

Primjena teorije grafova u forenzici

Šanko, Daniel

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:196:570104>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-02**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Diskretna matematika i primjene

Daniel Šanko

Primjena teorije grafova u forenzici

Diplomski rad
Rijeka, srpanj 2022.

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Diskretna matematika i primjene

Daniel Šanko

Primjena teorije grafova u forenzici

Mentor: doc. dr. sc. Marina Šimac

Diplomski rad
Rijeka, srpanj 2022.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Teorija grafova	2
2.1	Povijest	2
2.2	Osnovni pojmovi	2
2.3	Težinski grafovi	5
2.4	Povezanost	6
2.5	Bojenje grafova	8
2.6	Izomorfizam grafova	8
2.7	Usmjereni grafovi	8
2.8	Produkt grafova	10
3	Forenzika	11
3.1	Digitalna forenzika	11
3.2	Prepoznavanje otisaka prstiju	12
3.2.1	Povijest	12
3.2.2	Zašto koristiti otiske prstiju?	13
3.2.3	Karakterizacija	14
3.2.4	Osnovni tipovi uzoraka	15
3.2.5	Karakterizacija grebena	17
3.3	Analiza otisaka obuće	18
4	Primjene	20
4.1	Primjena teorije grafova u prepoznavanju otisaka prstiju	20
4.1.1	Algoritam 1: Pridruživanje težinskog obojenog grafa otisku prsta	20
4.1.2	Algoritam 2: Klasifikacija otisaka	22
4.1.3	Algoritam 3: Uparivanje nađenog otiska s otiskom iz baze podataka	27
4.2	Primjena teorije grafova u forenzičkoj analizi obuće	30
4.3	Primjena teorije grafova u modeliranju istrage	35
4.3.1	Parcijalni izomorfizam grafova	38
4.3.2	Modeliranje istrage pomoću stupnjeva vrhova digrafa	39
5	Zaključak	43
	Literatura	45
	Prilozi	46

1 Uvod

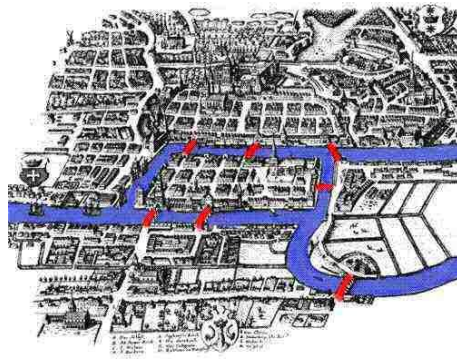
U ovom radu bavit ću se primjenama teorije grafova u forenzici. U drugom poglavlju uvedeni su osnovni pojmovi teorije grafova potrebni za razumijevanje algoritama i postupaka koji se koriste. Treće poglavlje bavi se uvodom u forenziku, a u četvrtom poglavlju spominju se neke od primjena, kao što su prepoznavanje otisaka prstiju i cipela te modeliranje istrage korištenjem grafova.

2 Teorija grafova

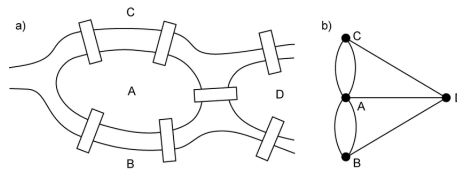
2.1 Povijest

Začetak teorije grafova veže se sa Švicarskim matematičarem Leonardom Eulerom koji je napisao prvi rad vezan za grafove davne 1736. godine. Započeo je svoj rad poznatim *problemom Königsbergških mostova*:

”Grad Königsberg (vidi Sliku 1) (danas Kalinjingrad) nalazio se na obalama (B, C) i na dva otoka (A, D) rijeke Pregel u istočnoj Pruskoj. Ove četiri regije bile su povezane sa sedam mostova (vidi Sliku 2). Nedjeljom su se građani Königsberga šetali gradom. Građani su se pitali je li moguće planirati ovo šetalište tako da mogu izaći iz kuće, prijeći svaki riječni most točno jednom i vratiti se kući.”



Slika 1: Königsberg (preuzeto sa [7])



Slika 2: Königsbergški mostovi (preuzeto sa [8])

Euler je pokazao da bez obzira na početnu točku (dio grada), nije moguće prijeći svakim mostom točno jednom i vratiti se na početnu poziciju bez da se prijeđe istim putem više puta.

2.2 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju navest će se osnovni pojmovi potrebni za daljnje razumijevanje rada.

Definicija 2.1. *Graf* je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \varphi_G)$, gdje je $V = V(G)$ neprazan skup čije elemente zovemo *vrhovi* grafa G , $E = E(G)$ je skup disjunktan

s V , čiji elementi se nazivaju *bridovi* grafa G i φ_G je *funkcija incidencije* koja svakom bridu pridružuje neuređen par (ne nužno različitih) vrhova.

Definicija 2.2. Kažemo da brid $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$ spaja vrhove v_i i v_j , te kažemo da su v_i i v_j *susjedni vrhovi*.

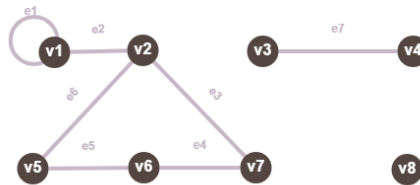
Definicija 2.3. Dva brida incidentna s istim vrhom zovu se *susjedni bridovi*.

Definicija 2.4. Vrh koji nije incidentan niti s jednim bridom zove se *izolirani vrh*.

Definicija 2.5. Brid incidentan samo s jednim vrhom naziva se *petlja*.

Definicija 2.6. Ako su dva ili više bridova incidentni s istim parom vrhova kažemo da graf sadrži *višestruke bridove*.

Primjer 1. Graf G sa skupom vrhova $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ i skupom bridova $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$.



Bridovi e_1 i e_2 su susjedni bridovi, dok bridovi e_3 i e_5 nisu susjedni jer nisu incidentni s istim vrhom. Vrh v_8 je izolirani vrh. Brid e_1 je petlja.

Definicija 2.7. *Jednostavan graf* je graf bez višestrukih bridova i petlji.

Definicija 2.8. Neka je G graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. *Matrica susjedstva* grafa G je $n \times n$ matrica $A = [a_{i,j}]$, pri čemu je $a_{i,j}$ broj bridova incidentnih s vrhovima v_i i v_j .

Primjer 2. Matrica susjedstva grafa iz prethodnog primjera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicija 2.9. Neka je G graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i skupom bridova $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. *Matrica incidencije* grafa G je $n \times m$ matrica $B = [b_{i,j}]$, gdje je

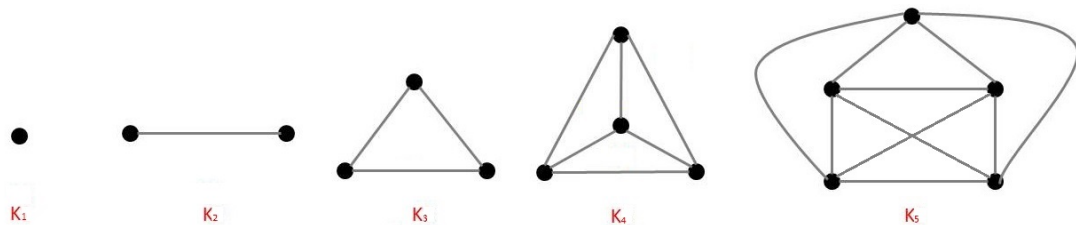
$$b_{i,j} = \begin{cases} 2, & \text{ako } v_i \text{ incidentan s } e_j \text{ i } e_j \text{ je petlja} \\ 1, & \text{ako } v_i \text{ incidentan s } e_j \text{ i } e_j \text{ nije petlja} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primjer 3. Matrica incidencije grafa iz prethodnog primjera:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

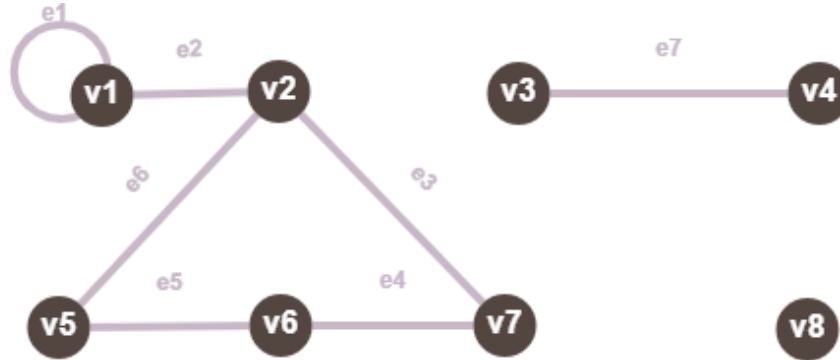
Definicija 2.10. *Potpun graf* s n vrhova, K_n , je jednostavan graf u kojem je svaki par različitih vrhova spojen bridom.

Primjer 4. Potpuni grafovi K_1, K_2, K_3, K_4 i K_5 .



Definicija 2.11. Broj bridova koji su incidentni s vrhom v naziva se *stupanj vrha* v i označava se s $\deg(v)$.

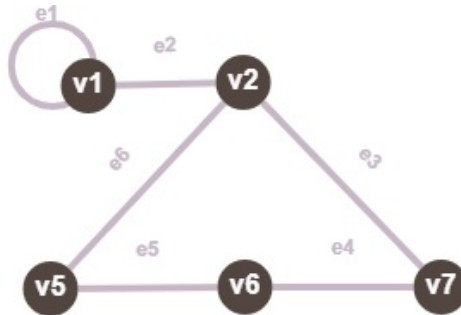
Primjer 5. Odredimo stupnjeve vrhova grafa G iz Primjera 1.



$\deg(v_1) = 3$, $\deg(v_2) = 3$, $\deg(v_3) = 1$, $\deg(v_4) = 1$, $\deg(v_5) = 2$, $\deg(v_6) = 2$, $\deg(v_7) = 2$, $\deg(v_8) = 0$.

Definicija 2.12. Graf H je *podgraf* grafa G ako je skup vrhova $V(H)$ podskup skupa vrhova $V(G)$ i ako je skup bridova $E(H)$ podskup skupa bridova $E(G)$.

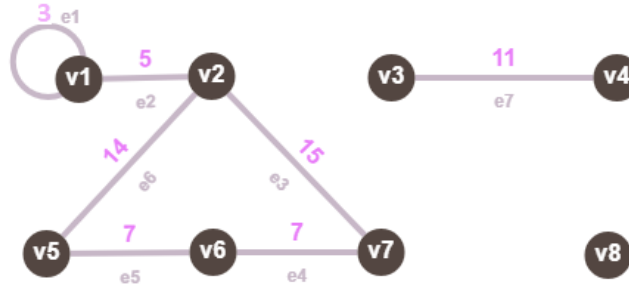
Primjer 6. Jedan podgraf grafa G iz Primjera 1.



2.3 Težinski grafovi

Definicija 2.13. *Težinski graf* je uređeni par (G, w) , gdje je G graf, a $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ funkcija koju zovemo *težinska funkcija*. Težinska funkcija svakom bridu e grafa G pridružuje nenegativan realan broj $w(e)$, koji nazivamo *težina brida* e .

Primjer 7. Pridružimo težine bridovima grafa G iz Primjera 1.



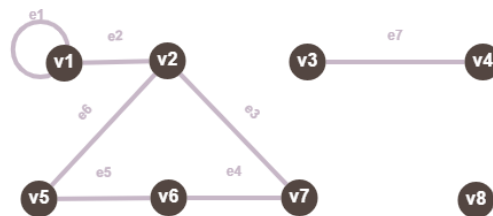
Težina brida može označavati na primjer udaljenost između vrhova, cijenu puta, količinu nafte koja prolazi naftovodom (u transportnim mrežama), i mnoge druge stvari koje možemo izraziti brojačno.

2.4 Povezanost

Definicija 2.14. *Šetnja* u grafu G je alternirajući niz $W : v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_pv_p$ vrhova i bridova tako da su v_{i-1} i v_i incidentni s e_i . v_0 je početni, a v_p krajnji vrh od W . Šetnja je zatvorena ako je $v_0 = v_p$. *Duljina* šetnje je jednaka broju bridova u šetnji.

Definicija 2.15. *Staza* je šetnja u kojoj su svi bridovi međusobno različiti. *Put* je staza u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti. *Ciklus* je zatvorena staza pozitivne duljine čiji su svi vrhovi, osim početnog i krajnjeg međusobno različiti.

Primjer 8. Promotrimo ponovno graf G iz Primjera 1.



Pronađimo šetnju koja nije staza, stazu koja nije put i put od vrha v_1 do vrha v_7 ako je to moguće.

Šetnja: $v_1e_2v_2e_3v_7e_4v_6e_5v_5e_6v_2e_3v_7$ je šetnja, ali nije staza;

Staza: $v_1e_1v_1e_2v_2e_3v_7$ je staza, ali nije put;

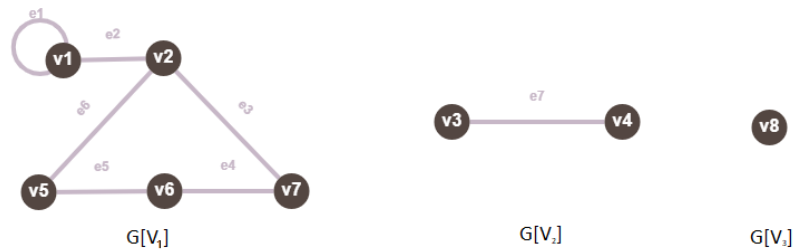
Put: $v_1e_2v_2e_3v_7$.

