij}^2 odgovara broju zajedničkih susjeda vrhova i i j . Stoga, prema definiciji jako regularnih grafova, zaključujemo da vrijedi jednakost (2.4). \square

Teorem 2.10. *Neka je G jako regularan graf s $n = 2m$ vrhova čije svojstvene vrijednosti imaju kratnosti 1, $m - 1$ i m . Tada vrijedi jedno od sljedećeg:*

(i) *G ili njegov komplement je graf ljestve,*

(ii) *G ili njegov komplement ima parametre $n = 4s^2 + 4s + 2$, $a = s(2s + 1)$, $c = s^2 - 1$, $d = s^2$, za neki pozitivan cijeli broj s .*

3 Kvazisimetrični dizajni

U ovom poglavlju ćemo istražiti posebnu vrstu dizajna – kvazisimetrične dizajne. Osim što ćemo definirati kvazisimetrične dizajne, razmotrit ćemo konkretne primjere i dokazati neka njihova osnovna svojstva.

Neka je $\mathcal{D} t\text{-}(v, k, \lambda)$ dizajn s blokovima B_1, \dots, B_b . Kardinalne brojeve $|B_i \cap B_j|$, $i \neq j$, nazivamo **presječnim brojevima** dizajna \mathcal{D} . Definiranje nekih od presječnih brojeva ponekad može pružiti vrlo korisne informacije o dizajnu. Primjerice, prema Teoremu 2.5, svaki 2-dizajn s točno jednim presječnim brojem je simetričan. U ovom radu opisat ćemo dizajne koji su „bliski” simetričnim dizajnim.

Primjer 3.1. Odredimo presječne brojeve dizajna \mathcal{D} s parametrima $2\text{-}(9, 4, 3)$. Dizajn \mathcal{D} ima skup točaka $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, 9\}$ te familiju blokova $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 4, 7\}, \{1, 2, 5, 9\}, \{1, 2, 6, 8\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 8\}, \{1, 3, 7, 9\}, \{1, 4, 8, 9\}, \{1, 5, 6, 7\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 6, 8\}, \{2, 3, 7, 9\}, \{2, 4, 7, 8\}, \{2, 5, 6, 9\}, \{3, 4, 6, 9\}, \{3, 5, 7, 8\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{4, 5, 8, 9\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$.

Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} |\{2, 3, 4, 5\} \cap \{6, 7, 8, 9\}| &= 0, & |\{1, 2, 4, 7\} \cap \{1, 3, 5, 8\}| &= 1, \\ |\{1, 2, 4, 7\} \cap \{1, 2, 5, 9\}| &= 2, & |\{1, 2, 4, 7\} \cap \{2, 4, 7, 8\}| &= 3. \end{aligned}$$

Na analogan način može se provjeriti da će kardinalni brojevi presjeka svaka dva međusobno različita bloka dizajna \mathcal{D} poprimiti vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3\}$ pa možemo zaključiti da dizajn ima četiri presječna broja 0, 1, 2 i 3.

Definicija 3.1. *$t\text{-}(v, k, \lambda)$ dizajn s točno dva presječna broja nazivamo **kvazisimetrični dizajn**.*

Drugim riječima, za dizajn kažemo da je kvazisimetričan ako postoje brojevi $0 \leq x < y$ takvi da se svaka dva bloka sijeku u x ili y točaka.

Napomena 3.1. Ako je \mathcal{D} kvazisimetričan $2-(v, k, \lambda)$ dizajn, tada je i komplementarni dizajn $\overline{\mathcal{D}}$ kvazisimetričan $2-(v, v - k, b - 2r + \lambda)$ dizajn. Naime, neka su x i y presječni brojevi dizajna \mathcal{D} takvi da vrijedi $x < y$. Tada za skupove $\overline{B_i}$ i $\overline{B_j}$, za koje vrijedi $|B_i \cap B_j| = x$, iz De Morganovih⁴ zakona⁵ slijedi

$$\begin{aligned}\bar{x} &= |\overline{B_i} \cap \overline{B_j}| \\ &= |(B_i \cup B_j)^c| \\ &= |\mathcal{P}| - |B_i| - |B_j| + |B_i \cap B_j| \\ &= v - 2k + x.\end{aligned}$$

Analogno, ako za skupove $\overline{B_i}$ i $\overline{B_j}$ vrijedi $|B_i \cap B_j| = y$, tada imamo

$$\bar{y} = v - 2k + y,$$

pri čemu vrijedi $\bar{x} < \bar{y}$.

Primjer 3.2. Budući da dizajn \mathcal{D} iz Primjera 3.1 ima četiri presječna broja, zaključujemo da nije kvazisimetričan.

Primjer 3.3. Neka je \mathcal{D} višekratnik simetričnog $2-(v, k, \lambda)$ dizajna. Tada je \mathcal{D} kvazisimetričan $2-(v, k, m\lambda)$ dizajn, pri čemu je $m \geq 2$, za koji vrijedi $x = \lambda$ i $y = k$. Naime, budući da je \mathcal{D} višekratnik simetričnog $2-(v, k, \lambda)$ dizajna, prema Teoremu 2.5 slijedi da su presječni brojevi jednaki λ za različite blokove dizajna \mathcal{D} . Ukoliko promatramo jednake blokove, presječni brojevi bit će jednaki k .

U nastavku ćemo pokazati da vrijedi i obrat tvrdnje koju smo koristili u Primjeru 3.3.

⁴Augustus De Morgan (1806. – 1871.), britanski matematičar i logičar koji je značajno pridonio razvoju simboličke logike i algebre te definirao matematičku indukciju.

⁵De Morganovi zakoni: za skupove A i B vrijedi

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Propozicija 3.1. *Ako kvazisimetrični 2- (v, k, μ) dizajn \mathcal{D} ima presječne brojeve k i λ , tada je \mathcal{D} višekratnik simetričnog (v, k, λ) dizajna.*

Dokaz: Neka je \mathcal{D} kvazisimetričan 2- (v, k, μ) dizajn s presječnim brojevima k i λ te neka je A proizvoljan blok dizajna \mathcal{D} . Označimo sa s broj blokova koji se podudaraju s blokom A u k točaka. Nadalje, definirajmo skup $I := \{(x, B) : x \in A \cap B, B \neq A\}$. Odredimo $|I|$ prebrojavanjem na dva načina.

1. Točku x možemo odabrati na k načina, a svaka točka x se nalazi u $r - 1$ blokova različitih od bloka A . Slijedi $|I| = k(r - 1)$.
2. Znamo da imamo s blokova koji se s blokom A podudaraju u k točaka. Preostalih blokova, različitih od bloka A , imamo $b - s - 1$, a u svakom bloku imamo λ točaka koje se nalaze i u bloku A . Slijedi $|I| = sk + (b - s - 1)\lambda$.

Iz navedenog dobivamo jednadžbu

$$k(r - 1) = |I| = sk + (b - s - 1)\lambda$$

koja ima jedinstveno rješenje

$$s = \frac{k(r - 1) + \lambda(1 - b)}{k - \lambda}$$

koje ne ovisi o bloku A . Zaključujemo da se svi blokovi ponavljaju s puta, tj. da je dizajn \mathcal{D} s -višekratnik 2-dizajna s jedinstvenim presječnim brojem. Slijedi da je \mathcal{D} s -višekratnik simetričnog dizajna. \square

Primjer 3.4. Neka je \mathcal{D} proizvoljan $(v, k, 1)$ -BIBD takav da je $b > v$. Tada je \mathcal{D} kvazisimetričan dizajn s presječnim brojevima $x = 0$ i $y = 1$. Naime, neka su A i B proizvoljni blokovi dizajna \mathcal{D} takvi da vrijedi $A \neq B$. Označimo sa x_1, \dots, x_k točke bloka A te fiksirajmo točku x_i , za $i \in \{1, \dots, k\}$. Ukoliko se točka x_i nalazi u bloku B , tada, budući da je λ jednak 1, znamo da se točke $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$ ne nalaze u bloku B pa slijedi $|A \cap B| = 1$. Nadalje, ukoliko se točke bloka A ne nalaze u bloku B , vrijedi $|A \cap B| = 0$.

Napomena 3.2. Pokažimo da vrijedi i obrat tvrdnje iz prethodnog primjera, tj. da ako za presječne brojeve vrijedi $x = 0$ i $y = 1$, tada nužno slijedi da je $\lambda = 1$. Naime, neka su x_1 i x_2 dvije proizvoljne točke dizajna \mathcal{D} . Točke x_1 i x_2 ne mogu biti prisutne zajedno u više od jednog bloka jer bi u tom slučaju vrijedilo $y > 1$. Stoga, broj blokova u kojima se pojavljuju proizvoljne dvije točke, tj. λ , mora biti 1.

Prije nego što navedemo još jedan primjer kvazisimetričnih dizajna u Propoziciji 3.2, dokazat ćemo pomoćnu tvrdnju koja će nam trebati u dokazu.

