Leonhard Euler

Keser, Marija

Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku

Diplomski sveučilišni studij Matematika - nastavnički smjer

MARIJA KESER

LEONHARD EULER

Diplomski rad

Rijeka, lipanj, 2022.

Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku

Diplomski sveučilišni studij Matematika - nastavnički smjer

MARIJA KESER

LEONHARD EULER

Mentor: dr.sc. Nina Mostarac

Diplomski rad

Rijeka, lipanj, 2022.

SADRŽAJ

SAŽETAK

Poznati francuski matematičar Pierre – Simon de Laplace jednom je rekao:

„Read Euler, read Euler, he is the master of us all.“

Tema ovog diplomskog rada je Leonhard Euler. U prvom poglavlju, napravit ćemo kratak uvod u temu. Drugo poglavlje bavi se životom Leonharda Eulera. U trećem poglavlju, objasnit ćemo Eulerove doprinose matematici u područjima teorije brojeva i geometrije. Četvrto poglavlje opisuje ostale doprinose Eulera matematici, iz kojih izdvajamo područje logaritama, beskonačnih nizova, analitičke teorije brojeva, kompleksnih brojeva, algebre i kombinatorike. U petom poglavlju, napravit ćemo kratak zaključak o temi.

Ključne riječi: Leonhard, Euler, matematika

1. UVOD

Leonhard Euler bio je jedan od najvećih matematičara svih vremena. Napisao je preko devetsto radova u mnogim područjima znanosti. Njegovi radovi igrali su veliku ulogu u razvoju matematike kao znanosti.

Euler je rođen u Baselu u Švicarskoj 1707. godine. U tom periodu, Basel je bio jedno od glavnih središta matematike u Europi. Sa sedam godina, Euler je krenuo u školu. Uz školu, njegov otac je zaposlio privatnog učitelja matematike. Sa trinaest godina, Euler je počeo pohađati predavanja koja su se održavala na lokalnom sveučilištu. 1723. godine magistrirao je disertacijom u kojoj je usporedio sustave prirodne filozofije Newtona i Descartesa. Prema očevoj želji, nastavio je sa školovanjem i upisao Teološki fakultet. U svoje slobodno vrijeme Euler se bavio učenjem matematike. Napisao je dva članka o obrnutoj putanji uz pomoć učitelja Daniela Bernoullija. 1727. godine prijavio se na mjesto profesora fizike na Sveučilištu u Baselu, ali je bio odbijen.

U to vrijeme u Europi se pojavio novi znanstveni centar – Petersburška akademija znanosti. Kako je Rusija imala vrlo malen broj vlastitih znanstvenika, mnogi strani znanstvenici su pozvani da rade na akademiji, među kojima je bio i Euler. 1727. godine doselio se u Petersburg. Njegov talent brzo je prepoznat. Euler je radio u mnogim područjima, kao što su proizvodnja ljudskog glasa, teorija zvuka i glazbe, mehanika vida te teleskopska i mikroskopska percepcija. Rad iz područja teleskopske i mikroskopske percepcije objavljen je 1779. godine i omogućio je izgradnju teleskopa i mikroskopa.

Također, radio je u području efekata boja. Euler se nadao da će u tom području moći iskoristiti promatranje spone Venere i Mjeseca koja se trebala dogoditi na 8. travnja 1729. godine. Međutim, nije mogao uključiti takvo promatranje u istraživanje i bio je prisiljen čekati pomrčinu sunca koja se trebala dogoditi 1748. godine. Pomrčinu sunca gledao je u Berlinu, gdje se 1741. godine i preselio. Euler je radio na Berlinskoj akademiji znanosti i bio je postavljen na mjesto voditelja Berlinskog opservatorija. Također, bio je tutor nećakinjama pruskog kralja Fridrika II.

Znanstvenici su promatrali pomrčinu sunca i došli su do vjerovanja da mjesec nije sadržavao dovoljno atmosfere da bi pružio učinke difrakcije ili refrakcije. Euler je bio jedini znanstvenik koji je uspio otkriti mjesečevu atmosferu. 1761. godine kada je Venera prošla pored Sunca, otkrio je atmosferu Venere.

Eulerova djela nisu bila posvećena samo prirodnim znanostima. Bio je uključen u filozofske rasprave i izjasnio se kao zagovornik slobode volje. Takvim stavom pridobio je par prijatelja u Njemačkoj. Euler je izrazio svoje stavove u knjizi koja je prvi put objavljena u Rusiji, gdje se vratio 1766. godine. U Rusiji je našao mnoge ljude koji su se slagali s njim, među kojima su bili protivnici stavova Leibnitza i Voltairea.

1763. godine Katarina II. je došla na vlast. Provela je reforme u Akademiji znanosti kako bi je učinila uspješnijom institucijom. Kada se Euler vratio u Petersburg sa svoja dva starija sina, postavljen je na čelno mjesto Akademije znanosti.

U vrijeme povratka u Petersburg, preispitao je svoje stavove vezane za atmosferu planeta. Rad Lomonosova i Bernoullija doveo ga je do zaključka da atmosfera na Zemlji i drugim planetima mora biti znatno transparentnija, nego što je mislio. Euler je imao glavnu ulogu u promatranju kretanja Venere i Sunca, iako je tada bio gotovo slijep. Već je izgubio jedno oko tijekom eksperimenta s difrakcijom svjetlosti 1738. godine. Zbog bolesti oka i neuspješne operacije 1771. godine potpuno je izgubio vid.

Potpuni gubitak vida nije zaustavio Eulerovo stvaralačko djelovanje. Sve do njegove smrti 1783. godine, na Akademiji je objavljeno preko petsto njegovih znanstvenih radova. Akademija ih je nastavila objavljivati još petsto godina nakon njegove smrti. I dan danas, Eulerove teorije se proučavaju i podučavaju. Raznolikost djela ga čine jednim od osnivača moderne znanosti.

2. LEONHARD EULER

U ovome poglavlju, opisat ćemo podrijetlo, mladost i obrazovanje Leonharda Eulera.

2.1. PODRIJETLO

Leonhard Euler rođen je na petak, datuma 15. travnja 1707. u Baselu, u Švicarskoj. Dok je većina protestantske i pravoslavne Europe slijedila julijanski kalendar ili stari stil, grad Basel usvojio je trenutni gregorijanski stil 1701. godine. Eulerova rodna kuća vjerojatno se nalazila u susjedstvu oko crkve svetog Martina u blizini centra grada, u kojem se nalazila tržnica i brod koji je pristajao na rijeku Rajnu. Bio je prvo dijete Paula Eulera, evanđeosko – reformiranog svećenika, i Margarethe née Brucker. Dok se reformirani općenito odnosi na protestantizam kalvinista i luterana, Baselova raznolikost bio je pijetizam koji je naglašavao ljubav i unutarnji život. Leonhardova majka Margaretha, kći bolničkog ministra, bila je iz ugledne loze umjetnika i humanističkih učenjaka. Njihov sin kršten je dva dana nakon rođenja u istoj crkvi svetog Martina, kao što je i njegov otac Paul.

Obitelj Euler potječe iz grada Lindaua na Bodenskom jezeru u njemačkom švicarskom kantonu. Au je umanjenica od Äule, što se odnosi na malo vlažno polje ili livadu. Au se pojavljuje u imenima mnogih malih njemačkih gradova, kao što su Dessau i Nassau. Vlasnik Äule bio je Äuler. Eulerovi su se različito zvali, time i Euler – Schoelpin, što znači da su škiljavi. Škiljavost znači osjetljivost na očne bolesti. Prvi pisani zapis o Eulerima pojavio se 1287. godine, dok je dokumentirana kontinuirana linija započela tek 1458. godine. Lindau, iako na drugoj strani kantona od Basela, imao je mnoge bliske ekonomske, političke i vjerske veze s gradom. Hans Georg Euler, Leonhardov prapradjed i unuk patrijarha njemačkog govornog područja Hansa Eulera, preselio se u Basel 1594. godine. Hans Georg dobio je državljanstvo u Baselu, postao je češljar, dobio je petnaestero djece u dva braka te doživio čak devedeset godina. Očito su sljedeće tri generacije Eulerovih bili zanatlije, većinom češljari ili trgovci koji su pripadali ugostiteljskim cehovima. Izgradili su skromnu financijsku bazu obitelji. U četvrtom naraštaju, četiri od četrnaest muških rođaka uspjeli su postati evanđeosko – reformirani službenici u Baselu. Među njima je bio Paul Euler, koji je 1685. godine s petnaest godina završio studij na Sveučilištu u Baselu. Dok je bio na Sveučilištu, Paul je boravio u domu Jacoba Bernoullija, pod čijim je vodstvom napisao svoj završni rad o omjerima i proporcijama. Dijelio je sobe s mladim Johannom I. Bernoullijem. Paul Euler završio je teološki studij 1693. godine.

2.2. MLADOST

Leonhard Euler svoju ranu mladost nije proveo u Baselu. U lipnju 1708. godine njegov otac bio je imenovan za župnika u crkvi svetog Martina u obližnjem Riehen Bettingenu. U studenom iste godine postavljen je i obitelj se preselila u Riehen, koji se nalazio oko pet kilometara sjeveroistočno od Basela. Zajedno s Bettingenom imali su 1400 stanovnika. Podržana submediteranskom klimom, ova mala sela bila su poznata po svojoj bogatoj vegetaciji, a posebice po bijelim cvjetovima trešnje u kasno proljeće te zlatnim i crvenim listovima na grožđu u vinogradima. Eulerovi su živjeli u dvosobnom župnom domu, sve dok nije proširen 1712. godine. Jedna soba je bila radna, a druga soba je bila stambena. Imao je dvije mlađe sestre – Annu Marie koja je rođena 1708. godine i Marie Magdalenu koja je rođena 1711. godine. Njegova baka po ocu živjela je s obitelji do svoje smrti 1712. godine. Johann Heinrich bio je četvrto dijete Eulerovih, koji je rođen 1719. godine, nakon čijeg rođenja njegov brat odlazi u studij u gimnaziju u Baselu. Leonhard Euler bio je talentirano, veselo i društveno dijete. Jednostavnost seoskog života zajedno s modelom njegovih roditelja odražavali su se u otvorenoj naravi i raspoloženju odraslog Leonharda Eulera.

Leonhardovi roditelji bili su njegovi prvi učitelji. Upoznata s humanističkom tradicijom, njegova majka Margaretha upoznala ga je s grčkim i rimskim klasicima. Osnovna pouka koju je ponudio njegov otac Paul uključivala je matematiku, zamišljenu kao predmet koji leži u osnovi svih prirodnih znanja. Paul nije započeo s tekstom geometrije, nego s djelom Coss Christoffa Rudolffa, koje je činila algebra. Paul je vjerojatno upotrijebio predtisak iz 1615. godine koji je bio prvo izdanje koje je objavljeno 1553. godine. Nakon što je objasnio zapis vrijednosti i četiri osnovne aritmetičke operacije, ispitivao je jednadžbe prvog, drugog i trećeg stupnja. Eulerova nedovršena autobiografija bilježi da je marljivo proučavao tekst nekoliko godina i napredovao u rješavanju čak 434 problema, od kojih su gotovo svi bili jednadžbe prvog ili drugog stupnja. Činio je to prije nego što se preselio kod svoje bake s majčine strane u Basel i upisao gradsku gimnaziju, pretpostavlja se s osam godina. Samo iznimno dijete ove dobi moglo je unaprijed napredovati kroz zaista težak Coss.

2.3. OBRAZOVANJE

Baselska gimnazija, odnosno latinska škola, bila je u vrlo jadnom stanju. Učenici su učili latinski jezik i izbore iz antičkih klasika. Grčki jezik bio je neobavezan. Učitelji nisu štedjeli štapove pa su izbile tučnjave šakama po učionicama. Kao i većina roditelja, Paul je unajmio učitelja. U njihovom slučaju, to je bio mladi teolog po imenu Johann Burckhardt. Burckhardt je stao na stranu Johanna I. Bernoullija u sporovima s britanskim matematičarima koji su se bavili geometrijom i prirodnim filozofima. Podučavao je Leonharda humanističke znanosti i matematiku, predmet koji je ranije izbačen iz nastavnog plana i programa glasanjem građana.

