Primjena trigonometrije u planimetriji i stereometriji

Milanović, Maja

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Matematika

Maja Milanović

PRIMJENA TRIGONOMETRIJE U PLANIMETRIJI I STEREOMETRIJI

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2024.

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Matematika

Maja Milanović

PRIMJENA TRIGONOMETRIJE U PLANIMETRIJI I STEREOMETRIJI

Mentorica: Doc. dr. sc. Milena Sošić

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2024.

Sažetak

Diplomski rad obuhvaća usporedbu udžbenika korištenih u nastavi matematike prije i poslije donošenja Kurikuluma na temelju kojih se navodi kritički osvrt o zastupljenosti i načinu obrade nastavnih sadržaja iz trigonometrije u pojedinom razredu gimnazija u odnosu na promjene koje su se dogodile u redoslijedu obrade tih nastavnih sadržaja uzrokovane prebacivanjem nekih nastavnih sadržaja s viših na niže razrede gimnazija. U skladu s time, navode se neki prijedlozi za poboljšanje kvalitete pojedinih nastavnih sadržaja za drugi razred gimnazija s posebnim naglaskom na trigonometriju trokuta i njezine primjene u planimetriji i stereometriji. Sve navedene tvrdnje i formule detaljno se obrazlažu i argumentiraju u suglasnosti s načelima postupnosti i zornosti.

Ključne riječi

trigonometrija, trigonometrijske funkcije, poučak o sinusima, poučak o kosinusu, planimetrija, stereometrija, paralelogram, tetivni četverokut, stožac upisan u kuglu, paralelopiped

Sadržaj

1. Uvod

Pojam trigonometrije dolazi od grčke riječi „trigonom", što u prijevodu znači trokut i grčke riječi „metron", što znači mjera. Naime, trigonometrija ima široku primjenu u raznim znanostima, među kojima su matematika, fizika, geografija, geodezija i astronomija. U počecima proučavanja astronomije pojavljivali su se određeni problemi, pri čemu je jedan od njih bio određivanje udaljenosti između Zemlje i ostalih planeta, koju tada nisu mogli izračunati. Pronalaženjem rješenja problema znanstvenici su osmislili metode kojima su navedeni problem uspoređivali s trokutom i pritom proučavali odnose između stranica i kutova trokuta tako da su dva vrha trokuta pripadala Zemlji, dok je treći vrh predstavljao određeni planet. Time dolazi do razvoja trigonometrije trokuta čija će se primjena detaljno obrazložiti u nastavku rada na odabranim nastavnim sadržajima iz područja planimetrije i stereometrije. U diplomskom radu pozivamo se na dokument koji se kraće naziva Kurikulum, a odnosi se na Odluku o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj iz 2019. godine, na kojemu se temelji cjelokupno obrazovanje u osnovnim školama i gimnazijama iz predmeta Matematika, vidi [6]. Donošenjem Kurikuluma dolazi do značajnijih promjena u redoslijedu i načinu obrade nekih nastavnih sadržaja kako iz matematike tako i iz njezinog područja trigonometrije, pri čemu se pojedini sadržaji iz viših razreda prebacuju u niže razrede gimnazija. Iz tog razloga, usporedit će se udžbenici objavljeni prije i poslije donošenja Kurikuluma i pritom provesti detaljna analiza pojedinih dijelova udžbenika uz kritički osvrt na kvalitetu obrade nastavnih sadržaja, s posebnim naglaskom na primjenu trigonometrije u planimetriji i stereometriji. Također, za nastavne sadržaje koji u udžbenicima nisu detaljno objašnjeni navest će se prijedlozi za njihovo poboljšanje, čime će se za svaku formulu obrazložiti i argumentirati njezin izvod. U primjeni trigonometrije u planimetriji detaljnije će se objasniti nastavni sadržaji koji se odnose na paralelogram i tetivni četverokut, gdje će se primijeniti trigonometrija trokuta pri izvodu formula za određivanje duljina dijagonala i površine navedenih geometrijskih likova. Analogno, u primjeni trigonometrije u stereometriji obrazložit će se primjena trigonometrije trokuta na stožac upisan u kuglu, gdje će se odrediti mjera kuta pri vrhu osnog presjeka stošca i primjena trigonometrije trokuta na paralelopiped za koji će se detaljno izvesti formula za izračunavanje njegovog volumena. Sve navedeno objasnit će se u skladu s načelima postupnosti i zornosti kako bi se učenicima omogućilo lakše savladavanje novog gradiva i razumijevanje njegove primjene u rješavanju konkretnih zadataka, čime se učenike potiče da nastavne sadržaje ne uče napamet, već da ih povezuju s prethodno stečenim znanjima.