Lema 3.1. *Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ (v, k, λ) -dizajn i neka je $A \in \mathcal{B}$. Za $i = 0, 1, \dots, k$, s n_i označimo broj blokova $B \in \mathcal{B} \setminus \{A\}$ za koje vrijedi $|A \cap B| = i$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k n_i &= b - 1, \\ \sum_{i=0}^k i n_i &= k(r - 1), \\ \sum_{i=0}^k i(i - 1) n_i &= k(k - 1)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Dokaz: Prva jednakost je očita. Druga jednakost dobivena je prebrojavanjem na dva načina uređenih parova (x, B) , gdje je $B \in \mathcal{B} \setminus \{A\}$ i $x \in A \cap B$. Naime, točku x možemo odabrati na k načina, a svaka točka x se nalazi u još $r - 1$ blokova različitih od bloka A . Nadalje, blok B koji ima zajedničke točke s blokom A možemo odabrati na $n_1 + \dots + n_k$ načina, dok se u n_i blokova nalazi i točaka x za koje vrijedi $x \in A \cap B$. Analogno prethodnoj jednakosti, prebrojavanjem na dva načina uređenih trojki (x, y, B) , gdje je $B \in \mathcal{B} \setminus \{A\}$, $x \neq y$ i $x, y \in A \cap B$ dobivamo posljednju jednakost. \square

Propozicija 3.2. *Svaki kvazi-rezidualni 2 - $(v, k, 2)$ dizajn je kvazisimetričan s presječnim brojevima $x = 1$ i $y = 2$.*

Dokaz: Neka je \mathcal{D} kvazi-rezidualni $(v, b, r, k, 2)$ -BIBD. Parametri dizajna \mathcal{D} su:

$$r = k + 2, \quad v = \frac{k(k + 1)}{2} = \binom{k + 1}{2}, \quad b = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \binom{k + 2}{2}.$$

Fiksirajmo blok A dizajna \mathcal{D} te s n_i , za $i = 0, 1, \dots, k$, označimo broj blokova B različitih od bloka A takvih da vrijedi $|A \cap B| = i$. Prema Lemi 3.1 vrijede sljedeće

jednakosti:

$$\sum_{i=0}^k n_i = b - 1 = \binom{k+2}{2} - 1 = \frac{k(k+3)}{2}, \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=0}^k i n_i = k(r-1) = k(k+1), \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=0}^k i(i-1)n_i = k(k-1)(\lambda-1) = k(k-1). \quad (3.3)$$

Promotrimo izraz

$$Q = \sum_{i=0}^k (i-1)(i-2)n_i = 2n_0 + 2n_3 + 6n_4 + \dots + (k-1)(k-2)n_k.$$

Budući da vrijedi $(i-1)(i-2)n_i = i(i-1)n_i - 2in_i + 2n_i$, uvrštavanjem izraza (3.1), (3.2) i (3.3) dobivamo

$$Q = \sum_{i=0}^k i(i-1)n_i - 2 \sum_{i=0}^k i n_i + 2 \sum_{i=0}^k n_i = k(k-1) - 2k(k+1) + 2 \cdot \frac{k(k+3)}{2} = 0.$$

Dakle, $n_0 = n_3 = n_4 = \dots = n_k = 0$, tj. $n_i = 0$, za $i \neq 1, 2$. Budući da \mathcal{D} nije simetričan, vrijedi da mora imati barem dva presječna broja. Stoga, zaključujemo da je \mathcal{D} kvazisimetrični dizajn s presječnim brojevima $x = 1$ i $y = 2$. \square

Napomena 3.3. Iz (3.1) i (3.2) dobijemo sljedeći sustav jednažbi

$$n_1 + n_2 = \frac{k(k+3)}{2},$$

$$n_1 + 2n_2 = k(k+1),$$

čija su rješenja

$$n_1 = 2k \quad \text{i} \quad n_2 = \binom{k}{2}.$$

Drugim riječima, zaključujemo da $2k$ blokova sijeku blok A u jednoj, a $\binom{k}{2}$ blokova sijeku blok A u dvije točke.

U prethodnoj napomeni smo za svaki kvazi-rezidualni 2 - $(v, k, 2)$ dizajn odredili koliko blokova sijeku fiksni blok dizajna u jednoj, odnosno u dvije točke. Odredimo sada te vrijednosti i za proizvoljan kvazisimetrični dizajn.

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ kvazisimetričan dizajn s presječnim brojevima x i y te neka je $B_0 \in \mathcal{B}$ fiksni blok dizajna \mathcal{D} . Označimo s n_x broj blokova koji sijeku blok B_0 u x točaka te s n_y broj blokova koji sijeku blok B_0 u y točaka. Tada vrijedi

$$n_x + n_y = b - 1. \quad (3.4)$$

Nadalje, definirajmo skup $I := \{(T, B) : T \in B_0 \cap B, B \neq B_0\}$ te odredimo $|I|$ prebrojavanjem na dva načina. Točku T možemo odabrati na k načina, dok se svaka točka nalazi u $r-1$ blokova različitih od bloka B_0 . Nadalje, blok B koji nije disjunktan s blokom B_0 možemo odabrati na $n_x + n_y$ načina te se u n_x blokova nalazi x točaka T , a u n_y blokova y točaka T za koje vrijedi $T \in B_0 \cap B$. Iz navedenog slijedi

$$xn_x + yn_y = k(r - 1). \quad (3.5)$$

Jednadžbe (3.4) i (3.5) imaju jedinstveno rješenje

$$n_x = \frac{y(b-1) - k(r-1)}{y-x} \quad \text{i} \quad n_y = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x} \quad (3.6)$$

koje ne ovisi o izboru bloka B_0 . Zaključujemo da $\frac{y(b-1)-k(r-1)}{y-x}$ blokova sijeku proizvoljni blok u x , a $\frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x}$ blokova sijeku proizvoljan blok u y točaka.

U Propoziciji 3.1 pokazali smo da ako kvazisimetrični dizajn ima presječne brojeve k i λ , tada je taj dizajn višekratnik simetričnog dizajna. Pokazat ćemo da isti zaključak vrijedi i za kvazisimetrični dizajn s ponovljenim blokovima.

Propozicija 3.3. *Neka je \mathcal{D} kvazisimetrični dizajn s ponovljenim blokovima. Tada je \mathcal{D} višekratnik simetričnog dizajna.*

Dokaz: Pretpostavimo da dizajn \mathcal{D} s parametrima (v, k, λ) ima ponovljene blokove. Tada je $y = k$ i svaki blok se ponavlja $m = n_y + 1$ puta, pri čemu je n_y definiran kao u (3.6). Stoga, \mathcal{D} je m -strukli višekratnik nekog t - $(v, k, \frac{\lambda}{m})$ dizajna u kojem se svaka dva bloka sijeku u $x = \frac{\lambda}{m}$ točaka. Prema Teoremu 2.5, taj dizajn je simetričan. \square

Sljedeća dva rezultata pružaju korisne odnose i nejednakosti među parametrima kvazisimetričnih dizajna, pretpostavljajući određene vrijednosti presječnih brojeva.

Propozicija 3.4. *Neka su x i y presječni brojevi kvazisimetričnog dizajna s parametrima v, b, r, k, λ .*

(i) *Ako je $x = 0$, tada vrijedi $(r - 1)(y - 1) = (k - 1)(\lambda - 1)$.*

(ii) *Ako je $x = 0$, tada vrijedi $b \leq \frac{v(v-1)}{k}$ i $y \leq \lambda$.*

(iii) *Ako su $x = 0$ i $y = 1$, tada vrijedi $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.*

Dokaz:

(iii) Iz relacija (2.1) i (2.2) slijedi:

$$b = \frac{v(v-1)\lambda}{k(k-1)}.$$

Prema Napomeni 3.2, ako su presječni brojevi $x = 0$ i $y = 1$, tada nužno slijedi $\lambda = 1$. Time je dokazana tvrdnja (iii).

(i) Pretpostavimo da za kvazisimetrični dizajn vrijedi $x = 0$. Neka je p proizvoljna točka i \mathcal{D}_p derivirana konfiguracija. Točke u \mathcal{D}_p su točke iz \mathcal{D} osim točke p , dok su blokovi u \mathcal{D}_p blokovi iz \mathcal{D} koji sadrže p . Tada \mathcal{D}_p ima $v - 1$ točaka, r blokova, veličinu bloka $k - 1$ te se svaka točka iz \mathcal{D}_p nalazi u λ blokova. Budući da je $x = 0$, dual dizajna \mathcal{D}_p je dizajn s parametrima $(r, v - 1, k - 1, \lambda, y - 1)$. Stoga iz (2.1) slijedi jednakost $(r - 1)(y - 1) = (k - 1)(\lambda - 1)$.

(ii) Primjenom Fisherove nejednakosti 2.3 na dual dizajna \mathcal{D}_p dobivamo $v - 1 \geq r$ iz čega slijedi $b \leq \frac{v(v-1)}{k}$. $y \leq \lambda$ slijedi iz (i) i $r \geq k$. \square

U nastavku navodimo posljednicu prethodne propozicije koju su dokazali Cameron⁶ i van Lint⁷ [7].

Korolar 3.1. *Neka je \mathcal{D} dizajn s parametrima 2 - (v, k, λ) takav da vrijedi $2 < k < v - 1$. Tada bilo koje dvije od sljedeće tri tvrdnje impliciraju treću tvrdnju.*

(i) \mathcal{D} je 3-dizajn,

⁶Peter Jephson Cameron (1947. -), australski profesor matematike na Sveučilištu St Andrews te profesor emeritus na Queen Mary Sveučilištu u Londonu.

⁷Jacobus Hendricus van Lint (1932. - 2004.), nizozemski matematičar rođen u Indoneziji koji je radio u teoriji brojeva, kao i u kombinatorici i teoriji kodiranja.

(ii) \mathcal{D} je kvazisimetričan dizajn s $x = 0$,

(iii) $b = \frac{v(v-1)}{k}$.

Nadalje, vrijedi i da je \mathcal{D} proširenje simetričnog 2-dizajna.

Osim uvjeta navedenih u Propoziciji 3.4, parametri i brojevi presjeka kvazisimetričnog dizajna zadovoljavaju sljedeću jednadžbu.

