Djelovanja grupa na stablima

Kovačić, Ivan Lovro

Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci
Diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Djelovanja grupa na stablima

Ivan Lovro Kovačić

Diplomski rad

Rijeka, 2023.

Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci
Diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Djelovanja grupa na stablima

Ivan Lovro Kovačić

Mentor: doc. dr. sc. Vera Tonić

Diplomski rad

Rijeka, 2023.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su djelovanja grupa na stablima. Definirat ćemo Fareyev graf i Fareyev kompleks pomoću kojih ćemo uvesti Fareyevo stablo. Navest ćemo primjere djelovanja grupa na Fareyev graf i Fareyevo stablo. Definirat ćemo slobodno djelovanje grupe na stablo i dokazati teorem koji kaže da je grupa G izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako ona djeluje slobodno na neko stablo $\mathcal{T}$. Konstruirat ćemo beskonačno mnogo grupa koje djeluju slobodno na Fareyevo stablo.

Ključne riječi

Graf, stablo, djelovanje grupe, Fareyev graf, Fareyev kompleks, Fareyevo stablo, slobodna grupa, slobodno djelovanje grupe na stablo.

Sadržaj

Uvod

Cilj rada je konstruirati Fareyevo stablo, pokazati kako specijalna linearna grupa djeluje na Fareyevo stablo i dokazati teorem koji pokazuje vezu između slobodnog djelovanja grupe na stablo i slobodne grupe. U prvom poglavlju ćemo definirati grafove i pokazati osnovna svojstva grafova koja će nam biti potrebna, te ćemo uvesti djelovanja grupa na skup i na graf. U drugom poglavlju ćemo konstruirati Fareyev graf, te navesti primjer djelovanja grupe na Fareyev graf. Zatim ćemo definirati Fareyev kompleks pomoću kojega ćemo uvesti Fareyevo stablo i navesti primjer djelovanja grupe na Fareyevo stablo. Na kraju drugog poglavlja ćemo pokazati vezu između Fareyevog grafa i Fareyevog niza. U trećem poglavlju ćemo dokazati teorem koji kaže da je grupa G izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako ona djeluje slobodno na neko stablo $\mathcal{T}$. Prije nego što dokažemo taj teorem, uvest ćemo pojmove metrike najkraćeg puta, podgrupe generirane podskupom i slobodne grupe. Na kraju ćemo pokazati vezu između slobodnog djelovanja grupe i Fareyevog stabla. Naime, navest ćemo beskonačno mnogo podgrupa specijalne linearne grupe koje djeluju slobodno na Fareyevo stablo.

1. Osnovni pojmovi

1.1. Grafovi

U ovom potpoglavlju navodimo osnovne pojmove vezane uz grafove koji će nam trebati [3].

Definicija 1.1.1 ***Graf*** *$\mathcal{G}$ je uređena trojka $\mathcal{G} = (\mathcal{V}(\mathcal{G}), \mathcal{E}(\mathcal{G}), \psi_{\mathcal{G}})$, gdje je $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ neprazan skup čije elemente zovemo* ***vrhovi*** *grafa $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ skup disjunktan s $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ čije elemente zovemo* ***bridovi*** *grafa $\mathcal{G}$ i $\psi_{\mathcal{G}}$* ***funkcija incidencije*** *koja svakom bridu grafa $\mathcal{G}$ pridružuje ne uređeni par (ne nužno različitih) vrhova grafa $\mathcal{G}$.*

Definicija 1.1.2 *Vrhovi u i v grafa $\mathcal{G}$ su* ***susjedni*** *ako postoji brid e grafa $\mathcal{G}$ takav da je $\psi_{\mathcal{G}}(e) = (u, v)$. Kažemo da su u i v* ***krajevi*** *brida e.*

Definicija 1.1.3 *Graf $\mathcal{H}$ je* ***podgraf*** *grafa $\mathcal{G}$ ako je $\mathcal{V}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{G})$ i $\psi_{\mathcal{H}}$ je restrikcija od $\psi_{\mathcal{G}}$ na $\mathcal{E}(\mathcal{H})$.*

Definicija 1.1.4 ***Šetnja*** *W u grafu $\mathcal{G}$ od vrha v_0 do vrha v_n je niz vrhova*

$$(v_0, v_1, \ldots, v_n)$$

takav da su vrhovi v_{i-1} i v_i susjedni, za sve $i = 1, \ldots, n$. ***Duljina*** *šetnje je broj n. Ako je $v_i \neq v_j$, za sve $i \neq j$, onda šetnju zovemo* ***put***. *Šetnja duljine 0, koja se sastoji od samo jednog vrha i nema bridova, zove se* ***konstantni put***. ***Inverzni*** *put puta $P: (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ je put $P': (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1, v_0)$. Za proizvoljne puteve $P_1: (u_0, \ldots, u_n)$ i $P_2: (v_0, \ldots, v_n)$ grafa $\mathcal{G}$, put $P_{12}: (u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n)$ zove su* ***konkatenacija*** *puteva P_1 i P_2. Put u grafu $\mathcal{G}$ od vrha u do vrha v kraće zovemo (u, v)-put u $\mathcal{G}$.* ***Ciklus*** *je šetnja pozitivne duljine u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti osim početnog i krajnjeg.*

Definicija 1.1.5 *Vrhovi u i v grafa $\mathcal{G}$ su* ***povezani*** *ako postoji (u, v)-put u $\mathcal{G}$.*

Lema 1.1.6 *Relacija $\sim$ definirana na skupu vrhova $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ grafa $\mathcal{G}$ s*

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists(u, v) - put \text{ u } \mathcal{G},$$

je relacija ekvivalencije na $\mathcal{V}(\mathcal{G})$.

Definicija 1.1.7 *Klase ekvivalencije s obzirom na relaciju $\sim$ iz leme 1.1.6 zovemo **komponente povezanosti** grafa $\mathcal{G}$. Graf $\mathcal{G}$ je **povezan** ako ima točno jednu komponentu povezanosti.*

Definicija 1.1.8 *Povezan graf bez ciklusa zove se **stablo**.*

Korisna će nam biti sljedeća karakterizacija stabla.

Lema 1.1.9 *Graf $\mathcal{T}$ je stablo ako i samo ako su svaka dva vrha grafa $\mathcal{T}$ povezana jedinstvenim putem.*

1.2. Djelovanje grupe

Sada navodimo osnovne definicije i rezultate vezane za djelovanja grupa [1].

Definicija 1.2.1 *Grupa G **djeluje** na skup Ω ako postoji preslikavanje $. : G \times \Omega \to \Omega$, u oznaci $.(g, \omega) = g.\omega$, $\forall g \in G$, $\forall \omega \in \Omega$, takvo da vrijedi:*

(1) *$e.\omega = \omega$, $\forall \omega \in \Omega$, gdje je $e \in G$ neutralni element grupe G,*

(2) *$g_1.(g_2.\omega) = (g_1 g_2).\omega$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall g_1, g_2 \in G$.*

*Preslikavanje $. : G \times \Omega \to \Omega$ koje zadovoljava svojstva (1) i (2) zovemo **djelovanje grupe** G **na skup** Ω.*

Definicija 1.2.2 *Neka grupa G djeluje na skup Ω i neka je $\omega \in \Omega$ proizvoljan. Skup*

$$G.\omega = \{g.\omega | g \in G\}$$

*zove se **orbita** elementa ω s obzirom na djelovanje $.$ grupe G na skup Ω. Za podskup $S \subseteq \Omega$ i proizvoljan $g \in G$, definiramo skup*

$$g.S = \{g.s | s \in S\}$$

i kraće označavamo s $gS = g.S$.

Navedimo sada jedan primjer djelovanja grupe na skup.

Primjer 1.2.3 *Neka je zadana grupa* $SL(2,\mathbb{Z})$ *(specijalna linearna grupa reda 2 nad* $\mathbb{Z}$*, odnosno grupa svih matrica iz* $M_2(\mathbb{Z})$ *s determinantom jednakom 1, i operacijom množenja matrica) i skup* $\mathbb{Z}^2$*. Definirajmo preslikavanje* $\boldsymbol{.} : SL(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ *s*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{.} (x,y) = (ax+by, cx+dy),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{.} (x,y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

(gdje vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *zamjenjuje točku* (x,y)*), za sve* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *i sve* $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$*. Tvdimo da je ovako definirano preslikavanje djelovanje grupe. Naime, preslikavanje* $\boldsymbol{.}$ *je dobro definirano, jer je* $(ax+by, cx+dy) \in \mathbb{Z}^2$*, za sve* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *i sve* $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$*. Pokažimo sada da preslikavanje* $\boldsymbol{.}$ *zadovoljava svojstva djelovanja grupe. Za neutralni element* $I \in SL(2,\mathbb{Z})$ *je*

$$I \boldsymbol{.} (x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{.} (x,y) = (x+0, 0+y) = (x,y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Za proizvoljne $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *je*

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{.}(B\boldsymbol{.}(x,y)) &= A\boldsymbol{.}\left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{.} (x,y)\right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{.} (b_1x+b_2y, b_3x+b_4y) = \\ &= (a_1b_1x + a_1b_2y + a_2b_3x + a_2b_4y, a_3b_1x + a_3b_2y + a_4b_3x + a_4b_4y). \end{aligned}$$

Obratno, imamo

$$\begin{aligned} (AB)\boldsymbol{.}(x,y) &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right) \boldsymbol{.} (x,y) = \\ &= \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{.} (x,y) = \\ &= (a_1b_1x + a_1b_2y + a_2b_3x + a_2b_4y, a_3b_1x + a_3b_2y + a_4b_3x + a_4b_4y). \end{aligned}$$

Dakle, preslikavanje $\boldsymbol{.}$ *je djelovanje grupe, odnosno grupa* $SL(2,\mathbb{Z})$ *djeluje na skup* $\mathbb{Z}^2$*.*

Definicija 1.2.4 *Grupa* G ***djeluje*** *na graf* $\mathcal{G}$ *ako postoji djelovanje* $\boldsymbol{.} : G \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \to \mathcal{V}(\mathcal{G})$ *koje čuva susjednost vrhova grafa* $\mathcal{G}$*, odnosno za koje vrijedi:*

$(*)$ $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ *su susjedni u* $\mathcal{G} \Leftrightarrow g.u, g.v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ *su susjedni u* $\mathcal{G}$, $\forall g \in G$.

Preslikavanje $. : G \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \to \mathcal{V}(\mathcal{G})$ *koje je djelovanje grupe* G *na skup* $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ *i za koje vrijedi svojstvo* $(*)$*, zovemo* ***djelovanje grupe*** G ***na graf*** $\mathcal{G}$.

Ako grupa G djeluje na graf $\mathcal{G}$, onda grupa G djeluje i na skup bridova $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ grafa $\mathcal{G}$ (djelovanje grupe G na $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ i na $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ ćemo oboje označavati s $.$). Naime, definirajmo preslikavanje $. : G \times \mathcal{E}(\mathcal{G}) \to \mathcal{E}(\mathcal{G})$ s

$$g.(u, v) = (g.u, g.v),$$

za sve $g \in G$ i sve $(u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$. Tvrdimo da je ovako definirano preslikavanje djelovanje grupe G na skup $\mathcal{E}(\mathcal{G})$. Pokažimo prvo da je preslikavanje $.$ dobro definirano. Za proizvoljan brid (u, v) grafa $\mathcal{G}$ vrijedi da je

$$g.(u, v) = (g.u, g.v)$$

brid grafa $\mathcal{G}$, za sve $g \in G$, jer kako su u i v susjedni vrhovi i grupa G djeluje na graf $\mathcal{G}$, slijedi da su i vrhovi $g.u$ i $g.v$ susjedni. Pokažimo sada da su zadovoljena svojstva djelovanja. Za neutralni element $e \in G$ je

$$e.(u, v) = (e.u, e.v) = (u, v), \ \forall (u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}).$$

Za proizvoljan $(u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ je

$$\begin{aligned} g_1.(g_2.(u, v)) &= g_1.(g_2.u, g_2.v) = \\ &= (g_1.(g_2.u), g_1.(g_2.v)) = \\ &= ((g_1g_2).u, (g_1g_2).v)) = \\ &= (g_1g_2).(u, v), \end{aligned}$$

za sve $g_1, g_2 \in G$, jer je $g_1g_2 \in G$. Dakle, G djeluje na $\mathcal{E}(\mathcal{G})$.

Neka grupa G djeluje na graf $\mathcal{G}$ i neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}'$ dva podgrafa grafa $\mathcal{G}$. Za neki $g \in G$, s $g\mathcal{H}$ označavamo podgraf grafa $\mathcal{G}$ čiji je skup vrhova $g\mathcal{V}(\mathcal{H})$ i skup bridova $g\mathcal{E}(\mathcal{H})$. Ako za neki $g' \in G$ vrijedi $g'\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(\mathcal{H}')$ i $g'\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \mathcal{E}(\mathcal{H}')$, onda ćemo to kraće označavati s $g\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

Definicija 1.2.5 *Neka grupa* G *djeluje na graf* $\mathcal{G}$ *i neka je* $e \in G$ *neutralni element grupe* G*. Djelovanje* $.$ *grupe* G *na graf* $\mathcal{G}$ *je* ***slobodno*** *ako vrijedi:*

(1) $g.v \neq v$, $\forall g \in G \backslash \{e\}, \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$,

(2) $g.(u, v) \neq (v, u)$, $\forall g \in G \backslash \{e\}$, $\forall (u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$.

Kažemo da grupa G ***djeluje slobodno*** *na graf $\mathcal{G}$ ako postoji slobodno djelovanje grupe G na graf $\mathcal{G}$.*

Primjer djelovanja grupe na graf ćemo dati u idućem poglavlju. Navedimo još Bezoutovu lemu, koja će nam biti potrebna [4].

Lema 1.2.6 *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je $(a, b) \neq (0, 0)$. Tada postoje $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je*

$$ax + by = gcd(a, b),$$

gdje je $gcd(a, b)$ najveća zajednička mjera brojeva a i b, odnosno najveći broj iz $\mathbb{N}$ koji dijeli i a i b.

2. Fareyevo stablo

Cilj ovog poglavlja je definirati Fareyevo stablo i navesti primjer djelovanja grupe na Fareyevo stablo [1]. Prije nego možemo definirati Fareyevo stablo, moramo definirati Fareyev graf i Fareyev kompleks. Prvo krećemo s potrebnim definicijama i lemama.

2.1. Definicija Fareyevog grafa

Definicija 2.1.1 *Kažemo da je uređeni par $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ **primitivan** ako je $gcd(m,n) = 1$.*

Sljedeća karakterizacija će nam biti potrebna kod konstrukcije Fareyevog grafa.

Lema 2.1.2 *Uređeni par $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ je primitivan ako i samo ako ne postoje $k > 1$ i $(m',n') \in \mathbb{Z}^2$ takvi da je $(m,n) = k(m',n') = (km',kn')$.*

Lako se pokaže da je relacija $\sim$ definirana s

$$(m,n) \sim (k,l) \Leftrightarrow \exists x \in \{1,-1\} \text{ takav da je } (m,n) = x(k,l),$$

na skupu svih primitivnih elemenata iz $\mathbb{Z}^2$, relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije primitivnog elementa $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$, je $[(p,q)] = \{(p,q), -(p,q)\}$. Zbog preglednosti, koristit ćemo oznaku $\pm(p,q) = [(p,q)]$.

Definicija 2.1.3 ***Fareyev graf*** *$\mathcal{G}$ je graf čiji je skup vrhova*

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \{\pm(m,n) | (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ je primitivan}\},$$

odnosno kvocijentni skup s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupu svih primitivnih elemenata od $\mathbb{Z}^2$. Skup bridova $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ dobijemo ovako: Vrhovi $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$ su susjedni ako je

$$\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right) \in \{1,-1\}.$$

Sada navodimo bitan primjer djelovanja grupe na graf koji će nam biti koristan u konstrukciji Fareyevog grafa.