1720. godine Leonhard je na Sveučilištu u Baselu upisao Filozofski fakultet, odnosno Školu umjetnosti i znanosti. Imao je trinaest godina, u to vrijeme otprilike normalne dobi za upis na Sveučilište. Sveučilište je bilo u padu. Njegov upis pao je s više od tisuću studenata stoljeće prije na nešto više od stotinu studenata. Sveučilište je imalo samo devetnaest profesora, koji su bili nedovoljno plaćeni i većinom osrednjeg znanja. Iznimka je bio Johann I. Bernoulli. Filozofski fakultet omogućio je općeobrazovnu pripremu za izbor specijalnosti za višu diplomu. Kroz marljivost i snažno pamćanje, Leonhard je svladao sve svoje predmete. S četrnaest godina Leonhard je održao govor pod naslovom Declamatio: De Arithmetica et Geometria, u kojem je pohvalio superiornost geometrije. Nakon održavanja govora na latinskom jeziku, 1722. godine dobio je svoju diplomu prvostupnika. Na jesen 1723. godine završio je ispite za magistra umjetnosti. U lipnju 1724. godine sa sedamnaest godina Leonhard je službeno zaprimio diplomu za održavanje javnog predavanja na latinskom jeziku o svom magistarskom radu, odnosno usporedbi filozofija Renéa Descartesa i Isaaca Newtona.

U listopadu 1723. godine Leonhardov otac zatražio ga je da se prijavi na teologiju kako bi se pripremio da bude seoski pastor. Morao je uglavnom učiti grčki i hebrejski jezik, protestantsku teologiju i klasične humanističke znanosti. Otprilike u to vrijeme počeo je pokazivati svoje fotografsko pamćenje recitirajući dugačke odlomke iz Vergilijeve Eneide napamet, ako ne i cijeli tekst. Mogao je citirati prvi i posljednji redak na svakoj stranici svog primjerka knjige. Do svoje sedamdesete godine mogao se potpuno sjećati Eneide. Nastavni plan i program teologije dopuštao je studiranje matematike. Već se počeo susretati s Bernoullijem u podučavanju. Provodeći većinu svog vremena u matematici, malo je napredovao na drugim predmetima. Na Sveučilištu, sprijateljio se s Johannom II. Bernoullijem, koji je vjerojatno pomogao njegovom zahtjevu za privatnim satima. Stariji Bernoulli ponudio ih je drugim studentima, ali je odbio to učiniti za Leonharda. Umjesto toga, savjetovao je mladom znanstveniku da marljivo čita neke teške knjige o matematici, astronomiji i fizici dok nije naišao na prepreke. Njih dvojica su se trebali sastati u subotu poslijepodne, kada bi Bernoulli trebao pokazati Euleru kako prevladati prepreke i izbjeći neobećavajuće puteve do rješenja. Leonhard je svoju punu energiju posvetio smanjenju svojih pitanja na vrlo malen broj. Kada mu je Bernoulli pokazao da pobijedi jednu poteškoću, bio je oduševljen što je deset drugih nestalo. Bernoulli je otkrio genijalnost svog učenika. Leonhardova autobiografija izjavljuje da je čitanje remek djela s vještim učiteljem najbolja metoda za uspjeh u učenju matematičkih predmeta. Barem je bilo tako za talentiranog učenika. Vjerojatno je 1725. godine stariji Bernoulli, sada već gotovo šezdesetogodišnji čovjek, otputovao u Riehen kako bi uvjerio svog bivšeg cimera Paula da dopusti sinu da prijeđe na matematiku.

1725. godine Leonhard je tražio zaposlenje. Proizvodeći više diplomanata nego što je potrebno za vlastitu zemlju, Švicarci su ih morali izvoziti. Iste godine prijatelji Daniel i Nikola II. Bernoulli prihvatili su položaje u novoj Petrogradskoj akademiji znanosti. Nakon neočekivane smrti Nikole II., Leonhard je pozvan na jesen 1726. godine da se pridruži Akademiji u Medici s plaćom od dvjesto rubalja, koju je smatrao premalenom. Ipak je on pristao doći čim bude bolje vrijeme. U međuvremenu se upisao na tečajeve anatomije i fiziologije. Kad je profesor fizike u Baselu umro, stariji Bernoulli preporučio je Leonhardu da se prijavi za popunjavanje upražnjenog mjesta. Primjerak eseja koji se morao predati bio je rad na šesnaest stranica akustike, pod nazivom De sono, koju povjesničari opisuju kao njegovu doktorsku disertaciju. Sveučilište je odabralo profesora ždrijebom i mladi Leonhard nije bio na popisu kao finalist. Datuma 5. travnja 1727. godine, odnosno tri dana nakon što je Stähelin postao profesor fizike, Leonhard je zauvijek napustio Basel. Već je stjecao skromnu reputaciju. Njegov esej o jarbolu brodova dobio je na natječaju za godišnju nagradu Pariške akademije.

2.4. EULEROVA OPERA OMNIA

Najznačajniji izvor u kojemu možemo naći kolekciju Eulerovih djela i radova je Opera Omnia. Švicarska Akademija znanosti je 1909. odlučila objaviti kolekciju njegovih djela na originalnim jezicima te je 1911. započela s publikacijom Opere Omnie, koja se protegnula kroz ostatak 20. stoljeća. Podijeljena je u četiri velike serije. Serija I bavi se čistom matematikom, Serija II mehanikom, inženjerstvom i astronomijom. Serija III fizikom i raznim, a Serija IV njegovom korespondencijom, odnosno prepiskom njegovog dopisivanja. Dodatna znanstvena korespondencija objavljuje se online. Zaključno s tim, Opera Omnia trebala bi ukupno sadržavati oko 84 sveska s oko 35000 stranica Eulerovog iznimnog doprinosa znanosti.

3. DOPRINOSI MATEMATICI U TEORIJI BROJEVA I GEOMETRIJI

Ovo poglavlje će pojasniti Eulerov rad u područjima teorije brojeva i geometrije.

3.1. TEORIJA BROJEVA

Od svih grana matematika, nijedna nije toliko prirodna i teška kao teorija brojeva. Cilj teorije brojeva je razumjeti pozitivne cijele brojeve, koji predstavljaju jedan od najosnovnijih matematičkih entiteta.

Cijeli brojevi izgledaju vrlo jednostavno, a zapravo su izvor nekih najdubljih i najzahtjevnijih problema u matematici. Predstavljaju dostojan izazov za najveće matematičare.

Savršeni brojevi bili su zanimljivi još od klasičnog vremena. Euklid je uključio veliku teoriju o savršenim brojevima u svoje remek djelo Elementi. Nakon dvadeset stoljeća, Leonhard Euler osvrnuo se na temu savršenih brojeva i nastavio razrađivati teoriju koju je Euklid započeo. Međutim, ni Euler nije uspio odgovoriti na sva važna pitanja u teoriji brojeva. Potraga za savršenim brojevima možda je jedan od najstarijih nedovršenih problema matematike.

Euklidovi Elementi prepoznati su i od strane ostalih znanstvenika kao najvažniji geometrijski tekst stare Grčke. Euklid je teoriji brojeva posvetio čak tri od njegovih trinaest knjiga.

To odražava starogrčku tradiciju misli koja seže do Pitagorejaca, koji su bili filozofi u šestom stoljeću prije Krista. Za njih su cijeli brojevi bili ne samo matematičke apstrakcije, već i predmeti poštovanja i promišljanja koji su utkani u samo tkivo prirode. Pitagorejci su pripisivali cijelim brojevima veliku važnost koja ima veze s misticizmom.

Proučavajući matematiku unutar takve tradicije, Euklid je započeo sedmu knjigu Elemenata s dvadeset i dvije definicije. Neke su i danas lako prepoznatljive. Primjerice, Euklid je definirao prost broj kao broj koji se dijeli samo jedinicom. Nadalje, produkt parnog i neparnog broja definirao je kao broj koji mjeri paran broj u odnosu na neparan broj. Slijedi definicija s popisa koja je važna za istraživanje savršenih brojeva.

Definicija 3.1.1. Savršen broj je broj koji je jednak svojim dijelovima.

Svaki moderni čitatelj može biti donekle zbunjen navedenom terminologijom. Stvar postaje jasnija ako umjesto dijela uzmemo izraz djelitelj te umjesto jednak uzmemo izraz jednak zbroju. Sljedeća definicija daje modernu definiciju savršenih brojeva.

Definicija 3.1.2. Za cijeli broj kažemo da je savršen ako je jednak zbroju svojih pravih djelitelja.

Primjerice, broj 6 je savršen, jer su pravi djelitelji broja 6 brojevi 1, 2 i 3, čiji zbroj daje broj 6. Također, broj 28 je savršen. Pravi djelitelji broja 28 su brojevi 1, 2, 4, 7 i 14. Ako zbrojimo prave djelitelje broja 28, onda dobijemo ponovno broj 28. Broj 496 je savršen, jer su pravi djelitelji broja 496 brojevi 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 i 248, čiji zbroj daje broj 496. Navest ćemo još jedan savršen broj. Broj 8128 je savršen. Pravi djelitelji broja 8128 su brojevi 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032 i 4064. Ako zbrojimo prave djelitelje broja 8128, onda dobijemo ponovno broj 8128. Navedena četiri broja bili su jedini savršeni brojevi koji su bili poznati u staroj Grčkoj.

Nicomachus je bio grčki matematičar iz prvog stoljeća, koji je vrlo cijenio savršene brojeve. Primijetio je da su savršeni brojevi izvanredni i rijetki. I ostali matematičari su počeli primjećivati savršene brojeve.

Euklid je zaobišao sva nematematička stajališta. Definirao je savršene brojeve na početku sedme knjige i do kraja devete knjige, odnosno konačne teorijske tvrdnje o brojevima, nije ih spomenuo. Nesumnjivo, Euklid je sačuvao najbolje za kraj. Tvrdnja koju je dokazao predstavljala je odličan recept za savršene brojeve. Teorem u devetoj knjizi naveo je na sljedeći način:

Teorem 3.1.3. Ako se kontinuirano navede onoliko brojeva koliko želimo počevši od jedinice, u dvostrukom omjeru, dok zbroj brojeva ne postane prost, te ako suma pomnožena u zadnji broj čini broj, onda je produkt savršen broj.

Modernom čitatelju navedena propozicija je opet neshvatljiva.

Prvi dio o početku s jedinicom i nastavku u dvostrukom omjeru je Euklidov način opisivanja niza $1+2+4+8+\cdots$. Pretpostavio je da u nastavku ovog procesa, zbroj mora biti prost. Drugim riječima, pretpostavio je da je suma

$$1+2+4+8+\cdots+2^{k-1}$$

prost broj. I zadnje, množenje u posljednji je zapravo množenje

$$2^{k-1}(1+2+4+8+\cdots+2^{k-1}).$$

Euklid je zaključio da je dobiveni produkt savršen broj.

Teorem 3.1.4. Ako je broj 2^k-1 prost i vrijedi

$$N=2^{k-1}(2^k-1),$$

onda je broj N savršen.