Propozicija 3.5. *U svakom kvazisimetričnom 2 - (v, k, λ) dizajnu \mathcal{D} s presječnim brojevima x i y vrijedi*

$$k(r-1)(x+y-1) + xy(1-b) = k(k-1)(\lambda-1). \quad (3.7)$$

Dokaz: Neka je A proizvoljan blok dizajna \mathcal{D} . Za blok A vrijedi da n_y blokova sijeku A u y točaka, dok se preostalih $b-1-n_y$ blokova siječe s A u x točaka, pri čemu je n_y definiran kao u (3.6). Prebrojavanjem parova (p, B) na dva načina, gdje je B blok dizajna \mathcal{D} različit od bloka A i gdje je $p \in A \cap B$, dobivamo

$$yn_y + (b-1-n_y)x = k(r-1). \quad (3.8)$$

Analogno, dvostrukim prebrojavanjem trojki (p, q, B) , gdje je B blok dizajna \mathcal{D} različit od bloka A , $p, q \in A \cap B$ i $p \neq q$, dobivamo

$$y(y-1)n_y + (b-1-n_y)x(x-1) = k(k-1)(\lambda-1). \quad (3.9)$$

Nadalje, iz jednadžbe (3.8) slijedi

$$n_y = \frac{k(r-1) + x(1-b)}{y-x},$$

dok iz jednadžbe (3.9) slijedi

$$n_y = \frac{k(k-1)(\lambda-1) + x(x-1)(1-b)}{y(y-1) - x(x-1)}.$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih dvaju izraza za n_y slijedi jednakost (3.7). □

3.1 Veza kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova

U ovom potpoglavlju razmotrit ćemo povezanost između kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova. Započet ćemo s Boseovim⁸ rezultatom [3] koji uspostavlja vezu između jako regularnih grafova i Steinerovih 2-dizajna, pružajući osnovu za razumijevanje tih struktura. Nakon toga, proširit ćemo ovu konstrukciju na proizvoljne kvazisimetrične dizajne. Također ćemo obuhvatiti osnovna svojstva kvazisimetričnih dizajna i njihovih blokovnih grafova te analizirati kako ove karakteristike utječu na njihovu povezanost s jako regularnim grafovima.

Propozicija 3.6. *Neka je \mathcal{D} dizajn s parametrima $2-(v, k, 1)$ takav da je $b > v$. Nadalje, neka je $\Gamma(\mathcal{D})$ graf dobiven iz \mathcal{D} tako da blokovi predstavljaju vrhove, pri čemu su dva vrha susjedna ako se odgovarajući blokovi sijeku. Tada je $\Gamma(\mathcal{D})$ jako regularan graf s b vrhova i parametrima:*

$$a = k(r - 1), \quad c = r - 2 + (k - 1)^2, \quad d = k^2.$$

Dokaz: Svaki vrh grafa $\Gamma(\mathcal{D})$ je stupnja $k(r - 1)$ budući da se svaka od k točaka nalazi u još $r - 1$ blokova. Potom, neka su B_1 i B_2 blokovi koji odgovaraju susjednim vrhovima grafa $\Gamma(\mathcal{D})$. Iz Primjera 3.4 znamo da se blokovi B_1 i B_2 sijeku u jednoj točki. Označimo s x točku koja se nalazi u oba bloka. Znamo da se točka x nalazi u još $r - 2$ drugih blokova. Preostali blokovi koji sijeku oba bloka, a ne sadrže točku x , sadrže jednu od preostalih $k - 1$ točaka bloka B_1 i $k - 1$ točaka bloka B_2 . Slijedi da dva susjedna vrha grafa $\Gamma(\mathcal{D})$ imaju $r - 2 + (k - 1)^2$ zajedničkih susjeda. Naposljetku, pretpostavimo sada da su blokovi B_1 i B_2 disjunktni. Tada blokovi koji sijeku oba bloka sadrže jednu od k točaka bloka B_1 i k točaka bloka B_2 . Dakle, svaka dva nesusjedna vrha imaju k^2 zajedničkih susjeda. \square

Primjer 3.5. Odredimo graf $\Gamma(\mathcal{D})$ dobiven iz dizajna \mathcal{D} s parametrima $2-(9, 3, 1)$.

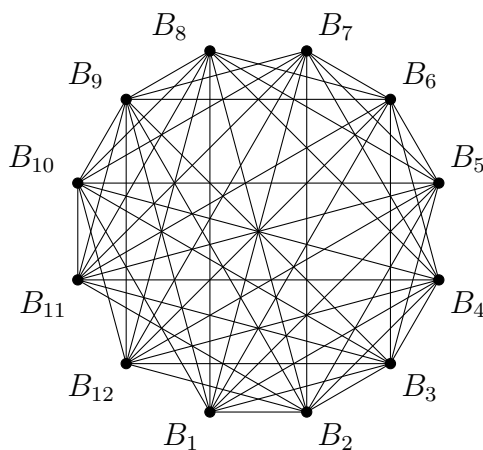
Označimo za početak blokove dizajna \mathcal{D} s

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{1, 2, 3\}, & B_2 &:= \{1, 4, 7\}, & B_3 &:= \{1, 5, 9\}, & B_4 &:= \{1, 6, 8\}, \\ B_5 &:= \{2, 4, 9\}, & B_6 &:= \{2, 5, 8\}, & B_7 &:= \{2, 6, 7\}, & B_8 &:= \{3, 4, 8\}, \\ B_9 &:= \{3, 5, 7\}, & B_{10} &:= \{3, 6, 9\}, & B_{11} &:= \{4, 5, 6\}, & B_{12} &:= \{7, 8, 9\}. \end{aligned}$$

⁸Raj Chandra Bose (1901. - 1987.), indijski matematičar i statističar. Najpoznatiji je po svom radu u teoriji dizajna, konačnoj geometriji i teoriji kodova za ispravljanje pogrešaka.

Prema Propoziciji 3.6, znamo da blokovi B_1, \dots, B_{12} predstavljaju vrhove grafa $\Gamma(\mathcal{D})$. Odredimo sada susjedne vrhove od B_1 . Uočimo da blokovi B_2, B_3, \dots, B_{10} sijeku blok B_1 u točno jednoj točki. Dakle, vrhovi koji odgovaraju blokovima B_2, B_3, \dots, B_{10} bit će susjedni vrhu koji odgovara bloku B_1 . Susjedi preostalih vrhova se određuju analogno.

Dobiveni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ je prikazan u nastavku.



Slika 11: Graf $\Gamma(\mathcal{D})$

Uočimo da je $\Gamma(\mathcal{D})$ jako regularan graf s parametrima $SRG(12, 9, 6, 9)$.

S.S. Shrikhande⁹ i Bhagwandas su proširili navedenu konstrukciju na proizvoljne kvazisimetrične dizajne [27]. Dobiveni grafovi se nazivaju blokovni grafovi, a definiciju istih navodimo u nastavku.

Definicija 3.2. *Blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ pridružen kvazisimetričnom $2-(v, k, \lambda)$ dizajnu \mathcal{D} s presječnim brojevima x i y , gdje je $x < y$, definiramo na sljedeći način:*

- *vrhovi grafa predstavljaju blokove,*
- *dva vrha su susjedna ako se odgovarajući blokovi sijeku u točno y točaka.*

Znamo da je komplement kvazisimetričnog dizajna kvazisimetričan. Štoviše, budući da se blokovi B_i i B_j sijeku u y točaka ako i samo ako se njihovi komplementi \overline{B}_i i \overline{B}_j sijeku u \bar{y} točaka, slijedi da je $\Gamma(\mathcal{D}) = \Gamma(\overline{\mathcal{D}})$.

⁹Shartchandra Shankar Shrikhande (1917.-2020.), indijski kombinatorni matematičar.

Kako bi pokazali da su blokovni grafovi jako regularni, najprije dokazujemo pomoćne tvrdnje koje ćemo koristiti u dokazu.

Lema 3.2. *Neka je $A = pI + q(J - I)$ kvadratna matrica reda v , pri čemu je $q \neq 0$. Spektar matrice A jednak je $\{p+(v-1)q, p-q\}$, gdje je svojstvena vrijednost $p+(v-1)q$ kratnosti 1, a $p - q$ kratnosti $v - 1$.*

Dokaz: Budući da vrijedi $A \cdot j = (p + (v - 1)q)j$, zaključujemo da je $p + (v - 1)q$ svojstvena vrijednost matrice A pridružena svojstvenom vektoru j . Također, vektor $x = (x_1, \dots, x_v)$ zadovoljava jednakost $A \cdot x = (p - q)x$ ako i samo ako je $q(x_1 + \dots + x_v) = 0$. Dakle, slijedi da je $p - q$ svojstvena vrijednost čiji je svojstveni potprostor $(v - 1)$ -dimenzionalni potprostor zadan jednadžbom $x_1 + \dots + x_v = 0$. Drugim riječima, zaključujemo da je $p - q$ svojstvena vrijednost matrice A kratnosti $v - 1$. \square

Lema 3.3. *Za proizvoljnu matricu N , svaka nenula svojstvena vrijednost matrice NN^T ujedno je i svojstvena vrijednost matrice N^TN s istom kratnosti.*

Dokaz: Neka je s svojstvena vrijednost matrice NN^T , pri čemu je $s \neq 0$, te neka je x pripadajući svojstveni vektor različit od nul-vektora. Tada vrijedi $NN^T x = sx$ iz čega slijedi

$$N^T x \neq 0 \quad \text{i} \quad (N^T N)(N^T x) = s(N^T x).$$

Dakle, zaključujemo da je s svojstvena vrijednost matrice $N^T N$ pridružena svojstvenom vektoru $N^T x$ koji je različit od nul-vektora. Nadalje, znamo da dimenzija svojstvenog prostora pridruženog svojstvenoj vrijednosti simetrične matrice odgovara (geometrijskoj) kratnosti te svojstvene vrijednosti. Neka su x_1, x_2, \dots, x_m linearno nezavisni svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti $s \neq 0$ matrice NN^T . Tada su odgovarajući svojstveni vektori $N^T x_1, N^T x_2, \dots, N^T x_m$ matrice $N^T N$ također linearno nezavisni. Naime, pretpostavimo da vrijedi $\sum_{i=1}^m \alpha_i N^T x_i = 0$. Tada vrijedi i $\sum_{i=1}^m \alpha_i NN^T x_i = 0$, iz čega slijedi $\sum_{i=1}^m \alpha_i s x_i = 0$, odnosno $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$. Budući da su vektori x_1, \dots, x_m linearno nezavisni, slijedi $\alpha_i = 0$ za svaki $i = 1, \dots, m$. Dakle, svaka nenula svojstvena vrijednost matrice NN^T ujedno je i svojstvena vrijednost matrice $N^T N$ s najmanje istom kratnosti. Zamjenom matrica N i N^T , tvrdnja leme je dokazana. \square

U nastavku je navedena direktna posljedica Leme 3.3 te teorem čiji dokaz možete pronaći u [26].

