Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Preddiplomski studij Matematika

Ana Fable

LINEARNE REKURZIJE

Završni rad

Rijeka, 8. srpnja 2022.

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Preddiplomski studij Matematika

Ana Fable

LINEARNE REKURZIJE

Završni rad

Mentor: dr.sc. Sara Ban

Rijeka, 8. srpnja 2022.

SAŽETAK

U ovom radu bavit ćemo se linearnim rekurzivnim relacijama reda k. Razlikovat ćemo homogene i nehomogene rekurzivne relacije. Navest ćemo neka njihova svojstva te opisati postupke nalaženja rješenja za obje vrste rekurzija. Sve navedeno objasnit će se na primjerima Fibonaccijevog niza i problema Hanojskih tornjeva, koji su ujedno i jedni od najpoznatijih problema riješenih rekurzijama. Na samom početku rada navest ćemo osnovne pojmove iz linearne algebre koje ćemo koristiti.

Ključne riječi: Niz, vektorski prostor, homogene i nehomogene rekurzivne relacije, Fibonaccijev niz, Hanojski tornjevi.

Sadržaj

1 UVOD

Rekurzija[1] je pojam koji u svojoj definiciji koristi sam taj pojam. U svakodnevnom se životu upotrebljava u različitim kontekstima. Primjerice, u fizici, dva ogledala koja stoje paralelno jedno nasuprot drugome prikazivat će ugniježđene slike, odnosno, sliku unutar slike koja se ponavlja beskonačno mnogo puta. Rekurzije se koriste i u književnosti (ugniježđene rečenice), muzici, filmu, informatici, računarstvu itd. U ovom radu govorit ćemo o linearnim rekurzijama u matematici.

S rekurzijama se ponajviše susrećemo u linearnoj algebri te kombinatornoj i diskretnoj matematici, ali su općenito primjenjive i u ostalim granama matematike.

Cilj ovog rada je pojasniti što su to linearne homogene i nehomogene rekurzije i kako se rješavaju. Koristit ćemo matrični oblik navedenih relacija te ćemo navesti dva zanimljiva primjera primjene rekurzija - Fibonaccijev problem zečeva i problem Hanojskih tornjeva.

[1] Riječ rekurzija dolazi od latinske riječi *recurrere*, što znači vraćanje.

2 OSNOVNI POJMOVI

Prije nego što krenemo s definiranjem rekurzivnih relacija, ponovit ćemo neke pojmove i tvrdnje iz linearne algebre koji će nam trebati u razumijevanju daljnjeg sadržaja ovog rada.
Dokazi svih tvrdnji iz potpoglavlja 2.1 i 2.3 se mogu pronaći u [7].

2.1 Vektorski prostori

Definicija 2.1.1 *Neka je V neprazan skup i $+ : V \times V \to V$ binarna operacija na V. Uređeni par $(V, +)$ naziva se **Abelova grupa** ako vrijedi:*

1. $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall a, b, c \in V,$
2. $(\forall a \in V) \ (\exists 0 \in V) \ a + 0 = 0 + a = a,$
3. $(\forall a \in V) \ (\exists -a \in V) \ a + (-a) = (-a) + a = 0,$
4. $a + b = b + a, \ \forall a, b \in V.$

Definicija 2.1.2 *Neka je $\mathbb{F}$ neprazan skup na kojemu su definirane binarne operacije $+$ i $\cdot$. Kažemo da je uređena trojka $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ **polje** ako vrijedi:*

1. $(\mathbb{F}, +)$ *je Abelova grupa,*
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{F},$
3. $(\forall a \in \mathbb{F}) \ (\exists 1 \in \mathbb{F}) \ \ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$
4. $(\forall a \in \mathbb{F} \backslash \{0\}) \ (\exists a^{-1} \in \mathbb{F} \backslash \{0\}) \ \ a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1,$
5. $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{F},$
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{F},.$

*Elemente polja $\mathbb{F}$ zovemo **skalarima**.*

Primjer 2.1.1 *Neka je $\mathbb{C}$ skup svih kompleksnih brojeva te $+$ i $\cdot$ operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva. Tada je $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje kojeg nazivamo* ***poljem kompleksnih brojeva****.*

Definicija 2.1.3 *Neka je $(V, +)$ Abelova grupa i $\mathbb{F}$ polje. Ako je zadano preslikavanje $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ (pišemo $\alpha \cdot a = \alpha a,\ \alpha \in \mathbb{F}, a \in V$) za koje vrijedi:*

1. $\alpha(\beta a) = (\alpha \cdot \beta)a,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall a \in V,$
2. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall a \in V,$
3. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b,\ \forall \alpha \in \mathbb{F},\ \forall a, b \in V,$
4. $1a = a,\ \forall a \in V,$

tada se uređena trojka $(V, +, \cdot)$ naziva ***vektorski prostor*** *nad poljem $\mathbb{F}$. Elemente skupa V zovemo* ***vektorima****.*

Primjer 2.1.2 *Neka je $\mathbb{C}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, n\}$ te neka su $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Neka je $+ : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ operacija definirana sa*

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

Neka je $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ operacija definirana sa

$$\alpha(a_1, \ldots, a_n) := (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

Uređena trojka $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$.