Definicija 2.16. Neka je G graf. Dva vrha u i v u G su *povezana* ako postoji (u, v) put u G .

Relacija povezanosti je relacija ekvivalencije. Neka su V_1, \dots, V_ω klase ekvivalencije.

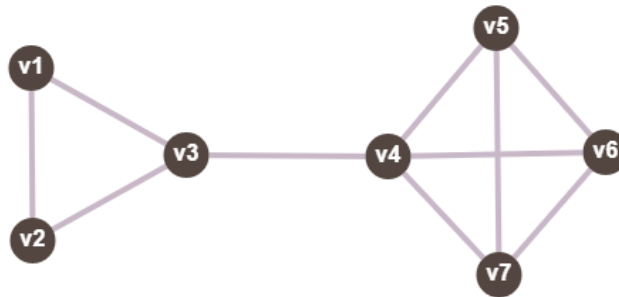
Definicija 2.17. Podgrafovi $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega], \omega \geq 2$ se zovu *komponente povezanosti* grafa G . Ako je $\omega = 1$, graf G je *povezan graf*. U suprotnome, graf G je *nepovezan graf* s $\omega \geq 2$ komponenti povezanosti.

Primjer 9. Primjetimo da graf G iz Primjera 1 nije povezan. Broj komponenti povezanosti iznosi $\omega = 3$.



Definicija 2.18. *Klika* u grafu G je potpuni podgraf grafa G .

Primjer 10. Odredimo klike u sljedećem grafu:



Klike: $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_6, v_7\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\}, \{v_4, v_5, v_7\}, \{v_4, v_6, v_7\}, \{v_5, v_6, v_7\},$ i $\{v_4, v_5, v_6, v_7\}$.

Definicija 2.19. *Ekscentricitet* vrha v povezanog grafa G je $\max_{u \in V(G)} d(v, u)$. Drugim riječima, ekscentricitet vrha v je udaljenost između vrha v i vrha koji je najudaljeniji od njega.

2.5 Bojenje grafova

U teoriji grafova bojenje grafova se odnosi na specifičan slučaj označavanja grafa odnosno dodjeljivanje oznaka (boja) elementima grafa uz neka ograničenja. Kod bojenja vrhova zadanog grafa promatra se dodatan uvjet da susjedni vrhovi budu različite boje. Kod bojenja bridova dodatni uvjet je da dva susjedna brida budu različite boje.

Definicija 2.20. Neka je G graf i neka je $k \in \mathbb{N}$ zadani broj. Tada je k -bojenje vrhova grafa funkcija $c : V(G) \rightarrow C = \{1, \dots, k\}$ koja svakom vrhu pridružuje jednu od točno k različitih boja. Ako je $c(v) = i$ kažemo da je vrh v obojen bojom i .

Analogno definiramo bojenje bridova grafa, $c : E(G) \rightarrow C$.

Boje koje koristimo mogu biti elementi bilo kojeg skupa. Prave boje (plava, zelena, žuta, crvena, ...) koristimo kada trebamo malo boja. U suprotnom koristimo prirodne brojeve umjesto boja ($1, 2, \dots, k$ za $k \in \mathbb{N}$). Osim pojednostavljenja razlog je i taj što nas zanima koliko boja upotrebljavamo.

Definicija 2.21. *Pravilno bojenje vrhova grafa* je bojenje vrhova grafa tako da su susjedni vrhovi različito obojeni. *Pravilno bojenje bridova grafa* je bojenje bridova grafa tako da su susjedni bridovi različito obojeni.

Kada govorimo o bojenju vrhova (bridova) grafova, ako nije navedeno drugačije, mislimo na pravilno bojenje. Grafovi koji sadrže petlje ne dopuštaju pravilno bojenje vrhova.

2.6 Izomorfizam grafova

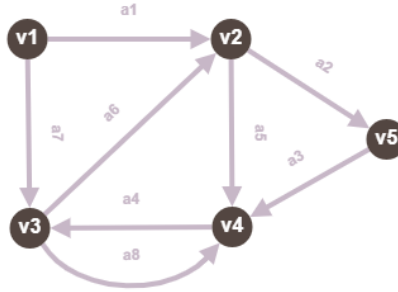
Definicija 2.22. Za dva grafa G i G' kažemo da su *izomorfni* i pišemo $G \cong G'$ ako postoji bijektivno preslikavanje sa skupa vrhova $V(G)$ na skup vrhova $V(G')$ takvo da čuva incidenciju, tj. kad god su dva vrha susjedna u G , njihove slike moraju biti susjedne u G' .

Iz definicije slijedi da izomorfizam grafova uspostavlja bijekciju između skupa $E(G)$ i $E(G')$.

2.7 Usmjereni grafovi

Definicija 2.23. *Usmjereni graf (digraf)* je uređena trojka $D = (V(D), A(D), I_D)$, pri čemu je $V(D)$ neprazan skup čiji se elementi nazivaju *vrhovi*, $A(D)$ skup disjunktan s $V(D)$ čiji se elementi nazivaju *lukovi (usmjereni bridovi)* i I_D je *funkcija incidencije* koja svakom luku pridružuje uređeni par (ne nužno različitih) vrhova u D .

Primjer 11. Primjer usmjerenog grafa D s vrhovima $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ i lukovima $A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$.



Definicija 2.24. Ako je a luk u D tako da je $I_D(a) = (u, v)$, u je *početak* luka a , a v je *kraj* luka a .

Svakom digrafu D je pridružen *pripadni graf* G s istim skupom vrhova, a svakom luku iz D je pridružen brid određen s istim vrhovima. Svaki digraf D određuje jedinstveni (do na izomorfizam) graf G .

Obratno, svakom grafu G možemo pridružiti digraf specifikacijom početnog i krajnjeg vrha svakog brida. Takav digraf se zove *orijentacija* na G .

Definicija 2.25. Digraf je *striktan* ako je pripadni graf jednostavan.

Definicija 2.26. Ako je $a = (u, v)$ luk u D , kažemo da je v *izlazni susjedni vrh* vrha u , a u je *ulazni susjedni vrh* vrha v .

$N_D^+(u)$ označava skup svih izlaznih susjednih vrhova vrha u u D . $N_D^-(u)$ označava skup svih ulaznih susjednih vrhova vrha u u D .

Definicija 2.27. *Ulazni stupanj* vrha $v \in V(D)$: $d_D^-(v)$ je broj lukova u D s krajem v . *Izlazni stupanj* vrha $v \in V(D)$: $d_D^+(v)$ je broj lukova u D s početkom v .

$\delta^-(D)$ i $\Delta^-(D)$ su oznake za najmanji i najveći ulazni stupanj digrafa D .

$\delta^+(D)$ i $\Delta^+(D)$ su oznake za najmanji i najveći izlazni stupanj digrafa D .

Definicija 2.28. *Usmjereni šetnja* između vrhova v_0 i v_k je alternirajući niz $W = v_0 a_1 v_1 a_2 v_2 \dots a_k v_k$, pri čemu su početak i kraj luka a_i vrhovi v_{i-1} i v_i , ($1 \leq i \leq k$). *Usmjereni staza*, *usmjereni put*, *usmjereni ciklus*, ... se definiraju na analogan način kao kod grafova.

Definicija 2.29. Ako postoji usmjereni (u, v) -put, kažemo da se vrh v može *doseći* u D iz vrha u . Dva vrha su *dipovezana* ako se svaki može doseći u D iz drugog.

Dipovezanost je relacija ekvivalencije na skupu vrhova digrafa D , a komponente povezanosti su $V_1, V_2, \dots, V_\omega$. Poddigrafovi od D inducirani s $V_1, V_2, \dots, V_\omega$ su *dikomponente* od D .

Definicija 2.30. Digraf je *dipovezan* ako ima samo jednu dikomponentu.

2.8 Produkt grafova

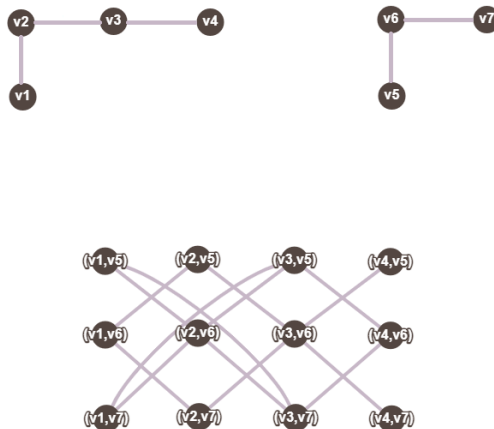
Definicija 2.31. Neka su G_1 i G_2 grafovi i neka su $V(G_1)$ i $V(G_2)$ pripadni skupovi vrhova, respektivno. *Produkt grafova* G_1 i G_2 je graf H sa sljedećim svojstvima:

- $V(H)$ je Kartezijev produkt $V(G_1) \times V(G_2)$
- Vrhovi (a_1, a_2) i (b_1, b_2) su susjedni u grafu H ako i samo ako je zadovoljen dani uvjet za vrhove a_1 i b_1 u grafu G_1 i za a_2 i b_2 u grafu G_2 .

Produkti grafova se razlikuju po uvjetima na vrhove u početnim grafovima. Ti su uvjeti najčešće sljedeći:

- jesu li vrhovi a_n i b_n susjedni u G_n ,
- jesu li vrhovi a_n i b_n u G_n isti,
- jesu li vrhovi a_n i b_n u G_n jednako udaljeni kao vrhovi a_m i b_m u G_m ,

Primjer 12. Neka su dana dva grafa G_1 i G_2 sa skupovima vrhova $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i $V(G_2) = \{v_5, v_6, v_7\}$. Odredimo produktni graf H ako je uvjet susjednosti u H sljedeći: dva vrha (v_i, v_j) i (v_k, v_l) će biti susjedna u H ako i samo ako su vrhovi v_i i v_k u grafu G_1 jednako udaljeni kao vrhovi v_j i v_l u grafu G_2 .



3 Forenzika

Forenzika je naziv za primjenu širokog spektra znanstvenih grana za utvrđivanje činjenica u sudskim ili upravnim postupcima. Izraz dolazi od latinskog pridjeva *forensis* ("pred forumom", odnosno "pred sudom"). U rimsko doba kaznena prijava značila je predstavljanje dokaza pred grupom javnih osoba u forumu. I osoba koja je prijavljena da je počinila zločin i osoba koja ju prijavila morali su izložiti svoje argumente, tj. ispričati svoju stranu priče. Slučaj bi bio zaključen u korist osobe s boljim argumentima. Ovo podrijetlo izvor je dviju suvremenih upotreba riječi forenzika – kao oblika pravnog dokaza i kao kategorija javne prezentacije.

Drevnom svijetu nedostajala je standardizirana forenzička praksa, koja je pomogla kriminalcima da izbjegnu kaznu. Kriminalističke istrage i suđenja uvelike su se oslanjali na prisilna priznanja i iskaze svjedoka. Međutim, drevni izvori sadrže nekoliko izvještaja o tehnikama koje nagovještavaju koncepte u forenzičkoj znanosti koji su razvijeni stoljećima kasnije.

Forenzika je i primjena znanosti u kaznenim i građanskim zakonima, uglavnom na kriminalnoj strani tijekom kaznene istrage, kao što je regulirano pravnim standardima prihvatljivih dokaza i kaznenog postupka.

Forenzički znanstvenici prikupljaju, čuvaju i analiziraju znanstvene dokaze tijekom istrage. Dok neki forenzičari putuju na mjesto zločina kako bi sami prikupili dokaze, drugi zauzimaju laboratorijsku ulogu, obavljajući analize na predmetima koje su im donijeli drugi pojedinci. Osim njihove laboratorijske uloge, forenzički znanstvenici svjedoče kao vještaci u kaznenim i građanskim predmetima i mogu raditi ili za tužiteljstvo ili za obranu. Iako je bilo koje područje tehnički moglo biti forenzičko, određeni dijelovi su se s vremenom razvili kako bi obuhvatili većinu forenzički povezanih slučajeva.

3.1 Digitalna forenzika

Digitalna forenzika je znanost koja ima za cilj prikupljanje, čuvanje, pronalaženje, analizu i dokumentiranje digitalnih dokaza, tj. podataka koji su skladišteni, obrađivani ili prenošeni u digitalnom obliku.

Kompleksnost problema na koje forenzičari nailaze uvjetovali su specijaliziranje stručnjaka na različite područja. Tako se digitalna forenzika može podijeliti na:

- računalnu forenziku,
- forenziku mobilnih uređaja,
- mrežnu forenziku,
- forenziku baza podataka.

U naprednijim sredinama forenzičari se bave određenim operacijskim sustavom, specijaliziraju se za Windows, Linux, Mac OS. Forenzičar, kao uostalom i svi informatičari, mora redovno pratiti razvoj tehnologije.