2. Primjena trigonometrije u planimetriji

Planimetrija je dio geometrije koji se bavi proučavanjem geometrijskih likova u ravnini te njihovih svojstava i međusobnih odnosa. U nastavku ćemo usporediti dva udžbenika: Matematika 3 i Matematika 2, vidi [1] i [4], objavljenih prije donošenja Kurikuluma s tri udžbenika: Matematika 2, Matematika 3 i Matematika 1, vidi [5], [2] i [3], objavljenih nakon donošenja Kurikuluma, pri čemu su svi udžbenici napisani od strane istih autora B. Dakića i N. Elezovića. Motivacija za usporedbu navedenih udžbenika proizlazi iz činjenice da je nakon donošenja Kurikuluma iz nastavnog predmeta Matematika došlo do značajnijih promjena u redoslijedu obrade pojedinih nastavnih jedinica, što ćemo u nastavku detaljnije pojasniti uz kritički osvrt na kvalitetu i način obrade sadržaja iz područja trigonometrije s posebnim osvrtom na primjenu trigonometrije u planimetriji. Nadalje, obzirom na uočene nepravilnosti i nedovoljnog pojašnjenja nekih dijelova sadržaja iz poglavlja *Trigonometrija trokuta* i *Četverokut* u udžbeniku Matematika 2, vidi [5], navest ćemo nekoliko prijedloga za njihovo poboljšanje.

2.1. Usporedba udžbenika objavljenih prije i poslije donošenja Kurikuluma i kritički osvrt

Donošenjem Kurikuluma 2019. godine, kojim su za nastavni predmet Matematika određeni odgojno-obrazovni ciljevi učenja i poučavanja, navedeni svi odgojno-obrazovni ishodi, načini rada, preporuke za ostvarivanje određenog ishoda i postupci vrednovanja učenika, došlo je do određenih promjena u izvođenju nekih nastavnih cjelina i jedinica (tj. nastavnih sadržaja) u odnosu na njihovo izvođenje prije Kurikuluma, što je rezultiralo da su se Kurikulumom neki sadržaji iz viših razreda prebacili u niže razrede gimnazije. Time iz područja trigonometrije nastavni sadržaji koji su se prije Kurikuluma obrađivali u drugom i trećem razredu srednjih škola, nakon Kurikuluma obrađuju se dijelom u prvom, drugom i trećem razredu gimnazije. Konkretno, prije Kurikuluma trigonometrija pravokutnog trokuta obrađivala se u drugom razredu srednjih škola kroz nastavne sadržaje:

- Definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta
- Vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od 30°, 45°, 60°
- Računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija
- Primjene na pravokutni trokut
- Primjene u planimetriji

vidi [4], a nakon Kurikuluma obrađuje se u prvom razredu gimnazije, što je ujedno vidljivo kroz usporedbu udžbenika [4] i [3], gdje su nastavni sadržaji iz trigonometrije pravokutnog trokuta identično napisani i obrazloženi.

S druge strane, nastavni sadržaji iz područja trigonometrije koji su se prije Kurikuluma obrađivali u trećem razredu srednjih škola, nakon Kurikuluma jednim se manjim dijelom obrađuju u drugom, a većim dijelom u trećem razredu gimnazije, što je vidljivo kroz usporedbu udžbenika [1] s udžbenicima [5] i [2]. Konkretno, prije Kurikuluma trigonometrija se obrađivala u trećem razredu srednjih škola kroz sljedeće nastavne cjeline:

1. Kut i brojevna kružnica
2. Trigonometrijske funkcije
3. Trigonometrijski identiteti
4. Grafovi trigonometrijskih funkcija
5. Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe
6. Poučci o trokutu

vidi [1], pri čemu je nastavna cjelina *Poučci o trokutu* sadržavala poučak o sinusima, poučak o kosinusu, trigonometriju trokuta, četverokut i primjenu trigonometrije u stereometriji.