Definicija 2.1.4 ***Potprostor*** *vektorskog prostora $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$ je podskup $W \subseteq V$ koji je i sam vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ s obzirom na operacije $+$ i $\cdot$. U tom slučaju pišemo: $W \leq V$.*

Teorem 2.1.1 *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i W neprazni podskup od V. Tada je W potprostor vektorskog prostora V ako i samo ako vrijedi $\alpha a + \beta b \in W,\ \forall a, b \in W,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.*

Definicija 2.1.5 *Neka je V vektorski prostor i neka je $0_V \in V$ vektor sa svojstvom $a + 0_V = 0_V + a = a$, za svaki $a \in V$. Kažemo da je 0_V* ***nulvektor****.*

Definicija 2.1.6 *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Kažemo da je konačan skup vektora $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq V$, $k \in \mathbb{N}$,* ***linearno nezavisan*** *ako za $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ iz $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0_V$ slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.*
Kažemo da je beskonačan skup vektora iz V linearno nezavisan ako je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan.

Definicija 2.1.7 *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i S neprazan podskup od V.* ***Linearna ljuska skupa*** *S označava se sa $[S]$ i definira kao*

$$[S] = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{F},\ a_i \in S,\ k \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Definicija 2.1.8 *Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Kažemo da je S* ***skup izvodnica*** *za V ili da S* ***generira (razapinje)*** *prostor V ako je $[S] = V$.*

Definicija 2.1.9 *Skup B u vektorskom prostoru V se naziva* ***baza*** *za V ako je B linearno nezavisan skup izvodnica za V. Ako je broj vektora u bazi jednak n, kažemo da je n* ***dimenzija*** *vektorskog prostora V i pišemo $dim(V) = n$.*

Primjer 2.1.3 *Skup $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1))\}$ je baza vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$, $dim(\mathbb{C}^n) = n$.*

Teorem 2.1.2 *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada je $dim(V) = n$ ako i samo ako je svaki linearno nezavisan skup u V koji se sastoji od n vektora baza za prostor V.*

2.2 Linearni operatori i matrice

Definicija 2.2.1 *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $f : V \to W$ naziva se* ***linearni operator*** *ako vrijedi $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, za sve $x, y \in V$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.*

Definicija 2.2.2 *Linearni operator $f : V \to W$ je* ***izomorfizam vektorskih prostora*** *V i W ako je f bijekcija[2].*

Definicija 2.2.3 *Kažemo da su vektorski prostori V i W nad istim poljem $\mathbb{F}$* ***izomorfni*** *ako postoji izomorfizam tih vektorskih prostora.*

Dokaz sljedećeg teorema se može pronaći u [7].

Teorem 2.2.1 *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Vektorski prostori V i W su izomorfni ako i samo ako je dim(V)=dim(W).*

Definicija 2.2.4 *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Svako preslikavanje*

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$$

se naziva ***matrica*** *reda $m \times n$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Pišemo:*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

ili $A = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$, gdje je $A(i,j) = \alpha_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Skup svih matrica reda $m \times n$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ označava se s $M_{mn}(\mathbb{F})$.

[2]Funkcija $f : X \to Y$ je bijekcija ako za svaki element $y \in Y$ postoji jedinstveni element $x \in X$ tako da vrijedi $f(x) = y$.

Definicija 2.2.5 *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Matrica A je **kvadratna matrica** ako je $m = n$. Skup svih kvadratnih matrica reda $n \times n$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ označava se s $M_n(\mathbb{F})$.*

Napomena 2.2.1 *Neka su $A = [\alpha_{ij}]_{m\times n}, B = [\beta_{ij}]_{m\times n} \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $a \in \mathbb{F}$. Definiramo operacije $+ : M_{mn}(\mathbb{F}) \times M_{mn}(\mathbb{F}) \to M_{mn}(\mathbb{F})$ i $\cdot : \mathbb{F} \times M_{mn}(\mathbb{F}) \to M_{mn}(\mathbb{F})$ sa*

$$A + B := [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]_{m\times n}, \; aA := [a\alpha_{ij}]_{m\times n}.$$

Uređena trojka $(M_{mn}(\mathbb{F}), +, \cdot)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

Definicija 2.2.6 *Neka je S neprazan skup. Svaku bijekciju $p : S \to S$ zovemo **permutacijom skupa** S. Skup svih permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ označavamo sa S_n, $n \in \mathbb{N}$.*

Definicija 2.2.7 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p \in S_n$. Uređeni par (i, j) takav da je $i < j, \; p(i) > p(j)$, nazivamo **inverzija** u permutaciji p. Broj svih inverzija u permutaciji p označava se s $I(p)$.*

Definicija 2.2.8 *Neka je $p \in S_n$, a $I(p)$ broj inverzija u toj permutaciji. Definiramo funkciju $det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ sa:*

$$det(A) = \sum_{p\in S_n} (-1)^{I(p)} \alpha_{1p(1)}\alpha_{2p(2)} \ldots \alpha_{np(n)},$$

*za sve $A = [\alpha_{ij}]_{n\times n} \in M_n(\mathbb{F})$. Skalar $det(A) \in \mathbb{F}$ zovemo **determinanta matrice** A.*

Definicija 2.2.9 *Neka su $x_1, \ldots, x_n$ skalari iz polja $\mathbb{F}$. Matricu*

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

*nazivamo **Vandermondeova matrica** reda $n \times n$.*

Dokaz sljedećeg teorema se može pronaći u [10].

