

# Prostorna zornost učenika osnovnih i srednjih škola

---

**Stanković, Kristina**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:196:273405>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-15**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



**Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku**

Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika - smjer nastavnički

Kristina Stanković

**Prostorna zornost učenika osnovnih i srednjih škola**

Diplomski rad

Rijeka, lipanj 2020.

# **Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku**

Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika - smjer nastavnički

Kristina Stanković

## **Prostorna zornost učenika osnovnih i srednjih škola**

MENTOR: doc. dr. sc. Doris Dumičić Danilović

KOLEGIJI STUDIJA POVEZANI S TEMOM: Metodika nastave matematike 1, Metodika nastave matematike 2, Primjena računala u nastavi matematike

Diplomski rad

Rijeka, lipanj 2020.

## Sadržaj

Sažetak.....	1
Ključne riječi .....	1
Uvod .....	3
Prostorni zor u nastavi matematike .....	4
Geometrijsko mišljenje u nastavi matematike.....	5
Van Hieleova teorija geometrijskog mišljenja .....	5
Geometrija prostora u kurikulumu Škola za život.....	10
Zastupljenost gradiva geometrije u pojedinom razredu .....	11
Geometrija prostora u 5. razredu osnovne škole .....	12
Geometrija prostora u 8. razredu osnovne škole .....	22
Geometrija prostora u 2. razredu srednje škole .....	35
Anketa: Prostorna zornost učenika i studenata.....	43
Zaključak .....	59
Literatura .....	60
Popis priloga (slikovni, zvučni, grafički) .....	61

## **Sažetak**

Ovaj diplomski rad koncipiran je u nekoliko cjelina. Na početku su iznesene definicije i činjenice o ključnim pojmovima - vizualizacija, prostorni zor i geometrija prostora. Napravljena je usporedba aktualnog kurikulumu Škola za život i Nastavnog plana i programa, te su uočene sličnosti i razlike u poučavanju gradiva geometrije i geometrije prostora, odnosno stereometrije.

U drugom dijelu rada su navedene konkretne aktivnosti koje bi se mogle realizirati u nastavi matematike u pojedinom razredu u svrhu razvijanja boljeg prostornog zora kod učenika. Navedenim aktivnostima se osim logičko - matematičke inteligencije razvija i vizualno - spacijalna inteligencija, koja je vrlo korisna u svakodnevnom životu.

U posljednjem, trećem dijelu ovog rada izneseni su rezultati ankete o razvijenosti prostornog zora, a provedena je na učenicima osmog razreda osnovnih škola, učenicima srednjih škola, te na studentima.

## **Ključne riječi**

Prostorni zor, geometrija prostora, geometrijsko mišljenje, kurikulum - Škola za život.

## Uvod

Nova kurikularna reforma koja se frontalno izvodi od školske godine 2019./2020. nosi naziv „Škola za život“. Brojni znanstvenici iz raznih domena školstva uočili su potrebu za reformom školstva uz koju bi učenici stjecali znanje i razvijali svoje vještine i sposobnosti potrebne za suvremeni život, a ne isključivo učili velike količine činjenica, pojmova i informacija bez razumijevanja i bez uočavanja primjene. Kao i svi nastavni predmeti, i u poučavanju nastavnog predmeta matematike valja unijeti neke promjene i više se koncentrirati na razvoj vještina i sposobnosti, te potaknuti učenike na promišljanje i razumijevanje gradiva. To naravno ne znači da neki profesori i prije službenog uvođenja promjena u školstvu nisu uočili potrebu za istom, te ju primjenjivali i prije.

„Geometrija je opipljivi prostor, to je onaj prostor u kojem dijete diše, živi i kreće se. To je prostor koji učenik mora naučiti poznavati, istraživati i osvajati kako bi u njemu bolje živio, disao i kretao se.“<sup>1</sup>

Geometrija je grana matematike koja u svojoj izvornoj problematici proučava položaj, oblik i svojstva geometrijskih tijela u prostoru te njihov međusobni odnos.<sup>2</sup> Ona je temelj matematike kakav danas poznajemo, razvijen za objašnjavanje pojava i rješavanje problema iz svakodnevnog života. Usprkos tome, u nastavi matematike nije predviđen velik broj sati geometrije, u odnosu na druge matematičke grane.

Geometrija prostora još se naziva i stereometrija, a zastupljena je u višim razredima osnovne škole, te u srednjoj školi, no za razumijevanje stereometrije važno je poznavanje geometrije u ravnini s kojom se učenici susreću već od prvog razreda osnovne škole. U ovom diplomskom radu osvrnut ću se na upravo ovu granu matematike, geometriju prostora, vrlo primjenjivu u stvarnom životu, te ću navesti konkretne primjere i zadatke da bi se učenicima ovo gradivo prikazalo na njima primjeren i razumljiv način, te da bi uspješno savladali zadatke iz tog dijela gradiva. Naime, prilikom obrade gradiva geometrije prostora naglasak je najčešće na rješavanju što većeg broja zadataka u kojima je potrebno računati oplošje i volumen raznih geometrijskih tijela, te preračunavanje mjernih jedinica, dok se razvijanju prostornog zora i proučavanju odnosa između objekata u prostoru kod učenika posvećivalo vrlo malo vremena. Nova kurikularna reforma potiče baš

---

<sup>1</sup> Hans Freudenthal (1905. - 1990), nizozemski matematičar

<sup>2</sup> Hrvatska enciklopedija: <https://enciklopedija.hr/>

to, razvijanje prostornog zora i geometrijskog mišljenja, kao praktičnih i korisnih sposobnosti uz koje će učenicima zadaci iz navedenog gradiva biti razumljiviji. Na taj način smanjio bi se i broj formalizama u znanju učenika iz ovog dijela gradiva, jer dio učenika pomoću naučenih formula uspješno računa oplošje i volumen raznih geometrijskih tijela bez da znaju kako to tijelo izgleda u prostoru.

## Prostorni zor u nastavi matematike

Vizualizacija je sposobnost ili vještina da se nešto predoči ili zamisli u slikama. Prostorni zor omogućava bolju sposobnost vizualizacije objekata i prostornih odnosa koji se mogu lako predočiti u glavi.

Prostorni zor je vještina zaključivanja koja se odnosi na sposobnost misaone vizualizacije i razmišljanja o objektima u tri dimenzije, te zaključivanju o odnosima između objekata iz ograničenih informacija. Dobar prostorni zor omogućuje razmišljanje o tome kako će neki objekt izgledati nakon neke manipulacije kao što je okretanje objekta. Ovo je vrlo važna sposobnost korisna u svakodnevnom životu, te je nužno razvijati ju kod učenika na način primjeren učenicima određene dobi. Primjeri situacija iz svakodnevnog života u kojima će učenicima uvelike pomoći razvijeni prostorni zor su orijentacija i pronalazak odredišta pomoću kompasa ili GPS-a, razumijevanje i procjena udaljenosti, predočavanje strukture Sunčevog sustava i slično. Osim u stvarnom životu, prostorni zor je nužan i za uspješnost u brojnim znanostima kao što su arhitektura, grafički dizajn, računalne znanosti, biologija, fizika, kemija, geografija, medicina i brojne druge.

Jasno je da razvijeni prostorni zor ima vrlo važnu ulogu u životu pojedinca, stoga je nužno na nastavi matematike posvetiti dovoljno vremena da bi ga učenici razvili, a tek potom se koncentrirali na konkretne zadatke kao što su izračunavanje oplošja i volumena geometrijskih tijela.

U nastavnom predmetu matematike razvijeni prostorni zor, osim u geometriji ima i pozitivan utjecaj na rješavanje problema u aritmetici, algebri, te zadacima s riječima. Osim toga dobro razvijen prostorni zor može biti preduvjet za kasnija matematička postignuća.<sup>3</sup>

Iako je prostorni zor od iznimne važnosti, ipak nije jednostavno razviti ga kod svih ljudi. Potrebno je puno vježbe i iskustva da bi se ova vještina razvila. Rasprostranjeno je vjerovanje da je vještina prostornog zora fiksirana, dakle ili ju pojedinac posjeduje ili ne, no dokazano je da to ipak nije točno. Vještina prostornog zora može se poboljšati nizom aktivnosti za sve dobne skupine.<sup>4</sup> Primjer takvih aktivnosti je slaganje slagalica, igranje video igara kao što je tetris koje razvijaju potrebne vještine već od najranije dobi.

---

<sup>3</sup> Farmer i suradnici, 2013.

<sup>4</sup> Uttal i suradnici, 2013.



U nastavi matematike često se gradivu geometrije i razvijanju prostornog zora posvećuje manje vremena i pažnje od ostalih matematičkih tema. Matematika se često doživljava kao aktivnost koja se temelji isključivo na brojevima. Čak i u geometriji u kojoj se promatraju odnosi među objektima, učenici odgovaraju putem formuliranih postupaka. No, to nije korisno, znanje temeljeno na učenju bez razumijevanja nije trajno, učenike je potrebno poticati na razmišljanje i primjenu raznih strategija učenja, uključujući strategije prostornog zora. Također je potrebno potaknuti korištenje mašte i vizualizacije pri rješavanju matematičkih problema.

## **Geometrijsko mišljenje u nastavi matematike**

U nastavi matematike, pa tako i u gradivu geometrije potrebno je uvažavati predznanje i biološku dob učenika, te na taj način prilagoditi nastavu. Vrlo važno je uočiti pojedine razine znanja i shvaćanja na kojoj su učenici u pojedinom razredu da bi im organizirana nastava i aktivnosti na nastavi bile primjerene. Nužno je da nastava i aktivnosti na nastavi ne budu prezahtjevne, nerazumljive i apstraktne da učenici ne bi izgubili interes zbog mišljenja da to gradivo nikada neće shvatiti neovisno o svom trudu. Osim toga, jednako važno je i da nastava nije organizirana na način da im je gradivo prejednostavno i već poznato jer može uzrokovati isti efekt nezainteresiranosti. Upravo zbog toga važno je klasificirati pojedine stadije razumijevanja u odnosu na razred kojeg učenici pohađaju, te na temelju toga odrediti aktivnosti i nastavu primjerenu za pojedini razred.

## **Van Hieleova teorija geometrijskog mišljenja**

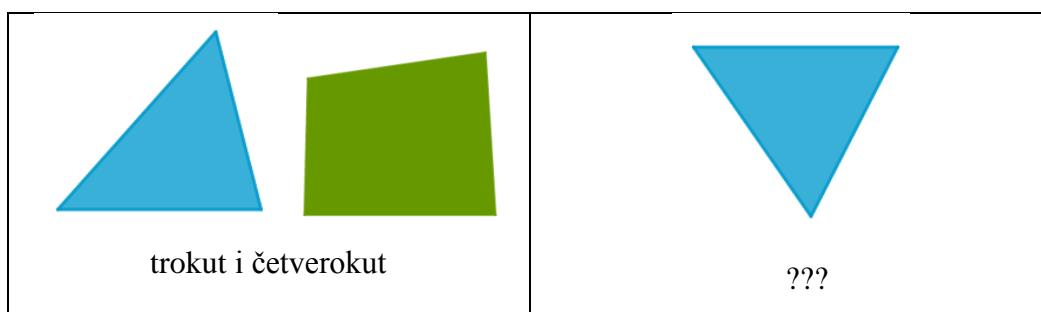
Dina i Pierre van Hiele dvoje su nizozemskih odgojitelja koji su bili zabrinuti zbog poteškoća koje su imali njihovi učenici u geometriji. Ta je zabrinutost motivirala njihovo istraživanje usmjereno na razumijevanje razine geometrijskog razmišljanja učenika da bi se utvrdile vrste poučavanja koje mogu najbolje pomoći učenicima.

Pet razina koje su u nastavku opisane ne ovise o dobi, već su povezane s iskustvima učenika. Razine su sekvencijalne, dakle učenici moraju proći razine da bi se povećalo njihovo razumijevanje. Opisi nivoa su opisani u terminima "učenici", no svi smo učenici u nekom smislu, te se ovo odnosi na svu populaciju.

## Razina 0 - Vizualizacija

Učenici prepoznaju oblike po svom općenitom izgledu.

Učenici na razini 0 razmišljaju o oblicima u smislu na koji nalikuju i sposobni su sortirati oblike u grupe koje "izgledaju slično", bez poznavanja njihovih obilježja koristeći samo vizualnu percepciju. Na primjer, učenik na ovoj razini može prepoznati trokut, četverokut ili krug, te svojstva kao što su paralelne stranice, simetrije, pravi kut i slično. Učenik, međutim, možda neće prepoznati isti trokut ako je zakrenut tako da "stoji na vrhu" jer to nije njegov „standardni“ položaj u kojem ga je učenik navikao gledati.



**Slika 1:** Učenik koji je na razini vizualizacije će prepoznati da je na prvoj slici prikazan trokut i četverokut, no neće prepoznati trokut na desnoj slici

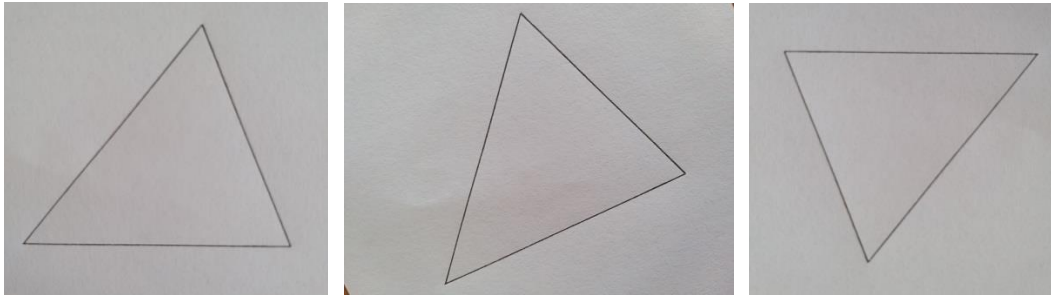
Također, učenik će primijetiti da svi paralelogrami „idu zajedno“ jer „jednako izgledaju“, ali kvadrat nije paralelogram jer „ne izgleda jednako kao paralelogrami“. Možemo zaključiti da se učenici ove razine koriste nekim nevažnim svojstvima i nepotpunim opisima (definicijama) kao kriterijem pri razvrstavanju likova koji „idu zajedno“.

Za razvijanje vizualizacije kod učenika, potrebno im je omogućiti što više aktivnosti u kojima bi sortirali i klasificirali pojedine matematičke objekte. Također, poželjno je da ti objekti budu u raznim bojama, te da učenici samostalno zaključe da boja nije ključno matematičko svojstvo i da ju zanemarujemo prilikom klasifikacije objekata. To je vrlo važan zaključak koji treba potaknuti kod tih učenika budući da djeca svoje prve klasifikacije u djetinjstvu izvršavaju baš na temelju boja objekata.

Poželjno je i poticati učenike na samostalno crtanje i izrađivanje, sastavljanje i rastavljanje dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih likova, opisivati sličnosti i razlike nacrtanih uzoraka.

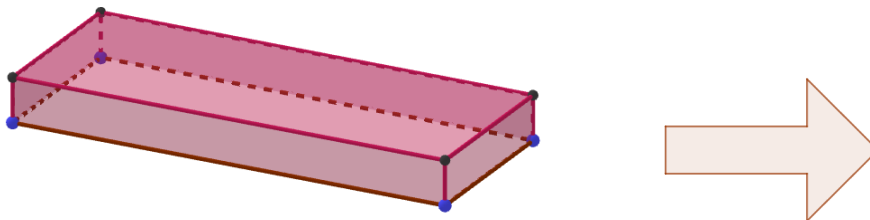
Primjerice, učenik može na komadu papira nacrtati trokut, a potom rotirati taj papir. Na taj način će učenik doći do zaključka da je nacrtani lik trokut, iako ponekad nije u svom

„standardnom“ položaju. Prilikom provođenja te aktivnosti može se diskutirati o tome što je ključno svojstvo trokuta, te kada za neki geometrijski lik možemo reći da je trokut. Slična aktivnost se može provesti i pomoću Geogebre.



**Slika 2: Prikaz trokuta kojeg bi učenici mogli nacrtati, a potom rotirati papir da bi uočili da je nacrtani lik trokut bez obzira što nije u svom „standardnom“ položaju**

Na modelu kocke i kvadra, napravljenih od papira, plastike ili nekog drugog materijala, učenici mogu mjeriti duljine bridova, uočavati odnose pojedinih strana, tj zaključivati koje su paralelne, i sukladne. Na temelju dobivenih zaključaka učenici će uočiti razlike između kocke i kvadra, te će ih moći i definirati, a ne samo prepoznavati u standardnim položajima.



**Slika 3: Prikaz kvadra i sedmerokuta**

Na slici je prikazan kvadar i sedmerokut, no učenici koji su na razini vizualizacije to ne bi prepoznali. Stoga je vrlo važna aktivnost u kojoj će mjerenjem, prebrojavanjem stranica, strana i kutova doći do nekih zaključaka i na temelju toga definirati pojedino geometrijsko tijelo ili lik, a potom ga i prepoznati na temelju definicije, a ne samo izgleda.

Navedene aktivnosti bi potaknule učenike na zamjećivanje nekih specifičnih osobina ili svojstava pojedinih matematičkih objekata, a na taj način bi razvili razumijevanje geometrijskih svojstava i prirodno ih počeli koristiti.