Dokaz. Neka je broj $p=2^k-1$ prost. Jedinstvenom faktorizacijom, pravi djelitelji broja

$$N=2^{k-1}(2^k-1)=2^{k-1}p$$

mogu kao proste faktore sadržavati samo brojeve 2 i p. To znači da su svi pravi djelitelji broja N izlistani i dodani u zbroj

$$1+2+\cdots+2^{k-1}+p+2p+\cdots+2^{k-2}p=$$
$$=(1+2+\cdots+2^{k-1})+p(1+2+\cdots+2^{k-2})=$$
$$=(2^k-1)+p(2^{k-1}-1)=p+p2^{k-1}-p=p2^{k-1}=N.$$

Kako je Euklidov broj N jednak sumi njegovih pravih djelitelja, tada je broj N savršen. ■

Euklid je ovim teoremom uspostavio dovoljan uvjet da broj bude savršen. Primjerice, ako vrijedi $k=2$, onda je broj $2^2-1=3$ prost, iz čega slijedi

$$N=2(2^2-1)=6.$$

Ako vrijedi $k=3$, onda je broj $2^3-1=7$ prost, iz čega slijedi da je broj

$$N=2^2(2^3-1)=28$$

savršen. Ako vrijedi $k=13$, onda je broj $2^{13}-1=8191$ prost. Manje očiti primjer je broj $N=2^{12}(2^{13}-1)=33550336.$

Ovo je dio teorije brojeva koji je nastao prije 2300 godina. Ne samo da je Euklid uspio napraviti valjan dokaz, nego je i otkrio svojstva savršenih brojeva.

Naravno, Euklidov teorem zamijenio je pronalaženje savršenih brojeva pronalaženjem prostih brojeva oblika $p = 2^k - 1$. Nažalost, novo pitanje je sve samo ne lako. Takvi prosti brojevi igrali su veliku ulogu u teoriji brojeva. Danas, navedeni tip brojeva zovemo Mersenneovi prosti brojevi.

Ako je broj k složen, onda je broj $2^k - 1$ složen. Ako vrijedi $k = ab$, onda vrijedi

$$2^k - 1 = (2^a)^b - 1 =$$
$$= (2^a - 1)((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \cdots + 2^a + 1).$$

Ako vrijedi

$$k = 6 = 2 \cdot 3,$$

onda vrijedi

$$2^6 - 1 = (2^2)^3 - 1 = (2^2 - 1)((2^2)^2 + 2^2 + 1),$$

što potvrđuje trivijalnu činjenicu da je broj 63 djeljiv s brojem 3 i da broj 63 nije prost.

Ovo zapažanje omogućuje odbacivanje velikih brojeva kao Mersenneovih brojeva, kao što je broj $2^{75} - 1$, jer je broj 75 složen. Ako je broj k prost, onda broj $2^k - 1$ ne mora biti prost. Uzmimo za primjer broj

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89.$$

Potraga za Mersenneovim prostim brojevima predstavlja značajan izazov. 1772. godine Euler je napisao pismo Bernoulliju u kojem tvrdi da je broj $2^{31} - 1$ prost. Broj $2^{31} - 1$ je osmi najveći Mersenneov prost broj i zahvaljujući Euklidovom teoremu, generira savršen broj

$$2^{30}(2^{31} - 1) = 2305843008139952128.$$

Početkom devetnaestog stoljeća navedeni primjer je opisan kao najveći savršen broj koji će biti ikada otkriven.

Unatoč takvom pesimizmu, potraga se nastavila. U današnje vrijeme, matematičari koriste računala za pronalaženje novog najvećeg prostog broja Mersenneovog tipa. Primjerice, 1998. godine objavljeno je da je $2^{3021377} - 1$ Mersenneov prost broj.

Ovo otkriće u kombinaciji s Euklidovim antičkim rezultatom, utvrđuje kao posljedicu da je broj $2^{3021376}(2^{3021377}-1)$ savršen. Navedeni broj ima nešto više od 1.8 milijuna znamenki.

Euklid je dao dovoljan uvjet da broj bude savršen. To jest, dokazao je da ako broj ima određeni oblik, onda je taj broj savršen. Nigdje nije utvrđeno da je navedeni uvjet i nužan uvjet, odnosno nije navedena obrnuta implikacija.

Nužnost i dovoljnost su dvije vrlo različite stvari. Razlika nužnog i dovoljnog uvjeta dovela je do nesretne pogreške mnogo stoljeća poslije. 1509. godine Bocillus je dao dokaz da je svaki savršen broj paran. Njegov argument započeo je s pretpostavkom savršenog broja. Citirajući Euklida, Bovillus je tvrdio da broj mora biti oblika $2^{k-1}(2^k-1)$, gdje je broj 2^k-1 prost. Ali, takav broj ima faktor 2 ispred, pa je očito i taj broj paran.

Navedeni dokaz je kratak, jednostavan i pogrešan. Pretpostavljajući da savršen broj mora imati euklidsku strukturu, Bovillus je zamijenio dovoljnost s nužnošću.

Dok se raspravljaju teške pogreške, navest ćemo i matematičara Unicornusa, koji je 1598. godine „poboljšao“ Euklidov teorem tvrdeći da ako je k neparan broj, onda je broj

$$N = 2^{k-1}(2^k-1)$$

savršen. To bi značilo da postoji beskonačno mnogo savršenih brojeva, jer sigurno postoji beskonačno mnogo neparnih brojeva k. Međutim, ako vrijedi $k=9$, onda vrijedi

$$N = 2^8(2^9-1) = 130816,$$

čija je suma pravih djelitelja jednaka broju 171 696. Naravno, ovaj primjer ne dokazuje kontradikciju u Euklidovom teoremu, jer vrijedi

$$2^9-1 = 511 = 7 \cdot 73,$$

i taj broj nije prost.

Na početku sedamnaestog stoljeća, Euklidov teorem utjelovio je sve znanje o savršenim brojevima. Potpuna karakterizacija potrebnih i dovoljnih uvjeta ostala je neotkrivena. U pismu Mersenneu 1638. godine Descartes navodi da je svaki parni savršeni broj Euklidov. To znači da svaki parni savršeni broj ima oblik

$$2^{k-1}(2^k-1),$$

gdje vrijedi $k > 1$ i broj $2^k - 1$ je prost. Nažalost, ne postoji zapis o njegovom razmišljanju. Odgovor na pitanje je li Descartes osmislio dokaz koji je naknadno izgubljen ili je samo nagađao vjerojatno nikada neće biti poznat.

Descartova pretpostavka bila je intrigantna i točna. Dokaz pretpostavke će kasnije drugi dokazati.

Kao mladić, Euler je istraživao diferencijalni i integralni račun, tada novo i uzbudljivo područje. Matematičari su bili oduševljeni računom i njegovom širokom primjenom. Usporedno tome, teorija brojeva se jedva priznavala kao ozbiljna matematička grana.

Smatra se da je Eulerov entuzijazam za teoriju brojeva potaknuo Christian Goldbach. Goldbach je bio na Akademiji u Sankt Petersburgu. Dolaskom Eulera 1727. godine, Goldbach je upoznao i počeo cijeniti svog mladog kolegu. Nakon toga, Goldbach odlazi u Moskvu, ali ostaje u kontaktu s Eulerom. U jednom pismu koje je napisano 1. prosinca 1729. godine, Goldbach se pozvao na rad Pierrea de Fermata pitajući Eulera:

„Je li Vam poznato Fermatovo opažanje da su svi brojevi oblika $2^{2^n} + 1$ *prosti brojevi? Rekao je da se takvo opažanje ne može dokazati i nitko nije uspio dokazati to opažanje.“.*

Isprva, Euler se činio ravnodušnim. Međutim, sljedeće pismo potaknulo je Eulera na razmišljanje. Euler je otkrio da je Fermat bio u krivu, jer je broj

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

djeljiv s brojem 641.

Ovo je bio tek početak. Počeo je istraživati Fermatov rad. Tijekom svoje karijere, Euler se bavio teoretskim pitanjima od manjeg, ali i većeg značaja. Među tim pitanjima, jedan od izazova bio je pronaći četiri različita cijela broja za koje je zbroj bilo koja dva od četiri broja savršen kvadrat. Brojevi 1850, 38114, 45986 i 65570 bili su Eulerovo rješenje za navedeni problem.

Četiri sveska Eulerove Opere Omnie posvećeni su teoriji brojeva. Mnogi problemi koji su navedeni u svescima, postali su svjetski poznati. Djelom Opera Omnia uspostavljeni su temelji matematičke grane teorije brojeva.

Za Eulera pitanje savršenih brojeva popunilo je samo jednu stranicu članka De numeris amicabilibus, u kojem je razmatrao takozvane prijateljske brojeve. Prijateljski brojevi m i n su brojevi za koje vrijedi da je zbroj pravih djelitelja broja m broj n i da je zbroj pravih djelitelja broja n broj m. Prijateljski brojevi su prilično rijetki. Primjerice, najmanji par prijateljskih brojeva je par $(220,284)$. Prije Eulera, pronađeno je samo tri para prijateljskih brojeva. Ali, sam Euler pronašao je čak pedeset i devet parova prijateljskih brojeva.

Definicija 3.1.5. Vrijednost $\sigma(n)$ je zbroj svih djelitelja broja n.

Primijetimo da, gdje god je Euklid zbrojio samo prave djelitelja broja n, tamo je Euler zbrojio sve djelitelje broja n. Naizgled beznačajna promjena otvorila je vrata nekim ključnim zapažanjima.

Primjerice, imamo

$$\sigma(5) = 1 + 5 = 6$$

i

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

Jasno je da je zbroj svih pravih djelitelja broja n broj $\sigma(n) - n$. Zaključujemo da su brojevi m i n prijateljski brojevi ako i samo ako vrijedi

$$\sigma(m) = m + n = \sigma(n).$$

Navodimo sljedeće karakterizacije prostih i savršenih brojeva.

1. Broj p je prost ako i samo vrijedi
$$\sigma(p) = p + 1.$$
2. Broj N je savršen ako i samo ako vrijedi
$$\sigma(N) = N + N = 2N.$$

Navodimo važna svojstva prostih i savršenih brojeva.

3. Ako je p prost broj, onda vrijedi
$$\sigma(p^r) = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}.$$

Svojstvo vrijedi jer su jedini djelitelji prostog broja p na r – tu potenciju p^r prosti brojevi p na s – tu potenciju p^s za koje vrijedi

$$0 \leq s \leq r.$$

Iz toga slijedi

$$\sigma(p^r) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^r = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}.$$

Posebno, za $N = 2^r$ vrijedi

$$\sigma(N) = \sigma(2^r) = \frac{2^{r+1} - 1}{2 - 1} = 2^{r+1} - 1 = 2(2^r) - 1 = 2N - 1.$$

Potencija broja 2 nikad nije savršena, jer za takve potencije broju $\sigma(N)$ nedostaje jedan do broja $2N$ koji je potreban za savršenost.

4. Ako su brojevi p i q različiti i prosti, onda vrijedi

$$\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q).$$

Jedini djelitelji broja pq su brojevi 1, p, q i pq. Vrijedi

$$\sigma(pq) = 1 + p + q + pq = (1 + p) + q(1 + p) = (1 + p)(1 + q) = \sigma(p)\sigma(q).$$

Kao primjer, uzmimo

$$\sigma(21) = 1 + 3 + 7 + 21 = 32 = 4 \cdot 8 = \sigma(3)\sigma(7).$$

5. Ako su brojevi a i b relativno prosti, onda vrijedi

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b).$$

Zadnje svojstvo je proširenje svojstva koje mu prethodi. Govori o tome da nije bitno da brojevi a i b budu prosti, već međusobno relativno prosti. Ako su brojevi a i b relativno prosti, to znači da je broj 1 najveći zajednički djelitelj brojeva a i b. Tada primjena funkcije σ na produkt brojeva a i b daje umnožak primjene funkcije na broj a i primjene funkcije na broj b. Navedeno svojstvo zovemo multiplikativnost. Dajemo skicu dokaza za poseban slučaj svojstva multiplikativnosti. Neka su $a = p^2$ i $b = qr$ brojevi takvi da su brojevi p, q i r različiti i prosti, zbog čega su a i b relativno prosti. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\sigma(ab) = \sigma(p^2qr) &= 1 + p + p^2 + q + pq + p^2q + r + pr + p^2r + qr + pqr + p^2qr \\ &= (1 + p + p^2) + q(1 + p + p^2) + r(1 + p + p^2) + qr(1 + p + p^2) \\ &= (1 + p + p^2)(1 + q + r + qr) = (1 + p + p^2)(1 + q)(1 + r) = \sigma(p^2)\sigma(q)\sigma(r) \\ &= \sigma(p^2)\sigma(qr) = \sigma(a)\sigma(b).\end{aligned}$$

Na sličan način, utvrđen je opći teorem. Korištenjem teorema, moguće je brzo odrediti zbrojeve djelitelja bilo kojeg broja čiju faktorizaciju na proste faktore znamo. Primjerice, bez da pišemo sve djelitelje broja 4800, znamo da vrijedi

$$\sigma(4800) = \sigma\left(2^6 \cdot 3 \cdot 5^2\right) = \sigma\left(2^6\right) \cdot \sigma(3) \cdot \sigma\left(5^2\right).$$

Znajući ova svojstva i karakterizacije, Euler se vratio na Euklidov teorem o savršenim brojevima. Pokazao je da je Euklidov dovoljni uvjet, uz ograničenje na parne savršene brojeve, ujedno i nužan uvjet.