Forenzičar, slijedeći strogo definirana pravila, prikuplja medije za koje sumnja da se na njima nalaze dokazi za kojima traga, osigurava ih od bilo kakvih promjena, pronalazi eventualne dokaze i radi analizu kako bi rekonstruirao aktivnosti koje su vršene nad njima i pripremio razumljivo izvješće koje će moći poslužiti za vođenje sudskog procesa ili interne istrage u kompaniji.

Digitalna forenzika ima široku primjenu i nije ograničena samo na policijsko-sudske i vojno-obavještajne aktivnosti. Bankarski sektor, osiguravajuća društva i kompanije raznih profila imaju potrebu i moraju biti izuzetno oprezni sa podacima kojima raspolažu jer je mnogim kompanijama nanosena nemjerljiva šteta zbog industrijske špijunaže i generalno zloupotrebe IT sustava. Napad uvijek ima veći izgled za uspjeh ako se izvede iznutra i zato ozbiljne kompanije ne štede truda ni novca da se zaštite od insajdera koji su spremni raditi za konkurenciju ili nanijeti štetu iz drugih njima poznatih razloga. Ovdje forenzička istraga dolazi do punog izražaja.

3.2 Prepoznavanje otisaka prstiju

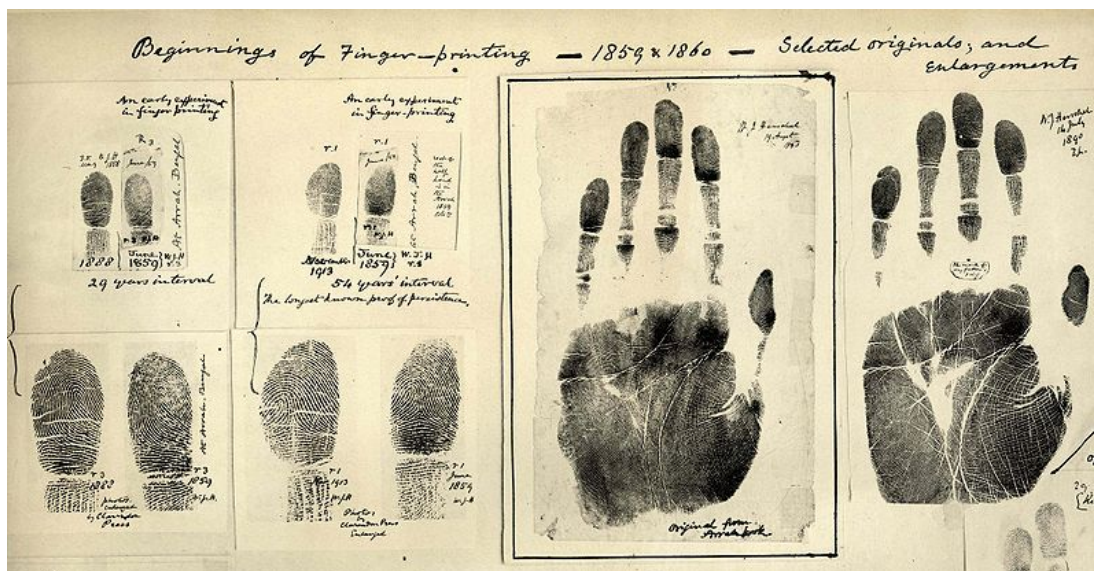
3.2.1 Povijest

William Herschel bio je jedan od prvih koji je zagovarao korištenje otisaka prstiju za identificiranje osumnjičenika. 1858. dok je radio za Indijsku državnu službu uveo je otiskivanje palčeva na dokumente radi sigurnosnih razloga, kako bi se spriječilo krivotvorenje potpisa.

1877. godine u Hooghlyju blizu Calcutte uveo je korištenje otisaka prstiju na ugovorima i aktima, i registrirao je otiske penzionera kako bi se spriječilo prikupljanje novaca od strane rodbine nakon što bi penzioner umro. Također, registrirao je otiske prstiju zatvorenicima prilikom osude i na taj je način spriječio razne prevare koje su bile pokušane s ciljem da se izbjegne služenje zatvorske kazne.

1880. Dr. Henry Faulds, Škotski kirurg, objavio je svoj prvi rad na tu temu u znanstvenom časopisu *Nature*, raspravljajući o korisnosti upotrebe otisaka prstiju i predložio je metodu prikupljanja istih pomoću tinte. On je bio prvi koji je uspio identificirati otisak nađen na bočici. Prilikom povratka u Veliku Britaniju 1886. predložio je svoj koncept tamošnjoj policiji, no oni su ga odbili.

Faulds nije odustajao, te je kontaktirao Charlesa Darwina i opisao mu svoju metodu. Kako je Darwin već bio star i nemoćan da bi mu pomogao, zatražio je pomoć svog bratića Francisa Galtona koji je bio zainteresiran za antropologiju. Nakon nekoliko godina proučavanja otisaka prstiju, Galton u svojoj knjizi *Otisci prstiju* (eng. *Finger Prints*) objavljuje detaljan statistički model analize i identi-



Slika 3: Začeci uzimanja otisaka prstiju (preuzeto sa [9])

fikacije otisaka prstiju i potiče njegovu upotrebu u forenzici. Izračunao je da je šansa za lažno pozitivan rezultat (da dvije različite osobe imaju isti otisak prsta) otprilike 1 naprama 64 biliona.

Juan Vucetich, Argentinski šef policije, prvi je uveo metodu snimanja otisaka prstiju pojedinaca u dosjeu. 1892., nakon što je proučio Galtonov rad, Vucetich osniva prvi ured za otiske prstiju u svijetu. Iste godine događa se zanimljivi slučaj u kojem možemo vidjeti važnost otisaka prstiju. Francisca Rojas nađena je u svojoj kući s ozljedom vrata, a pored nje su nađeni njezini mrtvi sinovi kojima je vrat bio prerezan. Rojas je optužila susjeda za napad i smrt svojih sinova. Unatoč brutalnom ispitivanju, susjed nije htio priznati zločin. Inspektor Alvarez, Vucetichov kolega, otišao je na mjesto zločina i našao krvavi otisak prsta na vratima. Kada su usporedili nađeni otisak sa otiskom prsta majke, Francisce Rojas, ispostavilo se da je to zaista njezin otisak. Nakon toga je priznala da je ona ubila svoje sinove. Vidimo iz ove priče da su otisci tada bili ključni za otkrivanje pravog krivca. Tko zna, da nisu našli taj otisak, možda bi nedužni susjed završio u zatvoru umjesto nje.

3.2.2 Zašto koristiti otiske prstiju?

Otisci prstiju su uzorci s unutarnje strane i na vrhovima prstiju. Grebeni kože zajedno s udubinama između njih tvore jedinstvene uzorke na prstima. Analiza otiska prstiju je biometrijska tehnika koja uspoređuje skeniranu sliku otisaka s bazom podataka otisaka prstiju. Jedinstvenost otisaka, kao i činjenica da se ne mijenjaju tijekom života, temelj su za analizu otisaka prstiju. Jedinstvenost

otisaka određena je sitnim promjenama u lokalnom okruženju tijekom fetalnog razvoja. Stoga se identični blizanci koji se ne mogu razlikovati DNK analizom mogu razlikovati analizom otisaka prstiju. Iako uzorak otiska prsta ostaje isti, rast osobe objašnjava povećanje uzoraka. Osim toga, nesreće ili neke bolesti mogu promijeniti uzorke otisaka prstiju.

Bilješke o grebenima, petljama i spiralama otisaka prstiju prvi je napravio Marcello Malpighi 1686. godine. Međutim, kao što smo već spomenuli, tek 1880. Henry Faulds je prepoznao otiske prstiju kao sredstvo osobne identifikacije. Prvu knjigu o otiscima prstiju objavio je Francis Galton 1888. godine i uspostavio je prvi sustav klasifikacije za otiske prstiju. Kasnije je 1901. Sir Edward Henry razvio Henryjev klasifikacijski sustav, a danas čini osnovu za prepoznavanje otisaka u većini zemalja engleskog govornog područja. Ovaj je sustav kategorizirao uzorke grebena u tri skupine: petlje, zavoji i lukovi.

Uzimanje otisaka prstiju ubrzo je uvedeno u zatvorima, vojsci i naširoko je korišteno za identifikaciju od strane policije. Zbirka Federalnog istražnog ureda ima milijune kartica otisaka prstiju i sastoji se od približno 70 milijuna otisaka prstiju. Iako je glavna upotreba otisaka i dalje u forenzičkoj znanosti i provođenju zakona, razvijene su nove uporabe otisaka prstiju.

Prisutnost pora na površini grebena prstiju rezultira nakupljanjem znoja na vrhovima prstiju. Ta vlaga ostaje na površini predmeta koji osoba dodirne, ostavljajući otiske. Ovisno o dodirnoj površini, otisci mogu biti vidljivi golim okom (npr. metal, staklo ili plastika) ili nevidljivi (papir, karton ili drvo). Otisci ostavljeni na neporoznim površinama poput metala mogu se vizualizirati puderima i podići trakom. Nasuprot tome, otisci na poroznim predmetima zahtijevaju posebno osvjetljenje, kao što su laseri ili x-zrake.

Postoje dvije glavne metode identifikacije otisaka prstiju — usporedba prikupljenih otisaka i skeniranje. Prva metoda se uglavnom koristi u forenzici, dok se druga koristi u svrhu provjere autentičnosti, na primjer prilikom otključavanja mobitela ili laptopa ukoliko imaju čitač otisaka prstiju.

3.2.3 Karakterizacija

Grebeni prisutni na prstima klasificiraju se na temelju uzoraka koje tvore. Najvažnije značajke su završeci grebena i bifurkacije (razdvajanje grebena na dva dijela). Ove značajke nazivaju se detaljima ili minucijama (eng. *minutiae*) i čine osnovu za daljnju klasifikaciju i identifikaciju. Na temelju oblika koje stvaraju minucije (petlje, zavoji, itd.) otisci prstiju se dalje razvrstavaju u mnogo više različitih uzoraka.

Moderna analiza otisaka prstiju koristi računalne algoritme za određivanje sličnosti između otiska i slika pohranjenih u bazi podataka. Analiza se obično provodi na više razina. Najprije se algoritmi uspoređuju s otiscima na gruboj razini kako bi se identificirala vrsta otiska, a zatim kako bi se identificiralo sve više

detalja dok se ne pronađe podudaranje. Računalna analiza otisaka uspoređuje grebene, bifurkacije i njihov relativni položaj. Softver za analizu otiska prsta i skeneri identificiraju određeni broj točaka sličnosti, a taj broj ovisi o softveru koji koristimo. Obično se uspoređuje do 90 točaka. Nakon identifikacije zadanog broja značajki, formira se predložak skeniranog ispisa koji se zatim uspoređuje s predlošcima pohranjenim u računalu kako bi se utvrdilo podudara li se ispis. Iako ograničavanje karakteristika koje se uspoređuju ubrzava proces uparivanja, također može utjecati na točnost ako se uspoređuju neadekvatni brojevi.

Skeneri imaju programiran niz prepoznatljivih karakteristika i algoritme za usporedbu, zajedno s otiscima korisnika kako bi osigurali predloške za usporedbu. FBI-jev sustav otiska prsta je preko 98% točan, dok sustavi za provjeru autentičnosti prihvaćaju samo 97% ovlaštenih korisnika. Neki od razloga za odbijanje su: ožiljci, žuljevi, pukotine, prljavština ili predugi nokti.

Obično se koriste dvije vrste skenera za otiske prstiju, optički skeneri i kapacitivni skeneri. Optički skeneri identificiraju otisak pomoću svjetla; ovisno o svjetlini reflektirane svjetlosti, optički skeneri prikazuju grebene kao tamne, a udubine kao svjetlo. Kapacitetni skeneri identificiraju otisak pomoću električne struje. Udubine i grebeni na prstima proizvode različite izlazne napone što nam omogućuje njihovo razlikovanje.

3.2.4 Osnovni tipovi uzoraka

Prije nego pogledamo tipove i podtipove uzoraka, navesti ćemo dijelove otiska i ukratko ih opisati.

Greben (eng. *ridge*) - put uzdignute kože na jagodici prsta (Osnovne karakteristike i karakterizacija grebena je navedena u sljedećem poglavlju).

Jezgra (eng. *core*) - približno središte otiska prsta.

Delta (eng. *delta*) - referentna točka na otisku prsta koja se, zajedno s jezgrom, koristi za orijentaciju otiska prsta.

Minucija (eng. *minutia*) - karakteristična posebnost u uzorku grebena prsta.

Tip minucije (eng. *minutia type*) - klasifikacija minucija. Najčešći tipovi su bifurkacije i završeci grebena.

Smjer minucije (eng. *minutia direction*) - vektor koji karakterizira orijentaciju minucije.

Navedimo sada tipove uzoraka i njihove podtipove.