## **Razina 1 - Analiza**

Na ovoj razini učenici počinju opisivati, nabrajati, analizirati i imenovati svojstva geometrijskih likova, ali ne uočavaju odnose između svojstava, ne mogu razlučiti koja od tih svojstava su nužna, koja dovoljna, a koja uopće nisu relevantna. Također, ne uočavaju potrebu za empirijskim dokazima nekih činjenica. Stoga učenici mogu razdvojiti oblike u grupe i razumjeti da svi oblici u grupi kao što su paralelogrami imaju ista svojstva i mogu ih opisati.

Primjerice, učenici bi mogli definirati kvadrat kao četverokut kojemu su sve stranice jednake duljine, svi kutevi su mu pravi, dijagonale mu se raspolavljaju, a nasuprotne stranice su mu paralelne. Očito je da smo time predefinirali pojam kvadrata, jer neka od ovih svojstava implicira neke druge i zbog toga ih nije dobro ponovno navoditi.

Da bi se kod učenika potaknulo razvijanje razine 1 - Analiza, s učenicima je potrebno organizirati aktivnosti u kojima bi oni mjerili duljine pojedinih stranica ili bridova, savijanjem i rezanjem papira izrađivali geometrijske likove i mreže geometrijskih tijela, te korištenje geometrijskih softvera kao što je GeoGebra, Sketchpad, Cinderella, itd.

## **Razina 2 - Neformalna dedukcija**

Učenici percipiraju i izražavaju međusobne odnose između svojstava i geometrijskih oblika.

Na razini 2, učenici mogu primijetiti odnos između svojstava i razumjeti neformalne deduktivne rasprave o geometrijskim oblicima i njihovim svojstvima. Tada učenici počinju razumijevati odnose između oblika i njihovih različitih karakteristika. Također, učenici počinju promišljati o tome što je nužno, a što dovoljno za jednoznačan opis određenog geometrijskog objekta, osmisliti smislene definicije, te dati jednostavne argumente da bi obrazložili svoje zaključke. Primjerice, da bismo zaključili da se radi o kvadratu, dovoljno je navesti da se radi o četverokutu koji ima jedan pravi kut i sve stranice jednake duljine.

Učenici na ovoj razini prihvaćaju različite ekvivalentne definicije istog pojma. Stoga oni mogu zaključiti da svojstvo paralelograma da su mu nasuprotne stranice paralelne, uzrokuje da su mu nasuprotni kutovi jednakih mjera. Osim toga, poznavajući svojstva pravokutnika i kvadrata, u stanju su samostalno doći do zaključka da je svaki kvadrat pravokutnik, ali svaki pravokutnik nije kvadrat.

Učenici na ovoj razini mogu sudjelovati u aktivnostima kao što su crtanje logičke karte i dijagrama, opisati svoj položaj i smjer pomoću koordinata.

### **Stupanj 3 - Dedukcija**

Učenici mogu stvoriti formalne deduktivne dokaze, te zaključke iz prethodno poznatih tvrdnji.

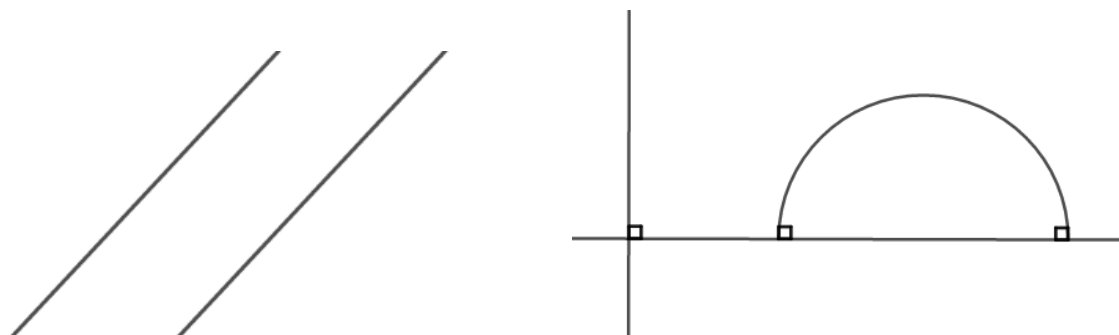
Učenici na razini 3 razmišljaju o odnosima između svojstava oblika i također razumiju odnose između aksioma, definicija, teorema, dokaza i postulata. Na ovoj su razini učenici sposobni raditi s apstraktnim izjavama o geometrijskim svojstvima i donositi zaključke temeljene više na logici nego na intuiciji. Učenici razumiju i koriste aksiome za rješavanje problema, te razlikuju nužne i dovoljne uvjete.

Učenici na ovoj razini su u stanju dokazati da ako četverokut ima nasuprotne stranice paralelne, tada su mu nasuprotne stranice sukladne, vrijedi i obrat. Ovo su dvije ekvivalentne definicije paralelograma i učenici su u stanju dokazati jednu tvrdnju ako je poznata druga primjenom teorema o sukkladnosti trokuta i deduktivnim zaključivanjem.

### **Razina 4 - Strogost**

Na ovoj se razini geometrija razumijeva na razini matematičara. Predmet misli su deduktivni geometrijski sustavi, za koje učenik uspoređuje aksiomatske sustave. Učenici mogu s razumijevanjem proučavati euklidsku i ne - euklidsku geometriju, u mogućnosti su koristiti sve vrste dokaza, te mogu razumjeti disciplinu geometrije i kako se ona filozofski razlikuje od ne-matematičkih studija

Učenici na ovoj razini mogu uočiti sličnosti i razlike između euklidske i ne - euklidske geometrije. Učenici će primjerice uočiti i s razumijevanjem tumačiti vezu između paralelnih pravaca u euklidskoj i ne - euklidskoj geometriji.



**Slika 4: Paralelni pravci u euklidskoj i ne - euklidskoj geometriji**

Općenito, većina učenika osnovne škole nalazi se na razini 0 ili 1, neki učenici srednjih škola su na razini 2. Neki učenici, ali i odrasli ljudi zauvijek ostaju na razini 0. Učenici iste dobi mogu biti na različitim van Hieleovim razinama.

Da bi se došlo do neke razine, potrebno je savladati sve razine prije nje, nije moguće preskakati razine već je za prelazak na veću razinu potrebno znanje iz prethodnih.

## **Geometrija prostora u kurikulumu Škola za život**

Novost koju je donio kurikulum Škola za život je formuliranje odgojno - obrazovnih ishoda, tj. jasnih i nedvosmislenih iskaza očekivanja od učenja, za razliku od Nastavnog plana i programa koji se sastojao od nastavnih tema koje se trebaju obraditi u pojedinom razredu. Dakle, sada se nastava pokušava usmjeriti na učenike i njihova postignuća, te prilagoditi način poučavanja samim učenicima. Ishodi za pojedini razred nalaze se unutra jedne od domena kurikuluma nastavnog predmeta Matematika, A - Brojevi, B - Algebra i funkcije, C - Oblik i prostor, D - Mjerenje, E - Podatci, statistika i vjerojatnost.

U aktualnom kurikulumu, sadržaje iz područja geometrije prostora pronalazimo u domeni C - Oblik i prostor, te djelomično i u domeni D - Mjerenje.

Općenito, domena C - Oblik i prostor je dio geometrije, te obuhvaća ishode povezane s razvijanjem prostornog zora i geometrijskog rasuđivanja. Osim toga, obuhvaća gradivo konstrukcije geometrijskim priborom i tehnologijom, prepoznavanje ravninskih i prostornih oblika, te uočavanje njihovih svojstava i veza među njima.

Ishodi povezani s geometrijom prostora se malim dijelom nalaze i unutar domene D - Mjerenje. Naime, mjerenje možemo interpretirati kao uspoređivanje određene veličine s

istovrsnom jediničnom mjerom što se povezuje s volumenom geometrijskog tijela u petom razredu.

Gradivo geometrije je vrlo malo zastupljeno u odnosu na druge matematičke grane. Geometrija prostora koja se nalazi unutar geometrije javlja se samo u pojedinim razredima i iznimno je malo zastupljeno. Uvođenjem novog kurikuluma možemo uočiti promjenu koju je donijela, jer se učenici već u petom razredu upoznaju s osnovnom geometrijskim tijelima, što do sada nije bio slučaj.

### Zastupljenost gradiva geometrije u pojedinom razredu

U sljedećoj tablici prikazana je zastupljenost gradiva geometrije i stereometrije - koja se nalazi unutar geometrije, u pojedinom razredu u odnosu na cjelokupno gradivo Škole za život.

Razred	Zastupljenost geometrije	Zastupljenost stereometrije
5. OŠ	35 %	6 %
6. OŠ	21 %	0 %
7. OŠ	26 %	0 %
8. OŠ	33 %	22 %
1. SŠ	10 %	0 %
2. SŠ	50 %	20 %
3. SŠ	35 %	0 %
4. SŠ	8 %	0 %

**Tablica 1: Tablica u kojoj je prikazana zastupljenost ishoda iz područja geometrije i stereometrije u odnosu na cjelokupno gradivo u aktualnom kurikulumu<sup>5</sup>**

Iz dane tablice uočljivo je da je gradivo stereometrije zastupljeno samo u petom i osmom razredu osnovne škole, te u drugom razredu srednje škole. Gradivo geometrije je pak zastupljeno u svim razredima podjednako, osim u 2. i 4. razredu srednje škole gdje su odstupanja od prosjeka.

Da bismo uočili promjene koje je donio novi kurikulum, proučimo zastupljenost geometrije i stereometrije u odnosu na cjelokupno gradivo prije uvođenja novog kurikuluma.

---

<sup>5</sup> Tablica je izrađena na temelju ishoda kurikuluma - Škola za život iz nastavnog predmeta Matematika

Razred	Zastupljenost geometrije	Zastupljenost stereometrije
5. OŠ	22 %	0%
6. OŠ	37 %	0%
7. OŠ	27 %	0%
8. OŠ	57 %	23 %
1. SŠ	22%	0 %
2. SŠ	29 %	29 %
3. SŠ	38 %	0 %
4. SŠ	0 %	0 %

**Tablica 2:** U tablici je prikazana zastupljenost nastavnih tema iz područja geometrije i stereometrije u odnosu na cjelokupno gradivo u starom kurikulumu<sup>6</sup>

Iz ovih dviju tablica ne možemo točno zaključiti o opsegu učenja geometrije, budući da je jedna tablica izrađena na temelj popisa nastavnih tema, a druga na popisu ishoda koje je potrebno ostvariti. Najznačajnija razlika koju je donio novi kurikulum konkretno iz područja stereometrije je uvođenje gradiva stereometrije postepeno već od petog razreda osnovne škole, dok su se učenici prije s geometrijom prostora susretali prvi puta tek u osmom razredu. Osim toga, ortogonalna projekcija se sada pojavljuje tek u drugom razredu gimnazije, dok se je prije učila već u osmom.

Ono što se uvođenjem novog kurikulumuma nije poboljšalo je diskontinuitet u poučavanju sadržaja geometrije prostora. Naime, i dalje je ovo gradivo prisutno samo u pojedinim razredima između kojih su veliki razmaci. Primjerice, učenici osmog razreda upoznaju geometrijska tijela i formule za izračunavanje oplošja i volumena što do drugog razreda srednje škole zaboravljaju. Potom, ako nisu u potpunosti razvili prostorni zor, sljedeći puta će za to imati prilike tek u drugom razredu srednje škole, što je zbilja velik razmak.

## **Geometrija prostora u 5. razredu osnovne škole**

Iako se prije uvođenja novog kurikulumuma gradivo geometrijskih tijela nije formalno uvodilo u petom razredu osnovne škole, sada se učenici s osnovnim geometrijskim tijelima kao što su kocka i kvadar upoznaju već u petom razredu osnovne škole. Prilikom obrade ovog gradiva

---

<sup>6</sup> Tablica je izrađena na temelju popisa tema iz aktualnih udžbenika izrađenih na temelju Nastavnog plana i programa



ne spominje se da se radi o geometriji prostora, već se ovo gradivo uvodi na primjeren način za učenike petog razreda, budući da im je teško poimati pojmove kao što je dimenzija, dvodimenzionalni i trodimenzionalni prostori, te definicije pojedinih geometrijskih tijela. Učenicima je intuitivno jasno što je to trodimenzionalni prostor, te će uočavati i imenovati trodimenzionalna tijela u trodimenzionalnom prostoru.

Da bi se ostvario ovaj ishod kod učenika petog razreda, važno je gradivo vizualizirati, učiti kroz igru i dati primjere iz svakodnevnog života.

Jedini ishod u petom razredu iz područja stereometrije je ishod MAT OŠ D.5.5

- **MAT OŠ D.5.5.**
  - **Računa i primjenjuje volumen kocke i kvadra.**

Za učenike petog razreda, vrlo je važno koristiti manipulativna sredstva budući da je njihova razina apstraktnog mišljenja na vrlo niskoj razini. Nakon što učenici imaju priliku manipulativnim sredstvima složiti potrebne figure i doći do zaključaka, nakon nekog vremena će slične zadatke moći izvršiti vizualizacijom.

<u>Aktivnost 5.1</u>	Od koliko jediničnih kocaka je sastavljena Rubikova kocka?
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• drvene kockice za igru (ili kockice napravljene od tvrdog papira)</li> <li>• Rubikova kocka</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• na geometrijskom tijelu sastavljenom od jediničnih kocaka procjenjivati i predvidjeti koliko to tijelo sadrži jediničnih kocaka,</li> <li>• odrediti koliko jediničnih kocaka nedostaje nekom tijelu da bi bilo potpuno</li> </ul>
Opis aktivnosti	Nastavnik na sat donosi Rubikovu kocku i postavlja učenicima pitanje od koliko je jediničnih kockica sastavljena Rubikova kocka?



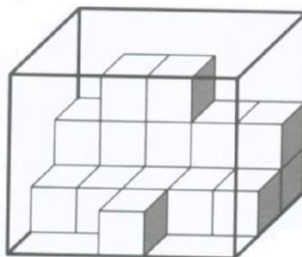


Slika 7: Rubikova kocka 5x5

Kroz diskusiju, nastavnik bi učenike usmjerio na postupak pomoću kojeg bi učenici došli do rješenja bez slaganja i prebrojavanja drvenih kockica koje služe kao pomoć.

Nastavnik zatim može slagati jedinične drvene kockice u obliku kocke ili kvadra, a učenici primjenom naučenog znanja zaključuju od koliko se jediničnih kockica to tijelo sastoji.

Potom nastavnik može prikazati kocku ili kvadar na projektoru kojemu „nedostaje“ nekoliko jediničnih kocaka, a učenici trebaju zaključiti koliko.



Slika 8: Primjer kocke u kojoj je potrebno odrediti koliko jediničnih kocaka nedostaje

Zašto je ova aktivnost korisna?

Ova aktivnost će potaknuti učenike na razmišljanje i vizualizaciju o onome što ova kocka sadrži, a nije vidljivo. Na taj način učenici će logički zaključivati, a naposljetku manipulativnim sredstvima potvrditi ispravnost svojih odgovora.

Oni učenici koji nisu samostalno došli do točnog rješenja, slaganjem kockica i prebrojavanjem će uočiti.

Aktivnost je predviđena kao sam uvod u temu o kocki i kvadru.

Uvođenjem novog kurikuluma, potiče se na što većem povezivanju gradiva pojedinog nastavnog predmeta s međupredmetnim temama, ali i s drugim nastavnim predmetima.

Sljedeća navedena aktivnost povezana je s nastavnim predmetom informatike, te se može ostvariti u suradnji s profesorom informatike.

<u>Aktivnost 5.2</u>	Igranje računalnih igara koje pomažu u vizualizaciji
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• računala ili tableti</li> <li>• pristup internetu</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• vizualizirati prikaz geometrijskog tijela na računalu, te izvesti potrebne manipulacije</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Učenici bi kroz igru na računalu imali prilike manipulirati i rotirati razne figure sastavljene od kocaka. Primjeri nekih igara koje bi učenici mogli igrati, te pomoću kojih bi se moglo organizirati malo natjecanje u trajanju od 15 minuta na kraju sata.</p> <p>1) Kocke u prostoru (<a href="https://www.addictinggames.com/puzzle/space-cubes">https://www.addictinggames.com/puzzle/space-cubes</a>)</p> <p>Igra kojom bi učenici razvijali svoj prostorni zor na računalu sastoji se od kocaka u prostoru koje čine neku figuru koja se može rotirati. Potrebno je upariti kocke iste boje da bi se one poništile i nestale, a cilj je da nestane cijela prikazana figura. „Nestati“ mogu samo rubne kocke, dakle zbilja su potrebne rotacije kocke u pravom smjeru i vizualizacija da bi se igra mogla uspješno završiti. Igra se sastoji od 10 razina, u kojima je potrebno rotirati danu figuru da bi se došlo do parova kockica iste boje, koje se nalaze s vanjske strane figure. Igra nije u potpunosti trivijalna, no nije niti prezahtjevna za učenike petog razreda. Svaka sljedeća razina je teža od prethodne jer figura koju je potrebno rotirati postaje sve složenija.</p>



Slika 9: Kocke u prostoru

2) Rotiranje igraće kocke (<http://ba.game-game.com/18038/>)

Ova igra se sastoji od 15 razina, a potrebno je manipulirati igraćom kockom tako da se u što manje poteza kocka dovede do označenog polja, te da na gornjoj strani kocke bude prikazan upravo broj na označenom polju. Igrica nije trivijalna i zbilja je potrebno promišljati i vizualizirati što se događa s pojedinom rotacijom kocke da bi se uspješno riješila. Svaka sljedeća razina je teža i sadrži veći broj kocaka, nove prepreke kao i složeniji poligon.