Teorem 3.1.6. Ako je N paran savršen broj, onda vrijedi

$$N = 2^{k-1}(2^k - 1)$$

gdje je $2^k - 1$ prost broj.

Dokaz. Pretpostavimo da je N paran savršen broj. Odvojimo sve potencije broja 2 kako bi mogli zapisati broj N u obliku $N = 2^{k-1}b$, gdje je broj b neparan. Vrijedi $k > 1$, jer je broj N paran i ima barem jedan broj 2 u svojoj faktorizaciji. Kako je broj N također savršen, tada zbog svojstva 3. i 5. vrijedi

$$\sigma(N) = 2N = 2\left(2^{k-1}b\right) = 2^k b.$$

Istovremeno, kako su brojevi 2^{k-1} i b relativno prosti, tada vrijedi

$$\sigma(N) = \sigma\left(2^{k-1}b\right) = \sigma\left(2^{k-1}\right)\sigma(b) = (2^k - 1)\sigma(b).$$

Izjednačavanjem navedenih izraza za $\sigma(N)$ dobivamo

$$2^k b = (2^k - 1)\sigma(b)$$

ili jednostavno

$$\frac{2^k}{2^k - 1} = \frac{\sigma(b)}{b}.$$

Kao što je Euler primijetio, razlomak s lijeve strane je do kraja skraćen, jer je brojnik veći od nazivnika za broj 1. Nije jasno je li razlomak s desne strane također u do kraja skraćen. Euler je odredio da za neki broj $c \geq 1$ vrijedi

$$\sigma(b) = c2^k$$

i

$$b = c(2^k - 1).$$

Nadalje, razmotrio je dva slučaja koji uključuju vrijednost broja c.

Slučaj 1. Pretpostavimo da vrijedi $c > 1$. Prema

$$b = c(2^k - 1)$$

svaki od cijelih brojeva 1, b, c i $2^k - 1$ je djelitelj broja b. Tvrdimo da postoje četiri različita djelitelja broja b. Kako bi dokazali tvrdnju, tada moramo dokazati da ne postoji međusobna jednakost navedenih brojeva.

1. Vrijedi $1 \neq b$, jer inače vrijedi

   $$N = 2^{k-1}b = 2^{k-1},$$

   što je nemoguće jer potencija broja 2 ne može biti savršena.
2. Vrijedi $1 \neq c$, jer u slučaju 1. pretpostavljamo da je $c > 1$.
3. Vrijedi $1 \neq 2^k - 1$, jer inače vrijedi $2^k = 2$ i $N = 2^{k-1}b = b$. Zaključujemo da je broj N neparan broj, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema.
4. Vrijedi $b \neq c$, jer ako vrijedi

   $$b = c(2^k - 1),$$

   onda vrijedi $1 = 2^k - 1$, što nas vraća na prethodni slučaj.
5. Vrijedi $b \neq 2^k - 1$, jer ako vrijedi

   $$b = c(2^k - 1),$$

   onda vrijedi

   $$b = c(2^k - 1) = cb,$$

   iz čega slijedi $c = 1$, što je u kontradikciji s prvim slučajem.

6. Konačno, ako vrijedi $c = 2^k - 1$, te vrijedi

$$b = c(2^k - 1),$$

onda vrijedi

$$c(2^k - 1) = c^2.$$

Tada broj b ima najmanje tri djelitelja 1, c i c^2, koji su različiti, jer vrijedi $c > 1$. Zaključujemo da je broj $\sigma(b)$ zbroj svih djelitelja broja b, koji mora biti velik barem kao broj $1 + c + c^2$. S druge strane, ako vrijedi

$$\sigma(b) = c2^k,$$

onda vrijedi

$$\sigma(b) = c2^k = c\left[\left(2^k - 1\right) + 1\right] = c[c + 1] = c^2 + c.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$c^2 + c = \sigma(b) \geq 1 + c + c^2$$

što ne vrijedi. Tada vrijedi

$$c \neq 2^k - 1.$$

Brojevi 1, b, c i $2^k - 1$ su četiri različita djelitelja broja b. Zato se svaki od navedenih brojeva pojavljuje kao poseban pribrojnik u izračunavanju broja $\sigma(b)$. Slijedi da vrijedi

$$\sigma(b) \geq 1 + b + c + \left(2^k - 1\right) = b + c + 2^k = c\left(2^k - 1\right) + c + 2^k =$$

$$= 2^k(c + 1) > c2^k = \sigma(b)$$

Kontradikcija $\sigma(b) > \sigma(b)$ zaključuje da prvi slučaj nije moguć.

Slučaj 2. Vrijedi $c = 1$. Kako vrijedi

$$b = c(2^k - 1),$$

tada vrijedi

$$b = c(2^k - 1) = 2^k - 1.$$

Budući da vrijedi

$$\sigma(b) = c2^k,$$

onda vrijedi

$$\sigma(b) = c2^k = 2^k = \left(2^k - 1\right) + 1 = b + 1.$$

Iz

$$\sigma(b) = b + 1$$

zaključujemo da je broj b prost. Ukratko, dokazali smo da ako je paran N savršen broj , onda vrijedi

$$N = 2^{k-1}b = 2^{k-1}(2^k - 1),$$

gdje je broj $2^k - 1$ prost. Time se utvrđuje nužnost Euklidovog uvjeta. ■

Argument, iako zahtjevan zbog raspisivanja mnogo slučajeva, je elementaran. Zasigurno nije potrebno opsežno poznavanje teorije brojeva. Euler je htio preoblikovati problem u terminu $\sigma(n)$, pri čemu je fokus stavljen na zbroj svih djelitelja broja umjesto na zbroj pravih djelitelja broja. Kako je Truesdell zapazio, jednostavnost ne dolazi sama od sebe, već se mora stvoriti. Euler je bio majstor pojednostavljivanja.

Dokazom o savršenim brojevima, Euler je završio rad koji je započeo Euklid davno prije. Zajednički rezultat daje suradnju koja obuhvaća dva tisućljeća i trebao bi se zvati Euklid – Eulerov teorem.

Za sve što su Euklid i Euler otkrili o savršenim brojevima, još uvijek postoje praznine u našem razumijevanju. Primjerice, još nitko ne zna postoji li beskrajno mnogo njih. Prema Euklidovom receptu beskonačnost savršenih brojeva slijedi beskonačnost Mersenneovih prostih brojeva. Broj savršenih brojeva je i dalje otvoreno pitanje.

Možemo primijetiti da su brojevi koje smo spominjali do sad bili parni. Što ako su ti brojevi neparni?

Izračunavamo vrijednost $\sigma(n)$ za prvih par neparnih brojeva. Vrijedi

$$\sigma(3) = 4, \sigma(5) = 6, \sigma(7) = 8, \sigma(9) = 13,$$

$$\sigma(11) = 12, \sigma(13) = 14, \sigma(15) = 24, \sigma(17) = 18,$$

$$\sigma(19) = 20, \sigma(21) = 32, \sigma(23) = 24, \sigma(25) = 31,$$

$$\sigma(27) = 40, \sigma(29) = 30, \sigma(31) = 32, \sigma(33) = 48.$$

U svakom slučaju vrijedi $\sigma(N) < 2N$. Takvi neparni brojevi nisu savršeni.

Na intuitivnoj razini ovaj fenomen ima smisla. Za razliku od parnog broja, u kojem je jedan pravi djelitelj polovica danog broja, neparan broj nikada nema takvog djelitelja. To jest, broj 496 je djeljiv s brojem 248 i najveći pravi djelitelj broja 497 je relativno mali broj 71. Da bi broj 496 bio savršen, svi drugi pravi djelitelji moraju nadoknaditi ostatak $496 - 248 = 248$, koji i nadoknađuju, jer vrijedi $496 = 2^4(2^5 - 1)$. Kako bi broj 497 dostigao savršenstvo, njegovi ostali pravi djelitelji moraju nadoknaditi, ali vrijedi $497 - 71 = 426$ i ne nadoknađuju ostatak.

Mnogi slični primjeri vode do hipoteze da ako je broj N neparan, onda je broj $\sigma(N)$ uvijek manji od broja $2N$. To zaista vrijedi za svaki neparan broj manji od broja 943, uključujući i broj 943, za koji vrijedi $\sigma(943) = 1008 < 2 \cdot 943$. Ako se ovaj fenomen nastavi, moguće je da ne postoje neparni savršeni brojevi.

No, iznenađujuće, za broj 945 vrijedi: $\sigma(945) = 1920 > 2 \cdot 945$. Dakle, postoji neparan broj čiji zbroj pravih djelitelja daje broj veći od danog broja. Navedeni primjer poništava hipotezu. Štoviše, ako zbroj pravih djelitelja neparnog broja može biti manji ili veći od danog broja, onda nema očitog razloga zašto zbroj ne može biti jednak danom broju. Neparni savršeni brojevi su se vratili u zaključivanje.

Euler se bavio navedenim pitanjem 1747. godine. U radu, najteže pitanje bilo je postoje li neparni savršeni brojevi.

Kada Euler problem nazove teškim, onda možemo biti sigurni da je problem vrlo težak. Do danas je problem postojanja neparnih savršenih brojeva ostao neriješen. Usprkos brojnim i teškim naporima matematičara i računala, nikad se nije pojavio neparan savršen broj. Međutim, još nitko nije dokazao da savršeni neparni brojevi ne postoje. Matematičar Richard Guy rekao je: „Postojanje neparnih savršenih brojeva jedan od najpoznatijih neriješenih problema teorije brojeva.“

To ne znači da nije bilo napretka po tome pitanju. Matematičari su pronašli mnoga svojstva koja neparan broj mora imati da bi bio savršen broj. Primjerice, navodimo sljedeći teorem koji je 1888. godine dokazao James Joseph Sylvester.

Teorem 3.1.7. Neparan savršen broj mora imati najmanje tri različita prosta faktora.

Dokaz. Pretpostavimo da je broj N neparan savršen broj sa jednim prostim faktorom. Drugim riječima, vrijedi $N = p^r$, gdje je broj p neparan prost broj i vrijedi $r \geq 1$. Tada vrijedi $2N = \sigma(N)$. Slijedi

$$2p^r = \sigma(p^r) = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}$$

Tada je:

$$2p^r - p^{r+1} = 1,$$

što je kontradikcija, jer prost broj p dijeli lijevu stranu jednadžbe, dok desnu stranu jednadžbe ne dijeli. Zaključujemo da neparan savršen broj nema jedan prosti faktor. Sada gledamo slučaj kada neparan savršen broj ima dva prosta faktora. Pretpostavimo da je broj $N = p^k q^r$ neparan i savršen, gdje su p, q neparni prosti brojevi takvi da vrijedi $p < q$. Znamo da vrijedi

$$2N = \sigma(N) = \sigma(p^k q^r) = \sigma(p^k)\sigma(q^r).$$

Odnosno, vrijedi

$$2N = (1 + p + p^2 + \cdots + p^k) \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^r).$$

Podijelimo izraz s brojem $N = p^k q^r$ i pojednostavimo

$$2 = \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^r}\right) =$$
$$\leq \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5^r}\right),$$

jer je neparan prost broj p takav da vrijedi $p \geq 3$ i veći neparan prost broj q takav da vrijedi $q \geq 5$. Zamijenimo konačne geometrijske redove njihovim beskonačnim ostacima i zbrojimo ih. Dobivamo

$$2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^j} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8},$$

što je kontradikcija. Neparan savršen broj, ako postoji, mora imati tri ili više prostih faktora. ■

Nakon toga, Sylvester je dokazao da neparan savršen broj mora imati barem četiri, a zatim i najmanje pet različitih prostih faktora. Prednost ovakvog tipa teorema je dvostruka. Prvo, ograničava polje pretraživanja. Matematičar koji traži neparan savršen broj, prema Sylvestru, nema vremena za brojeve tipa broja 227 529, čija faktorizacija $3^4 \cdot 53^2$ sadrži samo dva različita prosta broja. Dakle, zaključuje se da broj 227 529 nije savršen broj.