Korolar 3.2. *Neka je N $v \times b$ matrica, pri čemu je $v \leq b$. Tada se spektar matrice $N^T N$ može dobiti dodavanjem $b - v$ nula u spektar od matrice NN^T .*

Teorem 3.1. *Regularan, povezan i nepotpun graf reda v s matricom susjedstva A je jako regularan s parametrima $SRG(v, a, c, d)$ ako i samo ako matrica A ima točno tri svojstvene vrijednosti θ_0, θ_1 i θ_2 . U tom slučaju vrijedi $\theta_0 = a, c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$ i $d = a + \theta_1\theta_2$.*

Dokažimo sada da je blokovni graf pridružen proizvoljnom kvazisimetričnom dizajnu jako regularan uz pretpostavku da je blokovni graf povezan.

Teorem 3.2. *Neka je \mathcal{D} kvazisimetrični 2 - (v, b, r, k, λ) dizajn s presječnim brojevima x i y , gdje je $x < y$. Pretpostavimo da mu je pridruženi blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ povezan. Tada je graf $\Gamma(\mathcal{D})$ jako regularan graf reda b s parametrima*

$$a = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x}, \quad c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2, \quad d = a + \theta_1\theta_2,$$

gdje su $\theta_1 = \frac{r-\lambda-k+x}{y-x}$ i $\theta_2 = -\frac{k-x}{y-x}$.

Dokaz: Označimo s N $v \times b$ incidencijsku matricu dizajna \mathcal{D} te s A matricu susjedstva blokovnog grafa $\Gamma(\mathcal{D})$. Promotrimo matricu $N^T N$. Svaki element (i, j) matrice $N^T N$ odgovara kardinalnom broju presjeka i -tog i j -tog bloka dizajna \mathcal{D} . U slučaju $i = j$ veličina presjeka jednaka je k . U protivnom, ako su odgovarajući vrhovi blokovnog dizajna $\Gamma(\mathcal{D})$ susjedni, veličina presjeka je y te je jednaka x ukoliko vrhovi nisu susjedni. Iz navedenog slijedi da je veza između matrica N i A sljedeća

$$N^T N = kI + yA + x(J - I - A).$$

Drugim riječima, vrijedi

$$(y-x)A = N^T N + (x-k)I - xJ. \tag{3.10}$$

Prema Teoremu 2.4 znamo da vrijedi $NN^T = (r-\lambda)I + \lambda J = rI + \lambda(J-I)$. Nadalje, prema Lemi 3.2 znamo da matrica NN^T ima svojstvene vrijednosti $r +$

$(v - 1)\lambda$ kratnosti 1 i $r - \lambda$ kratnosti $v - 1$. Primijenimo li (2.1), možemo pisati $r + (v - 1)\lambda = rk$ te zaključujemo da vrijedi $\sigma(NN^T) = \{rk, r - \lambda\}$.

Odredimo sada i spektar matrice $N^T N$. Prema Lemi 3.3, znamo da matrice NN^T i $N^T N$ imaju jednake nenula svojstvene vrijednosti iste kratnosti. Također, prema Korolaru 3.2, slijedi da matrica $N^T N$ ima i svojstvenu vrijednost 0 kratnosti $b - v$. Iz navedenog zaključujemo da je $\sigma(N^T N) = \{rk, r - \lambda, 0\}$.

Primjenjujući vezu (3.10) slijedi da spektar od A sadrži sljedeće svojstvene vrijednosti: $\theta_0 = \frac{rk+x-k-xb}{y-x} = \frac{r(k-1)+x(1-b)}{y-x}$ kratnosti 1, $\theta_1 = \frac{r-\lambda-k+x}{y-x}$ kratnosti $v - 1$ i $\theta_2 = \frac{x-k}{y-x}$ kratnosti $b - v$.

Prema Teoremu 3.1 zaključujemo da je blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ pridružen kvazisimetričnom dizajnu \mathcal{D} jako regularan s parametrima $SRG(b, a, c, d)$, pri čemu vrijedi $a = \theta_0 = \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x}$, $c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$ i $d = a + \theta_1\theta_2$. \square

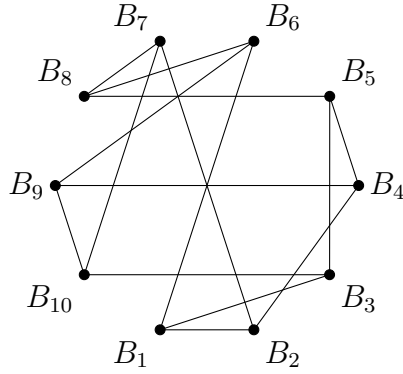
Primjer 3.6. Odredimo blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ pridružen dizajnu \mathcal{D} s parametrima 2-(6, 3, 2). U Primjeru 2.6 smo pokazali da je dizajn \mathcal{D} kvazi-rezidualan, dok prema Propoziciji 3.2 znamo da je dizajn \mathcal{D} ujedno i kvazisimetričan s presječnim brojevima $x = 1$ i $y = 2$.

Označimo najprije blokove dizajna \mathcal{D} s

$$B_1 := \{1, 2, 3\}, \quad B_2 := \{1, 2, 4\}, \quad B_3 := \{1, 3, 6\}, \quad B_4 := \{1, 4, 5\}, \quad B_5 := \{1, 5, 6\}, \\ B_6 := \{2, 3, 5\}, \quad B_7 := \{2, 4, 6\}, \quad B_8 := \{2, 5, 6\}, \quad B_9 := \{3, 4, 5\}, \quad B_{10} := \{3, 4, 6\}.$$

Prema definiciji blokovnog grafa slijedi da blokovi B_1, \dots, B_{10} predstavljaju vrhove blokovnog grafa $\Gamma(\mathcal{D})$ te da će dva vrha biti susjedna ukoliko se odgovarajući blokovi sijeku u točno dvije točke. Odredimo sada susjedne vrhove od vrha koji odgovara bloku B_1 . Uočimo da za blokove B_2, B_3 i B_6 vrijedi $|B_1 \cap B_2| = |\{1, 2\}| = 2$, $|B_1 \cap B_3| = |\{1, 3\}| = 2$ te $|B_1 \cap B_6| = |\{2, 3\}| = 2$. Stoga zaključujemo da će vrhovi koji odgovaraju blokovima B_2, B_3 i B_6 biti susjedni vrhu koji odgovara bloku B_1 . Susjedni vrhovi preostalih vrhova se određuju analogno.

Dobiveni blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ prikazan je na slici u nastavku.



Slika 12: Blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$

Uočimo da je blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ jako regularan s parametrima $SRG(10, 3, 0, 1)$.

Napomena 3.4. Budući da je poznato ([5]) da postoji jedinstveni jako regularni graf s parametrima $SRG(10, 3, 0, 1)$, poznat i kao Petersenov graf, dobiveni blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ iz prethodnog primjera je Petersenov graf.

U dokazu posljedice prethodnog teorema koristit ćemo pomoćne tvrdnje navedene u nastavku.

Lema 3.4. *Neka je M simetrična matrica s realnim elementima. Tada su svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima matrice M ortogonalni.*

Dokaz: Neka su α i β različite svojstvene vrijednosti matrice M te neka su x i y odgovarajući svojstveni vektori. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
 \alpha y^T x &= y^T M x \\
 &= (x^T M y)^T \\
 &= (x^T \beta y)^T \\
 &= \beta y^T x.
 \end{aligned}$$

Budući da vrijedi $\alpha \neq \beta$, slijedi $y^T x = 0$. Dakle, zaključujemo da su svojstveni vektori x i y ortogonalni. \square

Lema 3.5. *Ako je α racionalan broj takav da vrijedi*

$$\alpha^2 + b\alpha + c = 0,$$

gdje su b i c cijeli brojevi, tada je α cijeli broj.

Dokaz: Neka je $\alpha = \frac{x}{y}$, pri čemu je najveći zajednički djelitelj od x i y jednak 1.