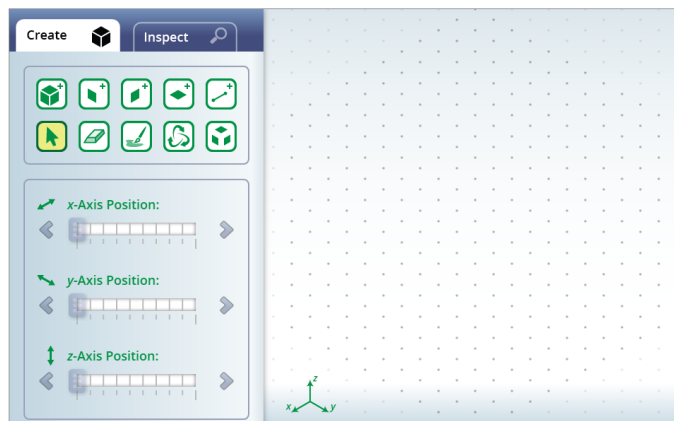


Slika 10: Rotiranje igraće kocke

3) Alat za crtanje figura pomoću kocaka

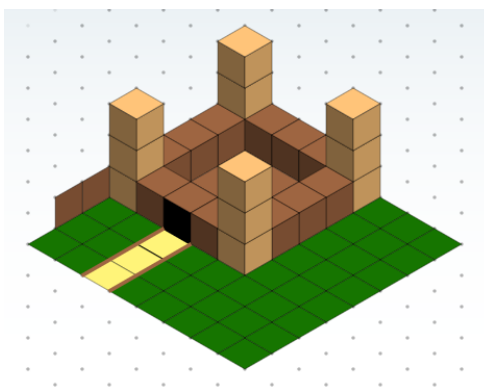
(<https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Isometric-Drawing-Tool/>)

Ova aplikacija omogućuje učenicima da pomoću kocaka i strana kocaka izrađuju razne figure u prostoru. Pomoću rotacije figure omogućeno je sagledavanje izrađene figure iz raznih kuteva.



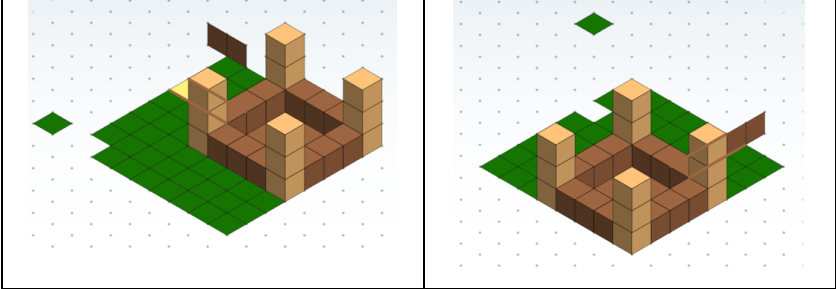
Slika 11: Sučelje programa

Ova aplikacija je vrlo korisna za stvaranje prostornog zora i vizualizaciju figure prikazane na računalu. Učenici bi uz pomoć ovog alata mogli izraditi primjerice dvorac.



Slika 12: Prikaz dvorca izrađenog u aplikaciji

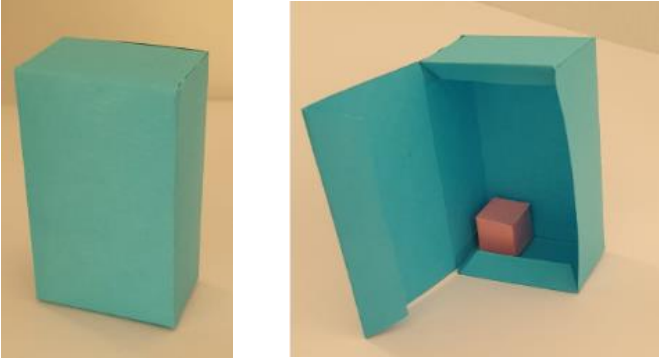
Ovaj jednostavan dvorac okružen je travom, ispred je mali put, a lijevo od puta je ograda. Iz ovog kuta gledanja čini se da je zadatak uspješno obavljen. No, ako ovaj dvorac počnemo rotirati možemo uočiti da pojedini dijelovi ipak nisu stavljeni na pravo mjesto u prostoru, te je potrebno rotirati prikaz i premjestiti objekte na pravo mjesto.

	 <p style="text-align: center;">Slika 13: Prikaz dvorca iz drugih kuteva iz kojih uočavamo greške</p>
<p>Zašto je ova aktivnost korisna?</p>	<p>Pomoću ove aktivnosti učenici bi napravili prirodan prijelaz s manipulativnih sredstava u kojima vrlo lako zapažaju potrebne zaključke, na prikaz istoga na računalu. Naime, u višim razredima osnovne škole, te u srednjoj školi se najčešće koriste upravo prikazi na računalu kao vizualni prikaz, a vrlo je važno što ranije kombinirati manipulativna sredstva i vizualizaciju na računalu da bi taj prijelaz bio što prirodniji.</p>

U opisu ishoda za peti razred stoji da se učenici upoznaju i s formulama za volumen kocke i kvadra. Učenici bi mjerenjem, vizualizacijom i nadovezivanjem na znanje koje su već stekli ove formule naučili s više razumijevanja.

<p><u>Aktivnost 5.3</u></p>	<p>Izračunavanje volumena kocke i kvadra.</p>
<p>Potreban materijal</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• drvene kocke i kvadri raznih dimenzija ili kocke i kvadri izrađeni od papira raznih dimenzija.</li> </ul>
<p>Ishodi</p>	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• izreći i primijeniti formule za izračunavanje volumena kocke i kvadra</li> </ul>
<p>Opis aktivnosti</p>	<p>Učenici uočavaju analogne objekte, kvadrat i kocka, te istim načinom razmišljanja za određivanje površine kvadrata, zaključuju o volumenu kocke. Učenici mjere duljine bridova kocke, te dolaze do formule za volumen kocke <math>a^3</math>. Također sličnim razmišljanjem dolaze i do formule za volumen kvadra. Izrađuju dvorac pomoću kocaka i kvadara od drveta (ili papira), uz uvjet da volumen dvorca iznosi primjerice <math>30 \text{ cm}^3</math>.</p>
<p>Zašto je ova aktivnost korisna?</p>	<p>Učenici bi puno lakše ostvarili vizualizaciju i zapamćivanje potrebnih formula nakon nekih eksperimenata koje su sami izveli, nego da im je nastavnik samo izrekao i napisao formulu na ploču.</p>


Učenicima petog razreda bi se volumen mogao predstavljati kao dio prostora u koji stane određeni broj predmeta, da bi što lakše razumjeli taj pojam. Tako bi primjerice volumen kocke i kvadra za početak mogli određivati prebrojavanjem jediničnih kockica koje se nalaze u njemu.

<u>Aktivnost 5.4</u>	Izračunavanje volumena kvadra pomoću formule i pomoću jediničnih kockica.
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jedinične drvene ili papirnate kocke (ili neki drugi materijal)</li> <li>• veći kvadar izrađen od papira bez jedne strane (ili neki drugi materijal)</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odrediti od koliko se jediničnih kocaka sastoji pojedino geometrijsko tijelo, te pomoću toga objasniti volumen tijela</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Zadatak je odrediti volumen kvadra uz pomoć formule, te ga povezati s brojem jediničnih kocaka koje stanu u kvadar. Nakon što učenici odrede volumen kvadra pomoću formule, primjerice <math>16 \text{ cm}^3</math>, potrebno je da vizualizacijom i kombiniranjem odrede koliko će im trebati jediničnih kockica da bi „ispunili“ taj kvadar. Nakon toga se učenici mogu uvjeriti u ispravnost svog odgovora slažući jedinične kocke u dani kvadar. Na taj način će učenici uočiti nov način na koji mogu određivati volumen - prebrojavanjem jediničnih kockica koje ispunjavaju dano tijelo.</p> <p>Učenici trebaju doći do zaključka da je volumen kvadra isti kojim god načinom računali.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p><b>Slika 14: Model kvadra dimenzija 2x3x5 napravljenog od papira bez jedne strane u kojeg stane 30 jediničnih kockica</b></p>



Zašto je ova aktivnost korisna?	Ova aktivnost je korisna učenicima koji nisu razumjeli kako odrediti koliko jediničnih kockica sadrži kvadar, te se eksperimentalnim načinom u to mogu uvjeriti i razjasniti.
---------------------------------	---

Nakon što su učenici stekli određenu razinu vizualizacije, te logički zaključuju može se organizirati malo natjecanje, koje neće služiti samo ponavljanju gradiva već i dodatnom zaključivanju i razmišljanju.


<u>Aktivnost 5.5</u>	Izračunavanje volumena kvadra pomoću formule i pomoću čokoladnih kockica.
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• čokoladice u obliku kockice</li> <li>• veći kvadar izrađen od papira bez jedne strane</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odrediti od koliko se zadanih kocaka sastoji pojedino geometrijsko tijelo</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Ova aktivnost vrlo je slična aktivnosti 5.4, no nešto je složenija i primjerena je za razred u kojem su učenici bolji u matematici. Naime, učenici bi dobili kvadar koji nema jednu stranu, potrebno je izmjeriti bridove kvadra da bi odredili njegov volumen, potom izmjeriti brid čokoladice u obliku kocke, te odrediti koliko čokoladica stane u dani kvadar. Nakon dolaska do točnog odgovora, učenici se uvjeravaju u točnost slaganjem čokoladica u kvadar. Učenik koji točno dođe do rješenja i objasni ga drugim učenicima dobiva sve čokoladice iz kvadra.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;"><b>Slika 15: Kraš Fontana ledene kocke - primjer čokoladnih kockica</b></p>
Zašto je ova aktivnost korisna?	Ova aktivnost je vrlo motivirajuća zbog nagrade koja se osvaja na kraju, no i zbog natjecateljskog duha koji je prisutan cijelo vrijeme. Učenici petog razreda su zaigrani i vole ovakve izazove i natjecanja. Na ovaj način učenici bi kroz igru i visok stupanj motiviranosti promišljali i zaključivali kompleksne stvari za svoju biološku dob.

## Geometrija prostora u 8. razredu osnovne škole

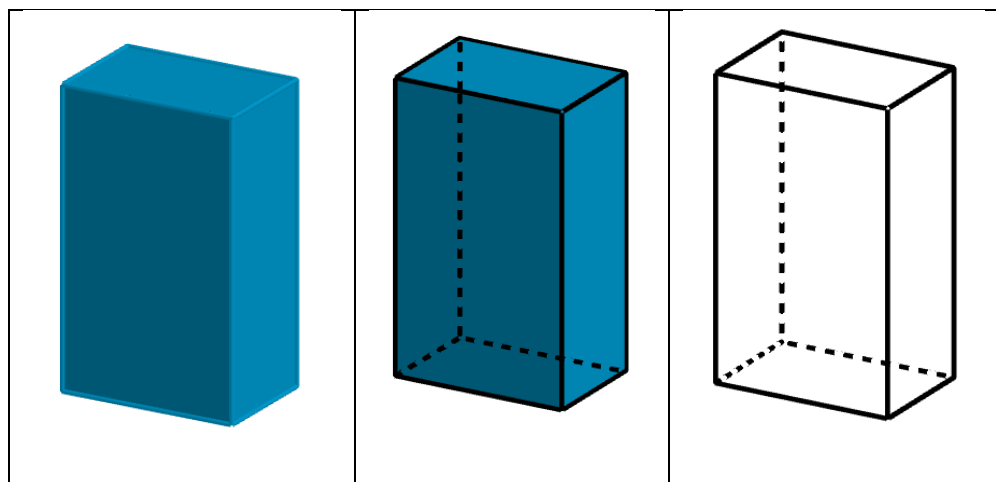
U osmom razredu osnovne škole gradivo geometrije prostora je zastupljeno čak 22%, a ishodi koji obuhvaćaju to gradivo su MAT OŠ C.8.1., MAT OŠ C.8.2., MAT OŠ D.8.2. Budući da se učenici ovdje prvi puta susreću s promišljanjem o međusobnom odnosu pravaca i ravnina u prostoru nužno je na početku koristiti manipulativna sredstva da bi raznim manipulacijama vizualizirali položaje objekata u prostoru.

- **MAT OŠ C.8.1.**
  - **Skicira prikaz uspravnoga geometrijskog tijela u ravnini**

Učenike je najprije potrebno upoznati s kosom projekcijom, jer kada bismo im prikazali standardni prikaz kvadra u ravnini u kosoj projekciji učenici ne bi razumjeli da baza kvadra nije paralelogram nego pravokutnik prikazan kosom projekcijom.

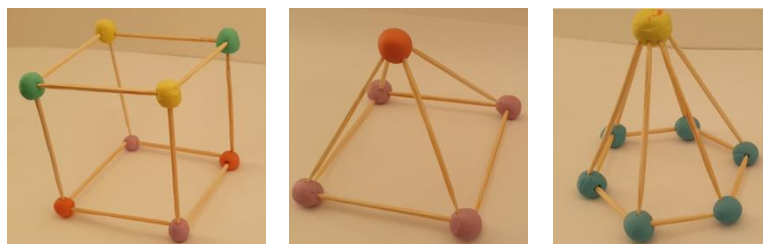
<u>Aktivnost 8.1</u>	Crtanje kvadra i ostalih geometrijskih tijela
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"><li>• fizički model kvadra</li><li>• fizički model geometrijskih tijela (kocka, pravilna četverostrana piramida, pravilna trostrana piramida, valjak, stožac i sl.)</li></ul>
Ishodi	Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti: <ul style="list-style-type: none"><li>• prikazati geometrijska tijela u ravnini u kosoj projekciji</li></ul>
Opis aktivnosti	<p>Nastavnik na sat donosi model kvadra te ga pokazuje učenicima sa svih strana i navodi učenike na zaključak koji geometrijski likovi čine strane tog kvadra (pravokutnici).</p>  <p>Slika 16: Prikaz kvadra izrađenog od papira</p>

Potom nastavnik na projektoru prikazuje fotografiju tog istog kvadra iz kose projekcije da bi ga svi učenici vidjeli na isti način, te upućuje učenike da ga pomoću ravnala nacrtaju kako je prikazan, ali i da isprekidanom crtom nacrtaju bridove koji se ne vide na fotografiji, a znaju da postoje. Zatim, kada bi učenici dovršili crtanje kvadra u kosoj projekciji, nastavnik na projektoru dodatno iscrtava bridove kvadra punom crtom, a bridove koji nisu vidljivi iz tog položaja isprekidanom crtom. Nakon toga fotografija početnog kvadra nestaje, a ostaju samo istaknuti bridovi kvadra. Na taj način učenici bi povezali kvadar prikazan u ravnini s fizičkim modelom kvadrom.



**Slika 17: Prikaz kvadra u ravnini**

Nakon toga bi učenici podijeljeni u grupe crtali i preostala geometrijska tijela u kosoj projekciji. Svaka grupa bi dobila ili izradila model geometrijskog tijela od papira ili pomoću štapića i plastelina, kao što su kocka, pravilna četverostrana piramida, pravilna trostrana piramida, valjak i stožac. Ako je nekoj grupi potrebna pomoć kod vizualizacije, nastavnik će prikazati fotografije pojedinih geometrijskih tijela u kosoj projekciji na projektoru.



**Slika 18: Prikaz uglatih geometrijskih tijela**



**Slika 19: Prikaz obliha geometrijskih tijela**

Uz male modifikacije ovih uspravnih geometrijskih tijela, vrlo lako se može napraviti i modeli kosih geometrijskih tijela. Kao dodatnu aktivnost učenici mogu izraditi i kosa geometrijska tijela, te ih nacrtati u bilježnice.

Za izradu preciznijih i čvršćih modela geometrijskih tijela, može se koristiti i Zometool. Zometool je plastični set koji se sastoji od malih kuglica s rupicama i štapića raznih duljina i boja. Krajevi štapića dizajnirani su tako da se uklapaju u udubljenja kuglica što omogućuje spajanje i izradu raznih modela geometrijskih tijela.



**Slika 20: Zometool**



Slika 21: Prikaz korištenja Zometoola

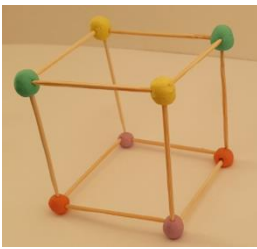
Zašto je ova aktivnost korisna?

Neki učenici bi kod ove aktivnosti mogli imati problema budući da znaju da su strane kvadra pravokutnici, pa iako na prikazanoj slici baza kvadra i bočne strane kvadra izgledaju kao paralelogrami, učenici bi mogli više vjerovati svome znanju nego onome što vide. Upravo ovom aktivnosti bi razumjeli da je nužno pojedine strane kvadra crtati kao paralelograme, tj u kosoj projekciji da bi sve strane kvadra bile vidljive. Ovom aktivnosti bi učenici uspostavili poveznicu između stvarnog modela kvadra i njegovog prikaza u ravnini što bi im kasnije omogućilo vizualizaciju kvadra prikazanog u ravnini. Često se ova aktivnost ne provodi, pa većina učenika ima velikih problema prilikom vizualizacije kvadra prikazanog u ravnini, što uzrokuje nemogućnost uočavanja potrebnih odnosa pojedinih ravnina i pravaca.