Primjer 2.1.4 *Neka je zadana grupa* $SL(2,\mathbb{Z})$ *i Fareyev graf* $\mathcal{G}$*. Tvrdimo da grupa* $SL(2,\mathbb{Z})$ *djeluje na Fareyev graf* $\mathcal{G}$*.*

Pokažimo prvo da $SL(2,\mathbb{Z})$ *djeluje na skup vrhova* $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ *Fareyevog grafa* $\mathcal{G}$*. Definirajmo preslikavanje* $. : SL(2,\mathbb{Z}) \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \to \mathcal{V}(\mathcal{G})$ *s*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . (\pm(p,q)) = \pm(ap+bq, cp+dq),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . (\pm(p,q)) = \pm \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix},$$

za sve $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *i sve* $\pm(p,q) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$*. Tvrdimo da je preslikavanje* $.$ *djelovanje grupe* $SL(2,\mathbb{Z})$ *na* $\mathcal{V}(\mathcal{G})$*. Pokažimo da je preslikavanje* $.$ *dobro definirano. Neka je* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *proizvoljna matrica i* $\pm(p,q) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ *proizvoljan vrh. Želimo pokazati da je*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . (\pm(p,q)) = \pm(ap+bq, cp+dq) \in \mathcal{V}(\mathcal{G}),$$

a to će vrijediti ako je $(ap+bq, cp+dq) \in \mathbb{Z}^2$ *primitivan element. Pretpostavimo da* $(ap+bq, cp+dq)$ *nije primitivan element. Onda postoje cijeli broj* $k > 1$ *i element* $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ *takvi da je* $(ap+bq, cp+dq) = k(m,n)$*. Odavde dobivamo sljedeće dvije jednadžbe:*

$$ap + bq = km, \tag{2.1}$$

$$cp + dq = kn. \tag{2.2}$$

Množeći jednadžbu (2.1) *s* d *i jednadžbu* (2.2) *s* $-b$ *dobijemo*

$$apd + bqd = kmd, \tag{2.3}$$

$$-cpb - dqb = -knb. \tag{2.4}$$

Zbrajanjem jednadžbi (2.3) *i* (2.4) *dobijemo*

$$p(ad - bc) = k(md - nb).$$

Kako je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *slijedi da je* $ad - bc = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1$, *pa je* $p = k(md - nb)$. *Sada, množeći jednadžbu* (2.1) *s* $-c$ *i jednadžbu* (2.2) *s* a *dobijemo*

$$-apc - bqc = -kmc, \tag{2.5}$$
$$cpa + dqa = kna. \tag{2.6}$$

Zbrajanjem jednadžbi (2.5) *i* (2.6) *dobijemo*

$$q(ad - bc) = k(na - mc),$$

iz čega slijedi $q = k(na - mc)$. *Dobili smo*

$$(p,q) = k(md - nb, na - mc), k > 1, (md - nb, na - mc) \in \mathbb{Z},$$

a to je u kontradikciji s činjenicom da je (p,q) *primitivan element. Dakle,* $(ap + bq, cp + dq)$ *je primitivan element, pa je* $\pm(ap+bq, cp+dq)$ *vrh Fareyevog grafa* $\mathcal{G}$.

Pokažimo sada da preslikavanje $\cdot$ *zadovoljava svojstva djelovanja. Za* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *je*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (\pm(p,q)) = \pm(p + 0, 0 + q) = \pm(p,q),$$

za proizvoljan $\pm(p,q) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$. *Neka je* $\pm(p,q) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ *proizvoljan vrh i* $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *proizvoljne matrice. Tada je*

$$\begin{aligned} A\cdot(B\cdot(\pm(p,q))) &= A\cdot\left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\cdot(\pm(p,q))\right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\cdot(\pm(b_1p + b_2q, b_3p + b_4q)) = \\ &= \pm(a_1b_1p + a_1b_2q + a_2b_3p + a_2b_4q, a_3b_1p + a_3b_2q + a_4b_3p + a_4b_4q). \end{aligned}$$

Obratno, imamo

$$\begin{aligned} (AB)\cdot(\pm(p,q)) &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right)\cdot(\pm(p,q)) = \\ &= \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix}\cdot(\pm(p,q)) = \\ &= \pm(a_1b_1p + a_1b_2q + a_2b_3p + a_2b_4q, a_3b_1p + a_3b_2q + a_4b_3p + a_4b_4q). \end{aligned}$$

Dakle, $SL(2,\mathbb{Z})$ *djeluje na vrhove* $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ *Fareyevog grafa* $\mathcal{G}$*.*

Pokažimo sada da djelovanje $\boldsymbol{.}$ *čuva susjednost vrhova Fareyevog grafa* $\mathcal{G}$*. Neka su* $\pm(p,q), \pm(r,s) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ *susjedni vrhovi i* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *proizvoljna matrica. Želimo pokazati da su*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{.} (\pm(p,q)) = \pm(ap+bq, cp+dq)$$

i

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{.} (\pm(r,s)) = \pm(ar+bs, cr+ds)$$

susjedni vrhovi, odnosno da je $\det\left(\begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{bmatrix}\right) \in \{1,-1\}$*. Kako su* $\pm(p,q)$ *i* $\pm(r,s)$ *susjedni, vrijedi* $ps-qr = \det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right) \in \{1,-1\}$*, pa je*

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{bmatrix}\right) &= (ap+bq)(cr+ds) - (cp+dq)(ar+bs) = \\
&= apcr + apds + bqcr + bqds - cpar - cpbs - dqar - dqbs = \\
&= ps(ad-bc) + qr(cb-ad) = ps - qr \in \{1,-1\},
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da su $\pm(ap+bq, cp+dq)$ *i* $\pm(ar+bs, cr+ds)$ *susjedni vrhovi. Neka su sada* $\pm(p,q), \pm(r,s) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ *vrhovi koji nisu susjedni i* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *proizvoljna matrica. Pretpostavimo da su* $\pm(ap+bq, cp+dq)$ *i* $\pm(ar+bs, cr+ds)$ *susjedni. Tada je*

$$\begin{aligned}
\{1,-1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{bmatrix}\right) &= (ap+bq)(cr+ds) - (cp+dq)(ar+bs) = \\
&= apcr + apds + bqcr + bqds \\
&\quad - cpar - cpbs - dqar - dqbs = \\
&= ps(ad-bc) + qr(cb-ad) = ps - qr = \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right),
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da su $\pm(p,q)$ *i* $\pm(r,s)$ *susjedni, a to je u kontradikciji s pretpostavkom da* $\pm(p,q)$ *i* $\pm(r,s)$ *nisu susjedni, pa slijedi da* $\pm(ap+bq, cp+dq)$ *i* $\pm(ar+bs, cr+ds)$ *nisu susjedni. Dakle,* $SL(2,\mathbb{Z})$ *djeluje na Fareyev graf* $\mathcal{G}$*.*

2.2. Konstrukcija Fareyevog grafa

Sada želimo konstruirati Fareyev graf $\mathcal{G}$. Krećemo od vrhova $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$. Kako je $\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = 1$, vrhovi $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$ su susjedni. Postoje li vrhovi koji su susjedni s $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$? Pretpostavimo da je $\pm(p,q)$ vrh susjedan s $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$. Tada iz

$$\{1,-1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix}1 & p\\0 & q\end{bmatrix}\right) = q \text{ i } \{1,-1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix}p & 0\\q & 1\end{bmatrix}\right) = p,$$

dobijemo da su vrhovi $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$ susjedni s vrhovima $\pm(1,1)$,$\pm(1,-1)$, $\pm(-1,1)$ i $\pm(-1,-1)$, ali kako je $(1,1) \sim (-1,-1)$ i $(-1,1) \sim (1,-1)$, slijedi da je $\pm(1,1) = \pm(-1,-1)$ i $\pm(-1,1) = \pm(1,-1)$. Dakle, vrhovi $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$ su susjedni s vrhovima $\pm(1,1)$ i $\pm(-1,1)$. Na ovaj način smo dobili 4 nova brida Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Pogledajmo brid koji spaja vrhove $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$. Postoje li vrhovi susjedni s $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$ osim vrha $\pm(0,1)$? Iz

$$\{1,-1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix}1 & p\\0 & q\end{bmatrix}\right) = q \text{ i } \{1,-1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix}1 & p\\1 & q\end{bmatrix}\right) = q - p$$

dobijemo da su vrhovi $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$ susjedni s vrhovima $\pm(0,1)$,$\pm(2,1)$, $\pm(-2,-1)$ i $\pm(0,-1)$, ali kako je $(0,1) \sim (0,-1)$ i $(2,1) \sim (-2,-1)$, slijedi da je $\pm(0,1) = \pm(0,-1)$ i $\pm(2,1) = \pm(-2,-1)$. Kako smo već znali da je vrh $\pm(0,1)$ susjedan s vrhovima $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$, dobili smo jedan novi vrh, $\pm(2,1)$, koji je susjedan s vrhovima $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$. Primjetimo da smo vrh $\pm(2,1)$ mogli dobiti zbrajanjem odgovarajućih reprezentanata vrhova $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$. Naime, za $(1,0) \in \pm(1,0)$ i $(1,1) \in \pm(1,1)$, dobijemo $(1,0) + (1,1) = (2,1)$. Općenito, vrijedi sljedeća lema.

Lema 2.2.1 *Neka su $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$ susjedni vrhovi Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Tada je $\pm(p+r,q+s)$ vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, susjedan s vrhovima $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$.*

<u>*Dokaz:*</u> Pokažimo prvo da je $\pm(p+r,q+s)$ vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Pretpostavimo da $\pm(p+r,q+s)$ nije vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, odnosno da $(p+r,q+s) \in \mathbb{Z}^2$ nije primitivan element. Tada postoje cijeli broj $k > 1$ i $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ takvi da je $(p+r,q+s) = k(m,n)$. Odavde dobivamo sljedeće dvije jednadžbe:

$$p + r = km, \tag{2.7}$$

$$q + s = kn. \tag{2.8}$$

Množenjem jednadžbe (2.7) sa s i jednadžbe (2.8) s $-r$ dobijemo

$$
\begin{aligned}
ps + rs &= kms, && (2.9)\\
-qr - sr &= -knr. && (2.10)
\end{aligned}
$$

Zbrajanjem jednadžbi (2.9) i (2.10) dobijemo

$$k(ms - nr) = ps - qr \in \{1, -1\},$$

jer su $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$ susjedni vrhovi. Kako je $k(ms - nr) \in \{1, -1\}$ i $k > 1$, slijedi da je $(ms - nr) \in \{\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\}$, ali to je kontradikcija jer je $(ms - nr) \in \mathbb{Z}$, a $\frac{1}{k}$ i $-\frac{1}{k}$ nisu cijeli brojevi. Dakle, $(p + r, q + s) \in \mathbb{Z}^2$ je primitivan element, pa je $\pm(p + r, q + s)$ vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$.

Pokažimo sada da je vrh $\pm(p + r, q + s)$ susjedan s vrhovima $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$. Kako se vrijednost determinante ne mijenja zbrajanjem nekog stupca pomnoženog s konstantom nekom drugom stupcu, zbrajanjem prvog stupca determinante $\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right)$ drugom stupcu, dobijemo

$$\{1, -1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} p & p + r \\ q & q + s \end{bmatrix}\right),$$

iz čega slijedi da su $\pm(p,q)$ i $\pm(p+r, q+s)$ susjedni vrhovi. Zbrajanjem drugog stupca determinante $\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right)$ prvom stupcu, dobijemo

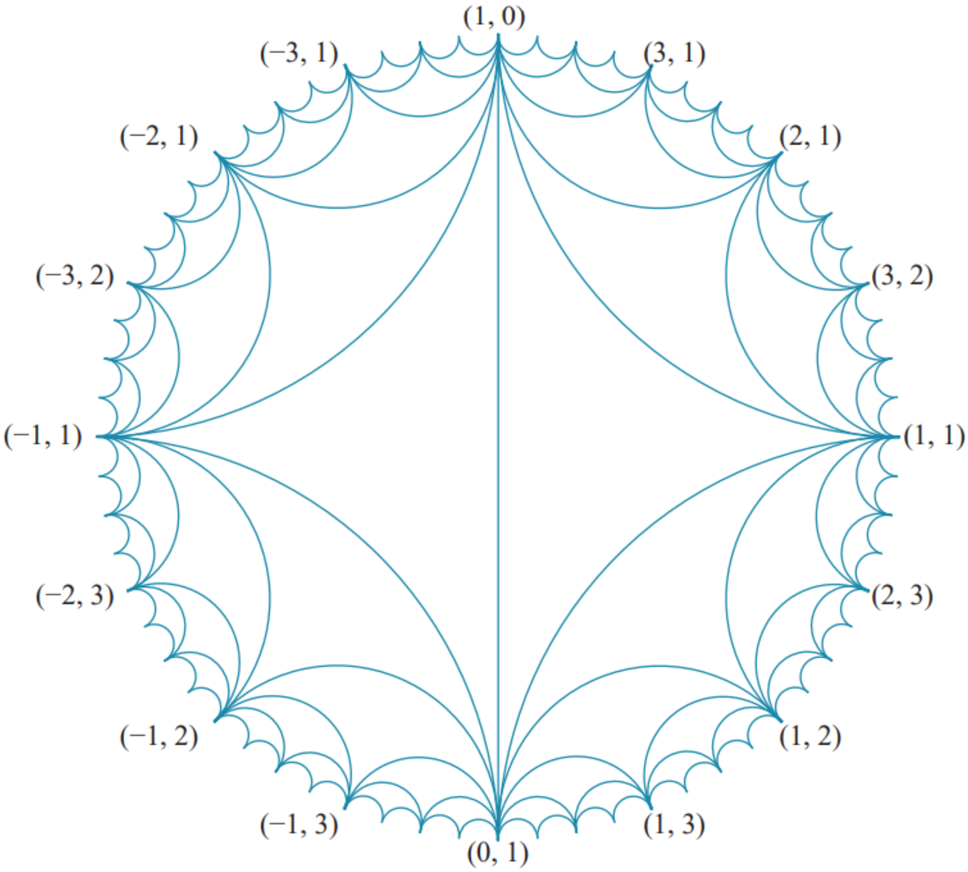
$$\{1, -1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} p + r & r \\ q + s & s \end{bmatrix}\right),$$

iz čega slijedi da su $\pm(r,s)$ i $\pm(p + r, q + s)$ susjedni vrhovi.

■

Dakle, ako su $\pm(p,q) = \pm(-p,-q)$ i $\pm(r,s) = \pm(-r,-s)$ susjedni vrhovi Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, prema prethodnoj lemi slijedi da su $\pm(p + r, q + s)$, $\pm(p - r, q - s), \pm(-p + r, -q + s)$ i $\pm(-p - r, -q - s)$ vrhovi susjedni s vrhovima $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$, ali kako je $(p + r, q + s) \sim (-p - r, -q - s)$ i $(-p + r, -q + s) \sim (p - r, q - s)$, slijedi da je $\pm(p + r, q + s) = \pm(-p - r, -q - s)$ i $\pm(-p + r, -q + s) = \pm(p - r, q - s)$. Odavde slijedi da za svaki novi brid Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, koristeći lemu 2.2.1, dobijemo jedan novi vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, susjedan s krajevima tog brida, tako da zbrojimo odgovarajuće reprezentante krajeva tog brida.

Sada možemo nastaviti s konstrukcijom Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Kao što smo vrh $\pm(2,1)$ dobili zbrajanjem odgovarajućih reprezentanata vrhova $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$, na isti način koristeći lemu 2.2.1 dobijemo vrh $\pm(-2,1)$ susjedan s vrhovima $\pm(1,0)$ i $\pm(-1,1)$, vrh $\pm(-1,2)$ susjedan s vrhovima $\pm(-1,1)$ i $\pm(0,1)$ te vrh $\pm(1,2)$ susjedan s vrhovima $\pm(0,1)$ i $\pm(1,1)$. Dakle, dobili smo 8 novih bridova Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Sada, koristeći lemu 2.2.1, za svaki od tih 8 bridova dobijemo 8 novih vrhova Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ i tako dalje nastavimo konstrukciju. Na sljedećoj slici je prikazan peti korak konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$.



Slika 2.1: Fareyev graf $\mathcal{G}$.