Teoremi mogu dovesti do dokaza o nepostojanju savršenih brojeva. Pretpostavimo da netko dokaže da neparni savršeni brojevi moraju zadovoljiti dva uvjeta koja su međusobno nespojiva. Na primjer, pretpostavimo da neparni savršeni brojevi moraju biti djeljivi s brojem 9, ali ne mogu biti djeljivi s brojem 3. Tada bi zaključili da neparni savršeni brojevi ne postoje.

Nažalost, još nije pronađena nespojivost svojstava neparnih savršenih brojeva. Neka od svojstava neparnih savršenih brojeva su:

Svojstvo 1. Neparan savršen broj ne može biti djeljiv s brojem 105.

Svojstvo 2. Neparan savršen broj mora sadržavati najmanje osam različitih prostih faktora (proširenje Sylvestrovog teorema).

Svojstvo 3. Najmanji neparni savršeni broj mora biti veći od broja 10^{300}.

Svojstvo 4. Drugi najveći prosti faktor neparnog savršenog broja veći je od broja 1000.

Svojstvo 5. Zbroj recipročnih vrijednosti svih neparnih savršenih brojeva je konačan broj. Simbolično, vrijedi

$$\sum_{neparan\ \ savr\check{s}en\ broj} \frac{1}{n} < \infty.$$

Navedena svojstva su zanimljiva, jer identificiraju specifična svojstva neparnih savršenih brojeva koji možda i ne postoje.

Peto svojstvo je od posebnog interesa. Zbroj recipročnih vrijednosti cijelih brojeva, odnosno harmonijski red, je beskonačan. Također, zbroj svih recipročnih vrijednosti parnih brojeva ili zbroj svih recipročnih vrijednosti neparnih brojeva je beskonačan.

Nasuprot tome, zbroj recipročnih vrijednosti svih savršenih kvadrata je konačan broj. Savršeni kvadrati su rasprostranjeni među cijelim brojevima tako da zbroj njihovih recipročnih vrijednosti ne daje velik broj. U tom smislu, peto svojstvo govori da su neparni savršeni brojevi kao kvadrati, poprilično rijetki.

Kroz stoljeća, Euklid i Euler su utvrdili točnu prirodu parnih savršenih brojeva.

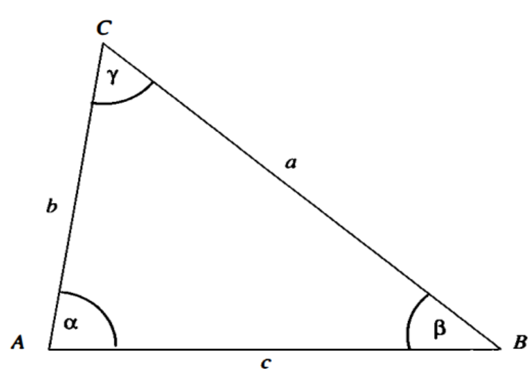
3.2. GEOMETRIJA

Euler je četiri sveska Opere Omnie, koji čine ukupno 1600 stranica, posvetio geometrijskim istraživanjima. U geometriji, Euler je dokazao Heronovu formulu i definirao Eulerov pravac trokuta.

Klasično doba grčke civilizacije protezalo se kroz mnoga stoljeća i vidio se izuzetan napredak u znanosti i umjetnosti. U staroj Grčkoj, matematika je uvijek upućivala na geometriju. Od pomno odabranog i ograničenog skupa postulata do izvođenja sofisticiranih tvrdnji, svaki dokaz se temelji na onome što se već prethodno dokazalo. Na taj način matematičari su dizali kulu ideja na temelju jednostavnih aksioma. Takva deduktivna shema najbolje je vidljiva u Euklidovim Elementima.

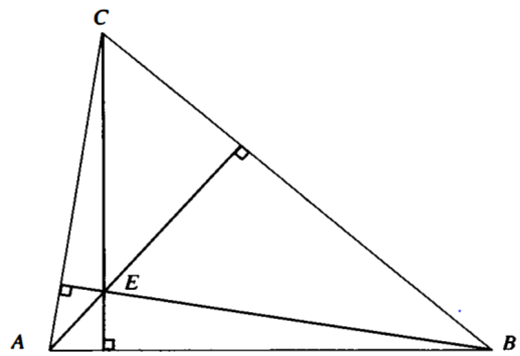
Kako bi prikazali Eulerov doprinos, navest ćemo četiri karakteristične točke trokuta kao i Heronovu formulu za određivanje površine trokuta preko duljina stranica trokuta.

Neka je ΔABC trokut s duljinama stranica a, b i c te s mjerama kutova α, β i γ. Postoje četiri točke koje su povezane s trokutom.



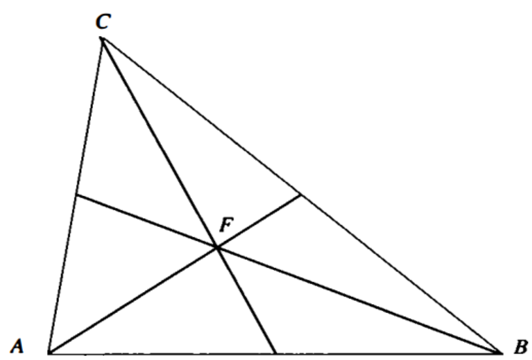
Slika 1: Trokut ABC

1. Ortocentar je sjecište pravaca na kojima leže visine trokuta.



Slika 2: Trokut ABC s ortocentrom E

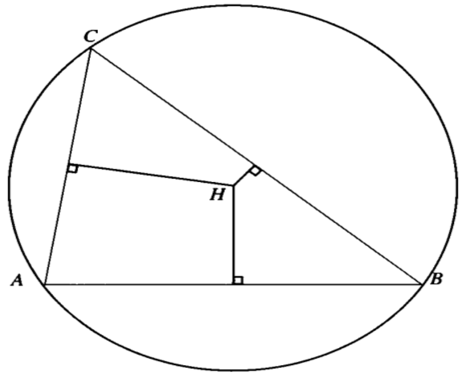
2. Težište je sjecište težišnica trokuta, odnosno dužina koje spajaju vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.



Slika 3: Trokut ABC s težištem F

3. Središte trokutu opisane kružnice je točka H u kojoj se sijeku simetrale stranica trokuta. Radijus opisane kružnice trokuta jednak je:

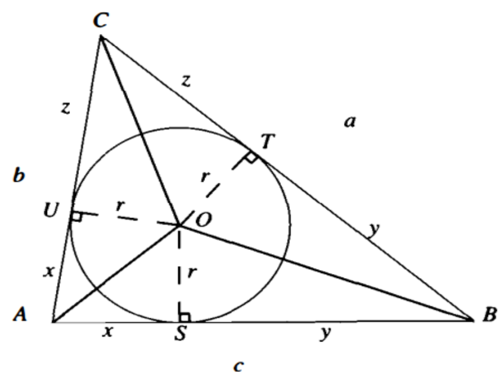
$$|AH| = |BH| = |CH|.$$



Slika 4: Trokut ABC sa središtem opisane kružnice trokuta

4. Središte trokutu upisane kružnice je točka O u kojoj se sijeku simetrale unutarnjih kutova trokuta. Radijus upisane kružnice trokuta jednak je

$|OS| = |OT| = |OU|$, gdje su točke S, T, U nožišta okomica iz točke O na stranice AB, BC, CA redom.



Slika 5: Trokut ABC sa središtem upisane kružnice trokuta

Od navedene četiri točke trokuta središte trokutu upisane kružnice je možda najvažnije od svih. Kao prvo, točka središta upisane kružnice dovodi do dekompozicije bilo kojeg trokuta na tri manja trokuta. Vrijedi

$$P(ABC) = P(ABO) + P(BOC) + P(AOC) =$$
$$= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = rs,$$

gdje vrijedi

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

i broj s zovemo poluopsegom trokuta ΔABC. Drugim riječima, površina bilo kojeg trokuta je umnožak njegovog poluopsega i polumjera trokutu upisane kružnice. Ovo svojstvo ključno je za dokazivanje Heronove formule.

Središte upisane kružnice ima i daljnji značaj. Budući da $\overline{OA}$ ne prepolovi samo kut $\angle BAC$, već je i zajednička hipotenuza pravokutnih trokuta ΔOSA i ΔOUA, njihova kongruentnost slijedi. Neka vrijedi

$$x = |AS| = |AU|.$$

Analogni argumenti kongruencije omogućuju da uvedemo

$$y = |BS| = |BT|.$$

i

$$z = |CT| = |CU|.$$

Štoviše, vrijedi

$$a = y + z,$$

$$b = x + z,$$

$$c = x + y$$

i

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{y+z+x+z+x+y}{2} = x + y + z.$$

Kao posljedica, vrijedi

$$s - a = x + y + z - y - z = x,$$

$$s - b = x + y + z - x - z = y$$

i

$$s - c = x + y + z - x - y = z.$$

Sve navedene formule bez prednosti moderne algebarske notacije bile su poznate Grcima.

Sada ćemo navesti jedno od blaga klasične geometrije. Jasno je da duljine tri stranice trokuta nedvosmisleno određuju njegovu površinu. Međutim, ono što iznenađuje je složenost formule koja je potrebna za izračunavanje površine trokuta.

Negdje u drugom stoljeću, Heron Aleksandrijski dokazao je da izraz za računanje površine trokuta sa stranicama a, b i c zadan s

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje je s poluopseg.

Naizgled, formula se čini zamršena i nerazumna, ali to je zapravo osobitost euklidske geometrije.

Heronov dokaz navedene formule je bio vrlo pametno složen. Heron je započeo dokaz upisivanjem kruga unutar trokuta, konstruirao mnoštvo pomoćnih pravaca, pozvao se na poznate činjenice o četverokutima upisanim u kružnice, te koristio sličnosti trokuta. Iznošenje njegovog opširnog dokaza odvelo bi nas predaleko. U nastavku rada opisat ćemo Euklidov dokaz Heronove formule.

Euler je bio upoznat s Heronovom formulom, koju je zvao pravilo za pamćenje. U radu iz 1748. godine naslova Variae demonstrationes geometriae, Euler je pružio dokaz Heronove formule.