Osim toga, vjerojatno svaka škola ima modele raznih geometrijskih tijela u školi te ih učenici mogu promatrati na nastavi, no u slučaju da se nastava odvija online vrlo je korisno da učenici samostalno kod kuće izrade modele nekih geometrijskih tijela, te ih koriste u nastavku ove nastavne cjeline. Teško je vizualizirati pojedine odnose na modelu kvadra prikazanog u ravnini, ako prethodno nemamo iskustva s fizičkim modelom. Ovdje je prikazano da se vrlo lako može izraditi model geometrijskog tijela pomoću čačkalica koje sigurno svi imaju u svojim domovima ili pomoću Zometoola.

Učenici se po prvi puta tek u osmom razredu upoznaju s proučavanjem međusobnih odnosa pravaca i ravnina u prostoru. Postoji razlog zašto je to tako, naime prema Piagetovoj<sup>7</sup> teoriji kognitivnog razvoja većina učenika osmog razreda nalazi se u fazi formalnih operacija, posljednjoj fazi kognitivnog razvoja, koja se počinje razvijati oko dvanaeste godine života. Učenici u ovoj fazi usvajaju apstraktne načine razmišljanja koji im omogućuje procesuiranje hipotetskih situacija i problema. Naravno da neki učenici i ljudi nikada ne dođu u fazu formalnih operacija, već ostaju u fazi konkretnih operacija, no nastava treba biti organizirana u skladu s kognitivnim mogućnostima nekog prosjeka.

Iako učenici osmog razreda imaju sve predispozicije da bi mogli uspješno vizualizirati i uočiti međusobne odnose između ravnina i pravaca u prostoru, većina učenika ipak ima velikih problema s time. Zbog toga je potrebno učenicima vizualizirati pojedine odnose na manipulativnim sredstvima ili pomoću programa za dinamičku geometriju prije no što se od njih zahtijeva da o pojedinim odnosima zaključuju na temelju prikaza u ravnini.

<u>Aktivnost 8.2</u>	Proučavanje odnosa pojedinih ravnina i pravaca na modelu kocke
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• modeli geometrijskih tijela kojima su prikazani samo bridovi</li> <li>• štapići koji predstavljaju pravce</li> <li>• papiri koji predstavljaju ravnine</li> <li>• nastavni listići</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• uočavati međusobne odnose pravaca i ravnina na modelu kocke prikazane u ravni</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Učenici ovu aktivnost rade u parovima, a svaki par dobiva model kocke kojemu su prikazani samo bridovi ili pak učenici samostalno izrađuju svoje kocke.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;"><b>Slika 22: Primjer kako učenici samostalno mogu izraditi kocku</b></p>

<sup>7</sup> Jan Piaget (9.8.1896. - 16.9.1980.) švicarski psiholog i filozof, jedan od najvažnijih istraživača kognitivnog razvoja djece, te vodeći predstavnik razvojne psihologije 20. stoljeća

	<p>Kroz diskusiju i pomoću konkretnih primjera na kocki koja ima samo bridove nastavnik upoznaje učenike s odnosima u kojima se na modelu kocke mogu naći pravci i ravnine. Potom nastavnik učenicima dijeli nastavne listiće koje je potrebno ispuniti uz pomoć fizičkog modela kocke. Na listiću je potrebno nacrtati ili označiti pojedine pravce ili ravnine, a zatim odrediti u kojem su međusobnom položaju. Prilikom određivanja međusobnog položaja pravaca ili ravnina učenici se mogu koristiti fizičkim modelom kocke da bi provjerili svoj odgovor ili pak ako ne znaju odgovor da bi ga pronašli.</p> <p>Primjer nastavnog listića nalazi se u prilogu.</p> <p>Fizički model kocke sastavljene samo od bridova se može koristiti i na nekim drugim nastavnim satima matematike uz neke druge aktivnosti da bi učenici postepeno usvajali novu vještinu vizualizacije.</p>
<p>Zašto je ova aktivnost korisna?</p>	<p>Često se učenicima odnos među pravcima i ravninama na modelu kvadra ili kocke prikazuje odmah u ravnini i očekuje se da oni to mogu vizualizirati, što uzrokuje loše rezultate iz ovog dijela gradiva. Na ovaj način učenici će na stvarnom modelu kocke imati priliku proučavati pojedine pravce i ravnine, te im neće biti problematično zaključiti u kojem su oni međusobnom odnosu, a potom i na nacrtanoj kocki na papiru vizualizirati dani odnos.</p>

Vrlo je korisno i poticati vizualizaciju korištenjem raznih računalnih programa za geometriju, a najpoznatiji je Geogebra. Učenici osmog razreda bi imali teškoće kada bi im pomoću računalnih programa pokušali razviti prostorni zor i vizualizaciju, budući da im i za to treba neko prethodno iskustvo vizualizacije fizičkog modela. Stoga, uvođenje računalnih programa kojima se mogu vizualizirati pojedina geometrijska tijela ili pak odnosi je potrebno učiniti nakon što su učenici imali prilike manipulirati fizičkim modelom tog geometrijskog tijela.

Postoji niz programa pomoću kojih se mogu uočiti potrebni odnosi na modelu kvadra, neki od njih su složeni i koriste se u komercijalne svrhe, a neki nisu besplatni već se mogu koristiti samo u probnom razdoblju besplatno. Program Geogebra omogućuje prikaz svega onoga što bi učenici trebali uočiti, a pritom je i vrlo jednostavan za korištenje, besplatan, na hrvatskom

jeziku, te dobra podloga i za kasnije korištenje složenijih programa za učenike koji će svoje školovanje usmjeriti prema tome.

<p><u>Aktivnost 8.3</u></p>	<p>Proučavanje odnosa pojedinih ravnina i pravaca na modelu kocke korištenjem računanih programa</p>
<p>Potreban materijal</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• računala ili tableti</li> <li>• pristup internetu</li> </ul>
<p>Ishodi</p>	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odrediti međusobne odnose pravaca i ravnina na modelu kocke prikazane na računalu</li> </ul>
<p>Opis aktivnosti</p>	<p>Učenici će dobiti nastavne listiće slično kao i u aktivnosti 8.2 gdje će biti potrebno odrediti u kojem međusobnom položaju su dva pravca određena vrhovima kocke, zatim pravac i ravnina, te dvije ravnine. Ovu aktivnost će svaki učenik izvršavati samostalno. Da bi učenici provjerili svoj zaključak, ili ako pak ne znaju odgovor koristit će digitalni alat Geogebra.</p> <p>Primjer zadatka:</p> <p>Na modelu kocke nacrtaj ravninu određenu točkama B, C i H, te ravninu određenu točkama H, D i G, te odredi u kakvom su međusobnom položaju. Ako ravnine imaju zajednički pravac, odredi o kojem pravcu je riječ.</p> <div data-bbox="427 1216 1401 1529" style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: center;"><b>Slika 23: Prikaz odnosa dviju ravnina u Geogebri</b></p>
<p>Zašto je ova aktivnost korisna?</p>	<p>Međusobne odnose u kojima se nalaze ravnine, posebno ako je riječ o tri ravnine, nije jednostavno prikazati pomoću nekih manipulativnih sredstava, te je vrlo korisno upotrijebiti neki digitalni alat. Geogebra je vrlo jednostavan digitalni alat pomoću kojeg se mogu uočiti svi međusobni odnosi ravnina. Također, u nastavku školovanja većina odnosa koje je potrebno vizualizirati prikazivati će se upravo pomoću digitalnih alata, te je vrlo korisno da učenici sami pokušavaju manipulirati objektima izrađenim u takvim programima.</p>

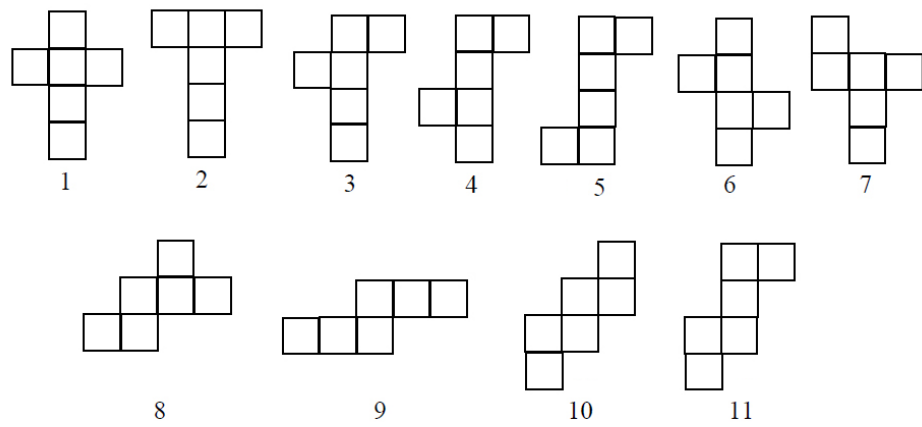


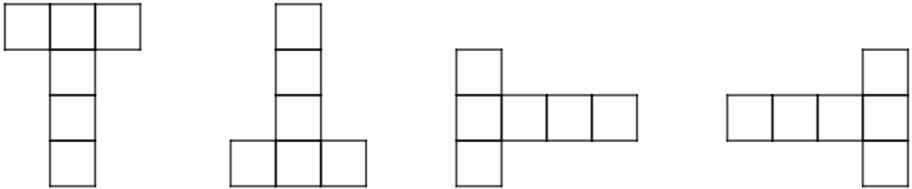
- **MAT OŠ C.8.2.**

- **Analizira i izrađuje modele i mreže uspravnih geometrijskih tijela.**

Aktivnost 8.4	Analiziranje mreža kocke i kvadra
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• razne mreže kocke i kvadra</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• prepoznati koje su mreže kocke i kvadra</li> <li>• vizualizirati mreže kocke i kvadra te razlučiti koje mreže će savijanjem tvoriti kocku ili kvadar, a koje ne</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Učenici dobivaju različite mreže kocke i kvadra izrezane iz papira, a potrebno ih je presavijati po iscrtanim linijama i složiti geometrijsko tijelo pomoću njih da bi se uvjerali da je to mreža baš tog geometrijskog tijela.</p> <div data-bbox="746 927 1043 1167" data-label="Image"> </div> <p style="text-align: center;"><b>Slika 24: Mreža kvadra</b></p> <p>Nakon što svaki učenik uspješno presavije papir i složiti dobiveno geometrijsko tijelo nastavnik upita da li je svaka mreža sastavljena od šest kvadrata mreža kocke. Potom nastavnik prikazuje nemoguću mrežu kocke. Točnije, mrežu koja bi mogla biti mreža kocke jer sadrži šest kvadrata, no nije ju moguće presaviti tako da dobijemo kocku. Učenici imaju dovoljno vremena da bi vizualizacijom došli do odgovora da je to nemoguća mreža kocke, a zatim bi nastavnik omogućio učenicima da se presavijanjem u to i uvjere.</p> <div data-bbox="671 1738 1123 1816" data-label="Image"> </div> <p style="text-align: center;"><b>Slika 25: Mreža od koje se ne može formirati kocka</b></p>

	Učenici u bilježnice trebaju nacrtati jednu mrežu od koje se može sastaviti kocka i jednu od koje se ne može sastaviti kocka.
Zašto je ova aktivnost korisna?	Učenici će uočiti da isto geometrijsko tijelo ima više različitih mreža. Također će uočiti da nije svaka mreža sastavljena od geometrijskih likova koji čine strane nekog geometrijskog tijela mreža baš tog geometrijskog tijela. Učenici će savijajući papir vizualizirati kako nastaje geometrijsko tijelo, te misaonim postupcima i zamišljanjem zaključiti da li je dana mreža baš mreža nekog geometrijskog tijela.

<u>Aktivnost 8.5</u>	Samostalno pronalaženje mreža kocke
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• razne mreže kocke i kvadra</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• prepoznati mrežu kocke</li> <li>• uočiti mrežu koja nije mreža kocke</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>U ovoj aktivnosti učenici bi samostalno u bilježnice nacrtali što više različitih mreža kocke, a potom bi trebali doći do zaključka koliko različitih mreža ima kocka. Ova aktivnost je nešto zahtjevnija od prethodne i potrebna je veća sposobnost vizualizacije, stoga je pogodno da se ova aktivnost odvija u parovima ili u grupama od četiri učenika.</p>  <p style="text-align: center;"><b>Slika 26: Prikaz svih mogućih mreža kocke</b></p> <p>Potrebno je da učenici u bilježnicama pokušaju nacrtati šest sukladnih kvadrata od koji svaki ima barem jedan zajednički brid s nekim drugim kvadratom. Potom bi procesom vizualizacije zaključili da li je to mreža</p>

	<p>kočke ili ne, te ako nije pokušati modificirati svoj pokušaj. Na taj način bi si učenici u grupi mogli pomagati i otkriti što više različitih mreža kočke. Zaključak do kojeg svaka grupa treba doći je da postoji 11 različitih mreža kočke.</p> <p>Tu bi još bilo dobro upozoriti učenike da mreže trebaju biti različite do na rotaciju. Primjerice, ovdje prikazane mreže smatramo istim, budući da se rotiranjem mogu dovesti do preklapanja.</p>  <p style="text-align: center;"><b>Slika 27: Prikaz iste mreže kočke u različitim položajima</b></p>
<p>Zašto je ova aktivnost korisna?</p>	<p>Ova aktivnost vrlo je korisna jer učenici samostalno otkrivaju različite mreže kočke, te dolaze do zaključka koliko ih ima. Aktivnosti u kojima učenici nisu pasivni i u kojima ulažu trud da bi došli do zaključka su vrlo korisne i razvijaju brojne vještine kod učenika. Na početku će im vjerojatno ova aktivnost biti zahtjevna, no nakon pronađene 2 ili 3 različite mreže, učenici će poboljšati svoju sposobnost vizualizacije te će lakše pronalaziti nove mreže.</p> <p>Ova aktivnost se može realizirati i za neko drugo geometrijsko tijelo, primjerice tetraedar.</p>

Nakon što se učenici promatranjem i analizom napravljenih mreža upoznaju s nekim svojstvima tih mreža, te steknu sposobnost vizualiziranja presavinjanja papira da bi nastala mreža, učenici mogu samostalno izrađivati mreže i preostalih geometrijskih tijela.

<u>Aktivnost 8.6</u>	Izrađivanje mreža geometrijskih tijela te izvod formula za oplošja
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• papir u boji</li> <li>• škare</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• izraditi mreže geometrijskih tijela</li> </ul>
Opis aktivnosti	Učenici u parovima izrađuju mreže zadanih geometrijskih tijela od papira, kao što su pravilna trostrana prizma, pravilna šesterostrana

	<p>prizma, pravilna trostrana piramida, pravilna četverostrana piramida, pravilna šesterostrana piramida, valjak i stožac.</p> <p>Nakon što su se učenici upoznali s pojmom oplošja geometrijskog tijela, te izradili mreže pojedinih geometrijskih tijela, potrebno je da odrede i oplošje tog geometrijskog tijela za koje su izradili mrežu. Nakon što svaka grupa uz pomoć nastavnika dođe do točnog zaključka, to će prezentirati i ostalim učenicima koji će formule zapisivati u bilježnice.</p> <p>Na kraju sata učenici će na mreže svojih geometrijskih tijela zapisati formulu za oplošje te staviti na pano.</p> <div data-bbox="676 736 1118 1133" data-label="Image"> </div> <p>Slika 28: Primjer kako bi učenici izradili mrežu valjka i odredili formulu za oplošje</p>
<p>Zašto je ova aktivnost korisna?</p>	<p>Na ovaj način će učenici aktivno sudjelovati u otkrivanju mreže i formule za oplošje, što će im omogućiti bolje zapamćivanje, kao i prikaz na panou koji im je uvijek dostupan.</p>

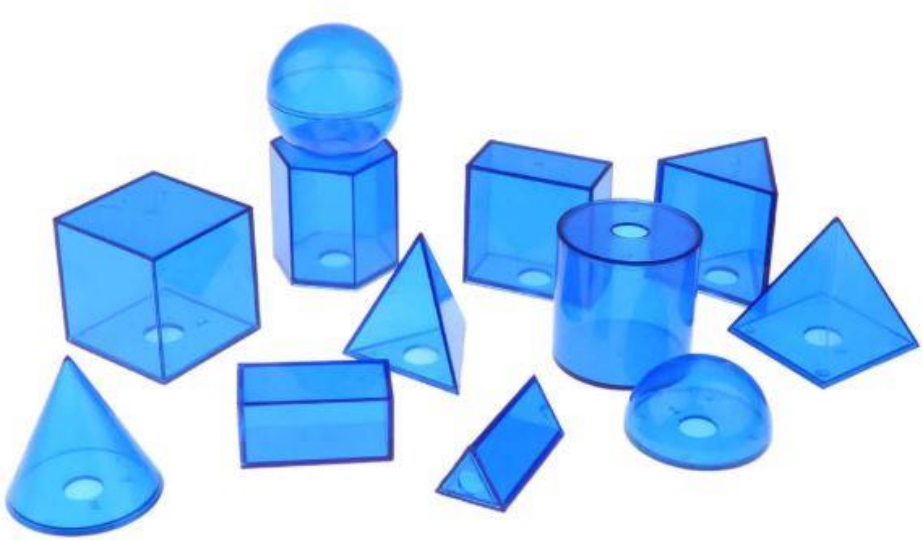
• **MAT OŠ D.8.2.**

○ **Primjenjuje oplošje i volumen geometrijskih tijela**

<p><u>Aktivnost 8.7</u></p>	<p>Određivanje volumena kocke</p>
<p>Potreban materijal</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• kocka napravljena od plastelina ili nekog drugog materijala</li> <li>• posuda na kojoj je označena mjera u mililitrima</li> </ul>
<p>Ishodi</p>	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• određivati volume kocke</li> <li>• interpretirati volumen kao mjera prostora koji neko tijelo zauzima</li> </ul>