Tvrdimo da ovom konstrukcijom dobijemo cijeli Fareyev graf $\mathcal{G}$. Pokažimo prvo da ovom konstrukcijom dobijemo sve bridove iz vrha $\pm(1,0)$. Neka je $\pm(p,q)$ vrh susjedan s vrhom $\pm(1,0)$. Tada je

$$\{1,-1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) = q.$$

Dakle, vrhovi susjedni s $\pm(1,0)$ su oblika $\pm(p,q)$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \{1,-1\}$. Kako je $(-p,1) \sim (p,-1)$, za svaki $p \in \mathbb{Z}$, vrhovi susjedni s vrhom $\pm(1,0)$ su oblika $\pm(p,1)$, $p \in \mathbb{Z}$. Neka je $\pm(p,1)$, $p > 0$ proizvoljan vrh susjedan s vrhom $\pm(1,0)$. Možemo li našom konstrukcijom doći do brida koji spaja vrhove $\pm(p,1)$ i $\pm(1,0)$? Krećemo od susjednih vrhova $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$. Koristeći lemu 2.2.1, zbrajanjem reprezentanata $(1,0) \in \pm(1,0)$ i $(1,1) \in \pm(1,1)$ dobijemo vrh $\pm(2,1)$ susjedan s $\pm(1,0)$. Ponovno, koristeći lemu 2.2.1, zbrajanjem reprezentanata $(2,1) \in \pm(2,1)$ i $(1,0) \in \pm(1,0)$ dobijemo vrh $\pm(3,1)$ susjedan s $\pm(1,0)$. Nastavljajući ovaj postupak, u konačno mnogo koraka ćemo doći do vrha $\pm(p,1)$ susjednog s vrhom $\pm(1,0)$. Neka je sada $\pm(p,1)$, $p < 0$ proizvoljan vrh susjedan s vrhom $\pm(1,0)$. Krećemo od susjednih vrhova $\pm(1,0)$ i $\pm(-1,1)$. Koristeći lemu 2.2.1, zbrajanjem reprezentanata $(-1,0) \in \pm(1,0)$ i $(-1,1) \in \pm(-1,1)$ dobijemo vrh $\pm(-2,1)$ susjedan s $\pm(1,0)$. Ponovno, koristeći lemu 2.2.1, zbrajanjem reprezentanata $(-2,1) \in \pm(-2,1)$ i $(-1,0) \in \pm(1,0)$ dobijemo vrh $\pm(-3,1)$ susjedan s $\pm(1,0)$. Nastavljajući ovaj postupak, u konačno mnogo koraka ćemo doći do vrha $\pm(p,1)$ susjednog s vrhom $\pm(1,0)$. Dakle, ovom konstrukcijom dobijemo sve bridove iz vrha $\pm(1,0)$.

Pokažimo sada da za svaki vrh $\pm(p,q)$ postoji matrica $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ takva da je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . (\pm(p,q)) = \pm(1,0).$$

Neka je $\pm(p,q)$ proizvoljan vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ i $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ proizvoljna matrica. Iz

$$\pm(1,0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . (\pm(p,q)) = \pm(ap+bq, cp+dq)$$

dobivamo sljedeće jednadžbe

$$ap + bq = 1 \tag{2.11}$$
$$cp + dq = 0 \tag{2.12}$$

Množenjem jednadžbe (2.11) s $-c$ i jednadžbe (2.12) s a, dobijemo

$$-apc - bqc = -c, \tag{2.13}$$

$$cpa + dqa = 0. \tag{2.14}$$

Zbrajanjem jednadžbi (2.13) i (2.14) dobijemo

$$q(ad - bc) = -c,$$

iz čega slijedi $c = -q$, jer je $ad - bc = 1$. Sada, množenjem jednadžbe (2.11) s d i jednadžbe (2.12) s $-b$, dobijemo

$$apd + bqd = d, \tag{2.15}$$

$$-cpb - dqb = 0. \tag{2.16}$$

Zbrajanjem jednadžbi (2.15) i (2.16) dobijemo

$$p(ad - bc) = d,$$

iz čega slijedi da je $p = d$. Pronašli smo $c, d \in \mathbb{Z}$ koji zadovoljavaju jednadžbu (2.12). Još moramo pronaći $a, b \in \mathbb{Z}$ koji zadovoljavaju jednadnžu (2.11). Kako je (p, q) primitivan element, onda je $gcd(p, q) = 1$, pa prema lemi 1.2.6, postoje $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je $ap + bq = 1$, odnosno zadovoljili smo jednadžbu (2.11). Dakle, našom konstrukcijom dobijemo cijeli Fareyev graf $\mathcal{G}$.

2.3. Fareyev kompleks

Sljedeća definicija je dobivena iz [1].

Definicija 2.3.1 ***Fareyev kompleks*** $\mathcal{G}_T$ *je Fareyev graf* $\mathcal{G}$ *zajedno sa skupom*

$$T = \{\{v_1, v_2, v_3\} | v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}(\mathcal{G}), (v_i, v_j) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}), \forall i \neq j\}.$$

Skup T *zovemo* ***skup trokuta*** *Fareyevog kompleksa* $\mathcal{G}_T$*, a elemente* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *skupa* T ***trokutima*** *Fareyevog kompleksa* $\mathcal{G}_T$*. Neka je* $t \in T$ *proizvoljan trokut. Za svaki par* $u, v \in t$*,* $u \neq v$*, brid* $(u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ *zove se* ***rub*** *trokuta* t*.*

Lema 2.3.2 *Grupa* $SL(2, \mathbb{Z})$ *djeluje na skup trokuta* T *Fareyevog kompleksa* $\mathcal{G}_T$*.*

Dokaz: Definirajmo preslikavanje $. : SL(2,\mathbb{Z}) \times T \to T$ s

$$A.\{v_1, v_2, v_3\} = \{A.v_1, A.v_2, A.v_3\},$$

za sve $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ i sve $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$ (djelovanje grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na $\mathcal{V}(\mathcal{G})$, na $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ i na T ćemo oboje označavati s $.$). Pokažimo prvo da je preslikavanje $.$ dobro definirano. Neka su $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ i $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$ proizvoljni. Kako su $v_i, v_j \in \{v_1, v_2, v_3\}$ susjedni vrhovi, za sve $i \neq j$, slijedi da su $A.v_i$ i $A.v_j$ susjedni vrhovi, za sve $i \neq j$, jer $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje na Fareyev graf $\mathcal{G}$, odnosno čuva susjednost vrhova. Dakle, $\{A.v_1, A.v_2, A.v_3\}$ je trokut, pa je preslikavanje $.$ dobro definirano. Pokažimo sada da vrijede svojstva djelovanja. Za $I \in SL(2,\mathbb{Z})$ imamo da je

$$I.\{v_1, v_2, v_3\} = \{I.v_1, I.v_2, I.v_3\} = \{v_1, v_2, v_3\},$$

za sve $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$, jer $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje na $\mathcal{V}(\mathcal{G})$. Za $A, B \in SL(2,\mathbb{Z})$ imamo da je

$$\begin{aligned} A.(B.\{v_1, v_2, v_3\}) &= A.\{B.v_1, B.v_2, B.v_3\} = \\ &= \{A.(B.v_1), A.(B.v_2), A.(B.v_3)\} = \\ &= \{(AB).v_1, (AB).v_2, (AB).v_3\} = \\ &= (AB).\{v_1, v_2, v_3\}, \end{aligned}$$

za sve $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$. Dakle, preslikavanje $.$ je djelovanje, odnosno $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje na skup T.

■

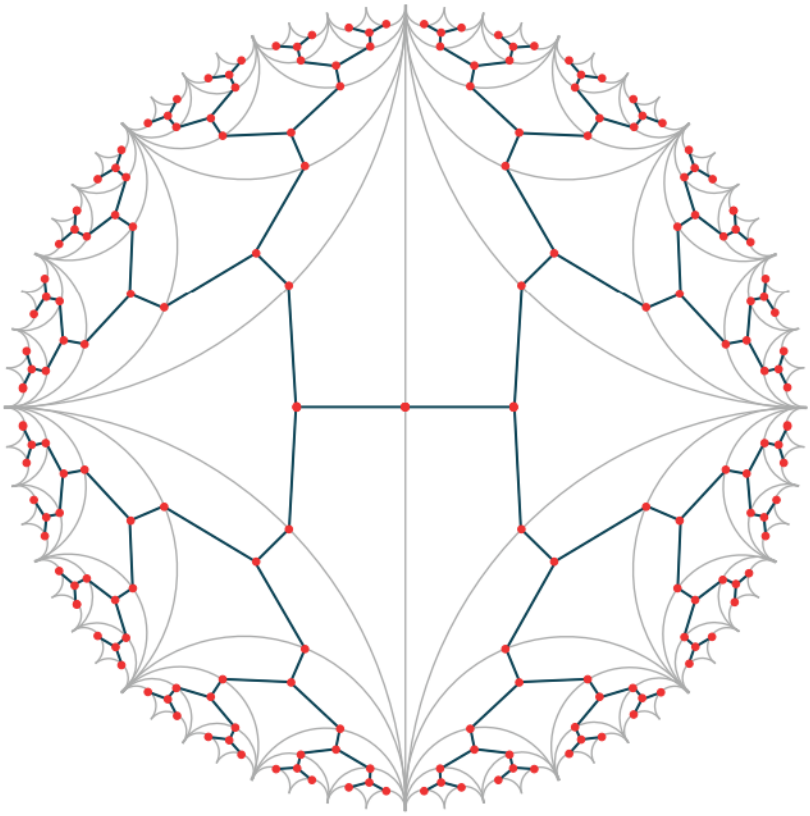
Definicija 2.3.3 *Neka je $\mathcal{G}$ Fareyev graf i $\mathcal{G}_T$ Fareyev kompleks.* ***Fareyevo stablo*** $\mathcal{T}$ *je graf sa skupom vrhova*

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup T$$

i skupom bridova

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}) = \{((u,v),t) | (u,v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}), t \in T, u, v \in t\}.$$

Na sljedećoj slici je prikazano Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ dobiveno iz Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$, nacrtano direktno na Fareyevom kompleksu $\mathcal{G}_T$.



Slika 2.2: Fareyevo stablo $\mathcal{T}$.

Propozicija 2.3.4 *Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ je zaista stablo.*

Dokaz: Za početak, pokazat ćemo da postoji jedinstveni put od vrha $e = (\pm(1,0), \pm(0,1)) \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ do proizvoljnog vrha $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ u Fareyevom stablu $\mathcal{T}$. Neka je v proizvoljan vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ sadržan u gornjem desnom kvadrantu od $\mathcal{T}$ i pretpostavimo da je vrh v dobiven n-tim korakom konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Pokažimo sada da postoji jedinstveni (e,v)-put u $\mathcal{T}$. Prvim korakom konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, dobijemo vrhove e,$(\pm(1,0), \pm(1,1))$,$(\pm(1,1), \pm(0,1))$,$(\pm(0,1), \pm(-1,1))$,$(\pm(-1,1), \pm(1,0)) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ i $\{\pm(1,0), \pm(-1,1), \pm(0,1)\}, \{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\} \in T$ Fareyevog stabla $\mathcal{T}$. Kako se vrh v nalazi u gornjem desnom kvadrantu Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, krećemo se iz vrha e u vrh $\{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\}$, pa zatim iz vrha $\{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\}$ u vrh $(\pm(1,1), \pm(0,1))$. Drugim korakom konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, dobijemo vrhove $(\pm(1,0), \pm(2,1))$,$(\pm(2,1), \pm(1,1)) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ i $\{\pm(1,0), \pm(2,1), \pm(1,1)\} \in T$ Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, sadržane u gornjem desnom kvadrantu od $\mathcal{T}$. Sada se pomaknemo iz vrha $(\pm(1,1), \pm(0,1))$

u vrh $\{\pm(1,0), \pm(2,1), \pm(1,1)\}$ i ako je $v = \{\pm(1,0), \pm(2,1), \pm(1,1)\}$, onda smo gotovi. Ako je $v = (\pm(1,0), \pm(2,1))$ ili $v = (\pm(2,1), \pm(1,1))$, onda se iz vrha $\{\pm(1,0), \pm(2,1), \pm(1,1)\}$ pomaknemo u vrh $(\pm(1,0), \pm(2,1))$ ili u vrh $(\pm(2,1), \pm(1,1))$ i gotovi smo. Ako v nije jednak niti jednom od ta dva vrha, onda ako se v nalazi u djelu Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ između vrhova $\pm(1,0)$ i $\pm(2,1)$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, pomaknemo se iz vrha $\{\pm(1,0), \pm(2,1), \pm(1,1)\}$ u vrh $(\pm(1,0), \pm(2,1))$ Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, a ako se vrh v nalazi u djelu Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ između vrhova $\pm(2,1)$ i $\pm(1,1)$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, pomaknemo se iz vrha $\{\pm(1,0), \pm(2,1), \pm(1,1)\}$ u vrh $(\pm(2,1), \pm(1,1))$ Fareyevog stabla $\mathcal{T}$. Na ovaj način nastavimo konstrukciju puta od vrha e do vrha v Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ i nakon n-tog koraka konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ ćemo doći do vrha v. Analogan postupak vrijedi za proizvoljan vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji se nalazi u gornjem lijevom, donjem lijevom ili donjem desnom kvadrantu.

Dakle, pokazali smo da za proizvoljni vrh v Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ postoji jedinstveni (e,v)-put u $\mathcal{T}$. Pokažimo sada da za proizvoljne vrhove u i v Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ postoji jedinstveni (u,v)-put u $\mathcal{T}$. Pretpostavimo da su u i v proizvoljni vrhovi Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji se ne nalaze u istom kvadrantu od $\mathcal{T}$. Tada znamo da postoje jedinstveni (u,e)-put u $\mathcal{T}$ i jedinstveni (e,v)-put u $\mathcal{T}$. Konkatenacijom ta dva puta dobijemo jedinstveni (u,v)-put u $\mathcal{T}$. Pretpostavimo sada da se vrhovi u i v nalaze u istom kvadrantu Fareyevog stabla $\mathcal{T}$. Pretpostavimo da je vrh u dobiven u k-tom koraku konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, a vrh v u l-tom koraku konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $k \leq l$. Kako se vrhovi u i v nalaze u istom kvadrantu od $\mathcal{T}$, onda se jedinstveni (e,u)-put i jedinstveni (e,v)-put preklapaju početnim djelom. Ako vrh u leži na jedinstvenom (e,v)-putu, onda dio jedinstvenog (e,v)-puta od vrha u do vrha v je jedinstveni (u,v)-put u $\mathcal{T}$. Ako vrh u ne leži na jedinstvenom (e,v)-putu, onda postoji vrh w Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, koji je zadnji zajednički vrh jedinstvenog (e,u)-puta i jedinstvenog (e,v)-puta. Dio jedinstvenog (e,u) puta od vrha w do vrha u je jedinstveni (w,u)-put u $\mathcal{T}$, jer inače (e,u)-put nebi bio jedinstven. Isto tako, dio jedinstvenog (e,v)-puta od vrha w do vrha v je jedinstveni (w,v)-put u $\mathcal{T}$. Sada, konkatenacijom jedinstvenog (u,w)-puta i jedinstvenog (w,v)-puta dobijemo jedinstveni (u,v)-put u $\mathcal{T}$. Dakle, pokazali smo da za proizvoljne vrhove u i v Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ postoji jedinstveni (u,v)-put u $\mathcal{T}$. Sada, koristeći lemu 1.1.9, slijedi da je $\mathcal{T}$ stablo.

■

Sada navodimo primjer djelovanja grupe na stablo i primjer djelovanja koje nije slobodno.