Teorem 2.2.2 *Neka su $x_1, \dots, x_n$ međusobno različiti skalari iz polja $\mathbb{F}$ te neka je $V_n(x_1, \dots, x_n)$ Vandermondeova matrica reda $n \times n$. Tada je $det(V_n(x_1, \dots, x_n)) \neq 0$.*

Definicija 2.2.10 *Kažemo da je $A = [\alpha_{ij}]_{n\times n} \in M_n(\mathbb{F})$ **dijagonalna** matrica ako je $\alpha_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$. Kažemo da je dijagonalna matrica $A = [\alpha_{ij}]_{n\times n}$ **jedinična** ako je $\alpha_{ii} = 1$, za sve $i = 1, \dots, n$. Jediničnu matricu reda $n \times n$ označavamo s I_n.*

Definicija 2.2.11 *Neka su $A = [\alpha_{ij}]_{m\times n} \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B = [\beta_{ij}]_{n\times p} \in M_{np}(\mathbb{F})$. **Produkt** matrica A i B je matrica $AB := [\gamma_{ij}]_{m\times p} \in M_{mp}(\mathbb{F})$, gdje je*

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj},$$

za sve $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$.

Definicija 2.2.12 *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. **Potencije matrice** A su definirane s:*

$$A^0 = I_n, \; A^m = A^{m-1}A, \; m \in \mathbb{N}.$$

Dokaz sljedeće propozicije se može pronaći u [7].

Propozicija 2.2.1 *Neka je $A = [\alpha_{ij}]_{n\times n} \in M_n(\mathbb{F})$ dijagonalna matrica. Tada je*

$$A^m = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn}^m \end{bmatrix}, \; m \in \mathbb{N}.$$

Definicija 2.2.13 *Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **regularna** ako postoji matrica $A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Matricu A^{-1} zovemo **inverzna matrica** matrice A.*

Dokaz sljedećeg teorema se može pronaći u [7].

Teorem 2.2.3 *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Matrica A je regularna ako i samo ako je $det(A) \neq 0$.*

Definicija 2.2.14 *Za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da su **slične** ako postoji regularna matrica $T \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $A = T^{-1}BT$.*

Matematičkom indukcijom se može pokazati da u tom slučaju vrijedi:

$$A^m = T^{-1}B^mT, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Definicija 2.2.15 *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ zovemo **svojstvenom vrijednošću matrice** A ako postoji vektor $v \in M_{n1}(\mathbb{F})$, različit od nulvektora, takav da je $Av = \lambda v$.*
*Svaki vektor $v \in M_{n1}(\mathbb{F})$, različit od nulvektora, koji zadovoljava uvjet $Av = \lambda v$, zovemo **svojstvenim vektorom matrice** A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.*
***Karakteristični polinom matrice** A je polinom*

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n).$$

***Karakteristična jednadžba matrice** A je jednadžba*

$$k_A(\lambda) = 0.$$

Dokaz sljedećeg teorema se može pronaći u [7].

Teorem 2.2.4 *Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ ako i samo ako je λ korijen karakteristične jednadžbe te matrice.*

Definicija 2.2.16 *Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da se može **dijagonalizirati** ako je slična dijagonalnoj matrici.*

Dokaz sljedećeg korolara se može pronaći u [7].

Korolar 2.2.1 *Ako matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti, tada se matrica A može dijagonalizirati.*

Napomena 2.2.2 *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ matrica koja ima n različitih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Neka su*

$$v_k = \begin{bmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{F}), \ \ k = 1, \dots, n,$$

svojstveni vektori matrice A redom pridruženi svojstvenim vrijednostima λ_k, $k = 1, \dots, n$. Neka je $T = [t_{ij}]_{n \times n}$. Tada je

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(više o ovome se može pronaći u [7], u potpoglavljima 10.9 i 10.10).

2.3 Sustavi linearnih jednadžbi

Definicija 2.3.1 ***Linearna jednadžba*** *nad poljem $\mathbb{F}$ u nepoznanicama $x_1, x_2 \dots, x_n$ je izraz oblika $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$, gdje su $\alpha_i, \beta \in \mathbb{F}$, $i = 1, \dots, n$.*

Definicija 2.3.2 ***Sustav od m linearnih jednadžbi*** *u nepoznanicama $x_1, x_2 \dots, x_n$ nad poljem $\mathbb{F}$ je skup linearnih jednadžbi oblika*

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array}\right\}, \tag{2.2}$$

gdje su α_{ij}*,* $\beta_i \in \mathbb{F}$*,* $i = 1, \ldots, m$*,* $j = 1, \ldots, n$*. Matricu*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

nazivamo ***matricom sustava*** (2.2)*.*
Ako je $m = n$ *i ako je* A *regularna matrica, kažemo da je sustav* (2.2) ***Cramerov****.*
Svaka uređena n*-torka* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ *koja zadovoljava sve jednadžbe sustava* (2.2) *zove se* ***rješenje sustava linearnih jednadžbi*** (2.2)*.*

Teorem 2.3.1 *Cramerov sustav ima jedinstveno rješenje.*

3 HOMOGENE LINEARNE REKURZIJE

3.1 Pojam homogenih linearnih rekurzija

Definicija 3.1.1 ***Niz kompleksnih brojeva*** *je svaka funkcija* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$,[3] *gdje je* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Kompleksni broj* $f(n-1)$ *zovemo* n*-tim članom niza* f, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 3.1.2 ***Homogena linearna rekurzija reda k*** *je relacija oblika*

$$f(n) = a_{n-1}f(n-1) + a_{n-2}f(n-2) + \cdots + a_{n-k}f(n-k), \quad (3.3)$$

$$\textit{gdje je } k \in \mathbb{N}, a_{n-i} \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, k.$$

Kažemo da je relacija (3.3) homogena jer je možemo napisati u obliku

$$0 = -f(n) + a_{n-1}f(n-1) + a_{n-2}f(n-1) + \cdots + a_{n-k}f(n-k)$$

te da je reda k jer, ukoliko su nam poznati kompleksni brojevi $f(0), \ldots, f(k-1)$, koje nazivamo **početnim uvjetima**, možemo izračunati i $f(n)$, za sve $n \geq k$.