<p>Opis aktivnosti</p>	<p>Nastavnik na sat donosi model kocke izrađene od plastelina čiji je brid duljine 2 cm, te posudu na kojoj je označena mjera u mililitrima. Učenici se upoznaju činjenicom da je <math>1l = 1dm^3</math>. Potom nastavnik u mjernu posudu u kojoj se nalazi voda (treba biti dovoljno vode da bi kocka koju uranjamo bila u potpunosti u vodi) uroni kockicu napravljenu od plastelina, učenici očitavaju za koliko mililitara se povećala razina vode u posudici. Možemo vidjeti da se razina vode povećala za otprilike 8 ml. Preračunavanjem iz ml u l dobivamo <math>8ml = 0.008l</math>, te iz l u <math>dm^3</math> dobivamo <math>0.008l = 0.008dm^3</math>, a potom i iz <math>dm^3</math> u <math>cm^3</math>, te dobivamo <math>0.008dm^3 = 8cm^3</math>. Na taj način učenici zaključuju da kockica zauzima <math>8 cm^3</math> prostora, tj njen volumen je <math>8 cm^3</math>.</p> <div data-bbox="454 907 1340 1243" data-label="Image"> </div> <p>Slika 29: Čaša sadrži 100ml vode, a nakon što u nju stavimo kocku čiji je brid duljine 2 cm, razina vode iznosi 108 ml</p> <p>Nakon što su učenici odredili volumen kocke koji iznosi <math>8 cm^3</math>, a pritom znaju i da je duljina brida kocke 2 cm, potrebno je uočiti poveznicu između tih veličina i prepoznati formulu za volumen kocke. Pomoću formule za volumen kocke nastavnik objašnjava da na analogan način određujemo i volumene preostalih prizmi, te upoznaje učenike s općenitom formulom za volumen prizmi <math>V = B \cdot v</math></p> <p>Kao dodatak ove aktivnosti, učenici na sličan način mogu određivati i volumene nekih drugih prizmi.</p>
<p>Zašto je ova</p>	<p>Učenici će eksperimentalnim načinom doći do formule za volumen, a neće samo dobiti gotovu formulu koju će koristiti. Na ovaj način učenici</p>

aktivnost korisna?	će kroz praktični problem doći do potrebne formule, te uočiti njezinu primjenu u svakodnevnom životu.
--------------------	---

<u>Aktivnost 8.8</u>	Volumen piramide i stošca
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• modeli prizmi, piramida i valjka (napravljeni od papira, plastike ili slično)</li> <li>• riža, pijesak, brašno ili neki drugi sastojak</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• odrediti odnos volumena prizme i piramide koje imaju sukladne baze i jednake duljine visine</li> <li>• odrediti odnos volumena valjka i stošca koji imaju sukladne baze i jednake duljine visine</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Učenici su podijeljeni u grupe, jedna grupa ima trostranu piramidu i trostranu prizmu čije su baze sukladne, a visine jednake duljine, te nemaju jednu bazu (ili imaju rupu na jednoj bazi). Druge grupe na analogan način imaju prizme i piramide ili valjak i stožac. Neke škole imaju ove modele geometrijskih tijela, no mogu se izraditi i od papira.</p> <p>Prva grupa će u trostranu piramidu usipati brašno, a zatim presipati u trostranu prizmu, te zaključiti da točno 3 puta to može ponoviti. Nakon toga svaka grupa treba izreći formulu za volumen piramide ili stošca, ovisno u kojoj su grupi.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p><b>Slika 30: Modeli geometrijskih tijela u koja se može usipati brašno ili voda</b></p>

	<p>Na samom kraju, učenici na mreže pojedinih geometrijskih tijela na kojima su već upisane formule za oplošje upisuju formule za volumen te ih vraćaju na pano.</p> <p>Kao dodatak ove aktivnosti učenici mogu razmisliti kako odrediti volumen primjerice „valjka s rupom“, krnjeg stošca, krnje piramide i slično. Neke škole imaju modele tih tijela, no ta tijela se mogu izraditi i od papira ili prikazati u Geogebri.</p> <div data-bbox="778 651 1034 1010" data-label="Image"> </div> <p style="text-align: center;"><b>Slika 31: Valjak s rupom prikazan u Geogebri</b></p> <p>Kada bi učenici došli do zaključka kako odrediti volumene tih tijela, mjerenjem duljina bridova mogu i izračunati taj volumen.</p>
<p>Zašto je ova aktivnost korisna?</p>	<p>Gradivo geometrijskih tijela u osmom razredu sadrži zbilja puno formula. Iznimno je važno formule naučiti s razumjevanjem i vizualizacijom jer je u suprotnom nemoguće zapamtiti sve formule. Ovaj eksperiment će učenicima ostati i pamćenju, za razliku od toga da im nastavnik samo napiše formulu na ploču, te će se formula za volumen piramida i stošca lako prisjetiti.</p>

## Geometrija prostora u 2. razredu srednje škole

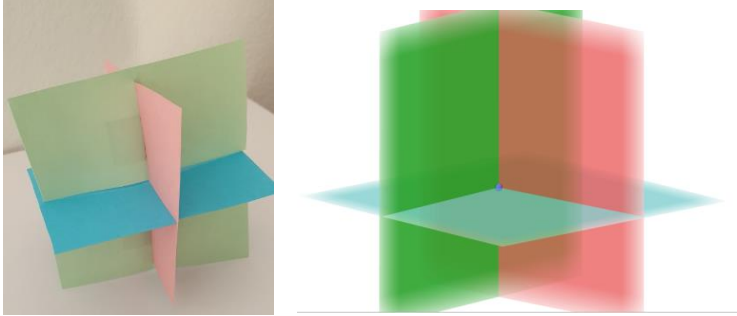
Ponovni susret učenika s geometrijom prostora je tek u drugom razredu gimnazije. Budući da se učenici dvije godine nisu bavili ovim područjem matematike, potrebno ih je prisjetiti svega naučenog u osnovnoj školi jer se većina učenika toga ne sjeća. Pritom, za razliku od osnovne škole, učenici ove dobi imaju bolju sposobnost vizualizacije, te se mogu koristiti računalnim programima za geometriju.

- MAT SŠ C.2.5.
- MAT SŠ D.2.3.
  - **Analizira položaj pravaca i ravnina u prostoru i računa udaljenost**

Međusobni odnos pravaca u prostoru, pravca i ravnine, kao i dviju ravnina bi učenicima u ovoj dobi trebali biti jasni, te je dovoljno samo kroz diskusiju ponoviti. Ono što bi učenicima moglo zadavati probleme prilikom vizualizacije jest odnos tri ravnine u prostoru, te određivanje zajedničkih točaka tih ravnina.

<u>Aktivnost 2.1</u>	Odnos tri ravnine u prostoru
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• papir u boji</li> <li>• škare</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• nabrojati međusobne odnose u kojima mogu biti tri ravnine</li> <li>• vizualizirati pojedini položaj</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Nastavnik daje učenicima papir u boji. Zadatak učenika je prikazati međusobni odnos tri ravnine u prostoru, gdje će dobiveni papiri predstavljati ravnine. Da bi učenici to mogli složiti, mogu se koristiti škarama. Nakon što učenici uspješno prikažu tražene položaje, nastavnik točno rješenje prikazuje na projektoru u alatu Geogebra.</p> <p>Učenici će pomoću papira trebati odrediti u kojem su položaju ravnine ako vrijedi:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• tri ravnine imaju jednu zajedničku točku</li> <li>• tri ravnine imaju zajednički pravac</li> <li>• po dvije ravnine imaju zajednički pravac</li> <li>• dvije ravnine su paralelne, a treća ih siječe</li> <li>• sve tri ravnine su paralelne</li> </ul>



	 <p><b>Slika 32: Primjer kako bi učenici pomoću papira prikazali tri ravnine koje imaju jednu zajedničku točku, te jedno od točnih rješenja koje bi nastavnik prikazao u Geogebri</b></p>
<p>Zašto je ova aktivnost korisna?</p>	<p>Na ovaj način učenici bi na visokoj razini vizualizacije trebali donijeti zaključke kako postaviti tri ravnine u nekom zadanom položaju. Najveći problem bi im mogao zadavati položaj gdje tri ravnine imaju zajedničku točku. Pomoću Geogebre bi ovaj zadatak mogli riješiti i metodom pokušaja i promašaja što ne bi potaknulo veći intelektualni napor, no na ovaj način je zbilja potrebno vizualizirati odnos, a zatim rezanjem papira i prikazati ga.</p>

Prema ishodima formuliranim u novom kurikulumu učenici se s ortogonalnom projekcijom susreću tek u drugom razredu gimnazije. Prije uvođenja novog kurikulumu učenici su se s tim pojmom upoznawali već u osmom razredu osnovne škole.

<u>Aktivnost 2.2</u>	Ortogonalna projekcija
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• laser</li> <li>• model kocke ili kvadra</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ortogonalno projicirati likove u prostoru</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Nakon što se učenici upoznaju s pojmom ortogonalne projekcije, nastavnik eksperimentalnim načinom navodi učenike na potrebne zaključke.</p> <p>Nastavnik drži laser u ruci i svijetli prema podu te ga pomiče ali tako da je trag lasera uvijek na podu. Nastavnik govori učenicima da ga zaustave u trenutku kada je laser od svog traga (crvene točke) na podu najmanje udaljen te da opišu taj položaj. Učenici će na taj način</p>

samostalno doći do zaključka da je to u slučaju kada je pravac određen krajem lasera i točkom na podu okomit na pod.

Potom možemo promatrati ortogonalnu projekciju spužve na ploču. Jedan učenik će držati školsku spužvu udaljenu od ploče, nastavnik će pomoći lasera preslikati vrhove spužve na ploču, a drugi učenik će označavati točke koje su ortogonalna projekcija.

Najveći problem kod percepcije ortogonalne projekcije je ako je objekt koso postavljen, pa je njegova ortogonalna projekcija manja od njega samoga. Tako nešto se može pokazati sa spužvom koja stoji koso, tako da joj je jedan kraj bliže ploči, a drugi dalje.

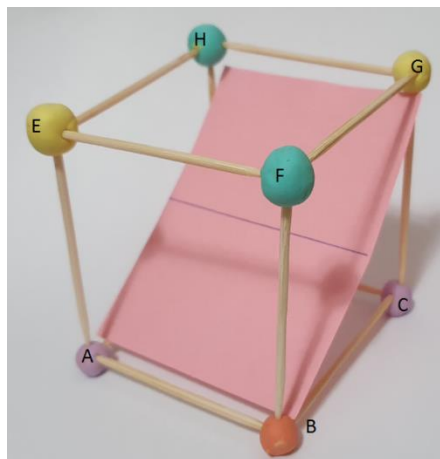
Pomoću lasera učenici mogu ortogonalno projicirati i neke druge predmete i na neke druge ravnine.

Nakon svake aktivnosti bi učenici te pokuse nacrtali i u svojim bilježnicama.



Slika 33: Prikaz ortogonalne projekcije ruku na površinu zida

Pomoću fizičkog modela kvadra koji se sastoji samo od bridova lako možemo vizualizirati ortogonalnu projekciju točke ili dužine na neku od strana tog kvadra.



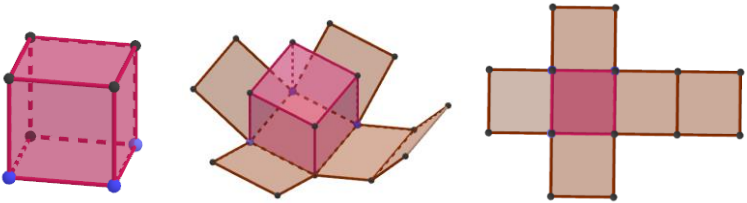
Slika 34: Prikaz ortogonalne projekcije dužine EF na ravninu određenu točkama ABG

	Učenicima nije teško određivati ortogonalne projekcije na ravnine koje sadrže strane kvadra, no kada se radi o ravninama koje ne sadrže niti jednu stranu kvadra dolazi do velikih problema kod vizualizacije. Da bi se učenicima pomoglo u tome, dobro je služiti se modelom kvadra ili kocke kao što je prikazano na slici, potom se kocka može rotirati da bi ravnina koja ju dijagonalno presijeca bila vodoravna jer bi u tom slučaju učenici vrlo lako odredili ortogonalne projekcije točaka E i F, a potom i dužine $\overline{EF}$ .
Zašto je ova aktivnost korisna?	Nakon što bi učenici shvatili što je to ortogonalna projekcija na primjerima iz svakodnevnog života, vrlo lako bi to primjenjivali i na modelu kvadra. Projiciranje na ravninu koja ne sadrži niti jednu stranu kvadra, koja predstavlja najveći problem prilikom vizualizacije bi se riješila pomoću fizičkog modela i manipulacijom njime.

- **MAT SŠ C.2.6.**
- **MAT SŠ D.2.4.**
  - **Računa volumen i oplošje geometrijskih tijela.**

U osmom razredu učenici su se posljednji puta bavili geometrijom prostora i upoznali se s osnovnim geometrijskim tijelima, te izračunavanjem njihovog oplošja i volumena. U drugom razredu gimnazije učenici će se prisjetiti tog gradiva, no osim toga bavit će se i presjecima pojedinih geometrijskih tijela. Presjek geometrijskog tijela i ravnine je skup svih točaka tog geometrijskog tijela koje pripadaju i ravnini.

<u>Aktivnost 2.3</u>	Modeli geometrijskih tijela - prisjećanje
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• računalo</li> <li>• projektor</li> <li>• Geogebra</li> </ul>
Ishodi	Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti: <ul style="list-style-type: none"> <li>• definirati pojedino geometrijsko tijelo</li> <li>• izreći formulu za oplošje pojedinog geometrijskog tijela</li> </ul>
Opis aktivnosti	U drugom razredu gimnazije nije nužno učenicima prikazivati manipulativne modele geometrijskih tijela, već je dovoljno prikazivati u digitalnim alatima kao što je Geogebra.

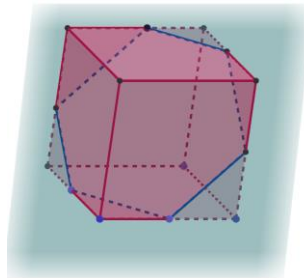
	<p>Pomoću Geogebre učenici bi se vrlo lako prisjetili definicija i formula za izračunavanje oplošja geometrijskih tijela.</p>  <p style="text-align: center;"><b>Slika 35: Prikaz kocke i njezine mreže u Geogebri</b></p>
Zašto je ova aktivnost korisna?	<p>Pomoću Geogebre vrlo lako i brzo se može prikazati pojedino geometrijsko tijelo kao i njegova mreža. Na taj način učenici bi se kroz dijalog prisjetili izgleda i definicija geometrijskih tijela kao i njihovih formula za oplošje.</p>

Da bi učenici vizualizirali presjeke određenih geometrijskih tijela s ravninom, vrlo je korisno koristiti prikaz u Geogebri, ili pak neka manipulativna sredstva.

<u>Aktivnost 2.4</u>	Presjeci geometrijskih tijela
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• računala</li> <li>• Geogebra</li> <li>• (plastelin)</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• vizualizirati presjek geometrijskog tijela i ravnine</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Neke presjeke je vrlo lako vizualizirati, no s nekim bi učenici mogli imati velikih poteškoća. Da bi si učenici predočili neke presjeke potrebno ih je prikazati u Geogebri i omogućiti učenicima da samostalno izrađuju u Geogebri ili pak omogućiti učenicima da pomoću plastelina kojeg će prerezati ravnalom dođu do zaključka.</p> <p>Primjerice, nastavnik može zadati učenicima zadatak da odrede ravninu na način da presjek kocke i ravnine bude šesterokut. Nakon što učenici riješe ovaj zadatak, raznim rotacijama će moći vizualizirati položaj ravnine u odnosu na kocku. Također, točke kojima je određena ravnina mogu se pomicati, pa tako učenici mogu vidjeti i kako je potrebno</p>

postaviti ravninu da bi presjek kocke i ravnine bio trokut, četverokut i peterokut.

Sa zadanim duljinama brida i određenim točkama koje određuju ravninu, učenici mogu računati površinu presjeka, kut između ravnine i pojedine strane kocke, te volumen „odsječenog dijela“, a u ispravnost svog rješenja se mogu uvjeriti pomoću Geogebre.