Luk (A) (eng. *arch*) (bez delte)

Podtipovi:

Običan luk (**PA**) (eng. *plain arch*) - bez jezgre i bez delte

Šatorski luk (**TA**) (eng. *tented arch*) - u centru postoji nešto nalik na jezgru



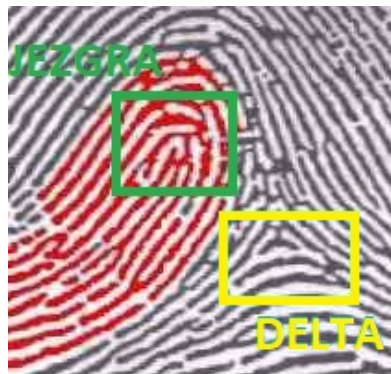
Slika 4: Luk (preuzeto iz [1], str.14)

Petlja (L) (eng. *loop*) (jedna jezgra i jedna delta)

Podtipovi:

radijalna petlja (**RL**) (eng. *radial loop*) - nakošeno prema palcu

ulnarna petlja (**UL**) (eng. *ulnar loop*) - nakošeno prema malom prstu



Slika 5: Petlja (preuzeto iz [1], str.14)

Vrtlog (W) (eng. *whorl*) (barem dvije delte)

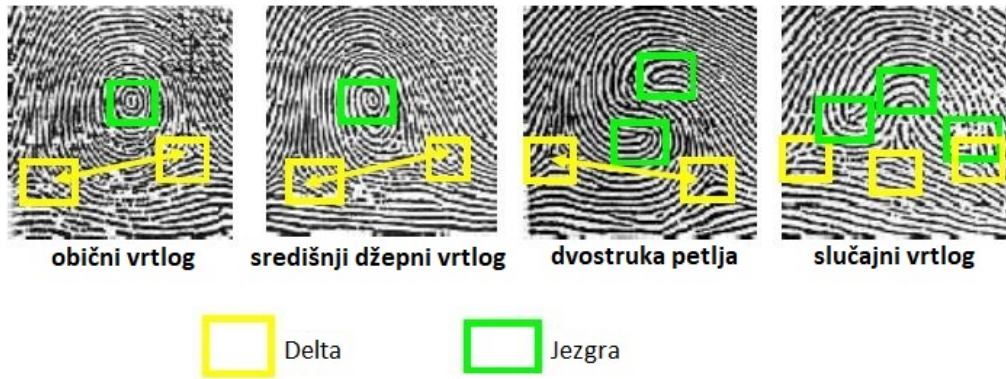
Podtipovi:

obični vrtlog (**PW**) (eng. *plain whorl*)

središnji džepni vrtlog (**CPW**) (eng. *central pocket whorl*)

dvostruka petlja (**DLW**) (eng. *double loop*)

slučajni vrtlog (**AW**) (eng. *accidental whorl*)

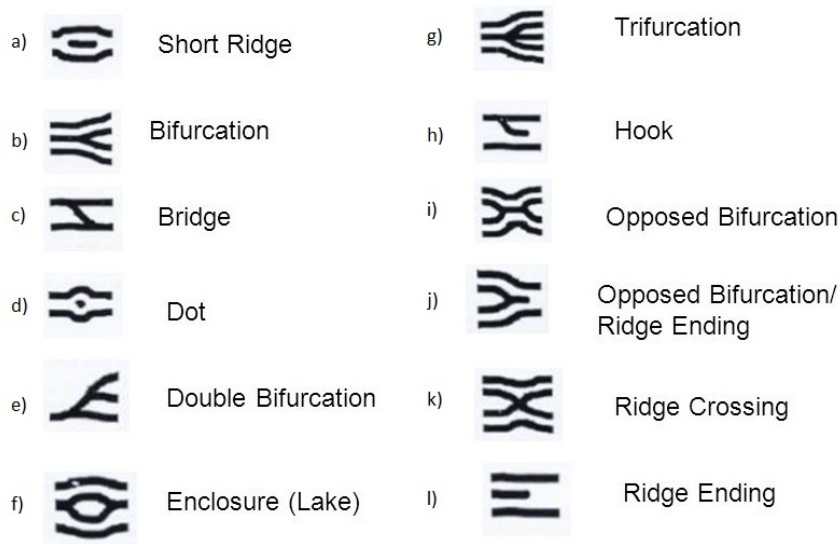


Slika 6: Vrtlog (preuzeto iz [1], str.15)

3.2.5 Karakterizacija grebena

Sljedeća slika prikazuje osnovne karakteristike i karakterizaciju grebena.

- (a) Kratki greben (SR)
- (b) Bifurkacija, raskrsnica (BR)
- (c) Most (B)
- (d) Točka (RD)
- (e) Dvostruka bifurkacija (DB)
- (f) Zatvorenje, jezero (E)
- (g) Trifurkacija (TR)
- (h) Kuka (S)
- (i) Suprotstavljene bifurkacije (OBR)
- (j) Suprotstavljene bifurkacije / završetak grebena (OBR/RE)
- (k) Križanje (RC)
- (l) Završetak grebena (RE)



Slika 7: Karakterizacija grebena (preuzeto iz [1], str.16,17)

3.3 Analiza otisaka obuće

Otisci na obući, oznaka koju čini vanjska površina potplata, prepoznatljivi su uzorci koji se često nalaze na mjestima zločina. Oni su među najčešće pronađenim dokazima na mjestima zločina i prisutni su češće od otisaka prstiju. Oznake obuće predstavljaju vrijedne forenzičke dokaze. U mnogim slučajevima, tragovi cipela mogu se pozitivno identificirati kao da ih je napravila određena cipela, isključujući sve druge cipele. Identifikacija se temelji na fizičkom podudaranju slučajnih individualnih karakteristika koje je cipela stekla tijekom svog životnog vijeka. Dokazi koje pruža pozitivno identificirana oznaka cipele jaki su kao i dokazi u identifikaciji otisaka prstiju.

Otisci obuće nastaju kada se obuća pritisne ili utisne na površinu kao što je pod ili namještaj, pri čemu se karakteristike cipele prenose na površinu. Oznake obuće mogu se općenito podijeliti u dvije klase:

1. otisci koji sadrže 3-dimenzionalne informacije (npr. na snijegu, mokroj prljavštini ili na plaži) i
2. otisci koji sadrže 2-dimenzionalne informacije (npr. na podu ili tepihu).

Postoji varijabilnost u kvaliteti otisaka obuće zbog raznolikosti površina na kojima se mogu pronaći otisci. Detalji u otisku cipele mogu biti nedostadni za jedinstvenu identifikaciju pojedinačne cipele, ali su i dalje vrlo vrijedni. Kako je na tržištu dostupan velik broj cipela, od kojih većina ima prepoznatljive uzorke potplata, to implicira da će bilo koji određeni model cipela posjedovati vrlo mali dio opće populacije.

Imamo dva scenarija s kojima se forenzički istražitelj može susresti prilikom proučavanja otisaka obuće:

- u fazi istrage, kako bi se utvrdio izvor otiska s obzirom na poznati skup otisaka potplata, što je korisno u ubojstvima i napadima gdje nema poznatih otisaka za usporedbu,
- u fazi tužiteljstva, da se utvrdi pripada li određeni otisak cipele poznatom osumnjičeniku.

Forenzičar prikuplja i čuva dokaze o otisku obuće te vrši usporedbe i analize kako bi mogao:

- uključiti, identificirati ili eliminirati cipelu ili vrstu potplata kao izvor otiska,
- odrediti marku ili proizvođača potplata ili obuće,
- povezati mjesta zločina,
- napisati izvješća i dati svjedočanstvo prema potrebi.

Otisak cipele može se prikupiti fotografijom, gelom ili odljevom kada je otisak u tlu. Fotografija otiska može se naknadno skenirati i izraditi digitalna slika. Forenzička analiza zahtjeva usporedbu ove slike s određenim bazama podataka. Te baze podataka uključuju:

- otiske cipela koje su trenutno i ranije dostupne na tržištu,
- otiske pronađene na drugim mjestima zločina.

Slike obuće prikupljene izravno s mjesta zločina su loše kvalitete. Okruženje u kojem se ispitivani otisak cipele prikuplja na mjestu zločina razlikuje se od onih dostupnih na poznatim otiscima. Interaktivne operacije poboljšanja slike dostupne su u Photoshopu i drugim softverima za obradu slika koji su dostupni forenzičkom znanstveniku.

U programu za identifikaciju najprije se poznati otisci cipela skeniraju, obrađuju i indeksiraju u bazu podataka. Prikupljanje probnih otisaka uključuje pažljivu ljudsku stručnost kako bi se osiguralo prikupljanje svih mogućih informacija s otiska cipele. Sve takve informacije indeksiraju se u bazi podataka kako bi se usporedile s dokazima o otisku cipela. Sustav za automatsku identifikaciju obuće prihvaća kao ulaz otisak cipele i dohvaća najvjerojatnije podudarne otiske.

Važan je zadatak klasifikacije, odnosno određivanje marke, stila, veličine, spola itd. Takvom klasifikacijom, čak i ako se osoba ne bi mogla identificirati, potraga bi se mogla suziti na manji skup osumnjičenika.

4 Primjene

U ovom poglavlju bit će opisane i razrađene neke od primjena teorije grafova u forenzici. Prva primjena je vezana za prepoznavanje otisaka prstiju i tu ćemo na primjeru vidjeti kako navedeni algoritmi funkcioniraju. Nakon toga ćemo ukratko opisati primjenu teorije grafova u analizi i prepoznavanju otisaka cipela i kako pomoću grafova možemo modelirati istragu, a na kraju ćemo pokazati primjenu bojenja grafova u forenzici.

Svi otisci prstiju s kojima budemo radili generirani su u programu SFinGe Demo preuzetom sa sljedeće web stranice <http://biolab.csr.unibo.it/research.asp>.

4.1 Primjena teorije grafova u prepoznavanju otisaka prstiju

U ovom ćemo poglavlju uvesti tri algoritma. Pomoću prvog algoritma pridružiti ćemo otisku prsta pripadni graf. Drugi algoritam služi nam za klasifikaciju otisaka prstiju. Pomoću trećeg algoritma usporedit ćemo dani otisak sa otiscima iz baze. Sve algoritme pokazati ćemo postepeno na jednom primjeru.

4.1.1 Algoritam 1: Pridruživanje težinskog obojenog grafa otisku prsta

Korak 1: Identificirati sve karakteristike grebena danog otiska (pokriti što veći dio otiska)

Korak 2: Pridružiti vrh svakoj karakteristici u Koraku 1. Koristiti različite boje za različite tipove karakteristika.

Korak 3: Spojiti bridom svaka dva vrha koja pripadaju istom grebenu

Korak 4: Pridružiti težinu svakom bridu tako da predstavlja duljinu brida u centimetrima.

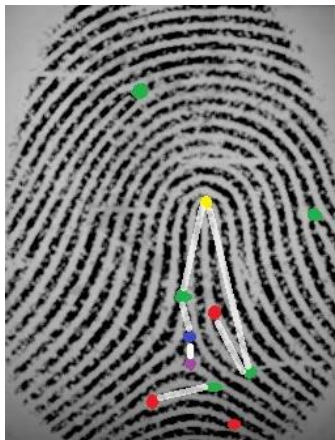
Korak 5: Pridružiti par (m,n) svakom vrhu u Koraku 2 na sljedeći način:
 $(m,n)=(\text{odgovarajuća kratica karakteristike grebena, stupanj vrha})$.

Primjer 13. U ovom primjeru pokazat ćemo primjenu Algoritma 1 na dani otisak:

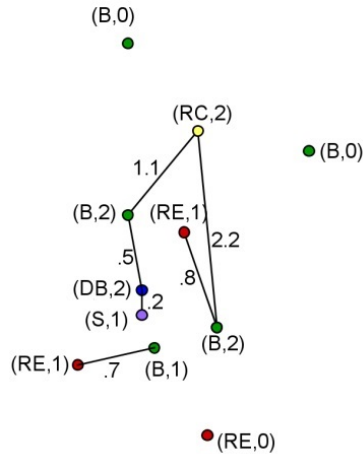


Prvo ćemo na otisku označiti vrhovima sve karakteristike i spojiti ih bridovima. Koristimo sljedeće boje:

- bifurkacije (B)
- križanja (RC)
- krajevi grebena (RE)
- dvostruke bifurkacije (DB)
- kuke (S)



Sada možemo prikazati graf, označiti vrhove i odrediti težine bridova:



4.1.2 Algoritam 2: Klasifikacija otisaka

Ovaj algoritam klasificira svaki otisak prsta koristeći tri nivoa (levela) klasifikacije.

Korak 1: Odrediti ima li otisak jezgru. Ako ima, otići na Korak 3, inače otići na Korak 2.

Korak 2: Klasificirati otisak kao običan luk (PA) i otići na Korak 8.

Korak 3: Odrediti ima li otisak deltu. Ako ima, otići na Korak 5, inače otići na Korak 4.

Korak 4: Klasificirati otisak kao šatorski luk (TA) i otići na Korak 8.

Korak 5: Odrediti broj delti. Ako postoji samo jedna delta otići na Korak 6, inače otići na Korak 7.

Korak 6: Klasificirati otisak kao radijalnu petlju (RL) ili kao ulnarnu petlju (UL) i otići na Korak 8.

Korak 7: Klasificirati otisak kao vrtlog (PW/CPW/DLW/AW) i otići na Korak 8.

Korak 8: Odrediti broj različitih karakteristika (tj. broj boja kojima je obojan pridruženi graf).

Korak 9: Prvi nivo klasifikacije:

(PT) tip otiska (*eng. pattern type*),

(SPT) podtip otiska (*eng. sub-pattern type*),

(RC) broj karakteristika,

gdje (PT) može biti (A), (L) ili (W).