Teorem 3.2.1. Ako trokut ΔABC ima stranice duljina a, b i c i poluperimetar

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

onda vrijedi

$$P(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokaz. Neka je ΔABC trokut s duljinama stranica a, b i c te s mjerama kutova α, β i γ. Slijedeći Herona, Euler je najprije upisao kružnicu unutar trokuta. Neka je točka O središte upisane kružnice polumjera

$$r = |OS| = |OU|, \text{ kao na slici 6.}$$

Zbog načina konstrukcije središta trokutu upisane kružnice, dužine $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ raspolavljaju kutove α, β, γ redom te vrijedi:

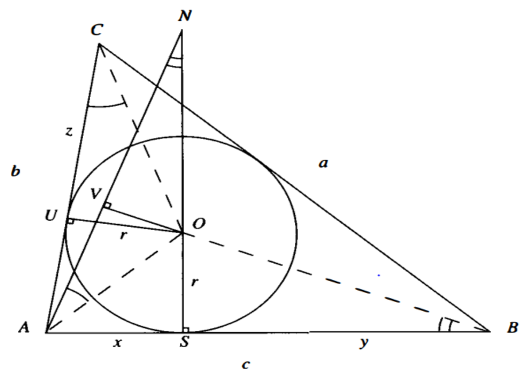
$$\angle OAB = \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle OBA = \frac{\beta}{2}$$

i

$$\angle OCA = \frac{\gamma}{2}.$$

Euler je produžio dužinu $\overline{BO}$ i konstruirao okomicu iz točke A koja siječe produženu dužinu u točki V. Nacrtao je tu dužinu i točku unutar trokuta, ali dokaz se može modificirati ako ispadnu izvan trokuta. S N označimo sjecište produženih dužina $\overline{AV}$ i $\overline{OS}$.



Slika 6: Trokut ABC s produženim dužinama

Kako je kut $\angle AOV$ vanjski kut trokuta ΔAOB, tada vrijedi

$$\angle AOV = \angle OAB + \angle OBA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Kako je trokut AOV pravokutan, tada su kutovi $\angle AOV$ i $\angle OAV$ komplementarni. Slijedi

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \angle OAV = 90°.$$

Ali, također vrijedi

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°.$$

Tada vrijedi

$$\angle OAV = \frac{\gamma}{2} = \angle OCU.$$

Iz toga slijedi sličnost pravokutnih trokuta ΔOAV i ΔOCU i

$$\frac{|AV|}{|VO|} = \frac{|CU|}{|OU|} = \frac{z}{r}.$$

Jasno je da su trokuti ΔNOV i ΔNAS slični, kao i trokuti ΔNAS i ΔBAV te trokuti ΔNOV i ΔBAV. Stoga vrijedi

$$\frac{|AV|}{|AB|} = \frac{|OV|}{|ON|}$$

ili ekvivalentno vrijedi

$$\frac{|AV|}{|OV|} = \frac{|AB|}{|ON|}.$$

Tada vrijedi

$$\frac{z}{r} = \frac{|AB|}{|ON|} = \frac{x + y}{|SN| - r}$$

i

$$z(|SN|) = r(x + y + z) = rs.$$

Kako su kutovi $\angle BOS$ i $\angle VON$ kongruentni, onda vrijedi

$$\angle OBS = 90° - \angle BOS = 90° - \angle VON = \angle ANS.$$

Prema tome, trokuti ΔNAS i ΔBOS su slični, iz čega slijedi

$$\frac{|SN|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|OS|}.$$

Slijedi

$$\frac{|SN|}{x} = \frac{y}{r},$$

odnosno

$$|SN| = \frac{xy}{r}.$$

Euler je zaključio da vrijedi

$$P(\Delta\, ABC) = rs = \sqrt{rs(rs)} = \sqrt{z(|SN|)(rs)} =$$

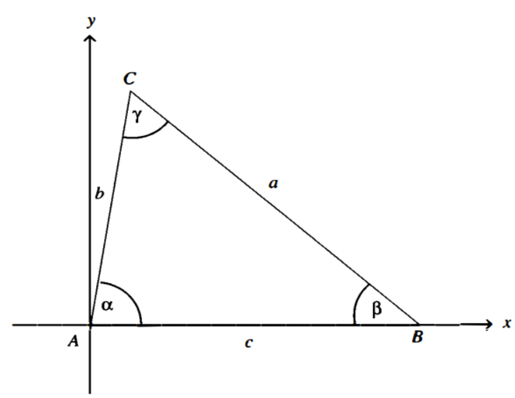
$$= \sqrt{z\left(\frac{xy}{r}\right)rs} = \sqrt{sxyz} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\ \blacksquare$$

U radu iz 1767. godine Euler je ponovno skrenuo pozornost na trokut. Ovaj put, umjesto fokusirajući se na površinu trokuta, ispitivao je odnose između posebnih točaka trokuta. Pritom je otkrio da ortocentar, težište i središte opisane kružnice moraju ležati na istom pravcu. Takav pravac zovemo Eulerov pravac. Eulerov pravac jednoznačno je određen za svaki trokut osim jednakostraničnog. Kod jednakostraničnog trokuta navedene tri točke se podudaraju te je Eulerov pravac neodređen.

Euler je postavio koordinatne osi na ravninu i iskoristio Kartezijevu formulu za udaljenost

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Neka je ΔABC proizvoljni trokut s duljinama stranica a, b i c. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je točka A ishodište i B točka na x – osi.



Slika 7: Trokut ABC u koordinatnom sustavu

Euler je koristio Heronovu formulu. Ako vrijedi $K = P(ABC)$, onda vrijedi

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}.$$

Nakon kvadriranja i pojednostavljivanja, vrijedi

$$16K^2 = [(b+c)+a][(b+c)-a][a-(b-c)][a+(b-c)] =$$

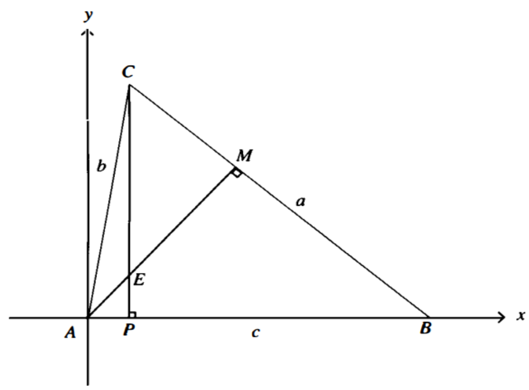
$$= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] =$$

$$= [b^2 + 2bc + c^2 - a^2][a^2 - b^2 + 2bc - c^2] =$$

$$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Ova jednadžba se ponavljala u Eulerovom dokazu. Njegova strategija je bila pronaći koordinate tri posebne točke trokuta izražene pomoću a, b, c i K te odrediti odnos između istih.

Započnimo s ortocentrom E, gdje su $\overline{AM}$ i $\overline{CP}$ visine trokuta.



Slika 8: Trokut ABC s pripadnim visinama

Vrijedi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \cos \alpha \, = b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{|AP|}{b}\right) = b^2 + c^2 - 2c|AP|.$$

Tada vrijedi

$$|AP| = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Također, tada vrijedi

$$|BM| = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Slijedi

$$K = P(ABC) = \frac{1}{2}(|BC|)(|AM|),$$

pa je

$$|AM| = \frac{2K}{a}.$$

Sličnost trokuta ΔABM i ΔAEP implicira

$$\frac{|BM|}{|AM|} = \frac{|EP|}{|AP|}$$

i

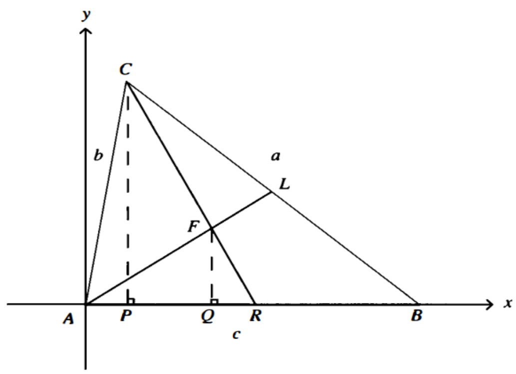
$$|EP| = \frac{(|BM|)(|AP|)}{|AM|} = \frac{\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}{\frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{a}}} =$$

$$= \frac{2a^2b^2-a^4-b^4+c^4}{8cK} = \frac{16K^2-2a^2c^2-2b^2c^2+2c^4}{8cK} = \frac{2K}{c} + \frac{c(c^2-a^2-b^2)}{4K}.$$

Stoga ortocentar E ima koordinate

$$(|AP|, |EP|) = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}, \frac{2K}{c} + \frac{c(c^2-a^2-b^2)}{4K}\right).$$

Zatim ćemo odrediti koordinate težišta F. Neka je točka R polovište dužine $\overline{AB}$ i točka L polovište dužine $\overline{BC}$. Težišnice $\overline{CR}$ i $\overline{AL}$ sijeku se u težištu F.



Slika 9: Trokut ABC s pripadnim težišnicama

Uočavamo da vrijedi

$$K = P(ABC) = \frac{1}{2}(|AB|)(|CP|),$$

gdje vrijedi

$$|CP| = \frac{2K}{c}.$$

Konstruiramo dužinu $\overline{FQ}$, okomitu na $\overline{AB}$, s Q kao nožištem okomice na $\overline{AB}$ pri čemu znamo da su trokuti ΔRQF i ΔRPC slični. Tada vrijedi

$$\frac{|RQ|}{|RP|} = \frac{|RF|}{|RC|} = \frac{1}{3}.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$|AQ| = |AR| - |RQ| = \frac{1}{2}|AB| - \frac{1}{3}|RP| = \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}(|AR| - |AP|) =$$

$$= \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}c - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) = \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c},$$

što je jednako apscisi težišta.

Kako bi odredili ordinatu, vraćamo se na slične trokute ΔRQF i ΔRPC.

Iz

$$\frac{|FQ|}{|CP|} = \frac{|RF|}{|RC|} = \frac{1}{3}$$

slijedi

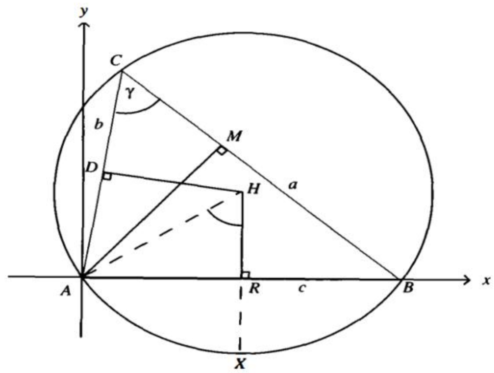
$$|FQ| = \frac{1}{3}(|CP|) = \frac{2K}{3c}.$$

Dakle, koordinate težišta su

$$(|AQ|, |FQ|) = \left(\frac{3c^2 + b^2 - a^2}{6c}, \frac{2K}{3c}\right).$$

Zatim ćemo odrediti koordinate središta trokutu opisane kružnice.

Točka R je točka polovišta dužine $\overline{AB}$ i točka D je točka polovišta dužine $\overline{AC}$. Kroz navedene točke konstruiramo simetrale stranica koje se sijeku u središtu opisane kružnice H. Također, za visinu $\overline{AM}$ već smo odredili njenu duljinu kao $\frac{2K}{a}$.



Slika 10: Trokut ABC i njemu opisana kružnica

Vrijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\cos\gamma\ = a^2 + b^2 - 2ab\left(\frac{|CM|}{b}\right) = a^2 + b^2 - 2a|CM|$$

pa slijedi

$$|CM| = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Zatim, promatrajući opisanu kružnicu, vidljivo je da je mjera kuta $\angle ACB,$ kao obodnog kuta, upola manja od mjere središnjeg kuta nad kružnim lukom AB. Odnosno mjera kuta $\angle ACB$ jednaka je mjeri središnjeg kuta nad kružnim lukom AX. Mjera središnjeg kuta $\angle AHR$ također je jednaka mjeri središnjeg kuta nad lukom AX.