**Slika 36: Primjer položaja ravnine i kocke u kojem je presjek šesterokut prikazano pomoću Geogebre**



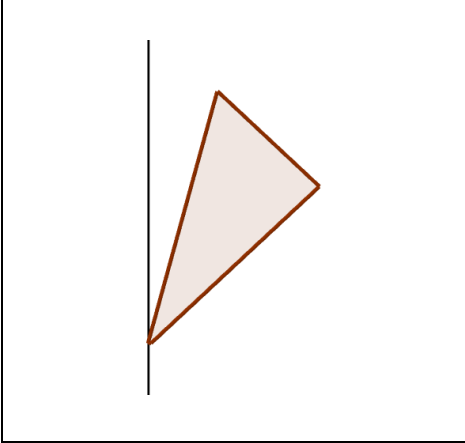
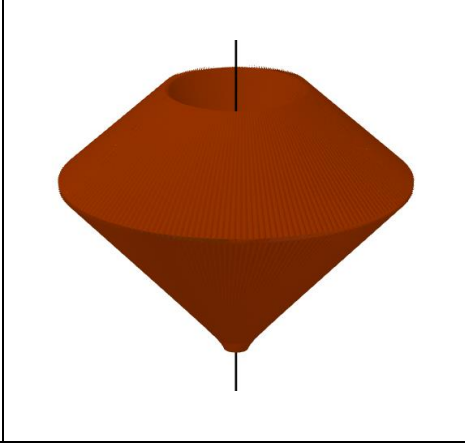
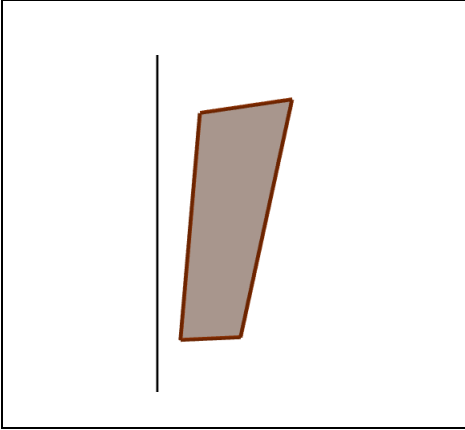
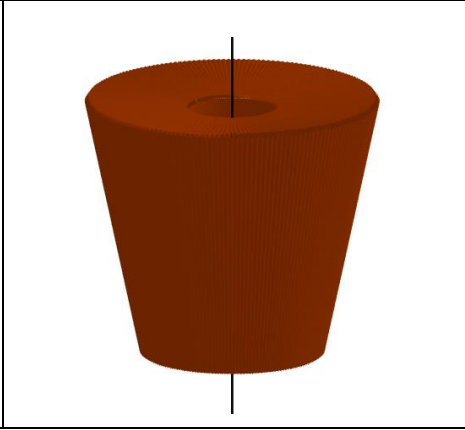
**Slika 37: Presjek kocke i ravnine u kojem je presjek trokut prikazano pomoću plastelina**

Iako se najčešće promatraju presjeci kocke i ravnine, pomoću Geogebre je vrlo lako nacrtati i presjek nekog drugog geometrijskog tijela, te na taj način vizualizirati. Primjerice baza stošca je krug pa neki učenici mogu očekivati da je presjek ravnine i stošca uvijek krug, no pomoću Geogebre se mogu uvjeriti da presjek može biti i lik omeđen elipsom.

Zašto je ova aktivnost korisna?

Budući da se učenici po prvi puta susreću sa presjecima geometrijskih tijela i ravnine, vjerojatno će imati problema prilikom vizualizacije. Geogebra u tome može pomoći budući da omogućuje rotacije i manipulacije ravnine i tog geometrijskog tijela. Korištenje plastelina kao načina vizualizacije presjeka je vrlo korisna, no nije toliko praktična kao Geogebra.

Vrlo visok stupanj vizualizacije zahtijeva zamišljanje lika nastalog rotacijom, posebno ako to nije neki standardni lik. Veliku pomoć pri vizualizaciji toga nam omogućuje Geogebra.

<u>Aktivnost 2.5</u>	Rotacijska tijela
Potreban materijal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• računala ili tableti</li> <li>• Geogebra</li> </ul>
Ishodi	<p>Nakon ove aktivnosti učenici će biti u mogućnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• vizualizirati tijelo nastalo rotacijom</li> </ul>
Opis aktivnosti	<p>Učenici predviđaju kakvo tijelo nastaje rotacijom pojedinog zadanog lika sa zadanim dimenzijama, te određuju volumen ili oplošje. Prilikom vizualizacije tijela koje nastaje rotacijom učenici mogu koristiti Geogebra. Naime, Geogebra ima odličnu mogućnost uz koju se vrlo lako geometrijski lik može rotirati oko zadane osi, te prilikom rotacije ostavljati trag, što uzrokuje nastanak rotacijskog tijela. Nastalo rotacijsko tijelo se potom može okretati i gledati iz raznih kuteva. Nakon nekoliko pokušaja, učenici će i sami moći zaključiti kako bi izgledala figura nakon rotacije nekog geometrijskog lika.</p> <div style="display: flex; flex-wrap: wrap;"> <div style="width: 50%; text-align: center;">  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;">  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;">  </div> <div style="width: 50%; text-align: center;">  </div> </div>

	Slika 38: Prikaz zadatka kojeg bi učenici riješili uz pomoć Geogebre
Zašto je ova aktivnost korisna?	Učenici koji ne mogu vizualizirati što će nastati kada neko geometrijski lik zarotiramo oko neke osi, to si mogu predočiti jedino pomoću Geogebre. Naime, Geogebra ima opciju rotacije lika oko osi s time da lik „ostavlja trag“ i time se iscrtava geometrijsko tijelo koje je moguće rotirati i manipulirati njime.

## Anketa: Prostorna zornost učenika i studenata

U sklopu ovog diplomskog rada provedena je kratka online anketa o stupnju razvijenosti prostornog zora kod učenika i studenata. Anketa se sastoji od ukupno šest pitanja koja nisu „tipična“ pitanja iz udžbenika da bi se što realnije odredilo u kojoj mjeri ispitana skupina ima razvijen prostorni zor. U anketi je sudjelovalo ukupno 277 učenika i studenata, od toga 62 učenika osnovnih škola osmoga razreda, 109 učenika srednjih strukovnih škola, 21 učenik gimnazije, te 85 studenata. Prosječno vrijeme potrebno za rješavanje ove ankete bilo je 7 minuta i 25 sekundi.

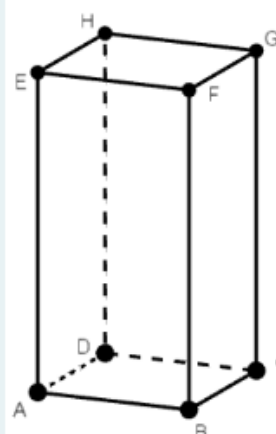
Anketa se sastoji od dva pitanja vezana uz obrazovanje učenika, tj. na kojem su stupnju obrazovanja, a potom je učenicima postavljeno šest pitanja kojim se može ispitati u kojoj mjeri mogu vizualizirati pojedine objekte. Kod svakog pitanja istaknut je i broj učenika i studenata koji su odgovorili na pojedino pitanje, a potom su analizirani rezultati onih koji su odgovorili.

U nastavku su prikazana pitanja, točni odgovori, te odgovori koje su učenici odgovorili. Kod svakog pitanja nacrtani su dijagrami iz kojih se može iščitati koje su odgovore učenici najčešće odabirali. Pritom su na dijagramima u nijansama zelene boje prikazani točni odgovori.

Prvo pitanje vezano za ispitivanje prostorne zornosti je jedan standardan zadatak s modelom kvadra, s kojim su se sigurno svi učenici i studenti susreli. Učenicima je postavljeno pitanje koji su pravci određeni vrhovima kvadra okomiti na ravninu određenu točkama CFG, točan odgovor je, pravci određeni točkama AB, DC, EF, HG.

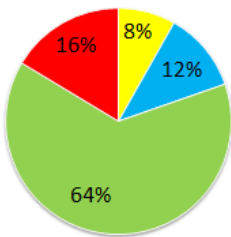
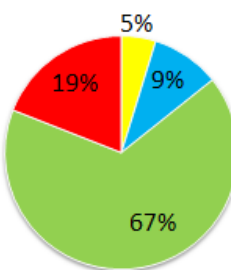
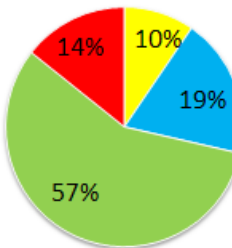
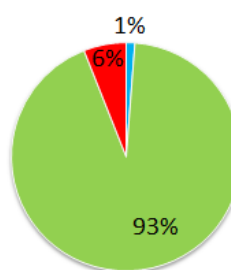
3

Koji su pravci određeni vrhovima kvadra okomiti na ravninu određenu točkama CFG?



- pravci određeni točkama HB, EC, AG, DF
- pravci određeni točkama AF, DG, HC, EB
- pravci određeni točkama AB, DC, EF, HG ✓
- pravci određeni točkama FC, BC, GF, BG

Budući da je ovo jedan od standardnih zadataka koji se postavlja učenicima kod obrade gradiva stereometrije, očekuje se da će većina učenika točno odgovoriti na ovo pitanje. Naime, učenicima je model kvadra već dobro poznat, no postavlja se pitanje jesu li učenici s razumijevanjem savladali ovo gradivo.

osnovna škola	srednja strukovna škola	gimnazija	fakultet
broj odgovora: 61/62	broj odgovora: 105/109	broj odgovora: 21/21	broj odgovora: 83/85
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <ul style="list-style-type: none"> <li><span style="color: yellow;">■</span> pravci određeni točkama HB, EC, AG, DF</li> <li><span style="color: blue;">■</span> pravci određeni točkama AF, DG, HC, EB</li> <li><span style="color: green;">■</span> pravci određeni točkama AB, DC, EF, HG</li> <li><span style="color: red;">■</span> pravci određeni točkama FC, BC, GF, BG</li> </ul> </div> 			



Iz dijagrama je vidljivo da je 64% učenika osnovne škole na ovo pitanje točno odgovorilo, što je vrlo dobar rezultat. Preostali, netočni odgovori su bili podjednako zastupljeni.

Što se tiče učenika srednjih škola, nešto bolji rezultat postigli su učenici strukovnih škola od kojih je 67% točno odgovorilo na pitanje, dok je 57% učenika gimnazije točno riješilo ovaj zadatak. Ovo upućuje na to da učenici baš i nemaju u potpunosti razvijenu sposobnost uočavanja odnosa pravaca i ravnine na modelu kvadra. Uzrok tome je možda i trenutna situacija u kojoj se škola odvijala online baš u vrijeme kada se ova nastavna tema trebala obrađivati, te učenici možda nisu imali adekvatne uvjete za učenje ovog gradiva.

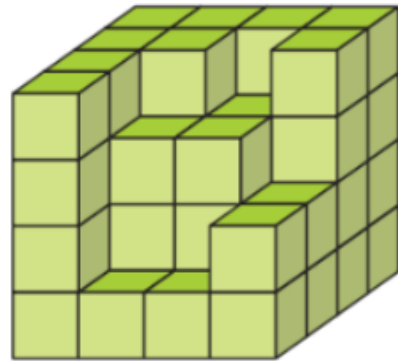
Ako pogledamo rezultate koje su ostvarili studenti, 93% studenata je točno riješilo ovaj zadatak, no dvoje studenata uopće nije sudjelovalo u rješavanju ovog zadatka.

U sljedećem pitanju potrebno je vizualizirati kocku sastavljenu od jediničnih kockica kojoj nedostaju neki dijelovi, te prebrojavanjem uočiti koliko jediničnih kockica nedostaje.

Pravilnim vizualiziranjem i zaključivanjem dolazi se do rješenja da nedostaje 13 jediničnih kocaka.

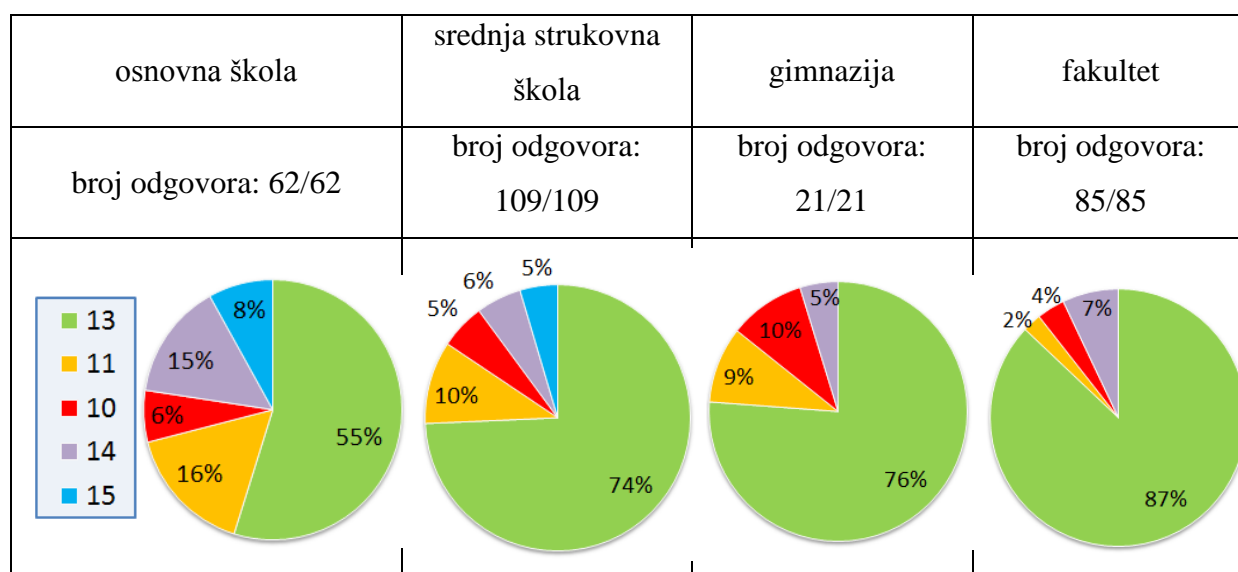
4

Koliko jediničnih kockica nedostaje da bi ova kocka čiji su bridovi duljine 4 jedinice, bila potpuna?



- 11
- 13 ✓
- 10
- 15
- 14

Pogledajmo rezultate ispitanika na ovo pitanje.



Na ovo su pitanje svi sudionici odgovorili. Najmanji broj sudionika je odgovorio da nedostaje 15 kockica, a najveći dio sudionika je prepoznao točan odgovor, tj. da nedostaje 13 kockica.

55% učenika osnovnih škola točno je odgovorilo na ovo pitanje, a preostali odgovori su bili podjednako zastupljeni.

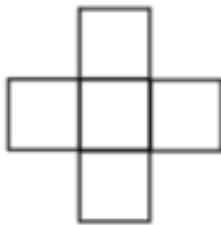
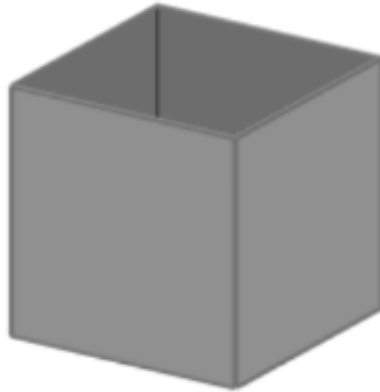
74% učenika srednjih strukovnih škola i 76% učenika gimnazije je točno odgovorilo na ovo pitanje. 87% studenata je točno odgovorilo na ovo pitanje.

Budući da je ovaj zadatak primijenjen i učenicima petog razreda osnovne škole, učenici srednje škole i studenti ne bi trebali imati previše problema s ovom zadatkom. Kao što je i vidljivo iz dijagrama većina srednjoškolaca i studenata je to i riješilo točno.

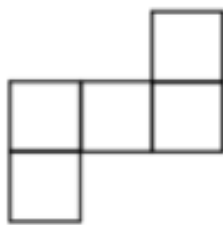
Sljedeće pitanje bilo je povezano s mrežom kocke. Kako zadatak ne bi bio tipičan iz udžbenika, uzeta je kocka koja nema jednu stranu.