Korak 10: Odrediti broj komponenti povezanosti ω , broj vrhova $|V|$ i broj bridova $|E|$ pridruženog grafa.

Korak 11: Drugi nivo klasifikacije:

$$\begin{array}{l} \omega \\ |V| \\ |E| \end{array}$$

Korak 12: Odrediti karakteristiku m_i pridruženu svakom vrhu $i \in \{1, 2, \dots\}$.

Korak 13: Odrediti stupanj n_i svakog vrha $i \in \{1, 2, \dots\}$ i težine R_i bridova incidentnih sa svakim od vrhova $i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$.


Korak 14: Treći nivo klasifikacije: klasificirati svaki vrh pridruženog grafa kao $(m, n, R_1, R_2, \dots, R_n)$.

U nastavku navodimo primjer u kojemu ćemo uočiti primjenu prethodno navedenog algoritma.

Primjer 14. Klasificirajmo otisak iz Primjera 13 koristeći Algoritam 2.

1. Otisak ima jezgru, idemo na Korak 3.
2. Otisak nema deltu \Rightarrow klasificiramo ga kao (TA) i idemo na Korak 8.
3. Broj karakteristika je 5
4. Prvi nivo klasifikacije: (A, TA, 5).
5. $\omega = 5$, $|V| = 11$, $|E| = 6$.
6. Drugi nivo klasifikacije: (5, 11, 6).
7. U koracima 12 i 13 odredimo m_i , n_i i R_i pa dobijemo treći nivo klasifikacije:
(B, 0), (B, 0), (B, 1, 0.7), (B, 2, 0.5, 1.1), (B, 2, 0.8, 2.2), (RC, 2, 1.1, 2.2),
(RE, 0), (RE, 1, 0.7), (RE, 1, 0.8), (DB, 2, 0.2, 0.5), (S, 1, 0.2).

Konačno, imamo sljedeće:

OTISAK

KLASIFIKACIJA
1. (A, TA, 5) 2. (5, 11, 6) 3. (B, 0), (B, 0), (B, 1, 0.7), (B, 2, 0.5, 1.1), (B, 2, 0.8, 2.2), (RC, 2, 1.1, 2.2), (RE, 0), (RE, 1, 0.7), (RE, 1, 0.8), (DB, 2, 0.2, 0.5), (S, 1, 0.2)

Pogledajmo sada na konkretnom primjeru kako bi nam ovi algoritmi mogli poslužiti.

Primjer 15. U kafiću se tijekom noći dogodila pljačka. Počinitelj je ukrao nekoliko skupih boca i ispraznio kasu. Ujutro kada su konobarice otvorile kafić odmah su shvatile šta se dogodilo i pozvale policiju. Policajci su stigli, pregledali mjesto zločina i na kasi našli nekoliko otisaka prstiju. Kako pristup kasi ima jedino osoblje kafića i šefovi, policija je prikupila njihove otiske kako bi usporedili otiske nađene na kasi s njihovim otiscima, u nadi da će među tim otiscima biti i neki koji ne pripada nikome od njih. Nakon analize otisaka ispostavlja se da su bili u pravu. Zaista je ostao jedan otisak koji ne odgovara otisku niti jednog od zaposlenika i šefova. Možemo pretpostaviti da je taj otisak ostavio počinitelj prilikom krađe. Otisak je prikazan na sljedećoj slici:



Provedimo Algoritam 1 za ovaj otisak.

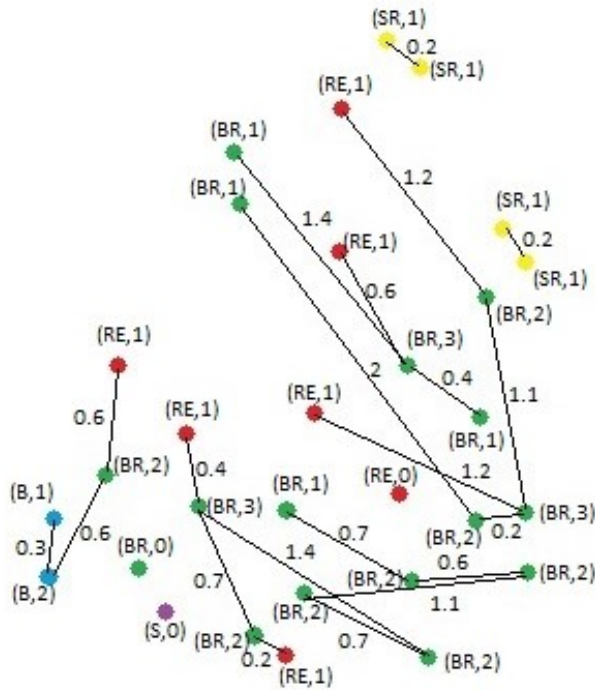
Pogledajmo koje sve karakteristike vidimo i odaberimo boje označavanja:

- bifurkacije (BR)
- kratki grebeni (SR)
- krajevi grebena (RE)
- mostovi (B)
- kuke (S)

Nakon označavanja imamo sljedeće:




Na sljedećoj slici prikazan je graf dobiven nakon izvršenja zadnja tri koraka algoritma.



Provedimo sada Algoritam 2 za dobiveni graf.

1. Otisak ima jezgru.
2. Otisak ima jednu deltu \Rightarrow ulnarna petlja (UL) (primjetimo da je zakrivljenje usmjereno prema malom prstu)
3. Broj karakteristika je 5.
4. Prvi nivo klasifikacije: (L, UL, 5).
5. $\omega = 9, |V| = 30, |E| = 21$.
6. Drugi nivo klasifikacije: (9, 30, 21).
7. Treći nivo klasifikacije: (BR, 0), (BR, 1, 0.4), (BR, 1, 0.7), (BR, 1, 1.4), (BR, 1, 2), (BR, 2, 0.2, 0.7), (BR, 2, 0.2, 2), (BR, 2, 0.6, 0.6), (BR, 2, 0.6, 0.7), (BR, 2, 0.6, 1.1), (BR, 2, 0.7, 1.1), (BR, 2, 0.7, 1.4), (BR, 2, 1.1, 1.2), (BR, 3, 0.2, 1.1, 1.2), (BR, 3, 0.4, 0.6, 1.4), (BR, 3, 0.4, 0.7, 1.4), (SR, 1, 0.2), (SR, 1, 0.2), (SR, 1, 0.2), (RE, 0), (RE, 1, 0.2), (RE, 1, 0.4), (RE, 1, 0.6), (RE, 1, 0.6), (RE, 1, 1.2), (RE, 1, 1.2), (B, 1, 0.3), (B, 2, 0.3, 0.6), (S, 0).

OTISAK

KLASIFIKACIJA
1. (L, UL, 5) 2. (9, 30, 21) 3. (BR, 0), (BR, 1, 0.4), (BR, 1, 0.7), (BR, 1, 1.4), (BR, 1, 2), (BR, 2, 0.2, 0.7), (BR, 2, 0.2, 2), (BR, 2, 0.6, 0.6), (BR, 2, 0.6, 0.7), (BR, 2, 0.6, 1.1), (BR, 2, 0.7, 1.1), (BR, 2, 0.7, 1.4), (BR, 2, 1.1, 1.2), (BR, 3, 0.2, 1.1, 1.2), (BR, 3, 0.4, 0.6, 1.4), (BR, 3, 0.4, 0.7, 1.4), (SR, 1, 0.2), (SR, 1, 0.2), (SR, 1, 0.2), (SR, 1, 0.2), (RE, 0), (RE, 1, 0.2), (RE, 1, 0.4), (RE, 1, 0.6), (RE, 1, 0.6), (RE, 1, 1.2), (RE, 1, 1.2), (B, 1, 0.3), (B, 2, 0.3, 0.6), (S, 0)

Kako nam ovo pomaže da pronađemo počinitelja?

Potreban nam je algoritam pomoću kojeg možemo dani otisak upariti s otiskom iz baze, a radi lakše usporedbe otisaka bilo je potrebno klasificirati otisak.

4.1.3 Algoritam 3: Uparivanje nađenog otiska s otiskom iz baze podataka

Korak 1: Odabrati skup otisaka iz baze s odgovarajućim prvim levelom klasifikacije nađenog otiska.






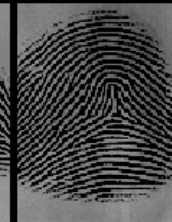






Korak 2: U skupu otisaka iz Koraka 1 odabrati skup otisaka s odgovarajućim drugim levelom klasifikacije nađenog otiska.

Korak 3: U skupu otisaka iz Koraka 2 pronaći (jedinstveni) otisak s odgovarajućim trećim levelom klasifikacije nađenog otiska.

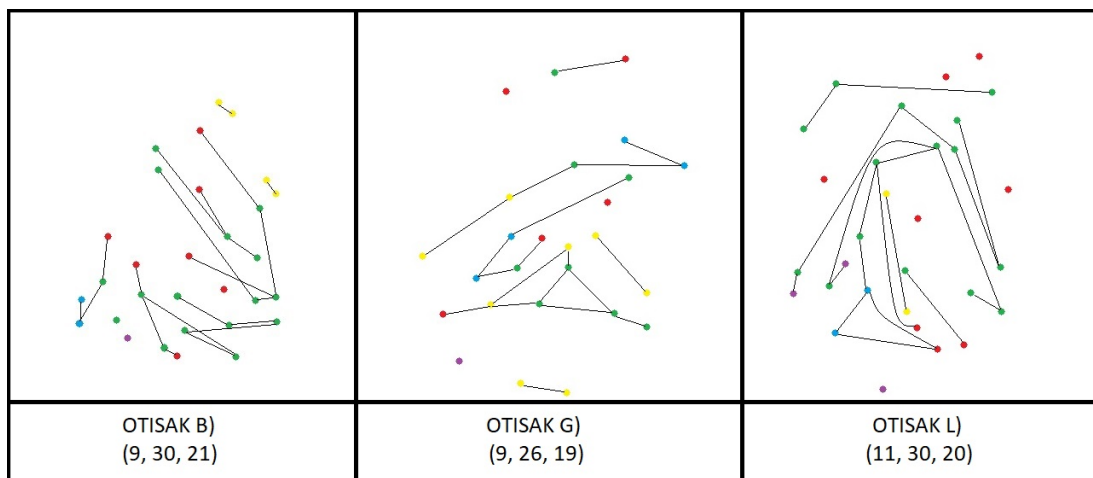
Pomoću ovog algoritma znatno se smanjuje vrijeme pretraživanja. Zamislite da otisak tražimo u bazi podataka svih građana Republike Hrvatske. U vrijeme pisanja ovog rada (2022.) broj stanovnika iznosi 3 888 529. Ako pretpostavimo da su glavni tipovi otisaka ravnomjerno raspodijeljeni imali bi sljedeću situaciju: u prvom koraku algoritma eliminirali bi dvije trećine stanovništva čime dolazimo do broja 1 296 176. Recimo da u idućem koraku eliminiramo još 1 000 000 otisaka.

Tada u trećem koraku otisak nađen na mjestu zločina uspoređujemo sa "samo" 296 176 otisaka iz baze. Iako je to još uvijek velik broj, znatno je manji od početnog broja otisaka s kojima smo trebali usporediti nađeni otisak. Jasno je da tipovi otisaka nisu ravnomjerno raspoređeni i da prethodno spomenuto nije precizan pokazatelj, ali služi kao dobar primjer prednosti korištenja navedenog algoritma.

Primjer. Vratimo se sada na Primjer 15. Do sada smo nađenom otisku pridružili graf i klasificirali ga. Preostaje usporediti ga s otiscima iz baze podataka i pronaći počinitelja. Radi jednostavnosti pretpostavimo da u bazi imamo 12 otisaka prstiju. Svaki od njih smo prethodno klasificirali i u sljedećoj tablici navodimo prvi level klasifikacije svih otisaka.

					
OTISAK A) (A, PA, 3)	OTISAK B) (L, UL, 5)	OTISAK C) (A, TA, 3)	OTISAK D) (A, PA, 3)	OTISAK E) (L, RL, 4)	OTISAK F) (A, TA, 5)
					
OTISAK G) (L, UL, 5)	OTISAK H) (L, RL, 4)	OTISAK I) (W, PW, 4)	OTISAK J) (L, UL, 4)	OTISAK K) (W, PW, 3)	OTISAK L) (L, UL, 5)

Sjetimo se, prvi nivo klasifikacije nađenog otiska je (L, UL, 5). Ako pogledamo gornju tablicu vidimo da su otisci B, G i L jedini otisci u našoj bazi s istim prvim levelom klasifikacije. Dakle, broj otisaka koje ćemo dalje uspoređivati s nađenim otiskom je tri. Primjetimo da smo znatno smanjili problem. Sada je vrijeme da pogledamo drugi nivo klasifikacije tih otisaka.