Nakon Kurikuluma, sve navedene nastavne cjeline, osim šeste, obrađuju se također u trećem razredu gimnazija, vidi [1] i [2], dok se šesta nastavna cjelina *Poučci o trokutu* prebacuje u drugi razred gimnazije, pri čemu je preimenovana na *Trigonometrija trokuta* i sadrži sljedeće nastavne sadržaje:

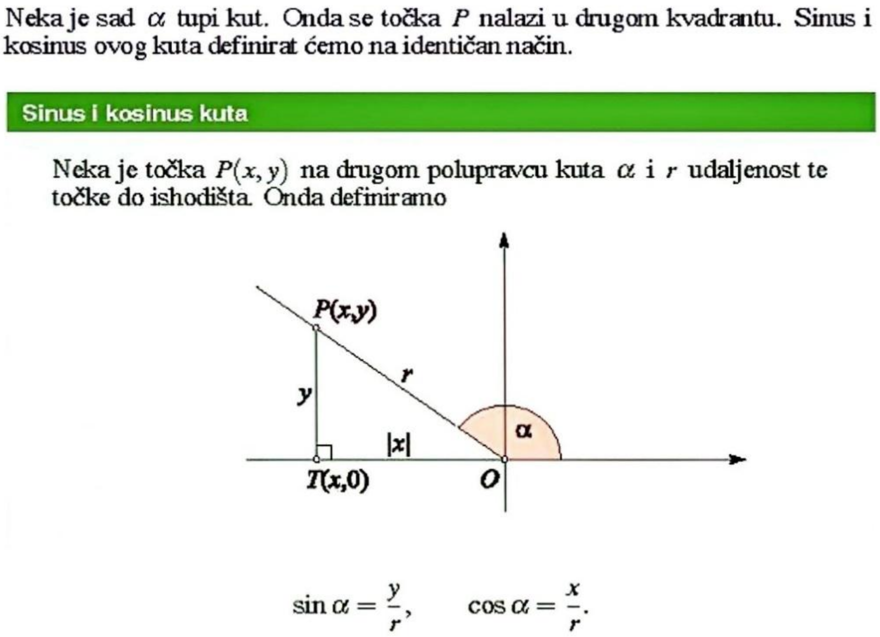
- Trigonometrijske funkcije kutova u trokutu

- Poučak o sinusima
- Poučak o kosinusu
- Trigonometrija trokuta
- Četverokut

vidi [1] i [5]. Detaljnom analizom udžbenika Matematika 2, vidi [5], uočene su prednosti, ali i nedostaci pri obradi nastavnih sadržaja iz nastavne cjeline *Trigonometrija trokuta*.

Jedna od prednosti je da su autori u udžbeniku [5] pri obradi prvog nastavnog sadržaja *Trigonometrijske funkcije kutova u trokutu* najprije ponovili definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta u pravokutnom trokutu (koje su učenici prethodno usvojili u prvom razredu gimnazije), što u udžbeniku Matematika 3 (vidi [1]) nisu napravili unatoč činjenici da se trigonometrija pravokutnog trokuta prije Kurikuluma obrađivala u drugom razredu srednjih škola. Smatram da je takav pristup kojim se ponavlja prethodno obrađeno gradivo vrlo konstruktivan i poželjan pogotovo što je razumijevanje trigonometrije pravokutnog trokuta osnova za daljnju nadogradnju znanja iz trigonometrije trokuta koje obuhvaća definicije trigonometrijske funkcije tupog kuta, poučak o sinusima, poučak o kosinusu i njihove primjene u planimetriji i stereometriji. Naime, ponavljanje gradiva ima važnu ulogu u poticanju učenika na podsjećanje i obnavljanje prethodno stečenog znanja i na razvijanje sposobnosti primjene tog znanja u rješavanju raznih problemskih zadataka.

S druge strane, u obradi prvog nastavnog sadržaja uočavamo i određene nedostatke koji se odnose na činjenicu da autori bez detaljnijeg objašnjenja najprije definiraju sinus i kosinus tupog kuta α, kako je prikazano na slici 1., a zatim šturo argumentiraju da su koordinate proizvoljne točke na polukružnici polumjera 1 sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava ravnine određene kosinusom i sinusom kuta α, što je vidljivo na slici 2., a naposljetku obrazlažu kada su dva kuta suplementarna i definiraju sinus i kosinus suplementarnih kutova, kako je prikazano na slici 3. Smatram da takav poredak obrade navedenih triju nastavnih sadržaja nije optimalno odabran jer pritom nije zadovoljeno načelo postupnosti niti načelo zornosti.



Neka je sad α tupi kut. Onda se točka P nalazi u drugom kvadrantu. Sinus i kosinus ovog kuta definirat ćemo na identičan način.