5

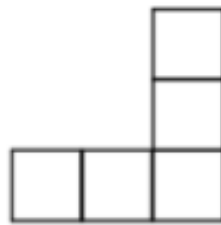
Odaberi mrežu prikazane kocke koja nema jednu stranu. (može biti 1 ili više točnih odgovora)



A



B



C



D

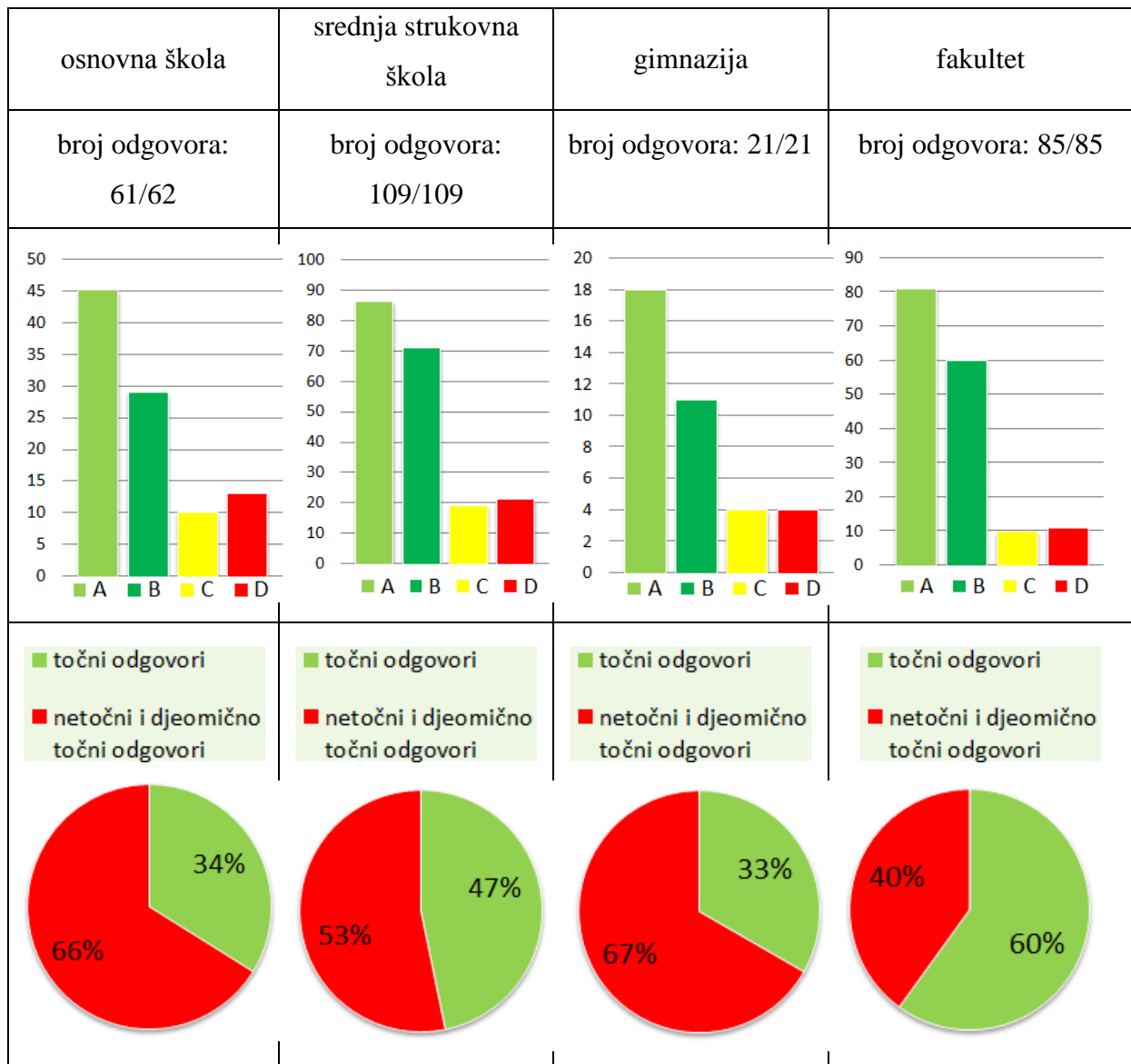
A ✓

B ✓

C

D

Mreže kocke bez jedne strane prikazane su na slikama A i B, dakle to su točni odgovori.



Budući da su za ovo pitanje dva ponuđena odgovora točna, rezultati su prikazani na nešto drugačiji način. Dijagrami u prvom redu prikazuju koliki je broj učenika i studenata odabrao pojedini ponuđeni odgovor. Na dijagramima u drugom redu prikazan je postotak ispitanika koji su u potpunosti točno odgovorili na to pitanje, dakle koji su odgovorili da se mreža kocke bez jedne strane nalazi na slici A i B, te je prikazan i postotak ispitanika koji su netočno ili djelomično točno odgovorili na ovo pitanje.

Iz priloženih dijagrama može se uočiti da su sudionici većinom birali odgovore A i B, no neki su prepoznali samo odgovor A ili samo odgovor B kao točan, ili su pak uz neki od točnih odgovora birali i neki netočan.

Iz dijagrama je uočljivo da su odgovori A i B bili najviše zastupljeni 45 učenika osnovne škole, od ukupno 62 je prepoznalo da je točan odgovor A. Odgovor B kao točan odgovor je nešto manje učenika uočilo, točnije njih 29. Samo je 34% učenika osnovnih škola u potpunosti točno riješilo ovaj zadatak, dok je 66% učenika riješilo potpuno netočno ili djelomično točno.

Od učenika srednjih škola bolji rezultat su postigli učenici strukovnih škola u odnosu na učenike koji pohađaju gimnaziju.

Naime, 86 učenika strukovnih škola je prepoznalo odgovor A kao točan odgovor, te 71 učenik je prepoznao B kao točan, od ukupno 109 učenika koji su sudjelovali u anketi. Ukupno je 47% učenika strukovnih škola u potpunosti točno riješili ovaj zadatak, dok su preostali ponudili netočne ili djelomično točne odgovore.

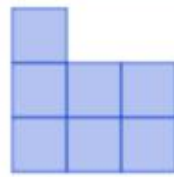
Učenici gimnazije postigli su najlošije rezultate, naime samo je 33% učenika u potpunosti točno riješilo ovaj zadatak. 18 učenika odabralo je odgovor A, te 11 učenika odgovor B, od ukupno 21 učenika. Učenici su uz točne odgovore birali su i netočne ili su pak prepoznali samo jedan od ukupno dva točna odgovora čime njihovi odgovori nisu bili u potpunosti točni.

60% studenata je na ovo pitanje u potpunosti točno odgovorilo. 81 student od ukupno 85 je prepoznao točan odgovor A. Nešto manje studenata je uočilo da je i B točan odgovor, točnije njih 60. U odnosu na ostale skupine, najmanje su birali netočne odgovore C i D.

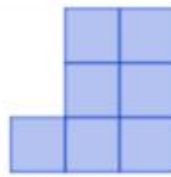
Četvrto pitanje po redu odnosi se na sposobnost vizualizacije tlocrta, nacrta i bokocrta. Učenici se s tom temom upoznaju već u petom razredu na Tehničkoj kulturi.

6

Prikazani su nacrt, bokocrt i tlocrt neke figure. Odredi o kojoj od ponuđenih figura je riječ.



NACRT



BOKOCRT



TLOCRT



A



B



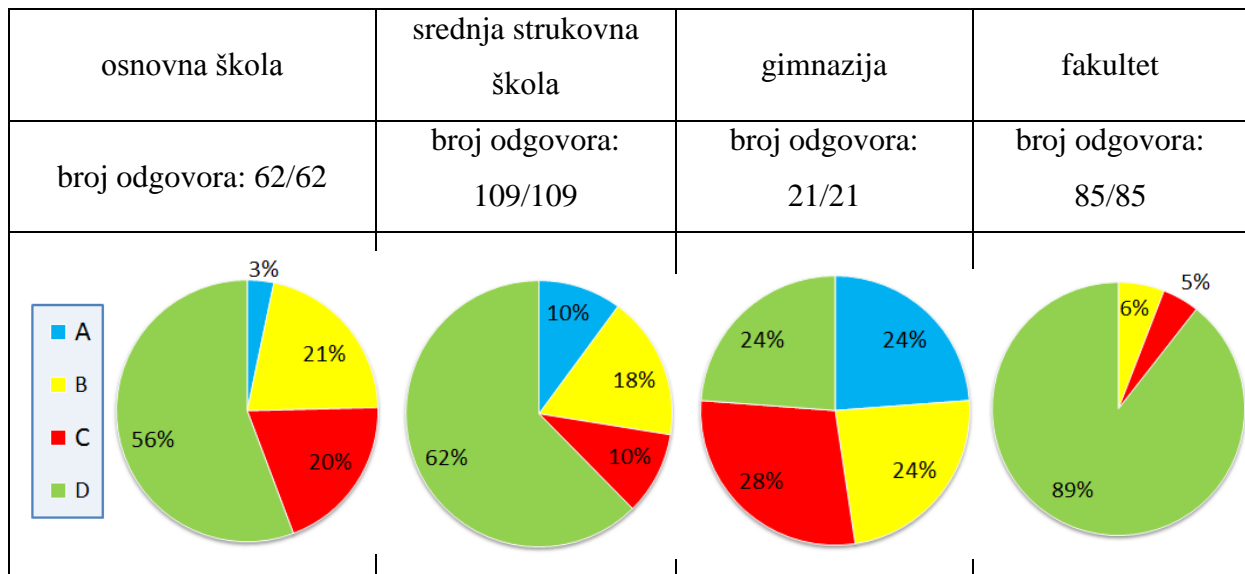
C



D

- A  
 B  
 C  
 D ✓

U ovom pitanju su prikazani nacrt, bokocrt i tlocrt, a potrebno je odrediti kojoj od ponuđenih figura pripadaju. Ovaj zadatak zahtijeva vrlo visok stupanj vizualizacije, potrebno je vizualizirati kako ova figura izgleda iz različitih kuteva gledanja. Analizom slike zaključuje se da prikazani nacrt, bokocrt i tlocrt pripadaju posljednjoj figuri, dakle točan odgovor je D.



Proučavajući dijagrame, lako se uočava da su učenici gimnazije imali najviše problema kod prepoznavanja figure, dok su studenti najbolje riješili ovaj zadatak.

56% učenika osnovne škole prepoznalo je da nacrt, tlocrt i bokocrt pripadaju figuri koja je prikazana pod D. Većina učenika je uočila da se ne radi o figuri prikazanoj pod A. Od svih ponuđenih figura ta je znatno drugačija i uočljivo je da ona nije točan odgovor jer joj nacrt i bokocrt nikako ne odgovaraju.

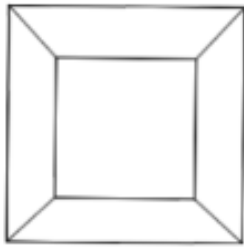
Učenici strukovnih škola su nešto bolje riješili ovaj zadatak. 62% učenika je u potpunosti točno riješilo zadatak. Učenici gimnazije su podjednako birali sve od ponuđena četiri odgovora, te je tako samo 24% učenika točno odgovorilo na ovo pitanje.

Studenti su pak s 89% točnih odgovora najbolje riješili ovaj zadatak. Studenti su uočili da figura prikazana pod A nije tražena figura, no nekoliko studenata je pak odabralo figure pod B i C. Te su figure zbilja slične traženoj figuri stoga ne čudi što su neki studenti, ali i učenici upravo to i odabrali. Potreban je vrlo visok stupanj sposobnosti vizualizacije da bi se ovaj zadatak točno riješio, a studenti su dokazali da ga posjeduju.

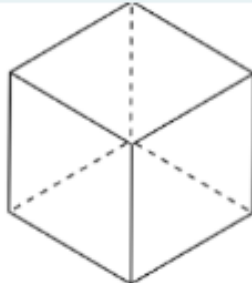
Sljedeći zadatak povezan je s prikazom kocke u ravnini. Potrebno je vizualizirati na kojim od ponuđenih slika se nalazi kocka prikazana u ravnini. U ovom zadatku su čak četiri odgovora točna, što znači da će samo pojedinci koji imaju visok stupanj vizualizacije moći uočiti sve prikaze kocke u ravnini. Osobe koje nemaju u potpunosti dobro razvijenu sposobnost vizualizacije teško će uočiti baš sva četiri prikaza kocke u ravnini.

7

Na kojoj od ponuđenih slika je prikazana kocka iz nekog kuta gledanja? (može biti 1 ili više točnih odgovora)



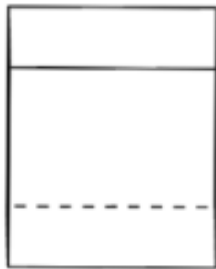
A



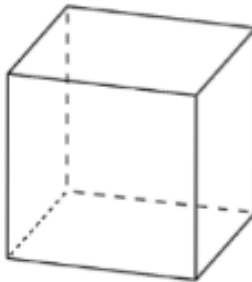
B



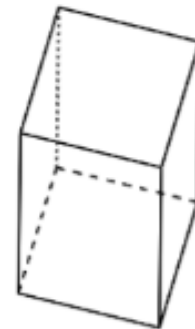
C



D



E



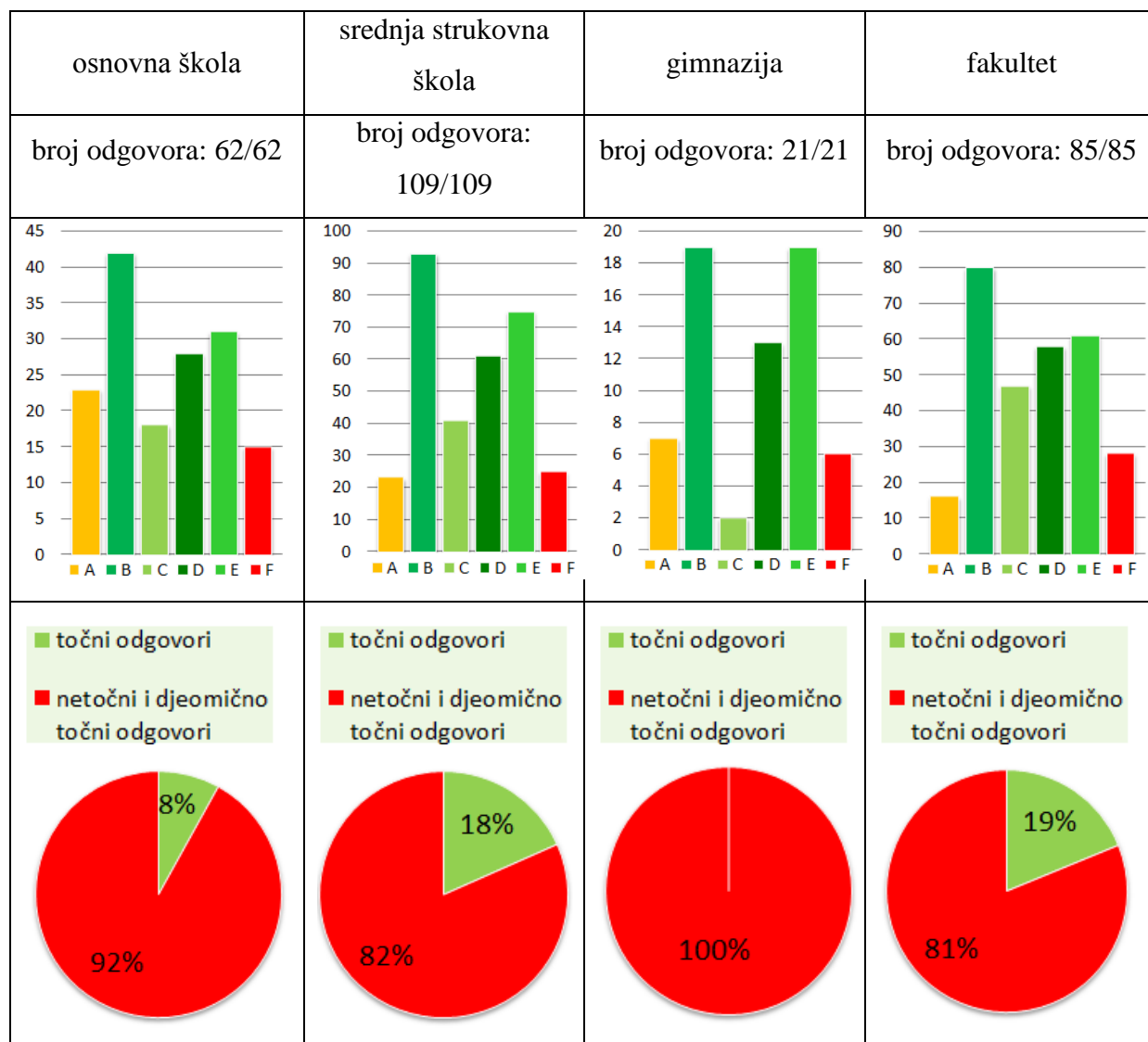
F

- A  
 B ✓  
 C ✓  
 D ✓  
 E ✓  
 F

Da bi se rješenja ovog zadatka bolje vizualizirala, korisno je koristiti i Geogebra gdje se može pokazati da su kocke prikazane na slikama B, C, D i E. Pri čemu je slika prikazana pod E klasičan prikaz kocke koja se nalazi u svim udžbenicima i koju učenici obično crtaju, stoga je za očekivati da će većina ispitanika to i prepoznati. Na slikama C i E prikazane su kocke iz



vrlo nestandardnog kuta, te je potreban dobro razvijen prostorni zor da bi se uočilo da su i na tim slikama prikazane kocke.



Na ovo su pitanje svi sudionici odgovorili. Točni odgovori na ovo pitanje su pod B, C, D i E što je na dijagramu prikazano u nijansama zelene boje.

Samo je 8% učenika osnovne škole u potpunosti točno riješilo ovaj zadatak, te prepoznalo kocke prikazane u ravnini. Velik broj učenika, 23 od ukupnih 62 su rekli da se kocka nalazi na slici A. To nije točan odgovor, a ukazuje na to da učenici nemaju dobro razvijen prostorni zor pomoću kojeg bi mogli vizualizirati prikaz geometrijskog tijela u ravnini. 42 učenika je prepoznalo da se kocka nalazi na slici B što je vrlo pohvalno, jer ovaj kut gledanja može biti zbunjujuć i može ih navesti na krivi trag gdje bi mogli zaključiti da je prikazan šesterokut. Najmanji broj učenika je prepoznao da se kocka nalazi i na slici C, njih 18. Nešto više

učenika je uočilo da je kocka prikazana na slici D. Da je kocka prikazana na slici E prepoznalo je točno polovica svih učenika osnovne škole, dakle njih 31, što baš i nije bilo očekivano s obzirom na to da se radi o standardnom prikazu kocke u ravnini koji bi učenici trebali prepoznati.