Tada imamo

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y}b + c = 0,$$

iz čega slijedi

$$x^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$x^2 = -y(bx + cy)$$

iz čega zaključujemo da y dijeli x^2 . Budući da smo pretpostavili da je najveći zajednički djelitelj od x i y jednak 1, slijedi da je $y = 1$, tj. zaključujemo da je α cijeli broj. \square

Korolar 3.3. *Ako su $x < y$ presječni brojevi kvazisimetričnog 2- (v, b, r, k, λ) dizajna, tada $y - x$ dijeli $k - x$ i $r - \lambda$.*

Dokaz: Pokažimo najprije da su parametri θ_1 i θ_2 iz Teorema 3.2 ujedno i korijeni normiranog polinoma $\theta^2 + (d - c)\theta + d - a$ s cjelobrojnim koeficijentima. Neka je \mathcal{D} kvazisimetrični dizajn te neka je A matrica susjedstva blokovnog grafa $\Gamma(\mathcal{D})$. Prema Teoremu 3.2 znamo da je graf $\Gamma(\mathcal{D})$ jako regularan s parametrima $SRG(b, a, c, d)$. Nadalje, prema definiciji jako regularnog grafa, znamo da je suma retka (stupca) matrice A jednaka a . Dakle, vrijedi $Aj = aj$, pri čemu je j vektor duljine v čiji su svi elementi jednaki 1. Stoga zaključujemo da je j svojstveni vektor matrice A te da je a jedna od njezinih svojstvenih vrijednosti.

Neka je sada $\theta \neq a$ svojstvena vrijednost matrice A koja odgovara svojstvenom vektoru x . Primjenjujući (2.4) dobivamo

$$A^2x + (d - c)Ax + (d - a)Ix - dJx = 0.$$

Nadalje, prema Lemi 3.4 slijedi $j^T x = 0$ pa vrijedi $Jx = 0$. Stoga vrijedi

$$\theta^2 x + (d - c)\theta x + (d - a)x = 0$$

te budući da je svojstveni vektor x različit od nul-vektora, slijedi

$$\theta^2 + (d - c)\theta + d - a = 0. \tag{3.11}$$

Iz Vièteovih¹⁰ formula¹¹ slijedi da rješenja θ_1 i θ_2 kvadratne jednadžbe (3.11) zadovoljavaju $\theta_1\theta_2 = d - a$ te $\theta_1 + \theta_2 = c - d$ iz čega slijedi $d = a + \theta_1\theta_2$ i $c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$. Uočimo da smo dobili parametre iz Teorema 3.2.

Pokazali smo da su racionalni brojevi $\theta_1 = \frac{r-\lambda-k+x}{y-x}$ i $\theta_2 = -\frac{k-x}{y-x}$ ujedno i nultočke normiranog polinoma $\theta^2 + (d-c)\theta + d-a$ s cjelobrojnim koeficijentima. Prema Lemi 3.5, slijedi da θ_1 i θ_2 moraju biti cijeli brojevi, čime su zadovoljeni uvjeti djeljivosti navedeni u korolaru. \square

Sljedeći rezultat, koji su dokazali D. K. Ray-Chaudhuri¹² i R. M. Wilson¹³ [24], koristit ćemo u dokazu za gornju ogradu broja blokova kvazisimetričnog dizajna bez ponovljenih blokova.

Teorem 3.3. *Neka je X v -člani skup i \mathcal{A} familija k -članih podskupova od X takva da za svaka dva različita skupa $A, B \in \mathcal{A}$ vrijedi*

$$|A \cap B| \in \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\},$$

pri čemu vrijedi $0 \leq \mu_s < \dots < \mu_2 < \mu_1 < k$. Tada vrijedi

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{v}{s}.$$

Teorem 3.4. *Kvazisimetrični dizajn bez ponovljenih blokova i čiji je pridruženi blokovni graf povezan može imati najviše $\binom{v}{2}$ blokova.*

Dokaz: Tvrdnja teorema direktno slijedi iz Teorema 3.3 za parametre $s = 2$, $\mu_1 = y$ i $\mu_2 = x$. \square

Cameron i van Lint [7] pokazali su za koje kvazisimetrične dizajne vrijedi da je broj blokova b točno jednak $\binom{v}{2}$.

¹⁰François Viète (1540. - 1603.), francuski matematičar i astronom.

¹¹Za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, gdje je $a \neq 0$ vrijedi:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

¹²Dwijendra Kumar Ray-Chaudhuri (1933. -), najpoznatiji je po svom radu u teoriji dizajna i teoriji kodova za ispravljanje pogrešaka.

¹³Richard Michael Wilson (1945. -), američki matematičar poznat po svom radu u kombinatornoj matematici.

Teorem 3.5. *Neka je \mathcal{D} kvazisimetrični dizajn bez ponovljenih blokova takav da vrijedi $4 \leq k \leq v - 4$. Tada je $b = \binom{v}{2}$ ako i samo ako je \mathcal{D} 4-dizajn.*

U svom radu [12], Goethals¹⁴ i Seidel¹⁵ su ispitali različite poznate jako regularne grafove kako bi utvrdili koji od njih mogu biti blokovni grafovi kvazisimetričnih 2-dizajna. U nastavku navodimo ključne rezultate njihovog istraživanja.

Teorem 3.6. *Neka je \mathcal{D} kvazisimetrični 2-dizajn čiji je blokovni graf Γ . Tada vrijedi:*

- (i) *Ako je Γ graf ljestve, tada je \mathcal{D} dizajn koji se sastoji od dvije kopije simetričnog blokovnog dizajna.*
- (ii) *Ako je Γ cocktail party graf, tada je \mathcal{D} Hadamardov 3-dizajn.*
- (iii) *Nema kvazisimetričnog 2-dizajna čiji je blokovni graf rešetkasti graf $L_2(n)$ ili njegov komplement.*

Sljedeći rezultat, koji također potječe iz istraživanja Goethalsa i Seidela [12], dodatno doprinosi našem razumijevanju karakteristika kvazisimetričnih 2-dizajna sa specifičnim parametrima.

Teorem 3.7. *Kvazisimetrični 2-dizajn s $b = 2v - 2$ je ili Hadamardov 3-dizajn ili jedinstveni 2-(6, 3, 2) dizajn.*

Dokaz: Neka je \mathcal{D} kvazisimetričan 2-(v, k, λ) dizajn za koji vrijedi $b = 2v - 2$. Tada iz (2.2) slijedi $2(v - 1)k = vr$ pa $v - 1$ mora biti djeljitelj od r . Budući da je $r < b = 2(v - 1)$, zaključujemo da je $r = v - 1$, iz čega slijedi da je $v = 2k$ te $b = 4k - 2$.

Neka je Γ blokovni graf dizajna \mathcal{D} s parametrima $SRG(b, a, c, d)$ te neka je A proizvoljni blok dizajna \mathcal{D} . Pretpostavimo da postoji a blokova koji se s blokom A sijeku u y točaka te $4k - a - 3$ blokova koji se s A sijeku u x točaka. Iz toga proizlazi da su x i y presječni brojevi dizajna \mathcal{D} . Prebrojavanjem parova (B, x) na dva načina, gdje je B blok različit od A i $x \in A \cap B$, dobivamo:

$$ay + (4k - a - 3)x = 2k(k - 1). \quad (3.12)$$

¹⁴Jean-Marie Goethals, belgijski matematičar.

¹⁵Johan Jacob Seidel (1919. - 2001.), nizozemski matematičar poznat po radu u geometriji i teoriji grafova.

Neka je A matrica susjedstva grafa Γ . U dijelu dokaza Teorema 3.2 pokazali smo da svojstvene vrijednosti matrice A imaju kratnosti 1, $v - 1$ i $b - v = v - 2$, stoga možemo primijeniti Teorem 2.10, koji obuhvaća dva slučaja koja ćemo promotriti.

1. Ako je Γ ili njegov komplement *graf ljestve*, možemo pretpostaviti da vrijedi $a = n - 2$. Budući da je $n = b = 4k - 2$, vrijedi $a = 4(k - 1)$ te iz (3.12) slijedi

$$4(k - 1)y + x = 2k(k - 1).$$

Stoga zaključujemo da $2(k - 1)$ dijeli x , a s obzirom da vrijedi $x < k$, slijedi da je $x = 0$. Iz (3.12) tada slijedi $y = \frac{k}{2}$. Nadalje, budući da vrijedi $b = \frac{v(v-1)}{k}$, možemo primijeniti Korolar 3.1, čime zaključujemo da je \mathcal{D} 3-dizajn i posljedično Hadamardov 3-dizajn. Naime, iz Definicije 2.8 znamo da Hadamardov 3-dizajn ima parametre $3-(m, \frac{1}{2}m, \frac{1}{4}m - 1)$. U našem slučaju vrijedi $v = 2k$, iz čega slijedi $m = 2k$ pa vrijedi i $k = \frac{m}{2}$. Nadalje, iz (2.1) slijedi $\lambda_2 = \frac{m}{2} - 1$ pa iz (2.3) slijedi $\lambda = \left(\frac{m}{2} - 1\right) \cdot \frac{\binom{\frac{m}{2}-2}{3-2}}{\binom{m-2}{3-2}} = \frac{m}{4} - 1$.