Primjer 2.3.5 *Neka je zadana grupa $SL(2,\mathbb{Z})$, Fareyev graf $\mathcal{G}$, Fareyev kompleks $\mathcal{G}_T$ i Fareyevo stablo $\mathcal{T}$. Tvrdimo da $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$.*

Pokažimo prvo da $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje na $\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup T$. Tvrdimo da je preslikavanje $\boldsymbol{.} : SL(2,\mathbb{Z}) \times \mathcal{V}(\mathcal{T}) \to \mathcal{V}(\mathcal{T})$ definirano s

$$A\boldsymbol{.}(u,v) = (A\boldsymbol{.}u, A\boldsymbol{.}v), \ \ \forall A \in SL(2,\mathbb{Z}), \forall (u,v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$$

i

$$A\boldsymbol{.}\{v_1,v_2,v_3\} = \{A\boldsymbol{.}v_1, A\boldsymbol{.}v_2, A\boldsymbol{.}v_3\}, \ \ \forall A \in SL(2,\mathbb{Z}), \forall \{v_1,v_2,v_3\} \in T,$$

djelovanje grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na skup $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ (djelovanje grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ označavamo isto kao i djelovanje grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na Fareyev graf $\mathcal{G}$ i na skup T). Pokažimo da je preslikavanje $\boldsymbol{.}$ dobro definirano. Za proizvoljan vrh $(u,v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, slijedi da je $A\boldsymbol{.}(u,v)$ vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, za sve $A \in SL(2,\mathbb{Z})$, jer znamo da $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje na Fareyev graf $\mathcal{G}$, pa posebno djeluje na bridove $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, odnosno svaki brid se preslikava u brid. Za proizvoljan vrh $t \in T$ Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, slijedi da je $A\boldsymbol{.}t$ vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, jer znamo da $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje na skup trokuta T Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$, odnosno svaki trokut se preslikava u trokut. Dakle, preslikavanje $\boldsymbol{.}$ je dobro definirano. Također, svojstva djelovanja su zadovoljena jer znamo da $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje na Fareyev graf $\mathcal{G}$ i na skup trokuta T Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$.

Preostaje pokazati da preslikavanje $\boldsymbol{.}$ čuva susjednost vrhova Fareyevog stabla $\mathcal{T}$. Neka su $(u,w) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ i $\{v_1,v_2,v_3\} \in T$ susjedni vrhovi Fareyevog stabla $\mathcal{T}$. Odavde slijedi da je (u,w) rub trokuta $\{v_1,v_2,v_3\}$, odnosno $u,w \in \{v_1,v_2,v_3\}$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $v_1 = u$ i $v_2 = w$. Sada, za proizvoljnu matricu $A \in SL(2,\mathbb{Z})$, imamo da je

$$A\boldsymbol{.}\{u,w,v_3\} = \{A\boldsymbol{.}u, A\boldsymbol{.}w, A\boldsymbol{.}v_3\} \ni A\boldsymbol{.}u, A\boldsymbol{.}w,$$

odnosno $A\boldsymbol{.}(u,w) = (A\boldsymbol{.}u, A\boldsymbol{.}w)$ je rub trokuta $A\boldsymbol{.}\{u,w,v_3\}$, iz čega slijedi da su $A\boldsymbol{.}(u,w)$ i $A\boldsymbol{.}\{v_1,v_2,v_3\}$ susjedni vrhovi Fareyevog stabla $\mathcal{T}$. Neka su sada $(u,w) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ i $\{v_1,v_2,v_3\} \in T$ vrhovi Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji nisu susjedni i neka je $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ proizvoljna matrica. Pretpostavimo da su vrhovi $A\boldsymbol{.}(u,w)$ i $A\boldsymbol{.}\{v_1,v_2,v_3\}$ susjedni. Onda su

$$(A^{-1}\boldsymbol{.}(A\boldsymbol{.}u), A^{-1}\boldsymbol{.}(A\boldsymbol{.}w)) = ((A^{-1}A)\boldsymbol{.}u, (A^{-1}A)\boldsymbol{.}w) = (u,w)$$

i

$$A^{-1}\boldsymbol{.}(A\boldsymbol{.}\{v_1,v_2,v_3\}) = (A^{-1}A)\boldsymbol{.}\{v_1,v_2,v_3\} = \{v_1,v_2,v_3\}$$

susjedni, ali to je kontradikcija s pretpostavkom da oni nisu susjedni. Dakle, $SL(2,\mathbb{Z})$ *djeluje na Fareyevo stablo* $\mathcal{T}$.

Primjer 2.3.6 *Neka je zadana grupa* $SL(2,\mathbb{Z})$*, Fareyev graf* $\mathcal{G}$*, Fareyev kompleks* $\mathcal{G}_T$*, Fareyevo stablo* $\mathcal{T}$ *i djelovanje* $.$ *grupe* $SL(2,\mathbb{Z})$ *na Fareyevo stablo* $\mathcal{T}$ *definirano kao u primjeru 2.3.5. Tvrdimo da djelovanje* $.$ *grupe* $SL(2,\mathbb{Z})$ *na Fareyevo stablo* $\mathcal{T}$ *nije slobodno.*

Naime, za proizvoljan vrh $(\pm(p,q),\pm(r,s)) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ *Fareyevog stabla* $\mathcal{T}$ *i matricu* $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$*, imamo*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . (\pm(p,q),\pm(r,s)) &= \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . (\pm(p,q)), \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . (\pm(r,s)) \right) = \\
&= (\pm(-p,-q),\pm(-r,-s)) = \\
&= (\pm(p,q),\pm(r,s)),
\end{aligned}$$

jer je $(-p,-q) \sim (p,q)$ *i* $(-r,-s) \sim (r,s)$*. Također, za proizvoljan vrh* $t = \{\pm(p,q),\pm(r,s),\pm(m,n)\} \in T$ *Fareyevog stabla* $\mathcal{T}$ *i matricu* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$*, imamo*

$$\begin{aligned}
A.t &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \{\pm(p,q),\pm(r,s),\pm(m,n)\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . (\pm(p,q)), \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . (\pm(r,s)), \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . (\pm(m,n)) \right\} = \\
&= \{\pm(-p,-q),\pm(-r,-s),\pm(-m,-n)\} = \\
&= \{\pm(p,q),\pm(r,s),\pm(m,n)\},
\end{aligned}$$

jer je $(-p,-q) \sim (p,q)$*,* $(-r,-s) \sim (r,s)$ *i* $(-m,-n) \sim (m,n)$*. Dakle, matrica* $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ *fiksira cijelo Fareyevo stablo* $\mathcal{T}$*, odnosno djelovanje* $.$ *grupe* $SL(2,\mathbb{Z})$ *na Fareyevo stablo* $\mathcal{T}$ *nije slobodno.*

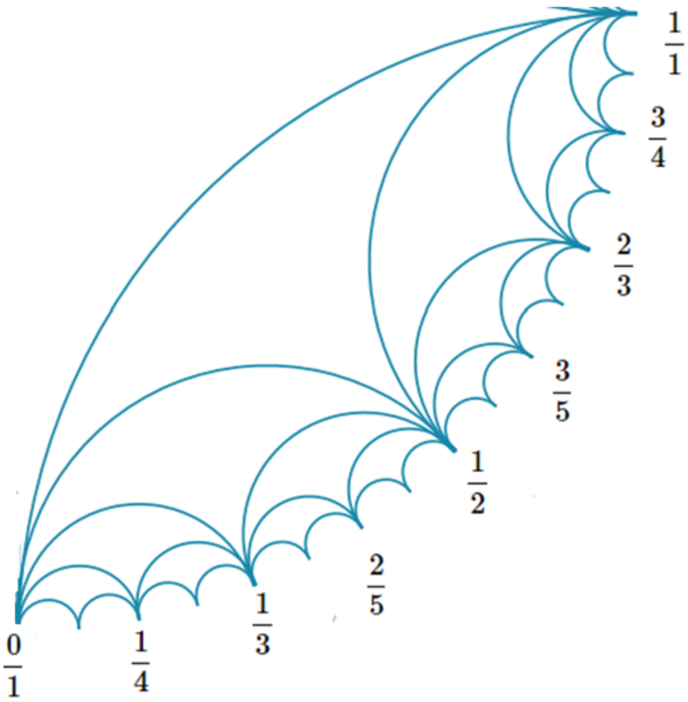
2.4. John Farey, Sr.

U ovom potpoglavlju ćemo napisati bilješku o Johnu Fareyu, Sr. i pokazati vezu između primitivnih elemenata iz $\mathbb{Z}^2$ i razlomaka [1].

Fareyev graf je kroz godine postao bitan primjer grafa koji se koristi u mnogim područjima matematike, uključujući teoriju grupa, teoriju grafova, teoriju brojeva i geometriju, a svoje ime je dobio po Johnu Fareyu, Sr. (24.9.1766.-6.1.1826.). Farey je prvotno bio geolog, ali je napisao preko 250 radova o različitim temama poput geologije, meteorologije, muzike, matematike, pacifizma i raznih drugih. Najpoznatiji doprinos mu je bila bilješka koju je napisao za znanstveni časopis *Philosophical Magazine* u 1816. godini pod nazivom "O čudnom svojstvu vulgarnih razlomaka" ("vulgarni razlomak" je staromodna riječ za razlomak). U toj bilješci je primijetio sljedeće svojstvo razlomaka.

Neka je F_n, za $n \in \mathbb{N}$, skup svih potpuno skraćenih razlomaka s vrijednostima između 0 i 1 čiji nazivnik je manji ili jednak od n, poredanih po veličini od najmanjeg do najvećeg. Taj F_n se zove **Fareyev niz stupnja** n [5]. Neka su $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}, \frac{c}{d} \in F_n$ takvi da je $\frac{a}{b}$ prvi lijevi susjed od $\frac{p}{q}$, a $\frac{c}{d}$ prvi desni susjed od $\frac{p}{q}$. Tada je $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$. Prethodno svojstvo Fareyevog niza zove se **Fareyevo zbrajanje** i dokazao ga je Cauchy te pripisao Fareyu. Pokažimo sada vezu između Fareyevog niza i Fareyevog grafa. Pogledajmo donji desni kvadrant Fareyevog grafa i zamjenimo sve vrhove $\pm(m,n)$ tog kvadranta s razlomcima $\frac{m}{n}$. Svi razlomci $\frac{m}{n}$ dobiveni ovom zamjenom su potpuno skraćeni, jer su svi (m,n) primitivni elementi iz $\mathbb{Z}^2$. Prvim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo vrhove $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$ u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa, odnosno dobijemo Fareyev niz $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$ u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa. Fareyevim zbrajanjem vrhova $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$ dobijemo razlomak $\frac{1}{2}$ koji odgovara vrhu $\pm(1,2)$ dobivenom zbrajanjem odgovarajućih predstavnika klasa $\pm(0,1)$ i $\pm(1,1)$, odnosno drugim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo Fareyev niz $F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$, u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa. Fareyevim zbrajanjem vrhova $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{2}$, te vrhova $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{1}$, dobijemo razlomke $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ koji odgovaraju vrhovima $\pm(1,3)$ i $\pm(2,3)$ dobivenim zbrajanjem odgovarajućih predstavnika klasa $\pm(0,1)$ i $\pm(1,2)$, te $\pm(1,2)$ i $\pm(1,1)$, odnosno trećim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo Fareyev niz $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$, u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa. Fareyevim zbrajanjem vrhova $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$, te $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{1}$ dobijemo razlomke $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{4}$ koji odgovaraju vrhovima $\pm(1,4)$, $\pm(2,5)$, $\pm(3,5)$ i $\pm(3,4)$ dobivenim zbrajanjem odgovarajućih predstavnika klasa $\pm(0,1)$ i $\pm(1,3)$, $\pm(1,3)$ i $\pm(1,2)$, $\pm(1,2)$ i $\pm(2,3)$, te $\pm(2,3)$ i $\pm(1,1)$, odnosno četvrtim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$, u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa, koji sadrži cijeli Fareyev niz $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$. Isto tako, petim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$, u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa, koji sadrži cijeli Fareyev niz $F_5 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$.

Nastavljajući ovako dalje, imamo da n-tim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka koji sadrži cijeli Fareyev niz F_n u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa. Sljedeća slika prikazuje izdvojen donji desni kvadrant Fareyevog grafa nakon petog koraka konstrukcije, gdje su svi vrhovi $\pm(m,n)$ zamijenjeni razlomcima $\frac{m}{n}$.



Slika 2.3: Donji desni kvadrant Fareyevog grafa.

Na prethodnoj slici vidimo da četvrtim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$, u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa, koji sadrži cijeli Fareyev niz $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$.

3. Slobodno djelovanje grupe na stablo

Cilj ovog poglavlja je dokazati teorem koji kaže da je grupa G izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako ona djeluje slobodno na neko stablo $\mathcal{T}$ [1]. Prije nego što dokažemo taj teorem, uvest ćemo pojmove metrike najkraćeg puta [1], podgrupe generirane podskupom [6] i slobodne grupe [2].

3.1. Metrika najkraćeg puta

Definicija 3.1.1 ***Metrički prostor*** *je uređeni par* (X, d)*, gdje je* X *skup i* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $d(x, y) \geq 0,$

(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(3) $d(x, y) = d(y, x),$

(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$

za sve $x, y, z \in X$*. Funkcija* d *koja zadovoljava svojstva* (1)*-*(4) *zove se* ***metrika*** *na* X*. Svojstvo* (4) *se zove* ***nejednakost trokuta****.*

Lema 3.1.2 *Neka je* $\mathcal{G}$ *povezan graf. Funkcija* $d : \mathcal{V}(\mathcal{G}) \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$ *takva da je* $d(u, v)$ *duljina najkraćeg* (u, v)*-puta u* $\mathcal{G}$*, za sve* $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$*, je metrika na* $\mathcal{V}(\mathcal{G})$*, odnosno* $(\mathcal{V}(\mathcal{G}), d)$ *je metrički prostor.*

Dokaz: Duljina puta između svaka dva vrha $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ je, po definiciji 1.1.4, veća ili jednaka od nule, odnosno $d(u, v) \geq 0$, za sve $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$. Ako je $d(u, v) = 0$, za neke vrhove u i v, onda postoji konstantni put između vrhova u i v, pa je $u = v$. Ako je $u = v$, onda je $d(u, v) = 0$, jer najkraći put od vrha u do samog sebe je konstantni put koji sadrži samo vrh u. Kako je najkraći put od vrha u do vrha v put P čija je duljina $d(u, v)$ i kako za put P postoji jedinstveni inverzni put P' koji je (v, u)-put i čija duljina je jednaka duljini puta P, onda najkraći put od v do u mora biti duljine $d(u, v)$, odnosno $d(u,v) = d(v,u)$. Još moramo pokazati nejednakost trokuta. Neka su $u,v,w \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ proizvoljni. Neka je P_1 najkraći put od u do v i P_2 najkraći put od v do w. Onda je P_1P_2 šetnja od u do w duljine $d(u,v) + d(v,w)$. Kako je duljina najkraćeg puta od u do w jednaka $d(u,w)$, onda mora biti $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

■

Metrika d iz prethodne leme zove se metrika **najkraćeg puta** na $\mathcal{V}(\mathcal{G})$.

Definicija 3.1.3 *Neka je X podskup skupa vrhova $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ grafa $\mathcal{G}$ i $v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ proizvoljan vrh. Tada je*

$$d(v,X) = \min\{d(v,x) | x \in X\},$$

***udaljenost** vrha v do skupa X.*

Na kraju ovog potpoglavlja navodimo dvije leme koje će nam trebati.

Lema 3.1.4 *Neka grupa G djeluje na povezani graf $\mathcal{G}$ i neka je d metrika najkraćeg puta na $\mathcal{V}(\mathcal{G})$. Tada je*

$$d(u,v) = d(g.u, g.v), \ \ \forall g \in G.$$

<u>*Dokaz:*</u> Tvrdnju ćemo pokazati indukcijom po duljini najkraćeg puta između dva vrha grafa $\mathcal{G}$. Neka su u i v vrhovi grafa $\mathcal{G}$ takvi da je $d(u,v) = 1$. Onda su u i v susjedni vrhovi. Odavde slijedi da su $g.u$ i $g.v$ susjedni, za sve $g \in G$, po definiciji 1.2.4 djelovanja grupe na graf, pa je $d(g.u, g.v) = 1$, $\forall g \in G$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve vrhove u i v grafa $\mathcal{G}$ za koje je $d(u,v) < n$. Neka su sada u i v vrhovi grafa $\mathcal{G}$ takvi da je $d(u,v) = n$ i neka je $g \in G$ proizvoljan. Nadalje, neka je P najkraći (u,v)-put, odnosno put duljine n od vrha u do vrha v. Neka je w prvi vrh nakon vrha u koji se nalazi u putu P. Onda je $d(w,v) = n-1$, pa je prema pretpostavci indukcije $d(g.w, g.v) = n-1$. Kako su u i w susjedni, onda je i $g.u$ susjedan s $g.w$, pa je $d(g.u, g.w) = 1$. Odavde slijedi da je $d(g.u, g.v) = n$.