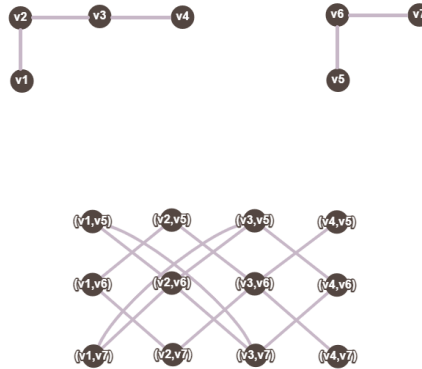
U ovom skupu tražimo sve otiske s drugim levelom klasifikacije jednakim (9,30,21). Kako je skup malen, možemo odmah uočiti da se samo jedan od navedenih otisaka podudara s nađenim otiskom na drugom nivou. Konačno, kada bi usporedili treći level klasifikacije nađenog otiska s trećim levelom klasifikacije otiska B, došli bi do zaključka da je B počinitelj.

U praksi bi u trećem koraku još uvijek imali veliki skup u kojem bi pretraživali otiske po trećem levelu. Ako u bazi postoji otisak koji se podudara s nađenim na sva tri levela, on je jedinstven. Kada u bazi ne bi imali podudaranje, morali bi proširiti bazu u kojoj pretražujemo i započeti treći algoritam ispočetka.

4.2 Primjena teorije grafova u forenzičkoj analizi obuće

Kao što smo ranije spomenuli, otisci obuće često su nađeni na mjestu zločina. Nakon što nađeni otisak prikupimo, cilj je identificirati cipelu koja je taj otisak napravila, a time i doći do počinitelja. Nađeni otisak uspoređujemo s otiscima u bazi ili s otiscima cipela sumnjivaca.

Pogledajmo još jednom primjer produkta grafova od ranije.



Primjetimo da vrhovi $(v_1, v_5), (v_2, v_6)$ i (v_3, v_7) tvore kliku u grafu H , pa su vrhovi v_1, v_2 i v_3 kongruentni vrhovima v_5, v_6 i v_7 .

Upravo ta kongruencija nam omogućuje da poravnamo otiske cipela. U nastavku opisujemo postupak analize otisaka cipela.

Algoritam

Korak 1: Označiti karakteristične točke vrhovima grafa.

Korak 2: Spojiti bridom vrhove koji čine jedno karakteristično obilježje¹.

Korak 3: Odrediti produkte grafa nađenog otiska s grafovima otisaka osumnjičenih.

Korak 4: Pronaći kliku u produktnim grafovima.

Korak 5: "Poravnati" otiske po klikama koristeći kongruentne vrhove.

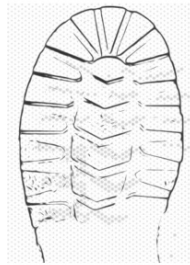
Korak 6: Izračunati euklidsku udaljenost između vrhova.

Nakon što provedemo algoritam dobivamo udaljenosti između vrhova u "poravnatim" grafovima. Te udaljenosti nam govore koliko je otisak osumnjičenog sličan otisku nađenom na mjestu zločina.

¹Karakteristično obilježje na otisku cipele može biti bilo kakav uzorak na otisku, npr. kvadrat, trokut, linija, ...

Sjetimo se, kada smo definirali produkt grafova rekli smo da je susjednost u produktnom grafu određena nekim uvjetom. U ovom algoritmu ćemo za uvjet uzeti da će dva vrha u produktnom grafu biti susjedna ako i samo ako su odgovarajući vrhovi u polaznim grafovima bili susjedni, te ako su jednako udaljeni.

Primjer 16. Vratimo se na primjer pljačke kafića uz dodatnu pretpostavku da smo prilikom obrađivanja mjesta zločina pronašli i otisak cipele koji bi mogao pripadati počinitelju. Pretpostavimo da imamo tri osumnjičenika, **B**, **G** i **L**, do kojih smo došli usporedbom otisaka prstiju, te da danim algoritmima nismo uspjeli riješiti slučaj. Idući pristup rješavanju slučaja bio bi usporedba nađenog otiska cipele s otiscima cipela osumnjičenika. Na sljedećoj slici prikazan je otisak cipele nađen na mjestu zločina, a iduće tri slike prikazuju otiske cipela osumnjičenika **B**, **G**, i **L**, respektivno.



Slika 8: Otisak cipele nađen na mjestu zločina

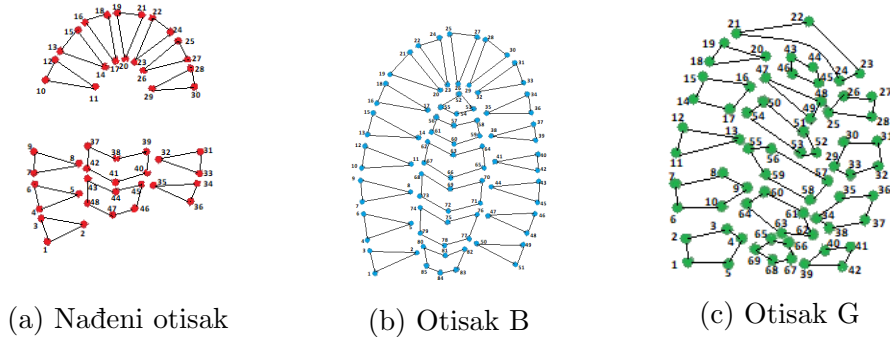
Primjetimo da nađeni otisak nije potpun. Iz tog razloga nije potrebno uspoređivati cijele otiske cipela osumnjičenih već samo gornji dio pošto se nađeni otisak sastoji samo od gornjeg dijela otiska cipele.



Slika 9: Otisci cipela osumnjičenika (preuzeto sa [10, 11, 12])

Prvi korak je označiti karakteristične točke na otiscima. Primjetimo da otisak **L** možemo odmah isključiti iz istrage pošto se golim okom vidi da nema uzorke

slične onima na nađenom otisku. Nađeni otisak ćemo označiti vrhovima crvene boje, otisak B vrhovima plave boje, a otisak G vrhovima zelene boje. Sljedeće slike prikazuju grafove karakterističnih obilježja svakog otiska.



Slika 10: Grafovi otisaka cipela

Idući korak je odrediti produkte grafova. Moramo odrediti produkt grafova nađenog otiska i otiska B, a nakon toga produkt grafova nađenog otiska i otiska G. To ćemo napraviti korištenjem računalnog programa GAP. Kod² radi na način da iz matrica susjedstva grafova konstruiramo pripadne grafove, te prolazimo kroz svaki par vrhova i uspoređujemo udaljenosti vrhova u jednom grafu s udaljenostima vrhova u drugom grafu. Ako su te udaljenosti jednake onda se u matrici susjedstva produktnog grafa na poziciji koja odgovara tim vrhovima pridružuje 1, inače 0. S obzirom da imamo grafove s velikim brojem vrhova, radi preglednosti u prilogu³ navodimo skupove bridova grafova, a ne matrice susjedstva.

Vrijeme izvođenja navedenog koda za produkt grafova A (graf nađenog otiska) i B (graf otiska B) je približno dva sata, dok je za određivanje produkta grafova A i C (graf otiska G) bilo potrebno sat vremena i 15 minuta. Upravo iz tog razloga smo matrice susjedstva spremili u datoteke kako ih ne bi svaki put morali ponovno određivati pošto je to vremenski zahtjevan proces.

Sada moramo pronaći klike u produktnim grafovima. Tražimo samo maksimalne klike, tj. klike s najvećim brojem vrhova. Što veće klike imamo to ćemo bolje moći "poravnati" grafove. Za određivanje klika smo koristili naredbu CompleteSubgraphs. Vrhovi klika produktnog grafa su uređeni parovi (a_i, b_i) , odnosno (a_i, c_i) , gdje su a_i vrhovi graf A, b_i vrhovi graf B, a c_i vrhovi graf C.

Za produkt grafova A i B dobijemo 120 klika veličine 6, od kojih ćemo izdvojiti sljedećih 5:

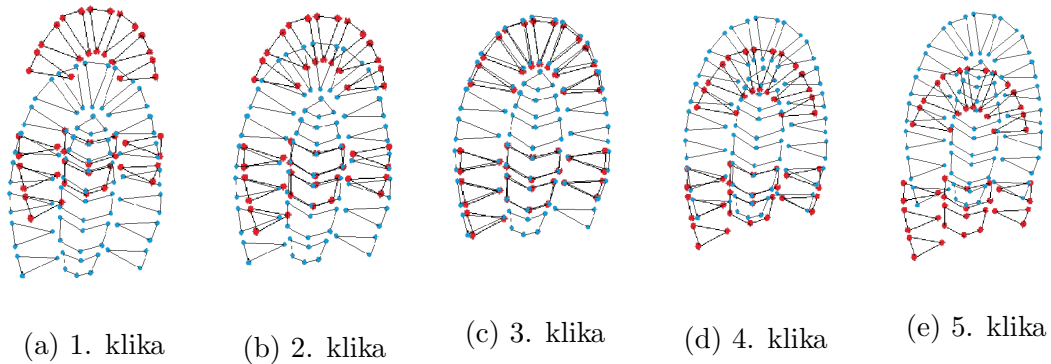
1. $(37, 56), (38, 57), (39, 58), (40, 59), (41, 60), (42, 61),$
2. $(37, 62), (38, 63), (39, 64), (40, 65), (41, 66), (42, 67),$
3. $(37, 68), (38, 69), (39, 70), (40, 71), (41, 72), (42, 73),$

²Prilog 1.

³Prilog 2., Prilog 3. i Prilog 4.

4. $(37, 74), (38, 75), (39, 76), (40, 77), (41, 78), (42, 79),$
5. $(37, 80), (38, 81), (39, 82), (40, 83), (41, 84), (42, 85).$

Pokušajmo "poravnati" grafove po odabranim klikama. Neformalno govoreći, to zapravo znači da ćemo staviti grafove jedan preko drugoga tako da se kongruentni vrhovi određeni klikama preklapaju koliko je to moguće. Pogledajmo kako izgledaju naši "poravnati" grafovi:

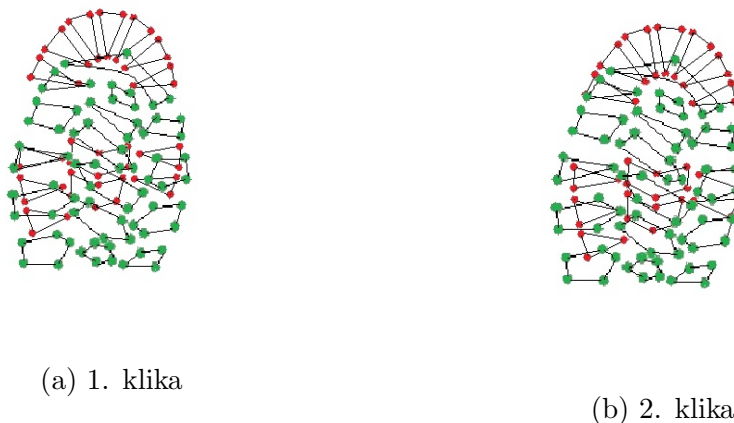


Slika 11: Usporedba nađenog otiska s otiskom B

Za produkt grafova A i C dobijemo 1656 klika veličine 3, od kojih ćemo izdvojiti sljedeće dvije:

1. $(7, 11), (8, 13), (9, 12),$
2. $(10, 18), (11, 20), (12, 19).$

Pogledajmo kako izgledaju naši "poravnati" grafovi:



Slika 12: Usporedba nađenog otiska s otiskom G

Primjetimo da za usporedbu s otiskom B imamo dobro podudaranje na trećoj kliku, dok za usporedbu s otiskom G nismo dobili dobra podudaranja.

Postavlja se pitanje bi li pomoću neke od preostalih 1654 klike veličine 3 mogli bolje "poravnati" dane grafove. Ne bi mogli, a razlog je taj što su ove klike izabrane tako da su vrhovi približno na istim pozicijama⁴ u oba grafa, što znači da kada bi pokušali "poravnati" po bilo kojoj drugoj kliku, morali bi rotirati grafove kako bi ih "poravnali", a samim time se povećava udaljenost između preostalih vrhova dvaju grafova. Što se tiče "poravnanja" s grafom B, tu ima prostora za napredak pošto imamo puno klika veličine 3 po kojima bi također mogli "poravnati" grafove, pa bi možda dobili i bolje podudaranje od trenutnog. Međutim, kako ovdje imamo usporedbu nađenog otiska samo s dva grafa i vidimo koji se bolje podudara, nije potrebno tražiti bolje "poravnanje" sa grafom B.

Zadnji korak u Algoritmu je računanje euklidske udaljenosti između vrhova u poravnatim grafovima. Međutim, već smo i golim okom uspjeli zaključiti da je otisak B bliži nađenom otisku od otiska G.

Kada to ne bi bilo tako očito mogli bismo odrediti euklidsku udaljenost od svakog vrha grafa nađenog otiska do njemu najbližeg vrha u grafu otiska s kojim uspoređujemo. Kada bi odredili sve udaljenosti za sve otiske, uzeli bi srednje vrijednosti tih udaljenosti i tražili najmanju među njima. To bi bio dobar kandidat za počinitelja.

⁴ako gledamo grafove u prostoru \mathbb{R}^2

4.3 Primjena teorije grafova u modeliranju istrage

Pogledajmo sada kako se teorija grafova može primijeniti da matematički modeliramo forenzičku istragu. Navest ćemo generaliziranu metodologiju primjene teorije grafova na modeliranje bilo koje forenzičke istrage i na primjeru pokazati kako funkcionira.