Zaključujemo da vrijedi

$$\angle ACB = \angle AHR$$

i zato je trokut ΔACM sličan trokutu ΔAHR. Iz toga slijedi

$$\frac{|HR|}{|AR|} = \frac{|CM|}{|AM|}.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$|HR| = \frac{\left(\frac{1}{2}c\right)\frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2a}}{\frac{2K}{a}} = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8K}.$$

Koordinate središta opisane kružnice su

$$(|AR|,|HR|)=\left(\frac{1}{2}c,\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8K}\right).$$

Euler je još morao odrediti duljine segmenata $\overline{EF}$, $\overline{EH}$ i $\overline{FH}$. Vrijedi

$$(|EF|)^2=\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}-\frac{3c^2+b^2-a^2}{6c}\right]^2+\left[\frac{2K}{c}+\frac{c(c^2-a^2-b^2)}{4K}-\frac{2K}{3c}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{b^2-a^2}{3c}\right]^2+\left[\frac{4K}{3c}+\frac{c(c^2-a^2-b^2)}{4K}\right]^2=$$

$$=\frac{(b^2-a^2)^2+16K^2}{9c^2}+\frac{2c^2-2a^2-2b^2}{3}+\frac{c^2(c^4+a^4+b^4-2a^2c^2-2b^2c^2+2a^2b^2)}{16K^2}.$$

Dobiveni izraz možemo pojednostaviti koristeći Heronovu formulu, te slijedi:

$$(|EF|)^2=\frac{(b^2-a^2)^2+16K^2}{9c^2}+\frac{2c^2-2a^2-2b^2}{3}+\frac{c^2(4a^2b^2-16K^2)}{16K^2}=$$

$$=\frac{(b^2-a^2)^2+16K^2}{9c^2}-\frac{2a^2+2b^2+c^2}{3}+\frac{a^2b^2c^2}{4K^2}.$$

Sljedeće vrijedi

$$(|EH|)^2=\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}-\frac{c}{2}\right]^2+\left[\frac{2K}{c}+\frac{c(c^2-a^2-b^2)}{4K}-\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8K}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{b^2-a^2}{2c}\right]^2+\left[\frac{2K}{c}+\frac{3c(c^2-a^2-b^2)}{8K}\right]^2=$$

$$=\frac{(b^2-a^2)^2+16K^2}{4c^2}+\frac{3c^2-3a^2-3b^2}{2}+\frac{9c^2(c^4+a^4+b^4-2a^2c^2-2b^2c^2+2a^2b^2)}{64K^2}.$$

Dobivamo

$$(|EH|)^2=\frac{(b^2-a^2)^2+16K^2}{4c^2}+\frac{3c^2-3a^2-3b^2}{2}+\frac{9c^2(4a^2b^2-16K^2)}{64K^2}=$$

$$=\frac{(b^2-a^2)^2+16K^2}{4c^2}-\frac{6a^2+6b^2+3c^2}{4}+\frac{9a^2b^2c^2}{16K^2}.$$

Na kraju, zaključujemo da vrijedi

$$(|FH|)^2=\left[\frac{3c^2+b^2-a^2}{6c}-\frac{c}{2}\right]^2+\left[\frac{2K}{3c}-\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8K}\right]^2=$$

$$= \left[\frac{b^2 - a^2}{6c}\right]^2 + \frac{4K^2}{9c^2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{6} + \frac{c^2(c^4 + a^4 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2)}{64K^2} =$$

$$= \frac{(b^2 - a^2)^2 + 16K^2}{36c^2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{6} + \frac{c^2(4a^2b^2 - 16K^2)}{64K^2} =$$

$$= \frac{(b^2 - a^2)^2 + 16K^2}{36c^2} - \frac{2a^2 + 2b^2 + c^2}{12} + \frac{a^2b^2c^2}{16K^2}.$$

Teorem 3.2.2. U trokutu ortocentar E, težište F i središte opisane kružnice H su kolinearne točke, gdje vrijedi

$$|EF| = 2|FH| \text{ i } |EH| = 3|FH|.$$

Dokaz. Stavimo

$$d = |FH|.$$

Vrijedi

$$(|EF|)^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2 + 16K^2}{9c^2} + \frac{2a^2 + 2b^2 + c}{3} + \frac{a^2b^2c^2}{4K^2} =$$

$$= 4\left[\frac{(b^2 - a^2)^2 + 16K^2}{36c^2} - \frac{2a^2 + 2b^2 + c^2}{12} + \frac{a^2b^2c^2}{16K^2}\right] = 4(|FH|)^2.$$

Tada vrijedi

$$|EF| = 2(|FH|) = 2d.$$

Dodatno, vrijedi

$$(|EH|)^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2 + 16K^2}{4c^2} - \frac{6a^2 + 6b^2 + 3c^2}{4} + \frac{9a^2b^2c^2}{16K^2} =$$

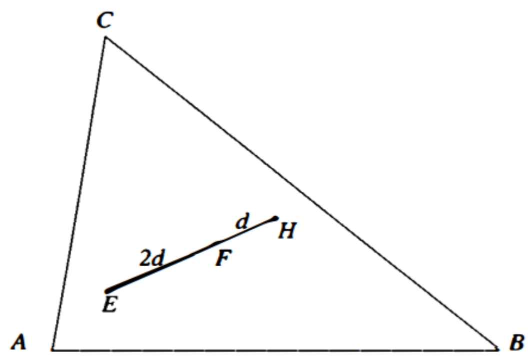
$$= 9\left[\frac{(b^2 - a^2)^2 + 16K^2}{36c^2} - \frac{2a^2 + 2b^2 + c^2}{12} + \frac{a^2b^2c^2}{16K^2}\right] = 9(|FH|)^2.$$

Tada vrijedi

$$|EH| = 3(|FH|) = 3d.$$

Ovi izračuni pokazuju da su tri navedene točke različite osim ako vrijedi $d = 0$, što vrijedi samo za jednakostranični trokut. Također, točke E, F i H pripadaju istom pravcu za

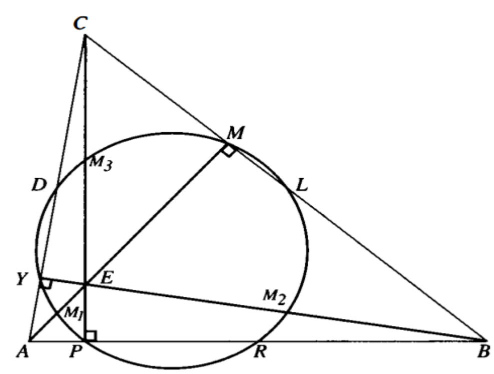
$$|EH| = 3d = 2d + d = |EF| + |FH|.$$



Slika 11: Trokut ABC i tri karakteristične točke

Da točke nisu kolinearne, to bi značilo kontradikciju s nejednakosti trokuta. ■

Sada ćemo opisati Feuerbachovu kružnicu koja je direktno povezana s Eulerovim pravcem. Započinjemo s trokutom ΔABC.



Slika 12: Trokut ABC i Feuerbachova kružnica

Neka su R, L i D polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ redom te $\overline{AM}$,$\overline{BY}$ i $\overline{CP}$ neka su visine trokuta koje se sijeku u ortocentru E. Prepolovimo dužine koje se protežu od svakog vrha do ortocentra. Neka je M_1 polovište $\overline{AE}$, M_2 polovište $\overline{BE}$ i M_3 polovište dužine $\overline{CE}$.

Sada možemo izraziti teorem na sljedeći način:

Teorem 3.2.5. Kružnica koja prolazi kroz nožišta okomica spuštenih iz vrhova trokuta na suprotnu stranicu, prolazi i kroz polovišta stranica kao i kroz polovišta dužina koje spajaju vrhove i ortocentar trokuta.

Svih devet točaka $M, Y, P, R, L, D,$ M_1, M_2 i M_3 leže na jednoj kružnici. Nadalje, središte ove kružnice leži na Eulerovom pravcu te je polovište dužine koja spaja ortoentar sa središtem opisane kružnice. Polumjer kružnice je polovica polumjera opisane kružnice.

Nažalost, Feuerbachova kružnica je krivo nazvana. Feuerbachovu kružnicu prvi su opisali Poncelet i Brianchon 1821. godine. Godinu dana kasnije, Feuerbach je naišao na slične ideje opisa takve kružnice. Inspiriran Eulerovim djelom, objavio je članak i dobio zasluge za Feuerbachovu kružnicu koja bi se zapravo trebala zvati Poncelet – Brianchonova kružnica.

Geometrija je opisana kao dio matematike koji je doživio više promjena od bilo koje druge grane matematike. Od svog vrhunca u klasičnom dobu preko renesanse do danas, geometriju karakteriziraju brojne velike promjene.

Eulerov pravac ostaje prepoznat kao čudo geometrije, kao što se i njegovom tvorcu dodaje titula jednog svestranog i pametnog matematičara.

4. OSTALI DOPRINOSI MATEMATICI

U ovome poglavlju ukratko ćemo opisati dio Eulerovog rada u područjima logaritama, beskonačnih nizova, analitičke teorije brojeva, kompleksnih brojeva, algebri i kombinatorici.

4.1. LOGARITMI

Euler je definirao eksponencijalnu funkciju, odnosno funkciju oblika

$$y = a^z, a > 1.$$

Zatim se počeo baviti inverznim problemom. Tako je došao do definicije logaritamske funkcije takve da vrijedi:

$$z = log_a y \text{ ako i samo ako vrijedi } y = a^z.$$

Također, objasnio je osnovna svojstva logaritamskih funkcija.

Euler je odredio sljedeći razvoj eksponencijalne funkcije u red potencija:

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2\cdot 1} + \cdots,\ a > 1$$

Prvo je pretpostavio da je ω beskonačno mali broj, takav da je $a^\omega = 1 + \psi$, gdje je ψ tada također beskonačno mali broj (budući da $a^0 = 1$, a ω teži prema nuli). Za njega, ω je bio gotovo 0, pa je a^ω bio približno jednak 1, s beskonačno malom razlikom ψ. Zatim je povezao te dvije beskonačno male veličine, ω i ψ, sa $\psi = \mathrm{k}\omega$, čime se dobiva $a^\omega = 1 + \mathrm{k}\omega$. Tada je definirao

$$j = \frac{x}{\omega},$$

iz čega slijedi

$$a^x = (a^\omega)^{\frac{x}{\omega}} = (1 + k\omega)^j = \left(1 + \frac{kx}{j}\right)^j.$$

Nadalje, proširio je navedenu formulu pomoću Newtonovog generaliziranog binomnog teorema i dobio

$$a^x = 1 + j\left(\frac{kx}{j}\right) + \frac{j(j-1)}{2\cdot 1}\left(\frac{kx}{j}\right)^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \cdots =$$

$$a^x = 1 + kx + \frac{j-1}{j}\left(\frac{k^2x^2}{2\cdot 1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)}{j\cdot j}\left(\frac{k^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1}\right) + \cdots$$

Kako je broj x konačan i broj ω beskonačno malen, tada je broj

$$j = \frac{x}{\omega}$$

beskonačno velik. Prema Euleru slijedi

$$\frac{j-1}{j} = 1, \frac{j-2}{j} = 1, \text{ i tako dalje.}$$

Pretpostavio je da vrijedi

$$\frac{j-n}{j} = 1 \text{ za broj } n \geq 1.$$

Odnosno, u modernom zapisu, točno je zaključio da je $\lim_{j\to\infty} \frac{j-n}{j} = 1$, za $n \geq 1$.

Eliminirajući broj j iz proširenja početne formule, dobio je

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2\cdot 1} + \frac{k^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \cdots$$

Izvukao je dva neposredna zaključka. Dopuštajući da vrijedi $x = 1$, generirao je niz za bazu a s parametrom k. Naime, vrijedi

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2\cdot 1} + \frac{k^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \cdots$$

Sljedeće, odabrao je broj a za određenu bazu za koju vrijedi $k = 1$. Drugim riječima, u početku je odabrao za bazu broj a, iz čega slijedi

$$a^\omega = 1 + \omega,$$

u slučaju kada je broj ω beskonačno malen. Stavljajući

$$x = k = 1$$

u jednadžbu

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2 \cdot 1} + \frac{k^3x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots$$

dobio je

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots$$

Tako je dobio broj

$$e = 2.71828182845904523536028$$

koji je kasnije dobio naziv po njemu Eulerov broj. Logaritme s brojem e kao bazom zovemo prirodni algoritmi. Za $k = 1$ i $a = e$, Euler je dobio razvoj u red potencija funkcije e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} \dots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

Također, odredio je i razvoj u red potencija funkcije:

$$ln\ (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Euler se bavio problemom određivanja diferencijala funkcije $ln(x)$ te je za $y = ln(x)$ formirao diferencijalnu formulu

$$D_x(ln\ x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

odnosno zaključio je da vrijedi

$$dy = \frac{dx}{x},\ \text{za}\ y = ln(x).$$

Iako je divergencija harmonijskog reda bila dokazana već puno prije Eulera, Euler je ponudio svoj dokaz temeljen na razvoju funkcije $ln\ (1 + x)$ u red potencije.