■

Svojstvo metrike iz leme 3.1.4 naziva se **lijeva invarijantnost** metrike, ili **invarijantnost na djelovanje s lijeva**.

Lema 3.1.5 *Neka je G grupa i $g \in G$ proizvoljan. Funkcija $\phi_g : G \to G$ definirana s*

$$\phi_g(h) = gh, \ \ \forall h \in G,$$

je bijekcija.

Dokaz: Tvrdimo da je funkcija $\phi_{g^{-1}} : G \to G$ inverz funkcije ϕ_g. Naime, vrijedi

$$\phi_{g^{-1}}(\phi_g(h)) = \phi_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}gh = h, \ \forall h \in G,$$

i

$$\phi_g(\phi_{g^{-1}}(h)) = \phi_g(g^{-1}h) = gg^{-1}h = h, \ \forall h \in G.$$

Dakle, ϕ_g je bijekcija.

■

3.2. Podgrupa generirana podskupom

Lema 3.2.1 *Neka je G grupa i neka je H_j, $j \in J$ familija podgrupa od G gdje je J neki skup indeksa. Tada je $\bigcap_{j \in J} H_j \leq G$.*

Dokaz: Neka su $h_1, h_2 \in \bigcap_{j \in J} H_j$ proizvoljni. Tada je $h_1, h_2 \in H_j$, za sve $j \in J$. Kako je $H_j \leq G$, za sve $j \in J$, vrijedi da je $h_1 h_2^{-1} \in H_j$, za sve $j \in J$, prema kriteriju za podgrupe. Odavde slijedi da je $h_1 h_2 \in \bigcap_{j \in J} H_j$, pa je $\bigcap_{j \in J} H_j \leq G$, prema kriteriju za podgrupe.

■

Definicija 3.2.2 *Neka je G grupa i S neprazan podskup od G. Podgrupa*

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \leq G, S \subseteq H} H$$

zove se ***podgrupa od G generirana skupom S***.

Prema lemi 3.2.1, $\langle S \rangle$ je zaista podgrupa grupe G, za svaki neprazan $S \subseteq G$.

Definicija 3.2.3 *Neprazan podskup S grupe G za koji je $G = \langle S \rangle$ zove se* ***skup generatora*** *grupe G. Skup generatora S grupe G je* ***simetričan*** *ako je $s^{-1} \in S$, za svaki $s \in S$.*

Lema 3.2.4 *Neka je $(G, \cdot)$ grupa i S neprazan podskup od G. Tada je*

$$\langle S \rangle = \{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n | n \in \mathbb{N}, s_i \in S \text{ ili } s_i^{-1} \in S, \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Dokaz: Neka je

$$K = \{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n | n \in \mathbb{N}, s_i \in S \text{ ili } s_i^{-1} \in S, \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Za $n = 1$ dobijemo da su svi elementi skupa S u K, odnosno $S \subseteq K$. Pokažimo sada da je $K \subseteq \langle S \rangle$. Po definiciji je $\langle S \rangle = \bigcap_{H \leq G, S \subseteq H} H$. Svaka podgrupa H koja sadrži skup S sadrži i inverze elemenata iz S, pa onda i konačne produkte elemenata iz S i njihovih inverza. Dakle, svaka podgrupa H koja sadrži skup S sadrži i skup K, pa onda i presjek svih podgrupa koje sadrže S sadrži K, odnosno $\langle S \rangle$ sadrži K. Ako pokažemo da je K podgrupa od G, onda smo gotovi, jer je $K \leq \langle S \rangle$, a kako K sadrži S, on sudjeluje u presjeku $\bigcap_{H \leq G, S \subseteq H} H$, pa je $\langle S \rangle \leq K$, iz čega slijedi da je $\langle S \rangle = K$. Pokažimo da je $K \leq G$. Neka su $s_1 \cdot \ldots \cdot s_n, s_1' \cdot \ldots \cdot s_m' \in S$ proizvoljni. Onda je $s_i \in S$ ili $s_i^{-1} \in S$, za sve $i = 1, \ldots, n$, te $s_j' \in S$ ili $s_j'^{-1} \in S$, za sve $j = 1, \ldots, m$. Tada je

$$(s_1 \cdot \ldots \cdot s_n) \cdot (s_1' \cdot \ldots \cdot s_m')^{-1} = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n \cdot s_m'^{-1} \cdot \ldots \cdot s_1'^{-1},$$

pri čemu su $s_i \in S$ ili $s_i^{-1} \in S$, za sve $i = 1, \ldots, n$, te $s_j'^{-1} \in S$ ili $s_j' = (s_j'^{-1})^{-1} \in S$, za sve $j = 1, \ldots, m$, pa je produkt s desne strane jednakosti sadržan u K. Dakle, prema kriteriju za podgrupe, K je podgrupa od G.

■

3.3. Slobodna grupa

Neka je X neprazan skup i X^{-1} skup disjunktan s X takav da je $|X| = |X^{-1}|$. Odaberimo bijekciju sa $f : X \to X^{-1}$ i za svaki $x \in X$, element $f(x) \in X^{-1}$ označimo s x^{-1}. Neka je $\{1\}$ skup disjunktan s $X \cup X^{-1}$.

Definicija 3.3.1 ***Riječ*** *na X je niz $(a_1, a_2, \ldots)$, gdje su $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$, za sve $i \in \mathbb{N}$, takav da postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji je $a_k = 1$, za sve $k \geq n$. Niz $(1, 1, \ldots)$ zove se* ***prazna*** *riječ na X i kraće ju označavamo s 1.*

Definicija 3.3.2 *Riječ $(a_1, a_2, \ldots)$ nad X je* **reducirana** *ako vrijedi:*

1) *Ako je $a_i = x$, onda je $a_{i+1} \neq x^{-1}$, za sve $i \in \mathbb{N}$ i sve $x \in X$,*

2) *ako je $a_i = x^{-1}$, onda je $a_{i+1} \neq x$, za sve $i \in \mathbb{N}$ i sve $x \in X$,*

3) *ako je $a_k = 1$, za neki $k \in \mathbb{N}$, onda je $a_i = 1$, za sve $i \geq k$.*

Skup svih reduciranih riječi nad X označavamo s $F(X)$.

Svaka neprazna reducirana riječ nad X je oblika $(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \ldots, x_n^{\lambda_n}, 1, 1, \ldots)$, gdje su $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ i $\lambda_i \in \{1, -1\}$, za sve $i = 1, \ldots, n$, pri čemu je $x^1 = x$, $\forall x \in X$. Zbog toga ćemo proizvoljnu nepraznu reduciranu riječ $(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \ldots, x_n^{\lambda_n}, 1, 1, \ldots) \in F(X)$ kraće označavati s $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$. Prema definiciji jednakosti dva niza, dvije neprazne reducirane riječi $x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}$ i $y_1^{\delta_1}\dots y_m^{\delta_m}$ su jednake ako i samo ako je $m=n$, $x_i=y_i$, $\lambda_i=\delta_i$, $\forall i=1,\dots,n$. Odavde slijedi da je preslikavanje $i: X\to F(X)$ definirano s $i(x)=x^1=x$ injektivno, pa identificiramo X sa slikom $i(X)\subseteq F(X)$ i smatramo da je X podskup od $F(X)$.

Propozicija 3.3.3 *Neka su $x_1^{\lambda_1}\dots x_m^{\lambda_m}$ i $y_1^{\delta_1}\dots y_n^{\delta_n}$ neprazne reducirane riječi nad X. Definiramo preslikavanje $\cdot$, za $m\le n$, s*

$$(x_1^{\lambda_1}\dots x_m^{\lambda_m})\cdot(y_1^{\delta_1}\dots y_n^{\delta_n})=\begin{cases} x_1^{\lambda_1}\dots x_{m-k}^{\lambda_{m-k}}y_{k+1}^{\delta_{k+1}}\dots y_n^{\delta_n} & ,k<m\\ y_{m+1}^{\delta_{m+1}}\dots y_n^{\delta_n} & ,k=m<n\\ 1 & ,k=m=n\end{cases},$$

gdje je $k\in\{0,\dots,m\}$ najveći cijeli broj takav da je $x_{m-j}^{\lambda_{m-j}}=y_{j+1}^{-\delta_{j+1}}$, za sve $j=0,\dots,k-1$. Za $m>n$, preslikavanje $\cdot$ definiramo s

$$(x_1^{\lambda_1}\dots x_m^{\lambda_m})\cdot(y_1^{\delta_1}\dots y_n^{\delta_n})=\begin{cases} x_1^{\lambda_1}\dots x_{m-k}^{\lambda_{m-k}}y_{k+1}^{\delta_{k+1}}\dots y_n^{\delta_n} & ,k<n\\ x_{m-n}^{\lambda_{m-n}}\dots x_m^{\lambda_m} & ,k=n<m\end{cases},$$

gdje je $k\in\{0,\dots,n\}$ najveći cijeli broj takav da je $x_{m-j}^{\lambda_{m-j}}=y_{j+1}^{-\delta_{j+1}}$, za sve $j=0,\dots,k-1$. Za praznu riječ 1, preslikavanje $\cdot$ definiramo s

$$1\cdot w=w\cdot 1=w,$$

za sve $w\in F(X)$. Onda je $(F(X),\cdot)$ grupa i $F(X)=\langle X\rangle$.

<u>*Dokaz:*</u> Neka su $x_1^{\lambda_1}\dots x_m^{\lambda_m}$ i $y_1^{\delta_1}\dots y_n^{\delta_n}$ neprazne reducirane riječi nad X. $F(X)$ je zatvoren s obzirom na operaciju $\cdot$, jer je preslikavanje $\cdot$ definirano tako da se x i x^{-1} pokrate ako su oni susjedni u riječi $(x_1^{\lambda_1}\dots x_m^{\lambda_m})\cdot(y_1^{\delta_1}\dots y_n^{\delta_n})$, pa je rezultat reducirana riječ. Prazna riječ 1 je neutralni element, jer je $1\cdot w=w\cdot 1=w$, za sve $w\in F(X)$. Za svaku nepraznu reduciranu riječ $x_1^{\lambda_1}\dots x_m^{\lambda_m}$ postoji neprazna reducirana riječ $x_m^{-\lambda_m}\dots x_1^{-\lambda_1}$ takva da je

$$(x_1^{\lambda_1}\dots x_m^{\lambda_m})\cdot(x_m^{-\lambda_m}\dots x_1^{-\lambda_1})=(x_m^{-\lambda_m}\dots x_1^{-\lambda_1})\cdot(x_1^{\lambda_1}\dots x_m^{\lambda_m})=1,$$

odnosno za svaki element iz $F(X)$ postoji njegov inverzni element u $F(X)$. Preostaje pokazati asocijativnost. To će biti kompliciranije od prethodnih svojstava, a za početak, trebat ćemo uvesti dodatna preslikavanja. Za svaki $x\in X$ i $\lambda\in\{1,-1\}$ definirajmo preslikavanje $|x^\lambda|: F(X)\to F(X)$ tako da je $|x^\lambda|(1)=x^\lambda$ i

$$|x^\lambda|(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n})=\begin{cases} x^\lambda x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n} & ,x^\lambda\neq x_1^{-\lambda_1}\\ x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n} & ,x^\lambda=x_1^{-\lambda_1}\end{cases},\ \forall x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}\in F(X).$$

Preslikavanje $|x^\lambda|$ je dobro definirano, za sve $x \in X$ i sve $\lambda \in \{1,-1\}$, jer je $|x^\lambda|(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n})$ reducirana riječ, za svaku reduciranu riječ $x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n} \in F(X)$. Tvrdimo da je $|x^\lambda|$ permutacija skupa $F(X)$, za sve $x \in X$ i sve $\lambda \in \{1,-1\}$. Naime, za proizvoljan $x \in X$ i $\lambda \in \{1,-1\}$, imamo da je

$$|x^\lambda|(|x^{-\lambda}|(1)) = |x^\lambda|(x^{-\lambda}) = 1,$$

jer je $x^\lambda = x^{-(-\lambda)}$ i

$$|x^{-\lambda}|(|x^\lambda|(1)) = |x^{-\lambda}|(x^\lambda) = 1,$$

jer je $x^{-\lambda} = x^{-(\lambda)}$. Nadalje, neka je $x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}$ proizvoljna neprazna reducirana riječ. Ako je $x^{-\lambda} \neq x_1^{-\lambda_1}$, onda je

$$|x^\lambda|(|x^{-\lambda}|(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n})) = |x^\lambda|(x^{-\lambda}x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}) = x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n},$$

jer je $x^\lambda = x^{-(-\lambda)}$. Ako je $x^{-\lambda} = x_1^{-\lambda_1}$, onda je

$$|x^\lambda|(|x^{-\lambda}|(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n})) = |x^\lambda|(x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}) = x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n},$$

jer je $x^\lambda = x_1^{\lambda_1}$ i $x_1^{\lambda_1} \neq x_2^{-\lambda_2}$, zbog toga što je $x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}$ reducirana riječ. Isto tako, ako je $x^\lambda \neq x_1^{-\lambda_1}$, onda je

$$|x^{-\lambda}|(|x^\lambda|(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n})) = |x^{-\lambda}|(x^\lambda x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}) = x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n},$$

jer je $x^{-\lambda} = x^{-(\lambda)}$. Ako je $x^\lambda = x_1^{-\lambda_1}$, onda je

$$|x^{-\lambda}|(|x^\lambda|(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n})) = |x^{-\lambda}|(x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}) = x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n},$$

jer je $x^{-\lambda} = x_1^{\lambda_1}$ i $x_1^{\lambda_1} \neq x_2^{-\lambda_2}$, zbog toga što je $x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}$ reducirana riječ. Dakle, $|x^{-\lambda}|$ je inverz od $|x^\lambda|$, pa je $|x^\lambda|$ bijekcija sa $F(X)$ u $F(X)$, odnosno $|x^\lambda|$ je permutacija skupa $F(X)$. Promotrimo podgrupu

$$F_0 = \langle\{|x| : x \in X\}\rangle$$

grupe svih permutacija skupa $F(X)$. Definirajmo funkciju $\varphi : F(X) \to F_0$ tako da je $\varphi(1) = id_{F(X)}$ i

$$\varphi(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}) = |x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}|, \ \forall x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n} \in F(X).$$

Pokažimo prvo da je φ injektivna funkcija. Neka su $x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}$ i $y_1^{\delta_1}\dots y_m^{\delta_m}$ različite neprazne reducirane riječi nad X. Tada je

$$\begin{aligned}\varphi(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n})(1) &= (|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}|)(1) = (|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}|)(|x_n^{\lambda_n}|(1)) = \\ &= (|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_{n-2}^{\lambda_{n-2}}|)(|x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}|(x_n^{\lambda_n})) = \dots = x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n},\end{aligned}$$

jer je $x_{i-1}^{\lambda_{i-1}} \neq x_i^{-\lambda_i}$, za sve $i = 2, \dots n$, zbog toga što je $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ reducirana riječ. Također je

$$\begin{aligned}\varphi(y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m})(1) &= (|y_1^{\delta_1}| \circ \dots \circ |y_m^{\delta_m}|)(1) = (|y_1^{\delta_1}| \circ \dots \circ |y_{m-1}^{\delta_{m-1}}|)(|y_m^{\delta_m}|(1)) = \\ &= (|y_1^{\delta_1}| \circ \dots \circ |y_{m-2}^{\delta_{m-2}}|)(|y_{m-1}^{\delta_{m-1}}|(y_m^{\delta_m})) = \dots = y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m},\end{aligned}$$

jer je $y_{i-1}^{\delta_{i-1}} \neq y_i^{-\delta_i}$, za sve $i = 2, \dots m$, zbog toga što je $y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_n}$ reducirana riječ. Dakle, kako iz različitih argumenata dobijemo različite slike, slijedi da je φ injektivna. Pokažimo sada da je φ surjektivna funkcija. Neka je $|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}| \in F_0$ proizvoljna permutacija. Tada postoji reducirana riječ $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ takva da je $\varphi(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) = |x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}|$, odnosno φ je surjekcija. Dakle, φ je bijekcija. Tvrdimo da je $\varphi(w_1 \cdot w_2) = \varphi(w_1) \circ \varphi(w_2)$, za sve reducirane riječi w_1 i w_2. Neka su $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ i $y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$ proizvoljne reducirane riječi i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$ reducirana riječ. Tada je

$$\begin{aligned}\varphi((x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) \cdot (y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m})) &= \varphi(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}) = \\ &= |x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}| \circ |y_1^{\delta_1}| \circ \dots |y_m^{\delta_m}| = \\ &= (|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}|) \circ (|y_1^{\delta_1}| \circ \dots |y_m^{\delta_m}|) = \\ &= \varphi(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) \circ \varphi(y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}).\end{aligned}$$

Neka su sada w_1, w_2 i w_3 proizvoljne reducirane riječi. Tada je

$$\begin{aligned}\varphi((w_1 \cdot w_2) \cdot w_3) &= \varphi(w_1 \cdot w_2) \circ \varphi(w_3) = (\varphi(w_1) \circ \varphi(w_2)) \circ \varphi(w_3) = \\ &= \varphi(w_1) \circ (\varphi(w_2) \circ \varphi(w_3)) = \varphi(w_1) \circ \varphi(w_2 \cdot w_3) = \\ &= \varphi(w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3)),\end{aligned}$$

jer je F_0 grupa, pa vrijedi asocijativnost u F_0. Sada, kako je φ bijekcija, postoji φ^{-1} i djelovanjem s φ^{-1} na prethodnu jednadžbu dobijemo

$$(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3 = w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3),$$

odnosno vrijedi asocijativnost u $F(X)$. Dakle, $(F(X), \cdot)$ je grupa.