Primjer 3.1.1 *Promotrimo homogenu linearnu rekurziju reda 2*

$$f(n) = f(n-1) + 2f(n-2),$$

[3] Niz kompleksnih brojeva se može definirati i kao funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

s početnim uvjetima: $f(0) = 0, f(1) = 1$*. Početni uvjeti nam daju prva dva člana niza* f*. Izačunajmo nekoliko sljedećih članova niza:*

$$f(2) = f(1) + 2f(0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1,$$
$$f(3) = f(2) + 2f(1) = 1 + 2 \cdot 1 = 3,$$
$$f(4) = f(3) + 2f(2) = 3 + 2 \cdot 1 = 5.$$

Kako bismo, primjerice, izračunali stoti član, $f(99)$*, niza* f*? Trebali bismo najprije računati redom svih 99 članova koji mu prethode. U nastavku ćemo vidjeti brži način za ovaj izračun.*

3.2 Prostor rješenja homogene linearne rekurzije reda k

Neka je $V = \{f \mid f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}\}$. V je vektorski prostor svih nizova kompleksnih brojeva nad poljem $\mathbb{C}$ sa standardnim zbrajanjem $+ : V \times V \to V$ i množenjem funkcija skalarom iz $\mathbb{C}$.

Promotrimo homogenu linearnu rekurzivnu relaciju reda k (3.3) te neka je

$$S = \{f \in V \mid f \text{ zadovoljava relaciju (3.3) bez zadanih početnih uvjeta}\}.$$

Za skup S vrijedi sljedeće.

(i) Funkcija $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ takva da je $f(n) = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, zadovoljava relaciju (3.3), pa je skup S neprazan.

(ii) S je potprostor vektorskog prostora V. Naime, ako su $f_1, f_2 \in S$, tada vrijedi:

$$-(f_1+f_2)(n)+a_{n-1}\cdot(f_1+f_2)(n-1)+\cdots+a_{n-k}\cdot(f_1+f_2)(n-k) =$$
$$= (-f_1(n) + a_{n-1} \cdot f_1(n-1) + \cdots + a_{n-k} \cdot f_1(n-k))+$$
$$+(-f_2(n) + a_{n-1} \cdot f_2(n-1) + \cdots + a_{n-k} \cdot f_2(n-k)) =$$
$$= 0 + 0 = 0,$$

pa je $f_1 + f_2 \in S$.

Neka je $f \in S$ i $r \in \mathbb{C}$. Vrijedi:

$$-(r \cdot f)(n) + a_{n-1} \cdot (r \cdot f)(n-1) + \cdots + a_{n-k} \cdot (r \cdot f)(n-k) =$$

$$= r \cdot (-f(n) + a_{n-1} \cdot f(n-1) + \cdots + a_{n-k} \cdot f(n-k)) =$$

$$= r \cdot 0 = 0,$$

pa je $r \cdot f \in S$.

Dakle, prema teoremu 2.1.1, S je vektorski potprostor od V.

Nađimo dimenziju od S. Definirajmo preslikavanje $L : S \to \mathbb{C}^k$ sa

$$f \mapsto \big(f(0), f(1), \ldots, f(k-1)\big).$$

Pokažimo da je tako definirano preslikavanje L linearni operator. Neka su $f_1, f_2 \in S, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ proizvoljni. Tada je:

$$\alpha L(f_1) + \beta L(f_2) =$$

$$= \alpha\big(f_1(0), f_1(1), \ldots, f_1(k-1)\big) + \beta\big(f_2(0), f_2(1), \ldots, f_2(k-1)\big) =$$

$$= \big(\alpha \cdot f_1(0) + \beta \cdot f_2(0), \alpha \cdot f_1(1) + \beta \cdot f_2(1), \ldots, \alpha \cdot f_1(k-1) + \beta \cdot f_2(k-1)\big) =$$

$$= \big((\alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2)(0), (\alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2)(1), \ldots, (\alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2)(k-1)\big) =$$

$$= L(\alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2).$$

Bilo koje rješenje relacije (3.3) jednoznačno je određeno s k početnih uvjeta, pa je preslikavanje L bijekcija. Prema tome, L je izomorfizam vektorskih prostora S i $\mathbb{C}^k$. Dakle, prema teoremu 2.2.1, dimenzija vektorskog prostora S je k.

Pronađimo bazu potprostora S. Zapišimo relaciju (3.3) u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} f(n) \\ f(n-1) \\ \vdots \\ f(n-k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_{n-k+1} & a_{n-k} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \\ \vdots \\ f(n-k) \end{bmatrix}.$$

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_{n-k+1} & a_{n-k} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$v_n = \begin{bmatrix} f(n) \\ f(n-1) \\ \vdots \\ f(n-k+1) \end{bmatrix}.$$

Tada je $v_n = Av_{n-1}$ te vrijedi

$$v_n = A^{n-k+1} v_{k-1}. \tag{3.4}$$

Može se pokazati da je

$$k_A(\lambda) = \pm(-\lambda^k + a_{n-1}\lambda^{k-1} + a_{n-2}\lambda^{k-2} + \cdots + a_{n-k+1}\lambda + a_{n-k}). \tag{3.5}$$

Kažemo da je polinom (3.5) pridružen relaciji (3.3).