Značajan izazov u prikupljanju i kategorizaciji digitalnih dokaza je prikladno sortiranje dokaza. Iako to može biti problem u bilo kojoj forenzičkoj istrazi, poseban je problem s digitalnom forenzikom. U digitalnoj forenzici nije dovoljno jednostavno pratiti dani vektor napada do određene mreže ili do određenog računala. Bilo tko mogao je koristiti tu mrežu ili to računalo. Stoga je teorija grafova posebno primjenjiva na digitalnu forenziku. U drugim forenzičkim disciplinama cilj može biti identificirati sve potencijalne osumnjičene, dokaze i žrtve te matematički modelirati zločin. Stvaranjem grafičkog prikaza slučaja u kojem je svaki relevantni subjekt (npr. svjedoci, žrtve, osumnjičeni, dokazi, ...) vrh i veze između tih subjekata su bridovi, forenzički analitičar može primijeniti teoriju grafova na procjenu dokaza.

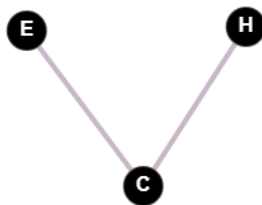
Trenutna metodologija bavi se opisivanjem dokaza i procjenom veza između subjekata. Metodologija predstavljena u ovom radu analizira sva tri elementa grafa: skup vrhova, skup bridova i funkciju incidencije koja povezuje bridove s vrhovima.

Usmjerenost luka važna je za modeliranje forenzičke istrage. Iz teorije grafova znamo da luk ima definiran početak i kraj. U svrhu forenzičke istrage smjer uvijek treba biti od inicijatora do cilja. Na primjer, ako određeni osumnjičnik posjeti mjesto zločina, tada bi luk bio od osumnjičenika do mjesta zločina. U slučaju digitalnih forenzičkih istraga, ako određena osoba preuzme dokument s web stranice, smjer luka je od pojedinca do web stranice, iako su podaci tekli od web stranice do pojedinca.

Prvi korak u primjeni teorije grafova na bilo koju istragu je identificiranje različitih subjekata uključenih u incident. Ti subjekti biti će predstavljeni kao vrhovi. Kada bilo koja dva subjekta imaju bilo kakvu vezu, ta je veza predstavljena kao brid. Brid bi uvijek trebao biti luk koji prikazuje ne samo vezu, već i tko je inicijator te veze. Na primjer, ako istraga uključuje povjerljive informacije koje su ukradene od tvrtke A i naknadno pronađene u tvrtki B, možemo svako poduzeće i relevantno osoblje predstaviti kao vrhove. Svaki zaposlenik tvrtke A koji je imao pristup ukradenim informacijama trebao bi biti predstavljen. Tada bi sve veze koje su ti zaposlenici imali s tvrtkom B bile predstavljene kao bridovi ili lukovi. Ako dokazi pokazuju da su podaci prošli preko nekog posredničkog subjekta kao na primjer preko hakera, tada bi vrhove koji reprezentiraju zaposlenike koji su imali ikakve veze s tim hakerom lukom spojili s vrhom koji reprezentira hakera. Predstavljanje subjekata i veza kao graf relativno je jednostavan proces. Ključno pitanje bit će osigurati da su reprezentirani svi subjekti i sve veze. Bridovi i lukovi

mogu imate zadane težine i upravo to će nam biti korisno prilikom modeliranja forenzičkih istraga. Neke oznake težina bit će dosljedne tijekom svake istrage. Na primjer, kaznene istrage obično uzimaju u obzir sredstva, motiv i priliku osumnjičenika da počini zločin. Težina luka od osumnjičenika do zločina može imati težinu 1, 2 ili 3, ovisno o tome koliko je od ova tri aspekta (sredstva, motiv i prilika) osumnjičenik imao. Drugi pristup označavanja uključivao bi rangiranje razine veze između dva vrha. Na primjer, ako se istražuje krađa informacija iz tvrtke, pojedincu koji je nekoć bio u blizini tvrtke pridružili bi luk težine 1. Za pojedinca koji je povremeno posjećivao tvrtku pripadni luk bi imao težinu 2. Pojedinaac s učestalim posjećivanjem tvrtke imao bi luk težine 3. Pojedinaac za kojeg se znalo da ima pristup ne samo zgradi već i predmetima (informacijama) koji su ukradeni imat će luk težine 4. Pokažimo sada na jednostavnom primjeru kako bi modelirali istragu.

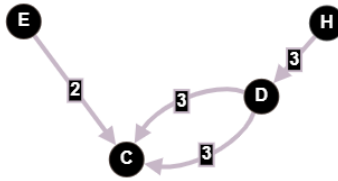
Primjer 17. Tvrtka **C** doživjela je cyber-napad. Bivši zaposlenik **E** osumnjičen je za iniciranje napada. Međutim, tvrtka je već ranije bila napadnuta od strane jednog ili više hakera **H** koji mogu biti krivci za nedavni napad. Osumnjičeni, tvrtka i haker tvore vrhove grafa. Idući je korak prikazati sve veze između tih vrhova bridovima ili lukovima. Dobiveni graf je jako jednostavan i služi samo kao ilustracija postupka. U pravim istragama imali bi mnogo više vrhova i bridova između njih.



Kao što znamo, svakom grafu možemo pridružiti matricu susjedstva. Ona također može biti korisna prilikom modeliranja istrage. Matrica susjedstva dobivenog grafa je sljedeća:

	C	E	H
C	0	1	1
E	1	0	0
H	1	0	0

Idući korak bio bi pridružiti bridovima smjer i težinu. Pretpostavimo još da smo tijekom istrage otkrili da haker **H** nema direktnu vezu s tvrtkom **C** već je povezan



s njom preko druge tvrtke **D**. Primjetimo da kako istraga ide dalje, usmjereni graf postaje sve kompleksniji. Matrica susjedstva može nam dati bolji uvid u dokaze nego što to radi sam graf. Nadalje, računalni programi bolje rade s matricama nego s grafovima pa je analiza dokaza putem računala brža i bolja kada radimo s matricama susjedstva. Pogledajmo kako izgleda matrica susjedstva ovog usmjerenog grafa.

	C	D	E	H
C	0	0	0	0
D	2	0	0	0
E	1	0	0	0
H	0	1	0	0

Iz ove matrice vidimo da je najjača veza između vrhova **D** i **C**. Tu čak nismo uzeli u obzir težine lukova već samo broj lukova incidentnih s promatranim vrhovima, a ako nas zanimaju i težine možemo ih dodati u matricu susjedstva na način da uz broj lukova u zagradi napišemo njihove težine. Sada imamo sljedeće:

	C	D	E	H
C	0	0	0	0
D	2 (3+3)	0	0	0
E	1 (2)	0	0	0
H	0	1 (3)	0	0

Ova modificirana matrica susjedstva daje istražitelju bolji uvid na odnose između subjekata u istrazi. To daje matematički model slučaja koji se može lako analizirati. Sada postaje još očitije da je veza između vrha **D** i vrha **C** najjača. U ovom trenutku haker **H** se čini mnogo većim sumnjivcem od bivšeg zaposlenika **E**. Iako je graf u ovom trenutku mnogo detaljniji nego kada je modeliranje počelo, može se još više proširiti. Do sada opisano modeliranje samo je osnovno modeliranje i treba se smatrati minimalnim prihvatljivim za modeliranje forenzičke istrage.

Jedna stavka koju treba uzeti u obzir pri procjeni važnosti danog vrha u matematičkom modelu istraživanja je centričnost. Centar grafa je vrh s minimalnim ekscentricitetom. Graf može imati više od jednog centra. Pronalaženje centra

grafa prilikom modeliranja forenzičke istrage može biti korisno u određivanju koji su subjekti najviše uključeni u cjelokupni slučaj. Drugim riječima, određeni centar možda nije počinitelj zločina, ali je očito važan za bolje razumijevanje slučaja.

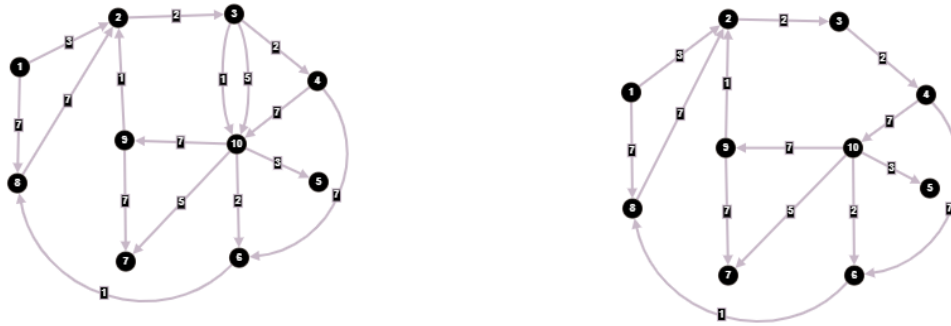
U teoriji grafova priroda funkcije incidencije nije primarna briga. Bitno je da su vrh u i vrh v povezani na neki način, stvarajući tako brid a . Međutim, u modeliranju forenzičke istrage funkcija incidencije zauzima važniju ulogu. Neadekvatno je samo utvrditi da postoji brid između vrha u i vrha v . Za potrebe modeliranja forenzičke istrage mora se opisati stvarna funkcija koja povezuje vrh s vrhom. U većini slučajeva to neće biti tipična matematička funkcija. Umjesto toga, funkcija incidencije biti će narativni opis odnosa. Na primjer, luk a povezuje vrhove u i v jer je pojedinac predstavljen vrhom u posjetio web stranicu predstavljenju vrhom v .

Nakon što je istraga potpuno modelirana s pripadnim grafom, izomorfizam grafova se može koristiti za usporedbu ovog trenutnog incidenta s drugim sličnim incidentima. Ako imate graf zadanog incidenta, onda svaki incident koji odgovara izomorfnom grafu, može imati vezu s polaznim incidentom. Na primjer, ako izradite graf cyber-napada, a zatim dok istražujete novi i zasebni napad, otkrijete da je graf novog napada izomorfan s grafom tog napada, tada bi mogli pretpostaviti da je novi napad povezan s prvim i da su ga možda počinile iste osobe.

4.3.1 Parcijalni izomorfizam grafova

Iako teorija grafova nema koncept parcijalnog izomorfizma, za forenzičku istragu on je zanimljiv. Parcijalni izomorfizmi mogu se ocijeniti na sljedeći način: postotak identičnih vrhova pomnožen s postotkom identičnih bridova daje postotak izomorfizma između dva grafa, tj. $(\%E) \cdot (\%V) = \%I$. Ako grafovi imaju zasebni zločina nisu izomorfni, ali ako su 90% izomorfni, to bi ipak ukazivalo na potencijalnog zajedničkog počinitelja. Na primjer, ako je 95% vrhova identično i 90% bridova je identično, tada bi se dva grafa smatrala 85.5% izomorfna. Također, moguće je dodatno ocijeniti izomorfizam ispitivanjem funkcija incidencija za bridove/lukove kako bi se vidjelo jesu li te funkcije identične.

Primjer 18. Pogledajmo sljedeća dva usmjerena grafa i odredimo postotak parcijalnog izomorfizma između njih. Primijetimo da oba usmjerena grafa imaju jednak broj vrhova, no drugi graf ima dva luka manje, a to su lukovi incidentni s vrhovima 3 i 10. Iz toga zaključujemo da će vrhovi 3 i 10 biti različitih stupnjeva u ta dva usmjerena grafa, dok će svi ostali vrhovi biti jednakih stupnjeva. Pošto su grafovi usmjereni, zanimaju nas ulazni i izlazni stupanj. Ako pogledamo, zaista se svi vrhovi osim 3 i 10 podudaraju i u ulaznim i u izlaznim stupnjevima. Dakle, imamo 80% identičnih vrhova. Što je s lukovima? Kao što smo već primjetili, nemamo sve lukove u drugom usmjerenom grafu. Tu se moglo dogoditi i da imamo neke nove lukove, ali radi jednostavnosti su usmjereni grafovi odabrani na ovaj način. Kako je usmjereni graf težinski, moramo usporediti i težine lukova. One se



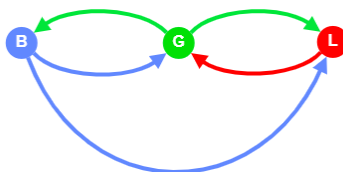
također podudaraju na svim lukovima. Zaključujemo da imamo 87.5% identičnih lukova. Dakle, dani usmjereni grafovi su 70% izomorfni.

4.3.2 Modeliranje istrage pomoću stupnjeva vrhova digrafa

U ovom potpoglavlju baviti ćemo se metodom bojenja grafova koja se primjenjuje u forenzici. Grafička istraga koristi elemente teorije grafova kako bi identificirala osumnjičene upletene u kriminalnu radnju. Metoda koju ćemo opisati pomaže kriminalističkom znanstveniku da ubrza proces istrage kako bi smanjio vrijeme donošenja odluka.

Ranije smo vidjeli kako modelirati istragu pomoću grafova. Sada ćemo to primijeniti na primjeru i objasniti metodu bojenja grafova. Napomenimo da se ovdje ne radi o pravilnom bojenju grafova, već se bojenje grafova koristi radi preglednosti i lakšeg snalaženja u dokazima.