Za kraj, pokažimo da je $F(X) = \langle X \rangle$. Neka je $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ proizvoljna reducirana riječ iz $F(X)$. Tada je

$$x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

gdje je $x_i^{\lambda_i} \in X$ ili $x_i^{-\lambda_i} \in X$, za svaki $i = 1, \dots, n$, pa je $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \in \langle X \rangle$, prema lemi 3.2.4. Dakle, $F(X) = \langle X \rangle$.

■

Grupu $F(X)$ zovemo **slobodna** grupa nad skupom X.

3.4. Slobodno djelovanje grupe na stablo

Definicija 3.4.1 je dobivena iz [7]. Sve ostale definicije, propozicije i teoremi ovog potpoglavlja mogu se pronaći u [1].

Definicija 3.4.1 *Neka je* (u, v) *brid grafa* $\mathcal{G}$ *i* $w \notin \mathcal{V}(\mathcal{G})$*. Kažemo da je brid* (u, v) ***podijeljen*** *kada je zamijenjen s bridovima* (u, w) *i* (w, v)*.*

Definicija 3.4.2 ***Baricentrička subdivizija*** *grafa* $\mathcal{G}$ *je graf* $\mathcal{G}'$ *dobiven podjelom svakog brida grafa* $\mathcal{G}$*.*

Lema 3.4.3 *Baricentrička subdivizija* $\mathcal{T}'$ *stabla* $\mathcal{T}$ *je stablo.*

Dokaz: Graf dobiven podjelom proizvoljnog brida (u, v) stabla $\mathcal{T}$ je povezan, jer smo brid (u, v) stabla $\mathcal{T}$ zamijenili novim vrhom w i povezali ga s vrhovima u i v. Pretpostavimo da graf dobiven podjelom proizvoljnog brida (u, v) stabla $\mathcal{T}$ sadrži ciklus $(u_0, u_1 \ldots, u_m, u, w, v, v_1, \ldots, v_n, u_0)$. Ako sada vrh w zamijenimo bridom (u, v), dobijemo stablo $\mathcal{T}$ zajedno s ciklusom $(u_0, u_1, \ldots, u_m, u, v, v_1, \ldots, v_n, u_0)$, a to je kontradikcija s definicijom stabla.

■

Definicija 3.4.4 ***Pločica*** *stabla* $\mathcal{T}$ *je podstablo* T *baricentričke subdivizije* $\mathcal{T}'$ *stabla* $\mathcal{T}$*.*

Definicija 3.4.5 *Neka je* $\mathcal{T}'$ *baricentrička subdivizija stabla* $\mathcal{T}$ *i* J *neki skup indeksa.* ***Popločavanje*** *stabla* $\mathcal{T}$ *je skup pločica* $\{T_j | j \in J\}$ *stabla* $\mathcal{T}$ *takav da vrijedi:*

(1) $\mathcal{E}(T_i) \bigcap \mathcal{E}(T_j) = \varnothing, \ \forall i \neq j,$

(2) $\bigcup_{j \in J} \mathcal{E}(T_j) = \mathcal{E}(\mathcal{T}').$

Iz svojstva (1) slijedi da se skupovi vrhova svake dvije različite pločice stabla $\mathcal{T}$, iz zadanog popločavanja $\{T_j | j \in J\}$ stabla $\mathcal{T}$, sijeku u najviše jednom vrhu stabla $\mathcal{T}'$, jer je svaka pločica podstablo stabla $\mathcal{T}'$.

Definicija 3.4.6 *Neka grupa* G *djeluje na stablo* $\mathcal{T}$ *i neka je* J *neki skup indeksa. Popločavanje* $\{T_j | j \in J\}$ *stabla* $\mathcal{T}$ *je* ***G-popločavanje*** *stabla* $\mathcal{T}$ *ako postoji pločica* $T_0 \in \{T_j | j \in J\}$ *takva da je* $\{T_j | j \in J\} = \{gT_0 | g \in G\}$*.*

Sada želimo uvesti G-popločavanje koje ćemo koristiti u dokazu teorema koji kaže da je grupa G izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako postoji stablo $\mathcal{T}$ na koje ona djeluje slobodno. Neka grupa G djeluje slobodno na stablo $\mathcal{T}$ i odaberimo vrh $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$. Promotrimo orbitu $G.v = \{g.v | g \in G\}$. Tvrdimo da je funkcija $f : G \to G.v$ definirana s $f(g) = g.v$, $\forall g \in G$, bijekcija. Naime, za svaki $g.v \in G.v$ postoji $g \in G$ takav da je $f(g) = g.v$, odnosno f je surjekcija. Nadalje, neka su $g_1, g_2 \in G$ takvi da je $g_1 \neq g_2$. Pretpostavimo da je $f(g_1) = f(g_2)$, odnosno da je $g_1.v = g_2.v$. Odavde slijedi da je $(g_2^{-1} g_1).v = v$, odnosno element $g_2^{-1} g_1 \in G$ fiksira vrh v stabla $\mathcal{T}$, ali to je u kontradikciji s pretpostavkom da G djeluje slobodno na stablo $\mathcal{T}$. Dakle, $f(g_1) \neq f(g_2)$, pa je f injekcija, odnosno f je bijekcija. Kako je f bijekcija, slijedi da skupovi $G.v$ i G imaju isti kardinalni broj.

Intuitivno, svaka će pločica G-popločavanja biti skup točaka iz baricentričke subdivizije $\mathcal{T}'$ koje su najbliže nekom vrhu $g.v$. Preciznije, sročimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.4.7 *Neka grupa G djeluje slobodno na stablo $\mathcal{T}$ i odaberimo $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$. Za svaki $g \in G$, neka je T_g podgraf baricentričke subdivizije $\mathcal{T}'$ stabla $\mathcal{T}$, sa skupom vrhova*

$$\mathcal{V}(T_g) = \{w \in \mathcal{V}(\mathcal{T}') | d(w, g.v) \leq d(w, g'.v), \forall g' \in G\},$$

pri čemu je d metrika najkraćeg puta na stablu $\mathcal{T}'$, i skupom bridova

$$\mathcal{E}(T_g) = \{(u, w) \in \mathcal{E}(\mathcal{T}') | u, w \in \mathcal{V}(T_g)\}.$$

Tada je $\{T_g | g \in G\}$ G-popločavanje stabla $\mathcal{T}$.

<u>*Dokaz:*</u> Pokažimo prvo da je T_g pločica stabla $\mathcal{T}$, za sve $g \in G$. Dovoljno je pokazati da je T_g povezan podgraf od $\mathcal{T}'$, jer je $\mathcal{T}'$ stablo, a podgraf stabla ne može sadržavati ciklus. Neka je $w \in \mathcal{V}(T_g)$ proizvoljan. Dovoljno je pokazati sljedeću tvrdnju:

($*$) Svaki vrh jedinstvenog $(w, g.v)$-puta P u $\mathcal{T}'$ se nalazi u $\mathcal{V}(T_g)$.

Naime, pretpostavimo da T_g ima barem dvije komponente povezanosti $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$, te pretpostavimo da se vrh $g.v$ nalazi u komponenti $\mathcal{T}_1$. Neka je w' proizvoljan vrh iz komponente $\mathcal{T}_2$. Onda postoji brid $e = (v_1, v_2)$ jedinstvenog $(w', g.v)$-puta P' u $\mathcal{T}'$, koji se ne nalazi u T_g, odnosno vrhovi v_1 i v_2 nisu spojeni bridom u T_g. Uz pretpostavku da vrijedi tvrdnja ($*$), svi vrhovi puta P' nalaze se u T_g, pa se posebno i vrhovi v_1 i v_2 nalaze u T_g. Kako su vrhovi v_1 i v_2 susjedni u $\mathcal{T}'$ i nalaze se u T_g, onda su oni susjedni i u T_g, zbog definicije skupa bridova $\mathcal{E}(T_g)$, a to je kontradikcija s činjenicom da oni nisu susjedni u T_g. Dakle, ako vrijedi tvrdnja $(*)$, onda je T_g povezan.

Pokažimo sada tvrdnju $(*)$. Neka je $d(w, g.v) = n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i neka je u prvi vrh nakon vrha w u putu P. Tada je $d(u, g.v) = n - 1$, jer je put između dva vrha u stablu jedinstven, odnosno ne postoji kraći put između vrhova u i $g.v$ u $\mathcal{T}'$. Pretpostavimo da se vrh u ne nalazi u T_g. Onda postoji $g' \in G$ takav da je $d(u, g'.v) < d(u, g.v)$. Iz nejednakosti trokuta dobijemo da je

$$d(w, g'.v) \leq d(w, u) + d(u, g'.v) = 1 + d(u, g'.v),$$

jer su u i w susjedni. Sada, kako je w vrh grafa T_g, imamo

$$n = d(w, g.v) \leq d(w, g'.v) \leq d(u, g'.v) + 1 < d(u, g.v) + 1 = n - 1 + 1 = n,$$

a to je kontradikcija. Dakle, T_g je pločica stabla $\mathcal{T}$, za sve $g \in G$.

Pokažimo sada da je $\bigcup\limits_{g \in G} \mathcal{E}(T_g) = \mathcal{E}(\mathcal{T}')$. Pokazat ćemo da za svaki brid e stabla $\mathcal{T}'$ postoji $g \in G$ takav da se brid e nalazi u stablu T_g. Prvo, primijetimo da se svaki vrh stabla $\mathcal{T}'$ nalazi u nekom T_g, jer za svaki vrh $u \in \mathcal{V}(\mathcal{T}')$ postoji $g \in G$ takav da je $d(u, g.v) \leq d(u, g'.v)$, za svaki $g' \in G$, odnosno svaki vrh $u \in \mathcal{V}(\mathcal{T}')$ mora imati neki sebi najbliži vrh $g.v$. Neka je $e = (u, w)$ proizvoljan brid stabla $\mathcal{T}'$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je u vrh stabla $\mathcal{T}$, a w da nije vrh stabla $\mathcal{T}$. Kako je $g.v$ vrh stabla $\mathcal{T}$, za svaki $g \in G$, onda je udaljenost vrha u od orbite $G.v$ parna, a udaljenost vrha w od orbite $G.v$ je neparna, odnosno te udaljenosti su različite. Pretpostavimo da je $d(u, G.v) < d(w, G.v)$, odnosno

$$\min\{d(u, g.v) | g \in G\} < \min\{d(w, g.v) | g \in G\}.$$

Nadalje, neka je $g \in G$ takav da se vrh u nalazi u stablu T_g, odnosno

$$d(u, g.v) \leq d(u, g'.v), \ \forall g' \in G.$$

Iz prethodne dvije nejednakosti slijedi da je

$$d(u, g.v) < \min\{d(w, g'.v) | g' \in G\}.$$

Iz nejednakosti trokuta dobivamo da je

$$d(w, g.v) \leq d(w, u) + d(u, g.v) = 1 + d(u, g.v),$$

jer su vrhovi u i w susjedni. Sada imamo

$$d(u, g.v) < \min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} \leq d(w, g.v) \leq 1 + d(u, g.v),$$

odnosno

$$0 < \min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} - d(u, g.v) \leq d(w, g.v) - d(u, g.v) \leq 1.$$

Kako je $d(w, g'.v)$ cijeli broj, za sve $g' \in G$ i kako je $d(u, g.v)$ cijeli broj, iz prethodne nejednakosti slijedi da je $\min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} - d(u, g.v) = 1$ i $d(w, g.v) - d(u, g.v) = 1$, odnosno

$$\min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} - d(u, g.v) = d(w, g.v) - d(u, g.v),$$

pa je

$$d(w, g.v) = \min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} \leq d(w, g'.v), \ \forall g' \in G,$$

iz čega slijedi da se vrh w nalazi u T_g. Kako su vrhovi u i w susjedni u $\mathcal{T}'$ i nalaze se u T_g, onda se i brid $e = (u, w)$ nalazi u T_g, zbog definicije skupa bridova stabla T_g.

Za kraj, pokažimo da je $gT_h = T_{gh}$, za sve $g, h \in G$, odnosno $g\mathcal{V}(T_h) = \mathcal{V}(T_{gh})$ i $g\mathcal{E}(T_h) = \mathcal{E}(T_{gh})$, za sve $g, h \in G$. Ako pokažemo tu tvrdnju, onda za $h = e$ dobijemo $gT_e = T_g$, za sve $g \in G$, odnosno T_e je T_0 iz definicije 3.4.6 G- popločavanja stabla $\mathcal{T}$, pa je $\{T_g | g \in G\}$ G-popločavanje stabla $\mathcal{T}$.

Neka su $g, h \in G$ proizvoljni. Kako su T_h i T_{gh} određeni svojim skupom vrhova, dovoljno je pokazati da je $g\mathcal{V}(T_h) = \mathcal{V}(T_{gh})$. Neka je $u \in \mathcal{V}(T_h)$ proizvoljan. Onda je

$$d(u, h.v) \leq d(u, g'.v), \ \forall g' \in G.$$

Želimo pokazati da je $g.u$ vrh stabla T_{gh}, odnosno da je

$$d(g.u, (gh).v) \leq d(g.u, g'.v), \ \forall g' \in G.$$

Kako je $\mathcal{T}'$ stablo, prema lemi 3.1.4 za $g^{-1} \in G$ imamo da je

$$\begin{aligned} d(g.u, (gh).v) &= d(g^{-1}.(g.u), g^{-1}.((gh).v)) = \\ &= d((g^{-1}g).u, (g^{-1}gh).v) = \\ &= d(u, h.v), \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} d(g.u, g'.v) &= d(g^{-1}.(g.u), g^{-1}.(g'.v)) = \\ &= d((g^{-1}g).u, (g^{-1}g').v) = \\ &= d(u, (g^{-1}g').v). \end{aligned}$$

Dakle, želimo pokazati da je

$$d(u, h.v) \leq d(u, (g^{-1}g').v), \ \forall g' \in G.$$

Iz leme 3.1.5 znamo da je funkcija $\phi_{g^{-1}} : G \to G$, $\phi_{g^{-1}}(g') = g^{-1}g'$, $\forall g' \in G$, bijekcija sa G u G, pa kako prolazimo elementima $g' \in G$, funkcijom $\phi_{g^{-1}}$ ćemo dobiti sve elemente grupe G, odnosno prethodnu nejednakost možemo napisati kao

$$d(u, h.v) \leq d(u, g'.v), \ \forall g' \in G,$$

a to vrijedi jer je u vrh stabla T_h. Dakle, $gT_h = T_{gh}$, za sve $g, h \in G$, odnosno $\{T_g | g \in G\}$ je G-popločavanje stabla $\mathcal{T}$.