Ako karakteristični polinom $k_A(\lambda)$ nema višestrukih nultočaka, po korolaru 2.2.1 slijedi da se matrica A može dijagonalizirati. U tom slučaju je $A = TDT^{-1}$, za matrice T i D opisane u napomeni 2.2.2. Prema (2.1) i (3.4) dobivamo: $A^{n-k+1} = TD^{n-k+1}T^{-1}$ i

$$\begin{bmatrix} f(n) \\ f(n-1) \\ \vdots \\ f(n-k+1) \end{bmatrix} = TD^{n-k+1}T^{-1} \begin{bmatrix} f(k-1) \\ f(k-2) \\ \vdots \\ f(0) \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

iz čega možemo dobiti formulu za $f(n)$.

U nastavku navodimo drugi način za određivanje formule za $f(n)$.

Ukoliko pronađemo k linearno nezavisnih funkcija koje zadovoljavaju relaciju (3.3), tada će skup tih funkcija generirati cijeli prostor $S = \{f \in V \mid f \text{ zadovoljava relaciju (3.3) bez zadanih početnih uvjeta}\}$.
Pretpostavimo da su $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{C}$ međusobno različite nultočke karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$ matrice A. Kako je $k_A(0) = a_{n-k}$, vrijedi da je $r_i \neq 0,\ \forall i = 1, \ldots, k$.
Promotrimo funkcije $f_{r_i} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C},\quad f_{r_i}(n) = r_i^n,\ i = 1, \ldots, k$. Pokazat ćemo da je skup

$$\{f_{r_1}, f_{r_2}, \ldots, f_{r_k}\}$$

baza prostora S.

Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ te neka je

$$\alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n + \cdots + \alpha_k \cdot r_k^n = 0,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.7}$$

Dobivamo sustav od prebrojivo mnogo jednadžbi s nepoznanicama $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Promotrimo prvih k jednadžbi sustava (3.7), odnosno sustav

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 \cdot r_1^0 + \alpha_2 \cdot r_2^0 + \cdots + \alpha_k \cdot r_k^0 = 0 \\ \alpha_1 \cdot r_1^1 + \alpha_2 \cdot r_2^1 + \cdots + \alpha_k \cdot r_k^1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot r_1^2 + \alpha_2 \cdot r_2^2 + \cdots + \alpha_k \cdot r_k^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \cdot r_1^{k-1} + \alpha_2 \cdot r_2^{k-1} + \cdots + \alpha_k \cdot r_k^{k-1} = 0 \end{array}\right\}. \tag{3.8}$$

Matrica sustava (3.7) je Vandermondeova matrica $V(r_1, \ldots, r_k)$. Kako su $r_1, r_2, \ldots, r_k$ međusobno različiti kompleksni brojevi, prema teoremu 2.2.2 slijedi da je $det(V(r_1, \ldots, r_k)) \neq 0$. Dakle, sustav (3.7) ima jedinstveno rješenje $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = (0, 0, \ldots, 0)$ pa je skup $\{f_{r_1}, f_{r_2}, \ldots, f_{r_k}\}$ linearno nezavisan.
Niz $f_{r_1}(n) = r_1^n$ je rješenje relacije (3.3) ako i samo ako vrijedi

$$r_1^n = a_{n-1} r_1^{n-1} + a_{n-2} r_1^{n-2} + \cdots + a_{n-k} r_1^{n-k}. \tag{3.9}$$

Dijeleći jednadžbu (3.9) s r_1^{n-k} dobivamo:

$$r_1^k - a_{n-1}r_1^{k-1} - a_{n-2}r_1^{k-2} - \cdots - a_{n-k} = 0. \tag{3.10}$$

Kako vrijedi

$$k_A(r_1) = 0,$$

vrijedi i (3.10), pa je onda $f_{r_1}(n) = r_1^n$ rješenje relacije (3.3). Analogno se pokaže da i ostale funkcije $f_{r_i}(n) = r_i^n$, $i = 2, 3, \ldots, k$ zadovoljavaju relaciju (3.3).
Stoga je, prema teoremu 2.1.2, skup $\{f_{r_1}, f_{r_2}, \ldots, f_{r_k}\}$ baza prostora S. Proizvoljan niz $f \in S$ je oblika:

$$f(n) = c_1\, r_1^n + c_2\, r_2^n + \cdots + c_k\, r_k^n, \tag{3.11}$$

za neke skalare $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$.

Uvrstimo li početne uvjete $f(0), \ldots, f(k-1)$ u (3.11), dobit ćemo sustav

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 + \ \ldots\ + c_k r_k^0 \\ f(1) &= c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1 + \ \ldots\ + c_k r_k^1 \\ &\ \vdots \\ f(k-1) &= c_1 r_1^{k-1} + c_2 r_2^{k-1} + \ \ldots\ + c_k r_k^{k-1} \end{aligned}\right\}, \tag{3.12}$$

Sustav (3.12) je sustav od k linearnih jednadžbi s nepoznanicama $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Matrica sustava (3.12) je matrica $V(r_1, \ldots, r_k)$ koja je regularna pa je rješenje $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ sustava (3.12) jedinstveno.

O postupku rješavanja u slučaju kada karakteristični polinom matrice A ima višestruke nultočke može se pročitati u [9].