Primjer 19. Sjetimo se pljačke kafića gdje smo krivca našli pomoću otiska prsta koji je ostavio prilikom krađe. Usporedbom prvih levela klasifikacije ostala su nam tri osumnjičenika: **B**, **G** i **L**. Da nismo uspjeli riješiti slučaj danim algoritmima, mogli bi pokušati s bojenjem grafova. Označimo osumnjičenike **B**, **G** i **L** kao vrhove i pridružimo im redom sljedeće boje: plava, zelena i crvena. Osoba **B** kaže da nije kriva pa lukove (B,G) i (B,L) obojimo plavom bojom. Osoba **G** također kaže da nije kriva pa lukove (G,B) i (G,L) obojimo zelenom bojom. Osoba **L** optužuje osobu **G** pa imamo luk (L,G) crvene boje. Još znamo da samo jedna od tri osobe govori istinu. Dobivamo sljedeći graf



Imamo tri slučaja. Moramo ispitati svaki od njih da otkrijemo tko je krivac.

Prvi slučaj: Policija sumnja da je **G** provalnik.

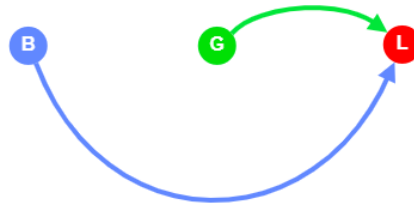
Ako je **G** provalnik, onda **B** i **L** očito nisu. Ovdje **L** govori istinu jer kaže da je **G** kriv. Također, **B** i **G** ne govore istinu, ali onda dolazimo do kontradikcije s pretpostavkom da samo jedna osoba govori istinu jer **B** kaže da nije kriv što bi također bila istina u ovom slučaju. Kako bi pomoću grafa zaključili da je policija u krivu? Vidimo da je ulazni stupanj vrha **G** dva, što bi značilo da dvije osobe go-



vore istinu što je kontradikcija s pretpostavkom da samo jedna osoba govori istinu.

Drugi slučaj: Policija sumnja da je **L** provalnik.

Ako je **L** provalnik, onda **B** i **G** nisu. **G** govori istinu, kaže da on nije provalnik. Slijedi da **B** i **L** lažu. Ponovno ispada da **B** govori istinu što dovodi do kontradikcije. Pogledajmo to grafički:



Treći slučaj: Policija sumnja da je **B** provalnik.

Ako je **B** provalnik onda **G** i **L** nisu. **G** ponovno govori istinu. **B** kaže da on nije kriv iz čega vidimo da laže. **L** optužuje **G** što je laž. Dakle, stvarno samo jedna osoba govori istinu pa zaključujemo da je **B** krivac. Pogledajmo sada malo detaljnije šta se događa s grafom. Kako **G** govori istinu uklanjamo sve lukove čiji kraj je **G**. Također, uklanjamo luk (**G**,**L**). Kako **B** laže, uklanjamo sve lukove s početkom u **B**. Sada imamo sljedeći graf. Kako u ovom grafu imamo samo jedan



luk s krajem **B**, a koji označava sumnjivca, možemo zaključiti da je slučaj riješen.

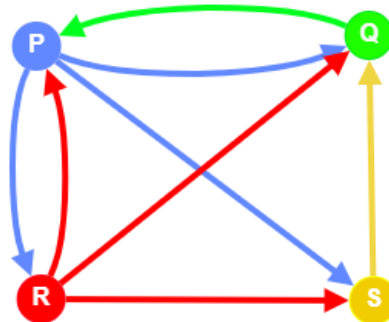
Što bi bilo kada bi imali pretpostavku da dvije osobe govore istinu?

Ako pogledamo ulazne stupnjeve vrhova početnog grafa dobivamo trojku $(1,2,2)$. Vidimo da u tom slučaju **B** nikako nebi mogao biti krivac pošto u slučaju kada je **B** kriv samo jedna osoba govori istinu. Dakle, mogući krivci su **G** i **L**. To je sve što u ovom trenutku možemo zaključiti. Trebalo bi nam još informacija da bi otkrili tko je od njih dvoje provalio u kafić.

Pogledajmo sada malo složeniji primjer. Fokusirat ćemo se na ulazne stupnjeve na prethodno spomenuti način kako bi otkrili tko je kriv.

Primjer 20. Pretpostavimo sada da imamo četiri osumnjičena. U tablici su dane njihove izjave iz kojih modeliramo graf. Svakog sumnjivca označimo jednim vrhom i pridružimo im redom sljedeće boje: plava, zelena, crvena, žuta.

OSUMNJIČENI	IZJAVA
P	Ja nisam kriv.
Q	P je kriv.
R	Ja nisam kriv.
S	Q je kriv.



Dobivamo sljedeći niz ulaznih stupnjeva: $(2,3,1,2)$. Kao što smo ranije vidjeli, taj niz nam određuje broj osoba koje govore istinu. Proći ćemo po slučajevima i u svakom odrediti krivca ukoliko je to moguće.

Prvi slučaj: Jedna osoba govori istinu.

Ako samo jedna osoba govori istinu, onda je jedini mogući krivac osoba **R**. U tom slučaju osoba **P** govori istinu, a svi ostali lažu.

Drugi slučaj: Dvije osobe govore istinu.

Ukoliko znamo da dvije osobe govore istinu, dolazimo do zaključka da su mogući

krivci osobe **P** i **S**. Kao u prethodnom primjeru, bez daljnje istrage i dodatnih dokaza ne možemo odrediti tko je od njih pravi krivac.

Treći slučaj: Tri osobe govore istinu.

Kada bi znali da tri osobe govore istinu, zaključili bi da je krivac osoba **Q**.

Ova metoda uvelike smanjuje problem ukoliko imamo veliki broj vrhova. Time se smanjuje i vrijeme potrebno za određivanje krivca i rješavanje slučaja.

5 Zaključak

Cilj ovog rada bio je razviti kritičko i logičko razmišljanje kroz otkrivanje i istraživanje dokaza. Nakon što smo se podsjetili osnovnih pojmova iz teorije grafova upoznali smo neke od mnogih metoda koje se koriste u forenzičkim istragama. Navedene metode pokazali smo na primjerima. Napomenimo još jednom da su svi primjeri bili pojednostavljeni radi lakšeg razumijevanja, dok je u pravim istragama to znatno teži proces.

Popis slika

1	Königsberg (preuzeto sa [7])	2
2	Königsbergški mostovi (preuzeto sa [8])	2
3	Začeci uzimanja otisaka prstiju (preuzeto sa [9])	13
4	Luk (preuzeto iz [1], str.14)	16
5	Petlja (preuzeto iz [1], str.14)	16
6	Vrtlog (preuzeto iz [1], str.15)	17
7	Karakterizacija grebena (preuzeto iz [1], str.16,17)	18
8	Otisak cipele nađen na mjestu zločina	31
9	Otisci cipela osumnjičenika (preuzeto sa [10, 11, 12])	31
10	Grafovi otisaka cipela	32
11	Usporedba nađenog otiska s otiskom B	33
12	Usporedba nađenog otiska s otiskom G	33

Literatura

- [1] M. A. Karim, V. Vasilevska, Having Fun with Graph Theory and Forensics: CSI Fingerprint Analysis, Whose fingerprint is this one? <https://www.researchgate.net/publication/284284297>
- [2] C. Easttom, Applying Graph Theory to Modeling Investigations, Journal of Mathematics 13 (2017), 47-51
- [3] B. Logeshwary, Implementation of Graph Colouring Technique in Crime Science, International Journal of Recent Technology and Engineering 8 (2020), 4234-4237
- [4] Tony Allen, The Use of Graph Theory in Forensic Footwear Analysis, NIST SURF Colloquium, 2017
- [5] D.Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb, 2001
- [6] D.Veljan, Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
- [7] <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/leonard-eulers-solution-to-the-konigsberg-bridge-problem>, 12.06.2022.
- [8] https://www.researchgate.net/figure/The-Koenigsberg-bridge-problem-a-seven-bridges-of-Koenigsberg-b-graph-representation_fig3_265219734, 12.06.2022.
- [9] https://Fingerprints_taken_by_William_James_Herschel_1859-1860.jpg, 12.06.2022.
- [10] <https://naturalfootgear.com/blogs/educational-articles/rigid-soles>, 12.06.2022.
- [11] <https://dps.mn.gov/divisions/bca/bca-divisions/forensic-science/Pages/trace-shoeprints-tiretracks.aspx>, 12.06.2022.
- [12] https://shoes.lovetoknow.com/Shoe_Soles, 12.06.2022.

Prilozi

Prilog 1. Kod za određivanje produktivnih grafova za računalni program GAP

```
LoadPackage("GRAPE");
LoadPackage("GUAVA");
G:=Group();
## učitavanje matrica A (nađeni otisak), B (otisak B) i C (otisak G)
Read("C:/Users/Daniel/Documents/faks/diplomski/Diplomski rad/
završni/GAP/A.txt");;
Read("C:/Users/Daniel/Documents/faks/diplomski/Diplomski rad/
završni/GAP/B.txt");;
Read("C:/Users/Daniel/Documents/faks/diplomski/Diplomski rad/
završni/GAP/G.txt");;

m1:=Size(A);
grafA:=Graph(G,[1..m1],OnPoints,function(x,y) return A[x][y]=1;end, true);;
m2:=Size(B);
grafB:=Graph(G,[1..m2],OnPoints,function(x,y) return B[x][y]=1;end, true);;
m3:=Size(C);
grafC:=Graph(G,[1..m3],OnPoints,function(x,y) return C[x][y]=1;end, true);;

Va := grafA.representatives;;
Vb := grafB.representatives;;
Vc := grafC.representatives;;

Va_cc := ConnectedComponents(grafA);;
Vb_cc := ConnectedComponents(grafB);;
Vc_cc := ConnectedComponents(grafC);;

Vab := Cartesian(Va,Vb);;
Vac := Cartesian(Va,Vc);;

arr_ab := Arrangements(Vab,2);;
arr_ac := Arrangements(Vac,2);;

M1 := NullMat(Size(Va)*Size(Vb),Size(Va)*Size(Vb));;

passed := [];
for a1 in Va do
  for i in [1..Size(Va_cc)] do
    if a1 in Va_cc[i] then
      for b1 in Difference(Va_cc[i],[a1]) do
```


Prilog 2. Bridovi grafa A

(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (7, 8), (7, 9),
(8, 9), (10, 11), (10, 12), (11, 12), (13, 14), (13, 15), (14, 15),
(16, 17), (16, 18), (17, 18), (19, 20), (19, 21), (20, 21), (22, 23),
(22, 24), (23, 24), (25, 26), (25, 27), (26, 27), (28, 29), (28, 30),
(29, 30), (31, 32), (31, 33), (32, 33), (34, 35), (34, 36), (35, 36),
(37, 38), (37, 42), (38, 39), (39, 40), (40, 41), (41, 42), (43, 44),
(43, 48), (44, 45), (45, 46), (46, 47), (47, 48).

Prilog 3. Bridovi grafa B

(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (7, 8), (7, 9),
(8, 9), (10, 11), (10, 12), (11, 12), (13, 14), (13, 15), (14, 15),
(16, 17), (16, 18), (17, 18), (19, 20), (19, 21), (20, 21), (22, 23),
(22, 24), (23, 24), (25, 26), (25, 27), (26, 27), (28, 29), (28, 30),
(29, 30), (31, 32), (31, 33), (32, 33), (34, 35), (34, 36), (35, 36),
(37, 38), (37, 39), (38, 39), (40, 41), (40, 42), (41, 42), (43, 44),
(43, 45), (44, 45), (46, 47), (46, 48), (47, 48), (49, 50), (49, 51),
(50, 51), (52, 53), (52, 55), (53, 54), (54, 55), (56, 57), (56, 61),
(57, 58), (58, 59), (59, 60), (60, 61), (62, 63), (62, 67), (63, 64),
(64, 65), (65, 66), (66, 67), (68, 69), (68, 73), (69, 70), (70, 71),
(71, 72), (72, 73), (74, 75), (74, 79), (75, 76), (76, 77), (77, 78),
(78, 79), (80, 81), (80, 85), (81, 82), (82, 83), (83, 84), (84, 85).

Prilog 4. Bridovi grafa C

(1, 2), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (6, 7), (6, 10), (7, 8),
(8, 9), (9, 10), (11, 12), (11, 13), (12, 13), (14, 15), (14, 17),
(15, 16), (16, 17), (18, 19), (18, 20), (19, 20), (21, 22), (21, 24),
(22, 23), (23, 24), (25, 26), (25, 28), (26, 27), (27, 28), (29, 30),
(29, 33), (30, 31), (31, 32), (32, 33), (34, 35), (34, 38), (35, 36),
(36, 37), (37, 38), (39, 40), (39, 42), (40, 41), (41, 42), (43, 44),
(43, 46), (44, 45), (45, 46), (47, 48), (47, 49), (48, 49), (50, 51),
(50, 54), (51, 52), (52, 53), (53, 54), (55, 56), (55, 59), (56, 57),
(57, 58), (58, 59), (60, 61), (60, 64), (61, 62), (62, 63), (63, 64),
(65, 66), (65, 69), (66, 67), (67, 68), (68, 69).