■

Napomena 3.4.8 *U dokazu prethodne propozicije smo pokazali da je $gT_h = T_{gh}$, za sve $g, h \in G$, odnosno da je $g\mathcal{V}(T_h) = \mathcal{V}(T_{gh})$ i $g\mathcal{E}(T_h) = \mathcal{E}(T_{gh})$, za sve $g, h \in G$.*

Propozicija 3.4.9 *Neka grupa G djeluje slobodno na stablo $\mathcal{T}$ i neka je $\{T_g | g \in G\}$ G-popločavanje stabla $\mathcal{T}$ iz propozicije 3.4.7. Tada je skup*

$$S = \{g \in G | g\mathcal{V}(T_e) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \varnothing\}$$

simetričan skup generatora grupe G.

Napomena 3.4.10 *Ako je $g\mathcal{V}(T_e) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \varnothing$, za neki $g \in G$, onda presjek $g\mathcal{V}(T_e) \cap \mathcal{V}(T_e)$ sadrži točno jedan vrh stabla $\mathcal{T}'$, jer svake dvije različite pločice stabla $\mathcal{T}$ mogu imati najviše jedan zajednički vrh.*

<u>*Dokaz:*</u> Pokažimo prvo da je S simetričan. Za proizvoljan $s \in S$ je

$$(s\mathcal{V}(T_e)) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \varnothing,$$

pa prema napomeni 3.4.10, postoji vrh w stabla $\mathcal{T}'$ takav da je

$$(s\mathcal{V}(T_e)) \cap \mathcal{V}(T_e) = \{w\}.$$

Dakle, imamo da je $w = s.u$ za neki $u \in \mathcal{V}(T_e)$ i w je vrh stabla T_e. Djelovanjem na prethodnu jednadžbu sa $s^{-1} \in G$ dobijemo

$$s^{-1}.w = s^{-1}.(s.u) = (s^{-1}s).u = u,$$

odnosno $s^{-1}.w$ je vrh stabla T_e i kako je w vrh stabla T_e, slijedi da je $s^{-1}.w$ vrh stabla $s^{-1}T_e$, odnosno $(s^{-1}\mathcal{V}(T_e)) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \varnothing$, pa je $s^{-1} \in S$, iz čega slijedi da je S simetričan.

Pokažimo sada da S generira grupu G. Neka je $g \in G$ proizvoljan. Želimo pokazati da se g može zapisati kao produkt elemenata is S. Označimo redom pločice stabla $\mathcal{T}$ kojima prolazimo jedinstvenim $(g.v, v)$-putom:

$$T_{g_n}, T_{g_{n-1}}, \ldots, T_{g_1}, T_{g_0}.$$

Kako krećemo iz vrha $g.v$, prva pločica kojom prolazimo je $T_{g_n} = T_g$, jer je

$$d(g.v, g.v) = 0 \leq d(g.v, g^{'}.v), \ \forall g^{'} \in G,$$

pa se vrh $g.v$ nalazi u T_g. Kada dođemo do vrha v, nalazimo se u pločici $T_{g_0} = T_e$, jer je

$$d(v, e.v) = d(v, v) = 0 \leq d(v, g^{'}.v), \ \forall g^{'} \in G,$$

pa se vrh v nalazi u T_e. Tvrdimo da je svaki $g_{i-1}^{-1} g_i$, za $i = 1, \ldots, n$, jednak nekom elementu $s_i \in S$. Naime, ako prolazimo redom pločicama T_{g_i} i $T_{g_{i-1}}$, za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$, onda je

$$\mathcal{V}(T_{g_i}) \cap \mathcal{V}(T_{g_{i-1}}) = \{w\},$$

za neki vrh w stabla $\mathcal{T}'$. Dakle, imamo da je w vrh stabla T_{g_i} i vrh stabla $T_{g_{i-1}}$. Odavde slijedi da je $g_{i-1}^{-1}.w$ vrh stabla $g_{i-1}^{-1} T_{g_i}$ i vrh stabla $g_{i-1}^{-1} T_{g_{i-1}}$, odnosno

$$\varnothing \neq (g_{i-1}^{-1} \mathcal{V}(T_{g_i})) \cap (g_{i-1}^{-1} \mathcal{V}(T_{g_{i-1}})) = (g_{i-1}^{-1} g_i \mathcal{V}(T_e)) \cap \mathcal{V}(T_e),$$

prema napomeni 3.4.8, pa je $g_{i-1}^{-1} g_i = s_i \in S$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Sada, kako je

$$g = g_n = g_0^{-1} g_1 g_1^{-1} g_2 \ldots g_{n-1}^{-1} g_n = s_1 \ldots s_n,$$

slijedi da S generira grupu G.

∎

Teorem 3.4.11 *Neka grupa G djeluje slobodno na stablo $\mathcal{T}$. Tada je grupa G izomorfna nekoj slobodnoj grupi.*

<u>*Dokaz:*</u> Neka je $\{T_g | g \in G\}$ G-popločavanje stabla $\mathcal{T}$ iz propozicije 3.4.7 i neka je $S = \{g \in G | g\mathcal{V}(T_e) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \varnothing\}$ simetričan skup generatora grupe G iz propozicije 3.4.9. Pokazat ćemo da svaki element grupe G možemo na jedinstveni način zapisati kao reducirani produkt elemenata skupa S. Kako S generira G, proizvoljan $g \in G$ možemo zapisati kao

$$g = s_1 \ldots s_n,$$

za neke $s_1, \ldots, s_n$ iz S. Pretpostavimo da je $s_1 \ldots s_n$ reducirana riječ u S, odnosno da je $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$, za sve $i = 1, \ldots, n-1$. Konstruirat ćemo $(g.v, v)$-put P_1 u $\mathcal{T}'$ koji prolazi redom pločicama:

$$T_{s_1 \ldots s_n}, T_{s_1 \ldots s_{n-1}}, \ldots, T_{s_1}, T_e.$$

Ako konstruiramo takav put P_1, slijedi da je $s_1 \ldots s_n$ jedinstveni prikaz elementa g kao reduciranog produkta elemenata iz S. Naime, pretpostavimo da g možemo zapisati kao reducirani produkt $s_1' \ldots s_m'$ elemenata $s_1', \ldots, s_m' \in S$, koji se razlikuje od reduciranog produkta $s_1 \ldots s_n$. Tada možemo konstruirati $(g.v, v)$-put P_2 u $\mathcal{T}'$ koji prolazi redom pločicama:

$$T_{s_1' \ldots s_m'}, T_{s_1' \ldots s_{m-1}'}, \ldots, T_{s_1'}, T_e,$$

ali put P_2 se razlikuje od puta P_1, jer prolaze različitim pločicama, a to je kontradikcija s činjenicom da je put između vrhova $g.v$ i v jedinstven. Konstruirajmo sada put P_1. Prvo tražimo put od v do $s_1.v$. Vrh v je vrh pločice T_e, a vrh $s_1.v$ je vrh pločice $s_1 T_e = T_{s_1}$, prema napomeni 3.4.8. Kako je $s_1 \in S$, slijedi da pločice T_e i T_{s_1} imaju jedan zajednički vrh, iz čega slijedi da je $T_e \cup T_{s_1}$ stablo, pa je jedinstveni $(v, s_1.v)$-put sadržan u stablu $T_e \cup T_{s_1}$, odnosno prolazi redom pločicama T_e i T_{s_1}. Nadalje, tražimo put od $s_1.v$ do $(s_1 s_2).v$. Vrh $s_1.v$ je vrh pločice $s_1 T_e = T_{s_1}$, prema napomeni 3.4.8, a vrh $(s_1 s_2).v$ je vrh pločice $s_2 T_{s_1} = T_{s_1 s_2}$, prema napomeni 3.4.8. Kako je $s_2 \in S$, slijedi da pločice T_e i T_{s_2} imaju zajednički vrh, pa djelovanjem sa s_1, slijedi da pločice T_{s_1} i $T_{s_1 s_2}$ imaju zajednički vrh. Odavde slijedi da je $T_{s_1} \cup T_{s_1 s_2}$ stablo, pa je jedinstveni $(s_1.v, (s_1 s_2).v)$-put sadržan u stablu $T_{s_1} \cup T_{s_1 s_2}$, odnosno prolazi redom pločicama T_{s_1} i $T_{s_1 s_2}$. Nakon n koraka ovog postupka dobijemo jedinstveni $(v, g.v)$-put P_1 koji prolazi traženim pločicama. Dakle, proizvoljan $g \in G$ možemo na jedinstven način zapisati kao reducirani produkt elemenata iz S, odnosno grupa G je izomorfna nekoj slobodnoj grupi.

■

Vrijedi i obrat prethodnog teorema, odnosno vrijedi sljedeći teorem [1].

Teorem 3.4.12 *Ako je grupa G izomorfna nekoj slobodnoj grupi, onda postoji stablo $\mathcal{T}$ na koje grupa G djeluje slobodno.*

Kako se u teoriji grupa dvije izomorfne grupe mogu smatrati jednakima, onda teoremi 3.4.11 i 3.4.12 daju sljedeću ekvivalenciju: grupa G je slobodna grupa ako i samo ako postoji stablo na koje grupa G djeluje slobodno.

4. Kongruencijske podgrupe

Cilj ovog poglavlja je pokazati vezu između Fareyevog stabla i slobodnog djelovanja grupe na stablo. Naime, navest ćemo beskonačno mnogo podgrupa grupe $SL(2, \mathbb{Z})$ koje djeluju slobodno na Fareyevo stablo [1].

Definicija 4.1.1, definicija 4.1.3 i lema 4.1.7 se mogu pronaći u [8]. Definicija 4.1.6 se može pronaći u [6]. Napomena 4.1.9 se može pronaći u [9]. Sve ostale definicije, primjeri i teoremi se mogu pronaći u [1].

4.1. Osnovne definicije

Definicija 4.1.1 *Neka grupa G djeluje na skup Ω. Skup*

$$G_\omega = \{g \in G | g.\omega = \omega\}$$

zove se ***stabilizator*** *elementa $\omega \in \Omega$ s obzirom na djelovanje . grupe G na skup Ω.*

Napomena 4.1.2 *Neka grupa G djeluje na skup Ω i neka je $\omega \in \Omega$ proizvoljan. Tada vrijedi:*

(1) *Stabilizator G_ω elementa ω je podgrupa grupe G.*

(2) *Niti jedan netrivijalan element grupe G ne fiksira ω ako i samo ako je G_ω trivijalna grupa.*

Definicija 4.1.3 *Neka grupa G djeluje na skup Ω. Djelovanje $. : G \times \Omega \to \Omega$ grupe G na skup Ω je* ***tranzitivno*** *ako postoji element $\omega \in \Omega$ takav da je $G.\omega = \Omega$. Kažemo da grupa G djeluje* ***tranzitivno*** *na skup Ω ako postoji tranzitivno djelovanje grupe G na skup Ω.*

Napomena 4.1.4 *Neka grupa G djeluje tranzitivno na skup Ω. Tada je $G.\omega = \Omega$, $\forall \omega \in \Omega$, odnosno svi elementi skupa Ω se nalaze u istoj orbiti i ta orbita je jednaka cijelom skupu Ω.*

Sada ćemo navesti primjer tranzitivnog djelovanja grupe na skup koje će nam biti korisno kasnije.

Primjer 4.1.5 *Neka je zadana grupa $SL(2,\mathbb{Z})$, Fareyev graf $\mathcal{G}$, Fareyev kompleks $\mathcal{G}_T$ i Fareyevo stablo $\mathcal{T}$. Tvrdimo da grupa $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje tranzitivno na skup vrhova Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovara skupu bridova $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ i na skup vrhova Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovara skupu trokuta T Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$.*

Pokažimo prvo da $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje tranzitivno na skup bridova $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Neka je $.$ djelovanje grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na skup $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ definirano kao u primjeru 2.1.4. Tada znamo da je preslikavanje $. : SL(2,\mathbb{Z})\times\mathcal{E}(\mathcal{G}) \to \mathcal{E}(\mathcal{G})$ definirano s

$$A.(u,v) = (A.u, A.v),\ \ \forall A \in SL(2,\mathbb{Z}),\ \ \forall (u,v)\in\mathcal{E}(\mathcal{G})$$

djelovanje grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na skup $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ (djelovanje grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na skup $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ i na skup $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ oboje označavamo s $.$). Tvrdimo da je to djelovanje tranzitivno. Pokazat ćemo da se svi elementi skupa $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ nalaze u orbiti elementa $(\pm(1,0),\pm(0,1))\in\mathcal{E}(\mathcal{G})$. Neka je $(\pm(p,q),\pm(r,s))$ proizvoljan brid Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Želimo pronaći matricu $A\in SL(2,\mathbb{Z})$ takvu da je $A.(\pm(1,0),\pm(0,1)) = (\pm(p,q),\pm(r,s))$. Promotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s\end{bmatrix}$. Kako je $(\pm(p,q),\pm(r,s))$ brid Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, odnosno kako su $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$ susjedni vrhovi Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, slijedi da je $\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s\end{bmatrix}\right)\in\{1,-1\}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s\end{bmatrix}\right) = 1$, jer u suprotnom možemo odabrati $(-r,-s)$ za predstavnika klase $\pm(r,s)$, pa dobijemo da je $\det\left(\begin{bmatrix} p & -r \\ q & -s\end{bmatrix}\right) = 1$. Dakle, matrica A se nalazi u $SL(2,\mathbb{Z})$. Nadalje, kako je

$$\begin{aligned} A.(\pm(1,0),\pm(0,1)) &= \begin{bmatrix} p & r \\ q & s\end{bmatrix}.(\pm(1,0),\pm(0,1)) = \\ &= \left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s\end{bmatrix}.(\pm(1,0)), \begin{bmatrix} p & r \\ q & s\end{bmatrix}.(\pm(0,1))\right) = \\ &= (\pm(p,q),\pm(r,s)),\end{aligned}$$

slijedi da se brid $(\pm(p,q),\pm(r,s))$ nalazi u orbiti brida $(\pm(1,0),\pm(0,1))$, pa kako je $(\pm(p,q),\pm(r,s))$ bio proizvoljan brid Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, slijedi da *se svi elementi skupa* $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ *nalaze u istoj orbiti, odnosno djelovanje* $\boldsymbol{.}$ *grupe* $SL(2,\mathbb{Z})$ *na skup bridova* $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ *Fareyevog grafa* $\mathcal{G}$ *je tranzitivno.*

Pokažimo sada da $SL(2,\mathbb{Z})$ *djeluje tranzitivno na skup trokuta* T *Fareyevog kompleksa* $\mathcal{G}_T$. *Neka je* $\boldsymbol{.}$ *djelovanje grupe* $SL(2,\mathbb{Z})$ *na skup trokuta* T *Fareyevog kompleksa* $\mathcal{G}_T$ *definirano kao u lemi 2.3.2. Tvrdimo da je to djelovanje tranzitivno. Pokazat ćemo da se svi elementi skupa* T *nalaze u orbiti elementa* $\{\pm(1,0),\pm(0,1),\pm(1,1)\}\in T$. *Neka su* $\pm(p,q)$ *i* $\pm(r,s)$ *proizvoljni susjedni vrhovi Fareyevog grafa* $\mathcal{G}$. *Prema lemi 2.2.1, vrhovi* $\pm(p,q)$ *i* $\pm(r,s)$ *su sadržani u trokutima* $\{\pm(p,q),\pm(r,s),\pm(p+r,q+s)\}$ *i* $\{\pm(p,q),\pm(r,s),\pm(p-r,q-s)\}$. *Pokažimo da se ti trokuti nalaze u orbiti trokuta* $\{\pm(1,0),\pm(0,1),\pm(1,1)\}$. *Promotrimo prvo matricu* $A=\begin{bmatrix}p & r\\ q & s\end{bmatrix}$. *Kako su vrhovi* $\pm(p,q)$ *i* $\pm(r,s)$ *susjedni u Fareyevom grafu* $\mathcal{G}$, *slijedi da je* $\det\left(\begin{bmatrix}p & r\\ q & s\end{bmatrix}\right)\in\{1,-1\}$. *Kao i prije, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je* $\det\left(\begin{bmatrix}p & r\\ q & s\end{bmatrix}\right)=1$, *jer u suprotnom možemo odabrati* $(-r,-s)$ *za predstavnika klase* $\pm(r,s)$, *pa dobijemo da je* $\det\left(\begin{bmatrix}p & -r\\ q & -s\end{bmatrix}\right)=1$. *Dakle, matrica* A *se nalazi u* $SL(2,\mathbb{Z})$. *Nadalje, kako je*