3.3 Fibonaccijev niz

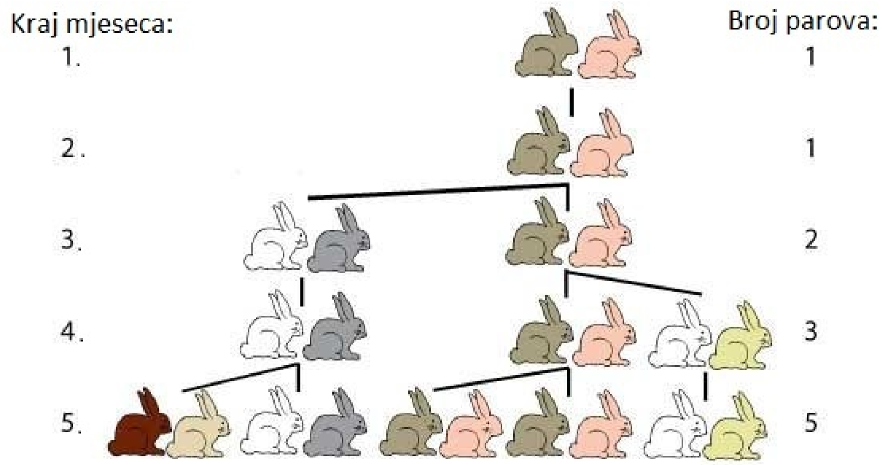
Leonardo Bonacci (1170.-1250.), poznatiji pod imenom Fibonacci[4] ili Leonardo od Pise je bio talijanski matematičar, jedan od najtalentiranijih matematičara srednjeg vijeka. 1202. godine Fibonacci

[4] Fibonacci je skraćenica za *filius Bonacci* (Bonaccijev sin).

je postavio ***problem zečeva***:

Neki čovjek stavi par zečeva (muško-žensko) u ograđeni prostor. Svaki mjesec od svakog para zečeva nastane jedan novi par (muško-žensko). Zečevi moraju navršiti barem dva mjeseca da bi se mogli početi razmnožavati. Koliko će taj čovjek imati parova zečeva nakon godine dana?

Rješenje: Promotrimo sliku 3.1.



Slika 3.1: Fibonaccijev problem zečeva

Na kraju prvog mjeseca imamo jedan par zečeva. Na kraju drugog mjeseca imamo par odraslih zečeva koji se mogu početi razmnožavati. Na kraju trećeg mjeseca imamo prvi par zečeva i par novorođenih zečeva (ukupno dva para zečeva). Na kraju četvrtog mjeseca imat ćemo dva para zečeva iz prošlog mjeseca te jedan novi par koji je nastao od prvog para zečeva (ukupno tri para zečeva). Na kraju petog mjeseca imamo tri para iz prošlog mjeseca, te još dva nova para od dva para odraslih zečeva iz prošlog mjeseca (ukupno pet parova zečeva). Vidimo da se ukupni broj parova zečeva u nekom mjesecu može izračunati kao zbroj parova koji su bili živi u prošlom mjesecu i parova koji su u prošlom mjesecu bili odrasli, odnosno, ukupan broj parova zečeva u nekom mjesecu jednak je zbroju ukupnih brojeva parova iz prethodna dva mjeseca. Dakle, vrijedi:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \tag{3.13}$$

gdje $F(n)$ označava broj parova zečeva nakon n mjeseci. Relacija (3.13) je homogena linearna rekurzija reda 2. Početni uvjeti su: $F(0) = 0$ i $F(1) = 1$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Tablica 3.1: Broj parova zečeva nakon n mjeseci

U tablici 3.1 vidimo kako se broj parova zečeva mijenja kroz 12 mjeseci. Dakle, odgovor na Fibonaccijev problem zečeva je 144.

U potpoglavlju 3.2 smo vidjeli kako možemo dobiti formulu za $F(n)$ bez računanja prethodnih članova niza F.

Zapišimo relaciju (3.13) u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(n-1) \\ F(n-2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F(1) \\ F(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $v_n = \begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix}$. Tada je:

$$v_n = A^{n-1} v_1, \tag{3.14}$$

za $n \in \mathbb{N}$.

Karakteristični polinom matrice A je $k_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$. k_A ima nultočke

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ i } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Formulu za $F(n)$ izračunat ćemo na dva načina:

1. pomoću (3.6),
2. pomoću (3.9).

1. Kako matrica $A \in M_2(\mathbb{C})$ ima dvije različite svojstvene vrijednosti, po korolaru 2.2.1 slijedi da se matrica A može dijagonalizirati.

   Pronađimo svojstvene vektore matrice A. Kako je $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ svojstvena vrijednost matrice A, vrijedi:

$$Av = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, v,$$

   gdje je $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ svojstveni vektor matrice A. Dalje vrijedi:

$$\left(A - \frac{1+\sqrt{5}}{2} I_2\right) v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Rješenje ovog sustava je

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} x_2,\ \ x_2 \in \mathbb{C}.$$

   Analogno dobivamo da su svojstveni vektori matrice A pridruženi svojstvenoj $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ jednaki

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} y_2,\ \ y_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

   Tada je

$$A = TDT^{-1},$$

   gdje je

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix}.$$

Dakle, iz (3.14) slijedi

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} &= A^{n-1} \begin{bmatrix} F(1) \\ F(0) \end{bmatrix} \\
&= (TD^{n-1}T^{-1}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= T \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Stoga, za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \right].$$

2. Prema (3.11) bilo koje rješenje relacije (3.13) je oblika:

$$F(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n},$$

za neke $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Iskoristimo početne uvjete:

$$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0,$$

$$F(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} c_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} c_2 = 1,$$

pa riješimo sustav

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} c_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} c_2 &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Dobivamo $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ i formulu

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \right], \; n \in \mathbb{N}_0.$$