2. U drugom slučaju imamo:

$$v = 2s^2 + 2s + 2, \quad k = s^2 + s + 1, \quad a = s(2s + 1) \quad (3.13)$$

te iz (3.12) slijedi

$$s(2s + 1)y + (s + 1)(2s + 1)x = 2s(s + 1)(s^2 + s + 1).$$

Dakle, $2s + 1$ dijeli $2s(s + 1)(s^2 + s + 1)$, što implicira da je $s = 1$. Tada iz (2.1) i (3.13) slijedi $v = 6$, $k = 3$ te $\lambda = 2$ pa zaključujemo da je \mathcal{D} dizajn s parametrima $2-(6, 3, 2)$. \square

Napomena 3.5. Pokažimo sada da u dokazu prethodnog teorema iz uvjeta da $2s + 1$ dijeli $2s(s + 1)(s^2 + s + 1)$ slijedi da je jedini pozitivni cijeli broj s koji zadovoljava taj uvjet $s = 1$. Naime, definirajmo $t := 2s + 1$. Tada je $s = \frac{t-1}{2}$ i vrijedi:

$$2s(s + 1)(s^2 + s + 1) = \frac{t^4 + 2t^2 - 3}{8}.$$

Budući da t dijeli $\frac{t^4 + 2t^2 - 3}{8}$, t mora biti djelitelj od -3 . S obzirom na to da je t pozitivan, moguće vrijednosti su $t = 1$ ili $t = 3$. Ukoliko je $t = 3$, slijedi $s = 1$. S druge strane, iz $t = 1$ slijedi $s = 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je s pozitivan cijeli broj. Dakle, zaključujemo da jedino rješenje koje zadovoljava uvjet je $s = 1$.

3.2 Kvazisimetrični dizajni i kodovi

U prethodnom potpoglavlju opisali smo povezanost kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova. U nastavku ćemo pokazati i vezu s kodovima, konkretno između generirajućih matrica kodova i incidencijskih matrica dizajna kada su k , x i y iste parnosti. Ova povezanost omogućuje nam da primijenimo svojstva kodova za dokazivanje tvrdnji o kvazisimetričnim dizajnama.

Navedimo za početak osnovne pojmove iz teorije kodiranja. Neka je $A = \mathbb{F}_q$ konačno polje reda q , gdje je q potencija prostog broja.

Definicija 3.3. *Kod C je q -naran **linearan kod** duljine n i dimenzije k (tj. $[n, k]_q$ ili $[n, k]$ kod) ako je C k -dimenzionalni potprostor n -dimenzionalnog vektorskog prostora A^n .*

Elemente vektorskog prostora A^n nazivamo riječi, a elemente koda C **riječi koda**. Kada je $q = 2$, kod C se naziva binaran linearan kod.

Definicija 3.4. *Neka je C linearan $[n, k]$ kod. **Generirajuća matrica** koda C je $k \times n$ matrica čiji su retci vektori baze prostora C .*

Primjer 3.7. Generirajuća matrica binarnog linearnog koda $C = \{0000, 1100, 0011, 1111\}$ je

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 3.5. ***Dualan kod** C^\perp linearnog koda C je*

$$C^\perp = \{x \in A^n \mid x \cdot c = 0, \forall c \in C\},$$

pri čemu je $x \cdot c = \sum_{i=1}^n x_i c_i$ skalarni produkt vektora $x, c \in A^n$.

Linearni kod C je **samoortogonalan** ako je $C \subseteq C^\perp$ te **samodualan** ako vrijedi $C = C^\perp$.

Primjer 3.8. Linearan kod C iz Primjera 3.7 je samodualan.

V. Tonchev¹⁶ je pokazao kako se samoortogonalni kodovi mogu povezati s kvazisimetričnim dizajnama čiji presječni brojevi imaju istu parnost [33].

¹⁶Vladimir D. Tonchev, profesor na Tehnološkom sveučilištu Michigan.

Teorem 3.8. *Neka je M $b \times v$ incidencijska matrica kvazisimetričnog 2 - (v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y koji zadovoljavaju $k \equiv x \equiv y \pmod{2}$. Tada vrijedi:*

1. *Ako je k paran, tada je binarni kod duljine v s generirajućom matricom M samoortogonalan.*
2. *Neka je N proširena $b \times (v+1)$ matrica dobivena dodavanjem stupca svih jedinica (s lijeva) u M . Ako je k neparan, tada N generira binarni samoortogonalni kod duljine $v + 1$.*

Napomena 3.6. Proširena matrica N iz prethodnog teorema je oblika:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \\ \vdots & M \\ 1 & \end{bmatrix}.$$

Na temelju povezanosti s kodovima, Tonchev je dokazao da su neki kvazisimetrični dizajni jedinstveni, dok drugi sa specifičnim parametrima ne postoje [33].

Teorem 3.9. *Kvazisimetrični dizajni s parametrima i presječnim brojevima navedenim u nastavku su jedinstveni:*

- 2 - $(21, 6, 4)$, $x = 0$, $y = 2$,
- 2 - $(21, 7, 12)$, $x = 1$, $y = 3$,
- 2 - $(22, 7, 16)$, $x = 1$, $y = 3$.

S druge strane, kvazisimetrični dizajni sa sljedećim parametrima ne postoje:

- 2 - $(29, 7, 12)$, $x = 1$, $y = 3$,
- 2 - $(28, 7, 16)$, $x = 1$, $y = 3$.

4 Primjeri u GAP-u

U ovom poglavlju prikazat ćemo konkretne primjere upotrebe GAP-a za rad s kvazisimetričnim dizajnama, jako regularnim grafovima i kodovima. Implementirat ćemo dvije različite metode za konstrukciju blokovnih grafova, kao i funkciju za provjeru jake regularnosti grafova nastalih ovim konstrukcijama. Također, konstruirat ćemo generirajuće matrice linearnih kodova iz incidencijskih matrica kvazisimetričnih dizajna.

Kako bi kod bio pregledniji i organiziraniji, uključit ćemo nekoliko pomoćnih funkcija koje ispituju osnovna svojstva dizajna, poput određivanja presječnih brojeva i provjere je li dizajn kvazisimetričan.

Svaka funkcija bit će detaljno objašnjena uz pripadajuće primjere, pružajući uvid u to kako GAP može biti korišten za rješavanje problema u teoriji dizajna, grafova i kodiranja.

Za rad s dizajnama, grafovima i kodovima koristili smo pakete *Design*, *Grape* i *Guava*, respektivno.

Funkcija 4.1 (Presječni brojevi). Funkcija `presjecni_brojevi` uzima dizajn kao ulazni argument i određuje kardinalne brojeve presjeka dvaju različitih blokova danog dizajna, a zatim vraća skup svih različitih presječnih brojeva.

```
presjecni_brojevi:=function(design)
  local L, i, j;
  L:=[];
  for i in [1..Size(design.blocks)] do
    for j in [1..Size(design.blocks)] do
      if i<>j then
        Add(L,Size(Intersection(design.blocks[i],design.blocks[j])));
      fi;
    od;
  od;
  return Set(L);
end;
```


Primjer 4.1. Pomoću Funkcije 4.1 odredimo presječne brojeve $(9, 4, 3)$ -BIBDa iz Primjera 3.1. Kako bi definirali navedeni dizajn, koristit ćemo funkciju `BlockDesign` koja kao argumente ima broj točaka dizajna i listu blokova.

```
B1:=[ [1,2,4,7], [1,2,5,9], [1,2,6,8], [1,3,4,6], [1,3,5,8], [1,3,7,9], [1,4,8,9],
      [1,5,6,7], [2,3,4,5], [2,3,6,8], [2,3,7,9], [2,4,7,8], [2,5,6,9], [3,4,6,9],
      [3,5,7,8], [4,5,6,7], [4,5,8,9], [6,7,8,9] ];
D1:=BlockDesign(9,B1);
presjecni_brojevi(D1);
```

Dobiveni presječni brojevi dizajna s parametrima $2-(9, 4, 3)$ dizajn su $[0, 1, 2, 3]$. Uočimo da se ovi rezultati podudaraju s onima prikazanim u Primjeru 3.1.

Funkcija 4.2 (Presječni brojevi kvazisimetričnog dizajna x i y). Funkcija `xy` pomoću funkcije `presjecni_brojevi` za dani kvazisimetrični dizajn vraća listu $[x, y]$ s presječnim brojevima dizajna, pri čemu su x i y sortirani u rastućem redoslijedu. Ako dizajn nije kvazisimetričan, funkcija vraća `false`.

```
xy:=function(design)
    if Size(presjecni_brojevi(design)) <> 2 then return false; fi;

    if presjecni_brojevi(design)[1] < presjecni_brojevi(design)[2] then
        return [presjecni_brojevi(design)[1],presjecni_brojevi(design)[2]];
    else
        return [presjecni_brojevi(design)[2],presjecni_brojevi(design)[1]];
    fi;
end;
```

Primjer 4.2. Odredimo presječne brojeve x i y dizajna s parametrima $2-(6, 3, 2)$ pomoću Funkcije 4.2.

```
B2:=[ [1,2,3], [1,2,4], [1,3,6], [1,4,5], [1,5,6], [2,3,5], [2,4,6], [2,5,6],
      [3,4,5], [3,4,6] ];
D2:=BlockDesign(6,B2);
xy(D2);
```

Funkcija vraća listu [1, 2] iz čega zaključujemo da su presječni brojevi x i y danog dizajna jednaki 1 i 2, respektivno. Ovo je u skladu s rezultatom prikazanim u Primjeru 3.6.