18% učenika strukovnih škola je na ovo pitanje odgovorilo točno. Najviše učenika je prepoznalo točan odgovor B, njih 93 od ukupno 109 koliko ih je sudjelovalo. Velik dio učenika je prepoznao i D i E kao točne odgovore, dok je C biralo najmanje učenika. Osim toga i netočni odgovori su bili dosta zastupljeni.

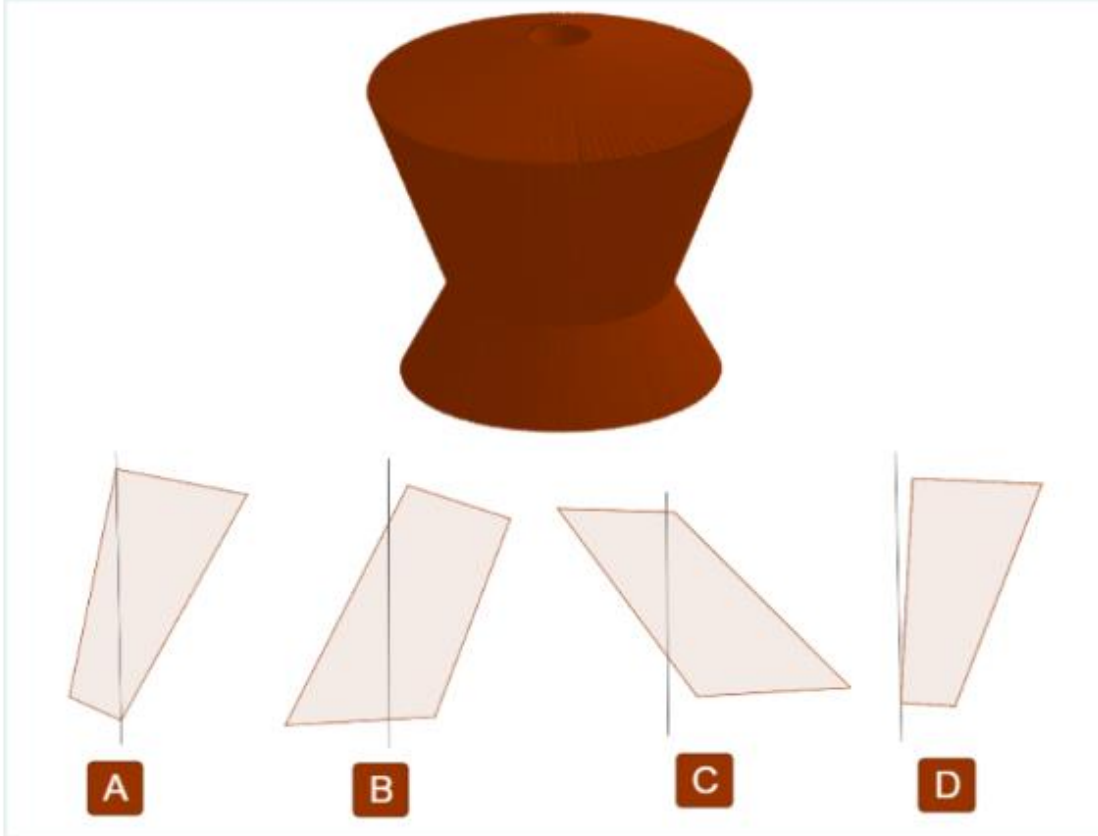
Niti jedan učenik gimnazije na ovo pitanje nije u potpunosti točno odgovorio, no pogledajmo koje su odgovore najviše birali. 19 od 21 učenika je prepoznalo da se kocke nalaze na slikama B i E. Dakle, samo dvoje učenika gimnazije nije prepoznalo da se kocka nalazi na slici E gdje je prikazana u svom standardnom prikazu u ravnini. Osim toga, 13 učenika je prepoznalo da se kocka nalazi na slici D, dok je samo dvoje učenika prepoznalo kocku na slici C. No, po 6 i 7 učenika su birali netočne odgovore A i F.

19 % studenata je ovaj zadatak točno riješilo. Studenti su u najvećoj mjeri prepoznali da se kocka nalazi na slici B, njih 80 od ukupno 85 koliko je sudjelovalo u anketi. Njih oko 60 je prepoznalo da je kocka na slikama D i E, dok je 47 studenata uočilo kocku na slici C. Od netočnih odgovora, najčešće su birali F.

Posljednji, šesti zadatak je možda i najteži jer zahtjeva mentalni proces kojim je potrebno predočiti koja figura nastaje kada četverokut rotiramo oko zamišljene osi.

8

Prikazana figura nastala je rotacijom četverokuta oko zamišljene osi, odredi o kojem četverokutu je riječ.



- A
- B ✓
- C
- D

Ovaj se zadatak također može vizualizirati uz pomoć Geogebra. No, osobe s razvijenom sposobnosti prostornog zora mogu zaključiti da se radi o četverokutu prikazanom na slici B.

osnovna škola	srednja strukovna škola	gimnazija	fakultet
broj odgovora: 62/62	broj odgovora: 108/109	broj odgovora: 21/21	broj odgovora: 85/85

I u ovom posljednjem zadatku su studenti ostvarili najbolji rezultat, 64% studenata je točno odgovorilo na ovo pitanje. 35% učenika osnovne škole odgovorilo je ispravno na ovo pitanje, dok su preostala tri odgovora bila podjednako birana. 44% učenika srednje strukovne škole je odgovorilo točno, te samo 29% učenika gimnazije. Čak 48% učenika gimnazije je odabralo odgovor D. To ukazuje na zaključak da su učenici uočili da figura nastala rotacijom ima šupljinu s gornje strane, no zanemarili su preostale uvjete.

Na temelju provedene ankete možemo zaključiti da su studenti ostvarili najbolji rezultat u ovim zadacima koji su poslužili kao mjerni instrument za određivanje razvijenosti prostornog zora. Uzrok ovakvim rezultatima vjerojatno je jednim dijelom i zbog bioloških faktora, naime odrasli imaju puno veću sposobnost apstraktnog mišljenja u odnosu na djecu što im omogućuje i veći stupanj sposobnosti prostornog zora. Osim bioloških razloga, vjerojatno i stupanj obrazovanja u nekoj mjeri utječe na razvoj ove vještine. Studenti se školuju najdulje u odnosu na preostale skupine, te su se tijekom svog školovanja puno puta susreli sa zadacima i problemima u kojima je potrebna sposobnost prostornog zora, to iskustvo im je moglo pomoći u ovim zadacima.

S obzirom da je u anketi sudjelovao samo 21 učenik gimnazije, teško je donijeti neki opći zaključak o stupnju razvijenosti prostornog zora tih učenika. No, ova ispitana skupina, postigla je lošiji rezultat od učenika osmog razreda osnovne škole. Učenici srednje strukovne škole konstantno su bili na vrlo zadovoljavajućoj razini.

Kako bi se poboljšala sposobnost prostornog zora kod učenika, za početak je nužno sudjelovati u aktivnostima koje zahtijevaju predočavanje odnosa na modelu kvadra ili kocke,

kako bi se kasnije omogućila i vizualizacije složenijih objekata i odnosa. Nužno je da se učenici upoznaju s fizičkim modelom kvadra kako bi mogli razumjeti izgled kvadra prikazanog u ravnini, te odnosom pravaca i ravnina u prostoru. Aktivnosti navedene tijekom ovog rada poveznica su između konkretnih primjera kojima se razvija prostorni zor i zadataka koje učenici dobivaju u školi. Kada sudjelovanjem u aktivnostima razviju sposobnost prostornog zora u nekim jednostavnijim situacijama, primjerice na modelu kocke, tada će biti u mogućnosti dodatno razvijati tu svoju sposobnost i na složenijim primjerima.

Prvi zadatak postavljen u anketi zapravo je standardni zadatak s modelom kvadra koji se pojavljuje u ispitima znanja nakon obrađene nastavne cjeline Geometrija prostora, te učenici imaju iskustva u rješavanju upravo ovakvih zadataka. Kao što vidimo iz rezultata, taj osnovni zadatak je nekima predstavljao problem. Nužno je da se model kvadra zorno prikaže učenicima, te da učenici imaju prilike i sami manipulirati tim modelom, baš kao što je prikazano u aktivnostima 8.1, 8.2, 8.3. Studenti su ovaj zadatak većinom točno riješili, te savladali taj prvi korak ka razvoju sposobnosti prostornog zora.

Drugi zadatak u anketi u kojem je potrebno odrediti koliko jediničnih kockica nedostaje da bi velika kocka bila potpuna je usko vezan s aktivnostima 5.1 i 5.2. Učenici koji su se susreli s tim aktivnostima imali bi iskustvo s kojim bi lakše vizualizirali dani problem i mogli bi prebrojati te kockice koje nedostaju u drugom zadatku u anketi.

Treći zadatak povezan je s aktivnostima 8.4 i 8.5 u kojima učenici pronalaze mreže kocke. Učenici koji sudjeluju u tim aktivnostima i promišljaju o tome kako izgleda mreža kocke, te procesom vizualizacije zamišljaju kako od pojedine mreže možemo složiti kocku, vrlo lako će sličnim procesom razmišljanja uočiti i koje su od prikazanih mreža mreže kocke bez jedne strane.

Za uspješnije rješavanje četvrtog zadatka korisna je aktivnost 8.1 u kojoj bi učenici promatrali kvadar s različitih strana i opisivali što vide. Nešto slično, ali malo kompleksnije je potrebno napraviti u ovom zadatku u kojem je potrebno prepoznati kojoj figuri pripada zadani nacrt, tlocrt i bokocrt. No, kao podloga za takav način razmišljanja vrlo je korisna spomenuta aktivnost 8.1.

U petom zadatku potrebno je prepoznati na kojim od predloženih slika je prikazana kocka u ravnini. Da bi se to što bolje moglo uočiti korisno je koristiti neki model kocke napravljen primjerice od čačkalica i glinamola kao što je prikazano u aktivnosti 8.1, a potom promatrati

taj model iz različitih kuteva, te zaključiti koji su od danih prikaza zbilja prikazi kocke. Osim toga, da bi vizualizirali kocku u ravnini prikazanu iz različitih kuteva gledanja dobro je koristiti Geogebra koja također omogućuje rotacije kocke i promatranje iz različitih kuteva gledanja.

Posljednji, šesti zadatak u anketi je brojnim učenicima i studentima predstavljao problem. Aktivnost 2.5 bi u velikoj mjeri pomogla učenicima da vizualiziraju figuru nastalu rotacijom geometrijskog tijela oko zamišljene osi. Nakon što bi učenici promotrili nekoliko konkretnih primjera rotacije lika oko zamišljene osi stekli bi neko iskustvo koje bi im pomoglo u vizualizaciji tog procesa.

## Zaključak

Tema ovog diplomskog rada, prostorna zornost, u matematici je povezana s gradivom stereometrije. Učenicima je stereometrija često vrlo zahtjevno gradivo, upravo zato što nemaju razvijen prostorni zor, a zadaci iz ovog područja često nisu šablonski. Upravo zbog toga potrebno je uvesti neke aktivnosti kojima bi se mogla razviti vještina prostornog zora, a to je upravo ono što zagovara nova kurikularna reforma.

Iako je nova kurikularna reforma Škola za život usredotočena na to da učenici imaju što poticajnije okolinu za učenje, više mogućnosti i izbora na koji način će učiti, to ne znači da učenici ne trebaju ulagati veliki trud i vrijeme da bi nešto naučili. Nova reforma nije smanjila obujam gradiva niti smanjila kriterije, stoga učenici i dalje trebaju zbilja puno raditi da bi naučili potrebno gradivo. Ono što je ova reforma donijela je pristup koji je više prilagođen učenicima, ali i trenutnom stilu života. Na taj način će učenici razvijati razne sposobnosti i vještine.

Ovaj diplomski rada sastoji se od tri dijela. U prvom dijelu iznesene su neke činjenice, definicije i zaključci, dok su u drugom dijelu prikazane konkretne aktivnosti kojima bi se u školi poticala prostorna zornost. Navedene aktivnosti su osmišljene na način da se pomoću njih zbilja ostvare ishodi iz kurikuluma Škola za život za pojedini razred, zatim da budu primjerene uzrastu učenika, a prije svega da su izvedive u svakoj školi, ali i kod kuće u slučaju online nastave na daljinu, to znači da te aktivnosti zahtijevaju minimalne resurse. Vizualizacija se na matematici može potaknuti na brojne načine, no s obzirom na broj sati i količinu gradiva, vrlo je važno da su i aktivnosti praktične, jednostavne, a da pritom pomažu u razvoju prostornog zora kao korisne vještine za život. Treći dio ovog diplomskog rada temelji se na anketi koja je provedena na učenicima osnovnih škola, srednjih strukovnih škola, učenicima gimnazije, te studentima. Cilj ankete bio je ispitati u kojoj mjeri pojedina skupina ima razvijenu vještinu prostorne zornosti. Prikazani su rezultati ankete, te analiza odgovora koje su učenici birali.

## Literatura

**CARNET.** Pravilna četverostrana prizma. *Edutorij e-škole*. [Mrežno] CARNET. [Citirano: 8. ožujak 2020.] [https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/d2d61772-7e7a-4f5b-98f9-6bbb5d5d13ca/html/10665\\_Pravilna\\_cetverostrana\\_prizma.html](https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/d2d61772-7e7a-4f5b-98f9-6bbb5d5d13ca/html/10665_Pravilna_cetverostrana_prizma.html).

**College of Arts & Sciences.** The van Hiele Levels of Geometric Thinking. *College of Arts & Sciences Mathematics*. [Mrežno] College of Arts & Sciences. [Citirano: 16. ožujak 2020.] <http://www.ms.uky.edu/~droyster/courses/spring08/math6118/vanHeile.htm>.

**Dečman, Snježana, Halavuk, Andreja i Šipuš, Željka Milin.** 2013. *hrčak*. [Mrežno] 13. ožujak 2013. [Citirano: 10. ožujak 2020.] <https://hrcak.srce.hr/file/166768>.

**Gornjogradska gimnazija.** Kako nacrtati ono što ne vidim. *Prirodoslovna lepeza*. [Mrežno] Gornjogradska gimnazija. [Citirano: 12. ožujak 2020.] <http://e-learning.gornjogradska.eu/matematika-ucenici/nacrtna-geometrija/1-2-kako-nacrtati-ono-sto-ne-vidim/>.

**Matematika i škola, Časopis za nastavu matematike.** 2016. *Prostorno mišljenje i geometrija prostora, Catalanovi brojevi, 1. dio*. Zagreb : ELEMENT, 2016.

**NARODNE NOVINE.** 2019. *NARODNE NOVINE*. [Mrežno] NARODNE NOVINE, 22. siječanj 2019. [Citirano: 17. ožujak 2020.] [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html).

**National Council Of Teachers Of Mathematics.** Isometric Drawing Tool. *National Council Of Teachers Of Mathematics*. [Mrežno] National Council Of Teachers Of Mathematics. [Citirano: 12. ožujak 2020.] <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Isometric-Drawing-Tool/>.

**Ontario.** 2014. *Ministry of Education*. [Mrežno] 2014. [Citirano: 8. ožujak 2020.] <http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/lnspayingattention.pdf>.

**Romano, Daniel.** 2009. *hrčak*. [Mrežno] 25. lipanj 2009. [Citirano: 15. ožujak 2020.] <https://hrcak.srce.hr/file/70735>.

**Vlasnović, Helena i Cindrić, Maja.** 2014. *hrčak*. [Mrežno] 10. veljača 2014. [Citirano: 14. ožujak 2020.] <https://hrcak.srce.hr/file/182036>.



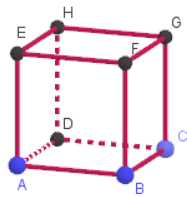
## Popis priloga (slikovni, zvučni, grafički)

### Nastavni listić

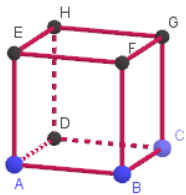
Ime i prezime:

1. Zadatak: Na prikazu kocke nacrtaj sljedeće pravce i odredi u kojem su međusobnom položaju.

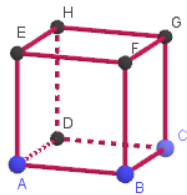
a) pravci određeni točkama EF i DC



b) pravci određeni točkama AH i BF

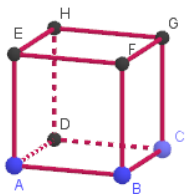


c) pravci određeni točkama ED i AH

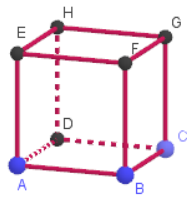


2. Zadatak: Na prikazu kocke nacrtaj sljedeće pravce i ravnine te odredi u kojem su međusobnom položaju.

a) ravnina određena točkama FBC i pravac određen točkama BG



b) ravnina određena točkama FBC i pravac određen točkama EF



c) ravnina određena točkama DBF i pravac određen točkama AE