4 NEHOMOGENE LINEARNE REKURZIJE

4.1 Pojam nehomogenih linearnih rekurzija

Definicija 4.1.1 ***Nehomogena linearna rekurzija reda*** k *je relacija oblika:*

$$f(n) = a_{n-1}f(n-1) + a_{n-2}f(n-2) + \cdots + a_{n-k}f(n-k) + b(n), \tag{4.15}$$
$$k \in \mathbb{N},\ a_{n-i} \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, k,$$

gdje je $b : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ *niz takav da je* $b(n) \neq 0$*, za neki* $n \in \mathbb{N}_0$*. Relaciju*

$$f(n) = a_{n-1}f(n-1) + a_{n-2}f(n-2) + \cdots + a_{n-k}f(n-k)$$

zovemo ***pripadnom homogenom rekurzijom nehomogene rekurzije*** (4.15)*.*

U nastavku je opisan postupak rješavanja linearne rekurzije (4.15) o kojemu se više može pročitati u [10] i [11].
Najprije pronađemo rješenje $f_1(n)$ pripadne homogene rekurzije. To rješenje zovemo **općim rješenjem** nehomogene rekurzije (4.15). Zatim odredimo rješenje $f_2(n)$ koje ovisi o funkciji $b(n)$. To rješenje zovemo **partikularnim rješenjem** nehomogene rekurzije (4.15). Do partikularnog rješenja dolazimo na sljedeći način. Neka su $A, B, C, k, p \in \mathbb{C}$ te neka P_k, Q_k, Q_p označavaju polinome u varijabli n stupnja k, k i p redom. U tablici 4.2 navedeno je čemu je

jednako partikularno rješenje $f_2(n)$ nehomogene rekurzije (4.15) u ovisnosti o funkciji $b(n)$.

$b(n)$	C	$C \cdot n$	$P_k(n)$	$C \cdot b^n$	$n^p \cdot a^n$
$f_2(n)$	A	$A \cdot n + B$	$Q_k(n)$	$A \cdot b^n$	$a^n \cdot Q_p(n)$

Tablica 4.2: Partikularno rješenje nehomogene rekurzije (4.15)

Rješenje rekurzije (4.15) je $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$.

4.2 Tornjevi Hanoja

Francuski matematičar Edouard Lucas (1842.-1891.) 1883. godine postavio je poznati ***problem Hanojskih tornjeva***:

U velikom hramu Benares, ispod kupole koja označuje centar svijeta, nalazi se mjedena ploča u koju su postavljene tri dijamantne igle, svaka lakat visoka i široka poput tijela pčele. Na jednu od tih igala, pri stvaranju svijeta, Bog je postavio 64 zlatnih diskova, tako da najveći disk leži na mjedenoj ploči, a ostali diskovi leže na njemu, poredani po veličini na način da je najmanji disk na vrhu. Ovako posloženi diskovi na prvoj dijamantnoj igli nazivaju se Brahma tornjem. Svećenici danju i noću neprestano premiještaju diskove s jedne dijamantne igle na drugu, tako da svećenik koji je na dužnosti smije premjestiti samo jedan disk i ispod tog diska ne smije biti manji disk. Kada se svih 64 diskova presloži s prve igle, toranj i hram će se urušiti i svijet će uz grmljavinu nestati.

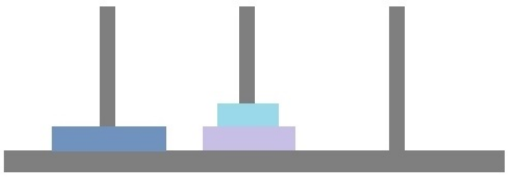
Pitanje kojim ćemo se ovdje baviti jest koliko poteza (pomicanja diskova) će biti potrebno da se svi diskovi preslože s jedne igle na drugu na traženi način.

Za početak ćemo krenuti od trivijalnih slučajeva. U slučaju jednog diska trebat će nam jedan potez. U slučaju dva diska, manji disk ćemo premjestiti na srednju iglu, veći disk na zadnju iglu i zatim manji disk staviti na veći. To su ukupno tri poteza.

Sada ćemo razriješiti slučaj s tri diska. Na početku su sva tri diska na prvoj igli kao na slici 4.2.

Slika 4.2: Toranj Hanoja u slučaju tri diska

Najmanji disk stavimo na zadnju iglu, srednji disk stavimo na srednju iglu i zatim najmanji disk stavimo na srednji disk, kao na slici 4.3.



Slika 4.3: Položaj diskova nakon prva tri poteza

Sada najveći disk stavimo na zadnju iglu. Najmanji disk preselimo na prvu iglu, a srednji disk na najveći disk. Preostaje još zadnji potez, staviti najmanji disk na srednji disk. Sada su sva tri diska premještena na treću iglu i poredana po veličini kao na početku. Trebalo nam je ukupno sedam poteza za to učiniti.

Promotrimo sada slučaj s n diskova. Označimo s $T(n)$ broj poteza koji su nam potrebni za premještaj n diskova s prve igle na zadnju uz zadane uvjete. Primijetimo da smo u slučaju s tri diska najprije morali premjestiti sve diskove osim najvećeg na srednju iglu, zatim najveći disk na zadnju iglu, a onda opet sve diskove osim najvećeg preseliti na zadnju iglu. U slučaju n diskova, najprije ćemo morati premjestiti $n-1$ diskova na srednju iglu (to će biti pomoćni toranj), zatim najveći disk staviti na zadnju iglu i onda još jednom preseliti $n-1$ disk na kraj. To znači da će broj poteza potrebnih za premještaj n diskova biti jednak zbroju broja poteza potrebnih za premještaj $n-1$ diska, još jednom potezu za premještaj najvećeg diska te ponovno broju poteza za premještaj $n-1$ diska. Na taj način dobivamo rekurzivnu formulu:

$$T(n) = T(n-1) + 1 + T(n-1) = 2T(n-1) + 1. \tag{4.16}$$

To je nehomogena rekurzivna relacija reda 1, gdje je $b(n) = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$.[5] Početni uvjet će biti $T(1) = 1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Tablica 4.3: Broj poteza za premještaj n diskova

U tablici 4.3 prikazane su vrijednosti $T(n)$ za $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Primijetimo da je broj $T(n)$ za jedan manji od n-te potencije broja 2.