Funkcija 4.3 (Je li dizajn kvazisimetričan?). Funkcija `kvazi_sim` na temelju duljine liste koju vraća funkcija `presjecni_brojevi` ispituje je li dani dizajn kvazisimetričan. Ako lista sadrži točno dva presječna broja, funkcija vraća `true`, dok u suprotnom vraća `false`.

```
kvazi_sim:=function(D)
    if Size(presjecni_brojevi(D)) = 2 then
        return true;
    else
        return false;
    fi;
end;
```

Primjer 4.3. Prethodna funkcija za dizajn iz Primjera 4.1 vraća `false`, a za dizajn iz Primjera 4.2 `true`.

```
kvazi_sim(D1);
kvazi_sim(D2);
```

Konstrukcija 4.1. Funkcija `konstrukcija1` konstruira graf $\Gamma(\mathcal{D})$ iz Steinerovog 2-dizajna \mathcal{D} prema načinu opisanom u Propoziciji 3.6. Za konstrukciju grafova koristi funkciju `EdgeOrbitsGraph` koja kao argumente ima permutacijsku grupu, listu bridova i broj vrhova grafa. Ukoliko dani dizajn nije kvazisimetričan, funkcija vraća `false`.

```
konstrukcija1:=function(design)
    local G, n, bridovi, graf, i, j;
    n:=Size(design.blocks);
    G:=SymmetricGroup(0);
    bridovi:=[];
```

```

if kvazi_sim(design)=false then return false; fi;

for i in [1..Size(design.blocks)] do
  for j in [1..Size(design.blocks)]do
    if Size(Intersection(design.blocks[i],design.blocks[j]))=1 then
      Add(bridovi,[i,j]);
    fi;
  od;
od;

return EdgeOrbitsGraph(G,bridovi,n);
end;

```

Primjer 4.4. Odredimo graf $\Gamma(\mathcal{D})$ dobiven iz dizajna s parametrima $2-(9,3,1)$.

```

B4:=[[1,2,3],[1,4,7],[1,5,9],[1,6,8],[2,4,9],[2,5,8],[2,6,7],[3,4,8],
[3,5,7],[3,6,9],[4,5,6],[7,8,9]];
D4:=BlockDesign(9,B4);
graf1:=konstrukcija1(D4);

```

Dobiveni graf prikazan je u nastavku.

```

rec( adjacencies := [ [ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ], [ 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9,
11, 12 ], [ 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12 ], [ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11,
12 ], [ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12 ], [ 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12 ],
[ 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12 ], [ 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12 ],
[ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12 ], [ 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12 ],
[ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ], [ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ] ],
group := Group(()), isGraph := true, order := 12, representatives :=
[ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ], schreierVector := [ -1,
-2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12 ] )

```

Naredbama `Vertices`, `UndirectedEdges` i `Adjacency` možemo detaljnije ispitati svojstva dobivenog grafa.

```

Vertices(graf1);
Length(UndirectedEdges(graf1));
Adjacency(graf1,1);

```

U ovom slučaju, vrhovi grafa su [1 .. 12], broj bridova je 54, a susjedni vrhovi vrha 1 su [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Uočimo da su sve navedene karakteristike u skladu s onima iz Primjera 3.5.

Konstrukcija 4.2. Funkcija konstrukcija2 konstruira blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ proizvoljnog kvazisimetričnog dizajna \mathcal{D} prema načinu opisanom u Definiciji 3.2. Analogno kao i u Konstrukciji 4.1, funkcija vraća false ukoliko dani dizajn nije kvazisimetričan.

```

konstrukcija2:=function(design)
    local G, n, bridovi, graf, pr_br, y, x, i, j;
    n:=Size(design.blocks);
    G:=SymmetricGroup(0);
    pr_br:=presjecni_brojevi(design);
    bridovi:=[];

    if kvazi_sim(design)=false then return false; fi;

    x:=xy(design)[1]; y:=xy(design)[2];

    for i in [1..Size(design.blocks)] do
        for j in [1..Size(design.blocks)]do
            if i<>j then
                if Size(Intersection(design.blocks[i],design.blocks[j]))=y then
                    Add(bridovi,[i,j]);
                fi;
            fi;
        od;
    od;
    return EdgeOrbitsGraph(G,bridovi,n);
end;

```

Primjer 4.5. Odredimo blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ pridružen dizajnu s parametrima 2-(6,3,2). Funkciju ćemo pozvati za dizajn D2 definiran u Primjeru 4.2.

```
graf2:=konstrukcija(D2);
```

Graf koji smo konstruirali prikazan je u nastavku.

```
rec( adjacencies := [ [ 2, 3, 6 ], [ 1, 4, 7 ], [ 1, 5, 10 ], [ 2, 5, 9 ],
    [ 3, 4, 8 ], [ 1, 8, 9 ], [ 2, 8, 10 ], [ 5, 6, 7 ], [ 4, 6, 10 ],
    [ 3, 7, 9 ] ], group := Group(()), isGraph := true, order := 10,
    representatives := [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ], schreierVector :=
    [ -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10 ] )
```

Analogno kao u prethodnom primjeru, možemo odrediti broj vrhova i bridova, kao i susjedne vrhove za proizvoljan vrh u dobivenom grafu.

```
Vertices(graf2);
Length(UndirectedEdges(graf2));
Adjacency(graf2,1);
```

Konstruirani blokovni graf ima vrhove označene s [1 .. 10], 15 bridova te su [2, 3, 6] susjedni vrhovi vrha 1. Uočimo da su dobivene vrijednosti u skladu s onima iz Primjera 3.6

Funkcija 4.4 (Je li graf jako regularan?). Funkcija SRG ispituje je li dani graf jako regularan. Ukoliko je, funkcija vraća listu [v,a,c,d], dok u suprotnom vraća false.

```
SRG:=function(graf)
    local v, u, L1, L2, Diff;
    L1:=[];
    L2:=[];

    if IsRegularGraph(graf)=false then return false; fi;
```

```

for v in Vertices(graf) do
  for u in Adjacency(graf,v) do
    Add(L1,Size(Intersection(Adjacency(graf,v),Adjacency(graf,u))));
  od;
  Diff:=Difference(Vertices(graf),Adjacency(graf,v));
  RemoveSet(Diff,v);
  for u in Diff do
    Add(L2,Size(Intersection(Adjacency(graf,v),Adjacency(graf,u))));
  od;
od;

if Size(Set(L1))<>1 or Size(Set(L2)) <> 1 then return false; fi;
return [OrderGraph(graf),VertexDegree(graf,Vertices(graf)[1]),L1[1],L2[1]];
end;

```

Primjer 4.6. Pomoću Funkcije 4.4 ispitajmo jesu li prethodno konstruirani grafovi jako regularni.

```
SRG(graf1);
```

```
SRG(graf2);
```

Dobiveni parametri su [12, 9, 6, 9] i [10, 3, 0, 1] respektivno, što znači da su oba konstruirana grafa jako regularna. Parametri također odgovaraju parametrima iz Primjera 3.5 i 3.6.

Konstrukcija 4.3. Funkcija konstrukcija3 konstruira binarni kod pomoću generirajuće matrice dobivene na način opisan u Teoremu 3.8. Kao argument ima $v \times b$ matricu incidencije kvazisimetričnog dizajna, iz koje najprije konstruira pripadajući kvazisimetrični dizajn i određuje parametre k , x i y . Ako ti parametri nemaju istu parnost, funkcija vraća `false`. Zatim, ovisno o parnosti parametra k , konstruira generirajuću matricu. Za konstrukciju koda koristi funkciju `GeneratorMatCode`, koja kao argumente ima generirajuću matricu i konačno polje.

```

konstrukcija3:=function(M)
  local v, k, x, y, M_T, D, blokovi, G, i, blok, blok_G, C;
  v:=DimensionsMat(M)[1];
  M_T:=TransposedMat(M);
  blokovi:=[];

  for i in M_T do Add(blokovi,Positions(i,1)); od;

  D:=BlockDesign(v,blokovi);
  k:=Size(D.blocks[1]);
  x:=xy(D)[1];
  y:=xy(D)[2];

  if ((k mod 2 = x mod 2) and (x mod 2 = y mod 2))=false then return false; fi;

  if (k mod 2) = 0 then G:=M_T;
  else
    G:=[];
    for i in M_T do
      blok:=[1];
      blok_G:=Concatenation(blok,i);
      Add(G,blok_G);
    od;
  fi;

  C:=GeneratorMatCode(G,GF(2));
  return C;
end;

```

Primjer 4.7. Primjenom funkcije `konstrukcija3` generirajmo binarne kodove iz dizajna navedenih u Teoremu 3.8. Dizajni koji su korišteni su:

- 2-(21, 6, 4) s presječnim brojevima $x = 0$ i $y = 2$,
- 2-(21, 7, 12) s presječnim brojevima $x = 1$ i $y = 3$.

Uočimo da za oba dizajna vrijedi uvjet $k \equiv x \equiv y \pmod{2}$. Za generiranje kodova koristimo $v \times b$ incidencijske matrice prikazane u Prilozima.

```
C1:=konstrukcija3(M1);
```

```
C2:=konstrukcija3(M2);
```

Dobiveni binarni kodovi su:

- a linear [21,10,1..6]4..10 code defined by generator matrix over GF(2),
- a linear [22,10,1..8]4..10 code defined by generator matrix over GF(2).

Prvi binarni kod je duljine 21, a drugi 22, što odgovara duljinama navedenim u Teoremu 3.8. Pored toga, oba koda imaju dimenziju 10.