Teorem 4.1.1. Harmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergira.

Dokaz. Zamjenom broja x brojem $-x$ u razvoju

$$ln\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

dobiva se razvoj

$$ln\,(1-x)\ = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Ako se u prethodni razvoj stavi $x = 1$, onda se dobiva

$$ln\ (1-1)\ = ln\ (0)\ = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right).$$

Slijedi

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots = -\,ln\,(0)\ = ln\ (0^{-1})\ = ln\ \left(\tfrac{1}{0}\right)\ = ln\ \infty\ = \infty.\ \blacksquare$$

Uočio je vezu logaritma i harmonijskog reda, koja ga je dovela do otkrića Eulerove konstante:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - ln\ (n+1)\right).$$

Eulerova konstanta jedna je od najvažnijih matematičkih konstanti. Bitna je za razumijevanje gama funkcije u višoj analizi te se javlja u mnogim zanimljivim formulama kao na primjer u sljedećoj:

$$\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-x}\ ln\ x\ dx.$$

4.2. BESKONAČNI NIZOVI

U radu iz 1731. godine Euler je numerički aproksimirao red $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ tako što je na dva načina evaluirao sljedeći (nepravi)integral:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{ln\ (1-t)}{t}\,dt.$$

Time je pokazao da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.2.1. Vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Također, dokazao je i sljedeće.

Teorem 4.2.2. Ako je

$$P(y) = y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \cdots \pm N$$

polinom n – tog stupnja koji ima faktorizaciju

$$P(y) = (y - r_1)(y - r_2) \dots (y - r_n),$$

onda vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = A,$$

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 = A \sum_{k=1}^{n} r_k - 2B,$$

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^3 = A \sum_{k=1}^{n} r_k^2 - B \sum_{k=1}^{n} r_k + 3C,$$

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^4 = A \sum_{k=1}^{n} r_k^3 - B \sum_{k=1}^{n} r_k^2 + C \sum_{k=1}^{n} r_k - 4D$$

i tako dalje.

4.3. KOMPLEKSNI BROJEVI

U svom djelu Elementi algebre, Euler uvodi $\sqrt{-1}$, te standardizira oznaku koju i danas koristimo, $i = \sqrt{-1}$ za imaginarnu jedinicu. Proučavajući korijene jedinice, pokazao je na primjer da su četiri četvrta korijena iz jedinice $1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$. Smatrao je da iako imaginarni brojevi postoje samo u našoj imaginaciji, ništa nas ne sprječava da ih koristimo u izračunima. Euler je pronašao način za određivanje korijena iz jedinice, ali i korijena proizvoljnog realnog ili kompleksnog broja. Pokazao je da bilo koji broj ima dva kvadratna korijena, tri kubna, četiri četvrta korijena i tako dalje. Tvrdnju je dokazao koristeći teorem danas poznat kao DeMoivreov teorem:

$$(cos\ \varphi\ \pm i\ sin\ \varphi)^n = cos\ n\varphi\ \pm i\ sin\ n\varphi,\ \text{za sve } n \geq 1.$$

Ovaj je teorem danas temelj kompleksne algebre. Iako se u De Moiverevom radu može naći njegova ranija verzija, Euler ga je nešto kasnije također dokazao i bio je prvi koji je shvatio njegovu važnost i široko ga primjenjivao u svom radu. Euler je koristeći De Moivreov teorem dokazao formulu za određivanje n različitih n-tih korijena kompleksnog broja

$$z = a + bi = c(cos\ \varphi\ + i\ sin\ \varphi):$$

$$\sqrt[n]{z}_{\mathrm{k}} = \sqrt[n]{c}\left(cos\ \frac{(\varphi+2k\pi)}{n} + i\ sin\ \frac{(\varphi+2k\pi)}{n}\right) \text{za } k = 0,1,2,\dots,n-1.$$

U djelu Introductio Euler je korištenjem De Moivreovog teorema odredio sljedeće razvoje funkcija sinus i kosinus u redove potencija.

Teorem 4.3.1. Vrijedi

$$cos\ x\ = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$

i

$$sin\,sin\,x\ = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$$

Njegova najznačajnija primjena De Moivreove formule bila je u dokazivanju sljedeće tvrdnje koju danas nazivamo Eulerov identitet.

Teorem 4.3.2. Za svaki realan broj x vrijedi

$$e^{ix} = cos\ x\ + i\sin x\ .$$

Euler je pomoću ovog identiteta riješio dotada nerješivu jednadžbu $e^x = -1$, pokazujući da je tada $x = i\pi$. Euler je time pokazao svoju veličinu jer je uvidio vezu među pet najvažijih matematičkih konstanti: $0,1,\pi,e,i$. Naime, uvrštavanjem $x = \pi$ u Eulerovu formulu dobivamo $e^{i\pi} = -1$, odnosno $e^{i\pi} + 1 = 0$.

4.4. ALGEBRA

Euler je baveći se algebrom, između ostaloga dokazao sljedeći teorem.

Teorem 4.4.1. Bilo koji polinom četvrtog stupnja oblika:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

gdje su A, B, C i D realni brojevi, može se rastaviti na dva realna faktora drugog stupnja.

Proučavao je i faktorizacije polinoma viših stupnjeva, no nije uspio dokazati osnovni teorem algebre.

4.5. KOMBINATORIKA

Euler je dokazao i sljedeće teoreme iz područja kombinatorike.

Razmatrajući broj deranžmana $n -$članog skupa,Euler je uočio ponavljajući uzorak, te korištenjem rekurzivnih relacija pokazao da vrijedi tvrdnja koja slijedi.

Teorem 4.5.1. Za svaki broj $n \geq 3$ vrijedi

$$\prod(n) = (n-1)\left[\prod(n-1) + \prod(n-2)\right],$$

gdje $\prod\ (n)$ označava broj permutacija n slova $a, b, c, d, \dots,$ u kojima nijedno slovo nije na originalnoj poziciji.

Promatrajući particije cijelog broja, osobito one koje se sastoje od različitih pribrojnika, došao je do sljedećeg zaključka.

Teorem 4.5.2. Broj različitih načina na koji se određeni broj može izraziti kao zbroj različitih cijelih brojeva jednak je broju načina na koji se taj isti broj može izraziti kao zbroj neparnih brojeva koji mogu biti isti ili različiti.

U daljnjim razmatranjima o broju deranžmana, uspio je odrediti i eksplicitnu formulu za određivanje $\prod\ (n)$ samo pomoću n, bez potrebe za izračunavanjem vrijednosti $\prod\ (k)$, za $k < n$.

Teorem 4.5.3. Za svaki broj $n \geq 1$ vrijedi

$$\prod (n) = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

5. ZAKLJUČAK

Leonhard Euler rođen je 15. travnja 1707. godine i umro je 18. rujna 1783. godine. Bio je švicarski matematičar i fizičar koji je većinu svog života proveo u Rusiji i Njemačkoj. Napisao je 886 knjiga iz matematike. Smatra se ocem topologije.

Euler je napravio važna otkrića u različitim poljima matematike. Također, uveo je velik dio moderne matematičke terminologije i notacije, posebno za matematičku analizu. Poznat je i po svom radu u mehanici, optici i astronomiji.

Radio je u gotovo svim područjima matematike – radio je u geometriji, analizi, trigonometriji, algebri i teoriji brojeva, ali i u fizici i astronomiji. Smatra se temeljnom figurom u povijesti matematike, jer se njegova djela i dan danas tiskaju.

Euler je uveo pojam funkcije i prvi stavio oznaku $f(x)$ koja označava funkciju f primjenjenu na argument x. Također, uveo je modernu notaciju za trigonometrijske funkcije. Definirao je bazu prirodnog logaritma koju je označio s e, zbrajanje koje je označio sa $\sum$, imaginarnu jedinicu koju je označio s i te označavanje omjera opsega kružnice i njezinog promjera s π.

Poznat je u analizi po svojoj čestoj upotrebi i razvoju redova potencija i izraza funkcija kao zbroj beskonačno mnogo članova. Otkrio je razvoj u red potencija broja e i inverznu funkciju funkcije tangens. Također, definirao je eksponencijalnu funkciju za kompleksne brojeve i otkrio njezin odnos s trigonometrijskim funkcijama. Stvorio je teoriju hipergeometrijskih nizova, q – nizova, hiperboličkih trigonometrijskih funkcija i analitičku teoriju kontinuiranih razlomaka.

Do 1772. godine Euler je dokazao da je

$$2^{31} - 1 = 2147483647$$

Mersenneov prost broj. Ostao je u povijesti do 1867. godine najveći poznati prost broj. Također, otkrio je funkciju $\varphi(n)$ koja je definirana kao broj pozitivnih cijelih brojeva manjih od cijelog broja n koji su relativno prosti s brojem n. Takvu funkciju zovemo Eulerova funkcija. Koristeći svojstva funkcije, generalizirao je Fermatov mali teorem na teorem koji je danas poznat pod imenom Eulerov teorem. Eulerov interes za teoriju brojeva može se pratiti do Goldbachovog utjecaja. Dokazao je da zbroj recipročnih brojeva prostih brojeva divergira. Dokazao je Newtonove identitete i Fermatov mali teorem o zbroju dva kvadrata.

U području geometrije, Euler je definirao Eulerov pravac i Eulerovu kružnicu.

1736. godine Euler je riješio problem imena Sedam Königsbergovih mostova. Rješenje se smatra prvim teoremom teorije grafova. Također, otkrio je formulu

$$V(G) - E(G) + F(G) = 2$$

koja povezuje broj vrhova, bridova i strana konveksnog poliedra.

Euler je pomogao u razvoju Euler – Bernoullijeve jednadžbe grede koja je postala temelj inžinjerstva. Eulerov rad u astronomiji nagrađen je brojnim nagradama Pariške akademije tijekom njegove karijere. Eulerovi izračuni pridonijeli su razvoju točnih tablica dužina. Osim toga, dao je važan doprinos u optici.

Jedan od Eulerovih najneobičnijih interesa bila je primjena matematičkih ideja u glazbi. 1739. godine napisao je članak Tentamen novae theoriae musicae, nadajući se da će na kraju glazbenu teoriju uključiti kao dio matematike.

Leonhard Euler bio je izumitelj, istraživač i umjetnik. S entuzijazmom koji odjekuje čak i nakon dva stoljeća, Euler se upustio u nepoznate dijelove matematike. Kao i bilo koji veliki istraživač, ponekad je pogriješio i propustio neke važne zaključke. Međutim, Euler zaslužuje divljenje. Snažnom i neusporedivom maštom, prešao je mnoge matematičke granice. Euler je imao izvanredan um i omogućio nam je mnoge rezultate koji su pridonijeli razvoju suvremene matematike. Nijedan drugi matematičar nije dosegao poziciju vodećeg istraživača u svim granama matematike, bilo teorijske ili primijenjene, kao što je to Euler napravio u osamnaestom stoljeću.

LITERATURA

1. Bradley, R. E., Sandifer, C. Edward, *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, Elsevier, Nizozemska, 2007.
2. Calinger, R. S., *Leonhard Euler: Mathematical Genius in the Enlightenment*, Princeton University Press, Sjedinjene Američke Države, 2015.
3. Dakić, B., Leonhard Euler (1707. – 1783.), 1. dio, Matematika i škola 39, 2007.
4. Dakić, B., Leonhard Euler (1707. – 1783.), 2. dio, Matematika i škola 40, 2007.
5. Dunham, W., *Euler: The Master of Us All*, The Dolciani Mathematical Expositions, The Mathematical Association of America, Sjedinjene Američke Države, 1999.

POPIS SLIKA