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{.}\{\pm(1,0),\pm(0,1),\pm(1,1)\} &= \begin{bmatrix}p & r\\ q & s\end{bmatrix}\boldsymbol{.}\{\pm(1,0),\pm(0,1),\pm(1,1)\} = \\
&= \left\{\begin{bmatrix}p & r\\ q & s\end{bmatrix}\boldsymbol{.}(\pm(1,0)),\begin{bmatrix}p & r\\ q & s\end{bmatrix}\boldsymbol{.}(\pm(0,1)),\begin{bmatrix}p & r\\ q & s\end{bmatrix}\boldsymbol{.}(\pm(1,1))\right\} = \\
&= \{\pm(p,q),\pm(r,s),\pm(p+r,q+s)\},
\end{aligned}$$

slijedi da se trokut $\{\pm(p,q),\pm(r,s),\pm(p+r,q+s)\}$ *nalazi u orbiti trokuta* $\{\pm(1,0),\pm(0,1),\pm(1,1)\}$. *Promotrimo sada matricu* $B=\begin{bmatrix}p-r & r\\ q-s & s\end{bmatrix}$. *Kako matricu* B *možemo dobiti iz matrice* A *dodavanjem drugog stupca matrice* A *pomnoženog s* -1 *prvom stupcu matrice* A, *slijedi da je* $\det\left(\begin{bmatrix}p-r & r\\ q-s & s\end{bmatrix}\right)=1$, *pa je $B \in SL(2,\mathbb{Z})$. Nadalje, kako je*

$$B.\{\pm(1,0),\pm(0,1),\pm(1,1)\} = \begin{bmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{bmatrix}.\{\pm(1,0),\pm(0,1),\pm(1,1)\} =$$
$$= \left\{\begin{bmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{bmatrix}.(\pm(1,0)), \begin{bmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{bmatrix}.(\pm(0,1)), \begin{bmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{bmatrix}.(\pm(1,1))\right\} =$$
$$= \{\pm(p-r,q-s),\pm(r,s),\pm(p,q)\},$$

slijedi da se trokut $\{\pm(p,q),\pm(r,s),\pm(p-r,q-s)\}$ nalazi u orbiti trokuta $\{\pm(1,0),\pm(0,1),\pm(1,1)\}$. Dakle, djelovanje . grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na skup trokuta T Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$ je tranzitivno.

Definicija 4.1.6 *Neka je G grupa te neka su H i K podgrupe grupe G. Za $g \in G$ definiramo skup $gH = \{gh | h \in H\}$. Nadalje, za $g, g' \in G$, definiramo skup $gHg' = \{ghg' | h \in H\}$. Ako postoji $g \in G$ takav da je $K = gHg^{-1}$, onda kažemo da su K i H* ***konjugirane*** *podgrupe grupe G i kraće pišemo $K = H^g$.*

Lema 4.1.7 *Neka grupa G djeluje na skup Ω i neka je G_ω stabilizator elementa $\omega \in \Omega$ za djelovanje . grupe G na skup Ω. Tada je $G_{g.\omega} = G_\omega^g$, $\forall g \in G$. Posebno, ako G djeluje tranzitivno na skup Ω, onda su svi stabilizatori međusobno konjugirane podgrupe grupe G.*

Dokaz: Odaberimo proizvoljan $g \in G$ i zatim uzmimo neki $g' \in G_{g.\omega}$ Tada je $g'.(g.\omega) = g.\omega$, iz čega slijedi da je $(g^{-1}g'g).\omega = \omega$, pa je $g^{-1}g'g \in G_\omega$. Odavde slijedi da postoji $h \in G_\omega$ takav da je $g^{-1}g'g = h$, iz čega dobivamo da je $g' = ghg^{-1} \in G_\omega^g$. Dakle, $G_{g.\omega} \subseteq G_\omega^g$. Obratno, neka je $g' \in G_\omega^g$ proizvoljan. Tada postoji $h \in G_\omega$ takav da je $g' = ghg^{-1}$, iz čega slijedi da je $g^{-1}g'g = h \in G_\omega$, odnosno $(g^{-1}g'g).\omega = \omega$, pa je $g'.(g.\omega) = g.\omega$. Dakle, $g' \in G_{g.\omega}$, pa je $G_\omega^g \subseteq G_{g.\omega}$, odnosno $G_{g.\omega} = G_\omega^g$. Posebno, ako G djeluje tranzitivno na skup Ω, onda prema napomeni 4.1.4 slijedi da se svi elementi skupa Ω nalaze u istoj orbiti, pa su svi stabilizatori međusobno konjugirane podgrupe grupe G.

■

Definicija 4.1.8 *Za neki prirodan broj m, sa $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ označimo jezgru homomorfizma*

$$f : SL(2,\mathbb{Z}) \to SL(2,\mathbb{Z}_m),$$

definiranog s

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a(\mathrm{mod}\ m) & b(\mathrm{mod}\ m) \\ c(\mathrm{mod}\ m) & d(\mathrm{mod}\ m) \end{bmatrix},\ \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),$$

odnosno

$$\begin{aligned} SL(2,\mathbb{Z})[m] &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) : f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) : a, d \equiv 1 (\bmod\ m),\ b, c \equiv 0 (\bmod\ m) \right\}. \end{aligned}$$

Grupa $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ zove se ***glavna kongruencijska podgrupa nivoa*** *m (Za svaki prirodan broj m, $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ je grupa, jer je jezgra homomorfizma normalna podgrupa domene tog homomorfizma, odnosno $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ je normalna podgrupa grupe $SL(2,\mathbb{Z})$).*

Napomena 4.1.9 *Neka je G grupa, H podgrupa grupe G, Ω neki skup i $\mathcal{G}$ neki graf. Tada vrijedi:*

(1) *Ako je $\centerdot : G \times \Omega \to \Omega$ djelovanje grupe G na skup Ω, onda je restrikcija preslikavanja $\centerdot$ na $H \times \Omega$ djelovanje grupe H na skup Ω.*

(2) *Ako je $\centerdot : G \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \to \mathcal{V}(\mathcal{G})$ djelovanje grupe G na skup vrhova grafa $\mathcal{G}$ koje čuva susjednost vrhova grafa $\mathcal{G}$, onda je restrikcija preslikavanja $\centerdot$ na $H \times \mathcal{V}(\mathcal{G})$ djelovanje grupe H na skup vrhova $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ grafa $\mathcal{G}$ koje čuva susjednost vrhova grafa $\mathcal{G}$.*

4.2. Slobodno djelovanje grupa na Fareyevo stablo

Sljedeći teorem nam daje beskonačno mnogo podgrupa grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ koje djeluju slobodno na Fareyevo stablo.

Teorem 4.2.1 *Za svaki prirodan broj $m \geq 3$, grupa $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ je izomorfna nekoj slobodnoj grupi.*

Dokaz: Neka je $m \geq 3$ neki prirodan broj te neka su zadani Fareyev graf $\mathcal{G}$, Fareyev kompleks $\mathcal{G}_T$ i Fareyevo stablo $\mathcal{T}$. Prema (2) iz napomene 4.1.9, restrikcija djelovanja $\centerdot$ grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ iz primjera 2.3.5 na $SL(2,\mathbb{Z})[m] \times \mathcal{V}(\mathcal{T})$ je djelovanje grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ (koje ćemo isto označavati s $\centerdot$). Dovoljno je pokazati da je djelovanje $\centerdot$ grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ slobodno, jer onda prema teoremu 3.4.11 slijedi da je $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ izomorfna nekoj slobodnoj grupi.

Pokažimo prvo da niti jedan netrivijalni element grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ ne fiksira niti jedan vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$. Prema (2) iz napomene 4.1.2, dovoljno je pokazati da je stabilizator svakog vrha Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ trivijalna grupa.

Promotrimo prvo vrhove Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovaraju bridovima Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Neka je v vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovara bridu $(\pm(1,0),\pm(0,1))$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, odnosno $v=(\pm(1,0),\pm(0,1))$. Odredimo stabilizator vrha v s obzirom na djelovanje . grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$. Proizvoljna matrica $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$ će preslikati vrh v u samoga sebe ako mu preslika svaki kraj u samoga sebe ili ako mu preslika svaki kraj jedan u drugoga. Ako matrica A preslika svaki kraj vrha v u samoga sebe, onda je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.(\pm(1,0))=\pm(1,0)$ i $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.(\pm(0,1))=\pm(0,1)$, iz čega slijedi da je $\pm(a,c)=\pm(1,0)$ i $\pm(b,d)=\pm(0,1)$, odnosno $a,d\in\{1,-1\}$ i $c=b=0$. Dakle, matrice koje stabiliziraju vrh v za ovaj slučaj su $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ali $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)=-1\neq 1$ i $\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=-1\neq 1$, pa nam ostanu matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. S druge strane, ako matrica A preslika svaki kraj vrha v jedan u drugoga, onda je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.(\pm(1,0))=\pm(0,1)$ i $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.(\pm(0,1))=\pm(1,0)$, iz čega slijedi da je $\pm(a,c)=\pm(0,1)$ i $\pm(b,d)=\pm(1,0)$, odnosno $b,c\in\{1,-1\}$ i $a=d=0$. Dakle, matrice koje stabiliziraju vrh v za ovaj slučaj su $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ali $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)=-1\neq 1$ i $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)=-1\neq 1$, pa nam ostanu matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Dobili smo da je stabilizator vrha v Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ s obzirom na djelovanje . grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ jednak $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$. Sada, kako $-1\not\equiv 1(\text{mod } m)$ i $1\not\equiv 0(\text{mod } m)$, slijedi da jedina matrica iz tog skupa koja se nalazi u $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ je $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, odnosno stabilizator ovog vrha v Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ s obzirom na djelovanje . grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ je trivijalna grupa.

Pokažimo sada da su stabilizatori svih ostalih vrhova Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovaraju bridovima Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, s obzirom na djelovanje . grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$, trivijalne grupe. Neka je w proizvoljan vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovara bridu Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Prema primjeru 4.1.5, grupa $SL(2,\mathbb{Z})$ djeluje tranzitivno na skup svih vrhova Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovaraju bridovima Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, pa postoji matrica $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ takva da je $M.v = w$, gdje je $v = (\pm(1,0), \pm(0,1))$ i $.$ je djelovanje grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$. Sada, prema lemi 4.1.7, imamo da je

$$G_{M.v} = MG_vM^{-1}, \tag{4.1}$$

gdje su $G_{M.v}$ i G_v stabilizatori elemenata $M.v$ i v s obzirom na djelovanje $.$ grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$. Pretpostavimo da stabilizator elementa w s obzirom na djelovanje $.$ grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ nije trivijalna grupa, odnosno pretpostavimo da postoji $N \in SL(2,\mathbb{Z})[m]_w$. Tada se taj N nalazi i u $G_{M.v}$, pa iz relacije (4.1) slijedi da se element $M^{-1}NM$ nalazi u G_v. Nadalje, kako je $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ normalna podgrupa grupe $SL(2,\mathbb{Z})$, slijedi da se element $M^{-1}NM$ nalazi i u stabilizatoru $SL(2,\mathbb{Z})[m]_v$ elementa v s obzirom na djelovanje $.$ grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$, a to je kontradikcija s činjenicom da je $SL(2,\mathbb{Z})[m]_v$ trivijalna grupa. Dakle, $SL(2,\mathbb{Z})[m]_w$ je trivijalna grupa, za proizvoljni vrh w Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovara bridu Fareyevog grafa $\mathcal{G}$.

Promotrimo sada vrhove Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovaraju trokutima Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$. Neka je v vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovara trokutu $\{\pm(1,0), \pm(0,1), \pm(1,1)\}$ Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$, odnosno $v = \{\pm(1,0), \pm(0,1), \pm(1,1)\}$. Slično kao prije, dobije se da je stabilizator vrha v s obzirom na djelovanje $.$ grupe $SL(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ jednak

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}.$$

Sada, kako je $-1 \not\equiv 1 (\text{mod } m)$ i $\pm 1 \not\equiv 0 (\text{mod } m)$, slijedi da jedina matrica iz tog skupa koja se nalazi u $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ je matrica $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, odnosno stabilizator ovog vrha v Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ s obzirom na djelovanje $.$ grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ je trivijalna grupa. Sada, slično kao prije, koristeći primjer 4.1.5 i lemu 4.1.7, dobije se da su stabilizatori svih vrhova Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ koji odgovaraju trokutima Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$ trivijalne grupe.

Za kraj, pokažimo da djelovanje $.$ grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ ne fiksira niti jedan brid Fareyevog stabla $\mathcal{T}$. Djelovanje $.$ grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ fiksira neki brid e Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ ako mu preslika svaki kraj u samoga sebe ili ako mu preslika svaki kraj jedan u drugoga. Djelovanje . grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ ne može preslikati kraj brida e u samoga sebe jer smo pokazali da su stabilizatori vrhova Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ trivijalne grupe. Nadalje, kako je djelovanje . grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ definirano tako da preslikava brid Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ u brid Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ i trokut Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$ u trokut Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$, te kako je jedan kraj svakog brida Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ brid Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, a drugi kraj trokut Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$, slijedi da djelovanje . grupe $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ ne može preslikati jedan kraj nekog brida Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ u drugi kraj tog brida. Dakle, grupa $SL(2,\mathbb{Z})[m]$ djeluje slobodno na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$.

$\blacksquare$

Zaključak

Započeli smo s definicijom grafa i osnovnim svojstvima grafova i grupa. Uveli smo Fareyev graf pomoću relacije ekvivalencije definirane na skupu svih primitivnih elemenata od $\mathbb{Z}^2$. Pokazali smo da specijalna linearna grupa djeluje na Fareyev graf i opisali smo konstrukciju Fareyevog grafa. Zatim smo definirali Fareyev kompleks i pokazali da specijalna linearna grupa djeluje na skup trokuta Fareyevog kompleksa. Nadalje, definirali smo Fareyevo stablo i pokazali da je Fareyevo stablo zaista stablo, te smo dokazali da specijalna linearna grupa djeluje na Fareyevo stablo, ali to djelovanje nije slobodno. Na kraju drugog poglavlja smo napisali bilješku o Johnu Fareyu Sr. i pokazali vezu između Fareyevog stabla i Fareyevog niza. Treće poglavlje smo započeli s pojmovima metrike najkraćeg puta i podgrupom generiranom podskupom. Zatim smo definirali slobodnu grupu i dokazali da je ona zaista grupa. Pokazali smo teorem koji kaže da je grupa G izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako ona djeluje slobodno na neko stablo $\mathcal{T}$, koristeći određeno G-popločavanje stabla $\mathcal{T}$ i specifični simetričan skup generatora grupe G. Na kraju smo definirali beskonačno mnogo podgrupa specijalne linearne grupe i dokazali teorem koji kaže da je svaka ta podgrupa izomorfna nekoj slobodnoj grupi, jer svaka od tih podgrupa djeluje slobodno na Fareyevo stablo.

Popis slika

Literatura

[1] Clay, Matt; Margalit, Dan: *Office Hours with a Geometric Group Theorist*, New Jersey, 2017.

[2] Hungerford, Thomas: *Algebra*, New York, 1974.

[3] Crnković, Dean: Diskretna matematika. Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci. 2017./2018.

[4] https://proofwiki.org/wiki/B%C3%A9zout%27s_Identity

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Farey_sequence

[6] Grbac, Neven; Mikulić Crnković, Vedrana: *Algebarske strukture*, skripta, 2010.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism_(graph_theory)

[8] Mikulić Crnković, Vedrana: Permutacijske grupe. Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci. Diskretna matematika i primjene. 2022./2023.

[9] https://proofwiki.org/wiki/Definition:Group_Action_Induced_on_Subgroup