Funkcija 4.5 (Je li kod samoortogonalan?). Funkcija `samoortogonalan_kod` kao ulazni argument prima kod i koristi funkciju `DualCode` za dobivanje njegovog dualnog koda. Zatim, funkcija provjerava je li svaka riječ koda iz originalnog koda prisutna u njegovom dualnom kodu. Ako je, kod je samoortogonalan i funkcija vraća `true`, dok u suprotnom vraća `false`.

```
samoortogonalan_kod:=function(C)
    local C_D, i;
    C_D:=DualCode(C);

    for i in C do
        if (i in C_D)= false then return false; fi;
    od;

    return true;
end;
```


Primjer 4.8. Prethodna funkcija za oba koda konstruirana u Primjeru 4.7 vraća `true` pa zaključujemo da su oba koda samoortogonalna. Ovaj rezultat je u skladu s Teoremom 3.8.

```
samoortogonalan_kod(C1);
```

```
samoortogonalan_kod(C2);
```

Zaključak

Ovaj rad istražuje kvazisimetrične dizajne, specifičnu vrstu dizajna koja je slična simetričnim dizajnim, kroz analizu njihovih osnovnih svojstava, definicija i konkretnih primjera. Osim toga, uspostavljene su veze između kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova, kao i između generirajućih matrica binarnih kodova i incidencijskih matrica kvazisimetričnih dizajna kada su parametri k , x i y iste parnosti. Ove veze doprinose dubljem razumijevanju kvazisimetričnih dizajna i omogućuju preciznije formuliranje i dokazivanje njihovih svojstava. U praktičnom dijelu rada prikazani su konkretni primjeri upotrebe GAP-a za rad s kvazisimetričnim dizajnim, uključujući metode za konstrukciju blokovnih grafova te generirajućih matrica kodova iz incidencijskih matrica kvazisimetričnih dizajna. Ovi primjeri pokazuju kako se teoretski koncepti mogu primijeniti u stvarnim situacijama, nudeći korisne alate za daljnje istraživanje u teoriji dizajna, grafova i kodiranja.

Popis slika

1	Fanova ravnina	3
2	$(9, 3, 1)$ -BIBD	3
3	Primjer grafa G	9
4	Petersenov graf	11
5	Potpuni graf K_6	11
6	Graf ljestve	11
7	Primjer nepovezanog grafa	12
8	Komplementaran graf	12
9	<i>Cocktail party graf</i>	12
10	Graf $L_2(3)$	14
11	Graf $\Gamma(\mathcal{D})$	24
12	Blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$	28

Literatura

- [1] M. Behbahani, *On strongly regular graphs* (Doctoral dissertation), Concordia University, (2009).
- [2] R. C. Bose, *On the construction of balanced incomplete block designs*, *Annals of Eugenics*, 9(4) (1939), 353-399.
- [3] R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, *Pacific Journal of Mathematics*, 13(2) (1963), 389-419.
- [4] D. R. Breach, *The 2-(9, 4, 3) and 3-(10, 5, 3) designs*, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 27(1) (1979), 50-63.
- [5] A. E. Brouwer, H. van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Cambridge University Press, (2022).
- [6] P. J. Cameron, J. H. van Lint, *Designs, graphs, codes and their links* (Vol. 22), Cambridge University Press, (1991).
- [7] P. J. Cameron, J. H. van Lint, *Graphs, codes and designs* (Vol. 43), Cambridge University Press, (1980).
- [8] C.J. Colbourn, J.H. Dinitz (Eds.), *Handbook of Combinatorial Designs* (2nd ed.), Chapman and Hall/CRC, (2006).
- [9] L. Euler, *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*, *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen*, 9 (1782), 85-239.
- [10] R. A. Fisher, *The arrangement of field experiments*, *Journal of the Ministry of Agriculture*, 33 (1926), 503-513.
- [11] R. A. Fisher, F. Yates, *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*, Edinburgh: Oliver and Boyd, (1938).
- [12] J. M. Goethals, J. J. Seidel, *Strongly Regular Graphs Derived from Combinatorial Designs*, *Canadian Journal of Mathematics*, 22(3) (1970), 597-614.

- [13] J. I. Hall, *Notes on coding theory*, Department of Mathematics, Michigan State University, (2010). <https://users.math.msu.edu/users/halljo/classes/codenotes/Topstuff.pdf>
- [14] Hrvatska enciklopedija, A. De Morgan, <https://www.enciklopedija.hr/clanak/de-morgan-augustus>, (1.8.2024.)
- [15] Institute of Mathematical Statistics, Obituary: S.S. Shrikhande, <https://imstat.org/2020/05/17/obituary-s-s-shrikhande-1917-2020/>, (30.4.2024.)
- [16] Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, *Combinatorics of symmetric designs* (Vol. 5), Cambridge University Press, (2006).
- [17] T. P. Kirkman, *On a problem in combinations*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 2 (1847), 191-204.
- [18] V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, (2016/2017). <https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/kvazisim.pdf>
- [19] Maths History, F. Viète, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete/>, (10.5.2024.)
- [20] Maths History, J. J. Seidel, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Seidel_Jaap/, (29.7.2024.)
- [21] Maths History, J. van Lint, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van_Lint/, (2.8.2024.)
- [22] Maths History, R. C. Bose, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bose_Raj/, (30.4.2024.)
- [23] Peter Cameron's homepage, <https://cameroncounts.github.io/web/>, (2.8.2024.)
- [24] D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, *On t -designs*, Osaka J. Math., 12(3) (1975), 737-744.

- [25] ResearchGate, Vladimir Tonchev, <https://www.researchgate.net/profile/Vladimir-Tonchev>, (27.8.2024.)
- [26] M. S. Shrikhande, S. S. Sane, *Quasi-symmetric designs* (Vol. 164), Cambridge University Press, (1991).
- [27] S. S. Shrikhande, Bhagwandas, *Duals of incomplete block designs*, J. Indian Statist. Assoc., 3(1) (1965), 30-37.
- [28] D. A. Spielman, *Lecture 23: Strongly Regular Graphs, part 1*, (2009). <https://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/2009/lect23-09.pdf>
- [29] D. Stinson, *Combinatorial designs: constructions and analysis*, Springer Science & Business Media, (2007).
- [30] The Mathematics Genealogy Project, D. Ray-Chaudhuri, <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=11328>, (29.7.2024.)
- [31] The Mathematics Genealogy Project, J. M. Goethals, <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=66096>, (29.7.2024.)
- [32] The Mathematics Genealogy Project, R. Wilson, <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=10076>, (29.7.2024.)
- [33] V. D. Tonchev, *Quasi-symmetric designs and self-dual codes*, European Journal of Combinatorics, 7(1) (1986). 67-73.
- [34] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, (2021).
- [35] D. Veljan, M. Mišetić, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, (1989).
- [36] R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima* (Disertacija), Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, (2019). <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:446211>

Prilozi

Preuzeto iz [8, pp. 578–582].

Matrica incidencije kvazisimetričnog $(21,6,4)$ -BIBDa

```
10010111000001100000110000101000010100010010001000000000
11001011100000110000001000010100001010001001000100000000
11100100110000011000010100001010000001000100100010000000
0111001001100000110000101000010100010010001001000000000
1011100000110000011000010100001010001001000100100000000
0101110000011000001100001010000101000100100010010000000
0010111000001100000110000101000010100010010001001000000
10000000011001000010000001110100000101001000000011000101
01000001001100000001010000110010000010100110000001100010
00100000100110000000111000010001000101010001000000110001
0001000001001110000001110000000100010101000100001011000
0000100100100101000000111000000010001010100010000101100
0000010110010000100000011100000001100101000001000010110
0000001011001000010000001110100000010010100000100001011
10000000000100001100101000000000111000000110100101000101
01000000000010100110000100001000011100000001010011100010
00100000000001010011000010001100001010000010101000110001
00010001000000001001100001001110000001000001010101011000
00001000100000100100100000100111000000100000101010101100
00000100010000110010000000010011100000010010010100010110
0000001000100001100101000000001110000001001001010001011
```

Matrica incidencije kvazisimetričnog $(21,7,12)$ -BIBDa

```
01000000000100010000011000111000000000000000000000001000010110
    011100000000101101001001111100001010111001001111000001001111
000001000000010010000000010100000001000101000111000000111110
```

101001110011000000001110101001001001000110110100011001000100
001000100000001100000100110001000000110101100110010101000100
01011000010001000011100001000100000000010000001111100101111
010001000000000010111001101100101110010000101001000111000101
01101000000110100001011001000110000001100000000001011000000
000011100000101001010110101100011000110011001010000000100001
00001011101000111100101000100000011000000001100000000101000
10101000110000101101111001010100011001000011000000000000000
110001100010000000100000100100011111001011000010001010000010
000100010010011000001000000101011101001011000001011010110000
000110010000000101010001010001010101010010000110000110000010
000100001101100101000101000001000111001000000110001001001011
000010110001011110000000000000101001010001000001001101110000
011000001010111100100010000010001000101110111010000001010000
000101000010000100000010001011100001001101000000100011010001
10110111010010000011000000001000001000111000000100100011001
101000000010100001010000000000110010010001101001101010100110
010100011000010010000001000011110000110001010100100011000011
101000101000000110100010010100000010000100000111110010001000
100001000111100000000011000000110011101100001001100100000000
010111100100110001101000000100000100100110010101000011000000
011011010100000110101001101001000000101010010000110000000000
010001010101000010000001001001001110110000100100010000110100
001000000001100010010100110010001010000001000001110111001110
000100001000000010100000001010010101111100111010000100010000
000010111110010010100100001010101100100000100100011100001001
000000011010010001000100110100010000100010010000000001010101
100100101010101101101001100000010000000000000001000000010010
000001011000111000101111110010010010101000100000111100000000
010010000000010001000000110101010011000010101010101010000011
100101000101110000010101000110010000000001011000100000011100

100000010011000001000001011000000101010000011100000110100000
001000001110000100001101000101101100001100101000100100110011
1110111111000000000001010000000111010011000000010001000111100
100000000100001010010100000010101000100110001011010100000001
100110000001011000110000010000100100001100011001110001101000
01100010100101100101000110101000000000001000010010000101001
000100100111000101011010001010100000000110110100011010100100
100010000101100010100010100010100001000000110100000000001010