Riješimo sada rekurziju (4.16) zajedno s početnim uvjetom $T(1) = 1$ postupkom opisanim u poglavlju 4.1. Zapišimo je u obliku:

$$-1 = -T(n) + 2T(n-1).$$

Najprije riješimo pripadnu homogenu rekurziju:

$$0 = -T(n) + 2T(n-1). \tag{4.17}$$

Relacija (4.17) je linearna homogena rekurzivna relacija reda 1. Njezin matrični oblik je: $\begin{bmatrix} T(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(n-1) \end{bmatrix}$. Neka je $A =$

[5] Ovdje promatramo niz $T : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

$\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$. Karakteristični polinom matrice A je $k_A(\lambda) = -\lambda + 2$. Svojstvena vrijednost matrice A je $\lambda_1 = 2$. Dakle, opće rješenje rekurzije (4.16) je

$$T_1(n) = c_1 \cdot 2^n,$$

za neki $c_1 \in \mathbb{C}$. Prema tablici 4.2, partikularno rješenje rekurzije (4.16) je oblika

$$T_2(n) = A,$$

gdje je $A \in \mathbb{C}$. Rješenje rekurzije (4.16) je:

$$T(n) = c_1 \cdot 2^n + A.$$

Uvrstimo li partikularno rješenje $T_2(n) = A$ u rekurziju (4.16) dobijemo:

$$A = 2A + 1,$$

odnosno

$$A = -1.$$

Dakle, imamo

$$T(n) = c_1 \cdot 2^n - 1.$$

Preostaje nam odrediti skalar c_1. Kako je $T(1) = 1$, imamo:

$$2c_1 - 1 = 1,$$

odnosno $c_1 = 1$. Konačno, dobivamo rješenje rekurzije (4.16):

$$T(n) = 2^n - 1, \; n \in \mathbb{N}, \tag{4.18}$$

što znači da je potrebno $2^n - 1$ poteza za premještaj n diskova na traženi način.

Da bi odgovorili na problem Hanojskih tornjeva, trebamo izračunati koliko je potrebno poteza za premještaj 64 diskova, odnosno, tražimo broj $T(64)$. Iz (4.18) dobivamo

$$T(64) = 2^{64} - 1 = 18446744073709551616,$$

odnosno približno 18 kvintilijuna poteza. Kada bi za premještaj jednog diska bila potrebna jedna mikrosekunda (što je nemoguće), rješavanje problema Hanojskih tornjeva potrajalo bi više od 5000 stoljeća.

5 ZAKLJUČAK

U radu smo objasnili pojam linearne rekurzije. Najprije smo naveli osnovne pojmove i tvrdnje koji se koriste u radu, a koji su ključni u razumijevanju teme. Definirali smo homogenu linearnu rekurzivnu relaciju reda k, naveli neka njena svojstva te tražili njeno rješenje. Pritom smo koristili matrični oblik relacije. Skup rješenja relacije promatrali smo kao vektorski prostor. Pokazali smo da je baza vektorskog prostora rješenja relacije skup n-tih potencija različitih nultočki karakterističnog polinoma pridruženog relaciji. Pokazali smo kako, koristeći bazu prostora rješenja relacije, možemo dobiti jedinstveno rješenje relacije ukoliko znamo k početnih uvjeta. Vidjeli smo da se rješenje relacije može pronaći i pomoću dijagonalizacije koristeći matrični zapis.
Objasnili smo postupak nalaženja rješenja rekurzivnih relacija na primjeru Fibonaccijevog niza. Također smo pojasnili i pojam nehomogene rekurzivne relacije reda k te postupak nalaženja njezinog rješenja, što smo potkrijepili primjerom problema Hanojskih tornjeva.

POPIS TABLICA

POPIS SLIKA

LITERATURA

[1] Antoliš, S., Copić, A., *Matematika 4*, 2. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[2] Bakić, D., *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] *Fibonacci*, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci (23.3.2021.).

[4] *Fibonaccijev niz*, FER Repozitorij, URL: https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/diskont1-06.pdf (15.3.2021.).

[5] Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O., *Concrete mathematics - A foundation for computer science*, 2. izdanje, Addison-Wesley Publishing Company, SAD, 1994.

[6] Hefferon, J., *Linear algebra*, 4th edition, URL: http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/book.pdf. (20.10.2021.).

[7] Horvatić, K., *Linearna algebra*, 9. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[8] *Rekurzija*, FER repozitorij, URL: https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/diskont1-07.pdf (15.3.2021.).

[9] *Što znači rekurzija*, URL: https://beasthackerz.ru/hr/odnoklassniki/chto-znachit-rekursiya-rekursiya-i-rekursivnye-algoritmy-analiz.htmlhttps://beasthackerz.ru/hr/odnoklassniki/chto-znachit-rekursiya-rekursiya-i-rekursivnye-algoritmy-analiz.html (21.3.2021.).

[10] Veljan, D., *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[11] Žubrinić, D., *Diskretna matematika*, 2. izdanje, Element, 2002.