Sinus i kosinus kuta

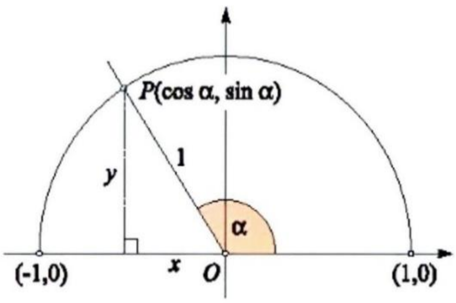
Neka je točka $P(x, y)$ na drugom polupravcu kuta α i r udaljenost te točke do ishodišta. Onda definiramo

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

Slika 1. *Sinus i kosinus kuta (skenirani dio str. 4 iz udžbenika [5])*

Naime, autori nisu pri definiranju sinusa i kosinusa tupog kuta dovoljno jasno obrazložili valjanost tih formula s obzirom na prikazani pravokutni trokut OPT i prethodno definirane trigonometrijske funkcije šiljastog kuta u pravokutnom trokutu. Dakle, autori se bez dodatnih pojašnjenja i prethodno argumentirane povezanosti sinusa (kosinusa) tupog kuta α sa sinusom (kosinusom) njemu suplementarnog šiljastog kuta $180° - \alpha$ pozivaju na definiciju sinusa (kosinusa) šiljastog kuta u pravokutnom trokutu, što većini učenika može otežati razumijevanje navedenih definicija.

Također, nije objašnjeno da je vrijednost kosinusa tupog kuta zapravo negativan realan broj veći od -1 i da je vrijednost sinusa tupog kuta pozitivan realan broj manji od 1.



Nacrtajmo polukružnicu polumjera 1 sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Neka je $P(x, y)$ bilo koja točka te polukružnice. Ta točka određuje kut α.

Udaljenost točke P od ishodišta je 1 pa prema definicijama trigonometrijskih funkcija vrijedi

$$x = \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha.$$

Dakle, koordinate točke P su vrijednosti kosinusa i sinusa kuta α pa je $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Budući da je $x^2 + y^2 = 1$, za svaki je kut α

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Slika 2. Polukružnica (skenirani dio str. 5 iz udžbenika [5])

Nadalje, autori prikazuju polukružnicu polumjera 1 sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava ravnine bez dodatne argumentacije zašto za koordinate točke P na toj polukružnici vrijedi da su one određene vrijednostima kosinusa i sinusa odgovarajućeg kuta α, gdje je $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$. Budući da prethodno nije pojašnjen pojam dva suplementarna kuta i da nije objašnjen način dobivanja sinusa i kosinusa tupog kuta, učenicima je znatno otežano shvaćanje navedenog nastavnog sadržaja prikazanog na slici 2.

Zapravo, u suglasnosti s načelom postupnosti nakon što se ponove definicije sinusa i kosinusa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu trebalo bi najprije pojasniti definiciju dva suplementarna kuta (za koje vrijedi da zbroj njihovih mjera iznosi 180^0 odakle proizlazi da je kutu α kut $180^0 - \alpha$ njemu suplementaran kut), a zatim argumentirati da je vrijednost sinusa tupog kuta jednaka vrijednosti sinusa njemu suplementarnog šiljastog kuta i da je vrijednost kosinusa tupog kuta jednaka negativnoj vrijednosti kosinusa njemu suplementarnog šiljastog kuta. Navedeno će se detaljnije objasniti u odjeljku 2.2.1. i primjenjivati u odjeljcima 2.2.2. i 2.2.3., gdje će se obrazložiti primjena trigonometrije trokuta u planimetriji s posebnim osvrtom na paralelogram i tetivni četverokut.

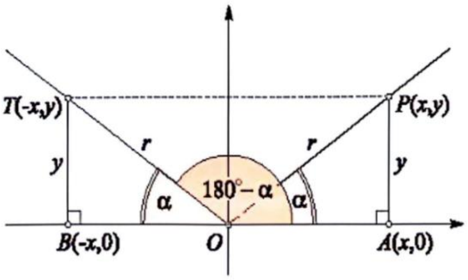
Naposljetku autori objašnjavaju suplementarne kutove koristeći se njihovim zornim prikazom (vidi sliku 3.) i argumentiraju valjanost trigonometrijskih identiteta za sinus i kosinus suplementarnih kutova tek nakon obrade prethodno navedenih nastavnih sadržaja prikazanih na slikama 1. i 2. koje bi bilo poželjno prethodno obraditi.

Suplementarni kutovi

Dva su kuta α i β **suplementarna** ako zajedno čine ispruženi kut:

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Dakle, suplementaran kut kutu α je $(180^\circ - \alpha)$. Pri tom α može biti bilo koji, šiljasti ili tupi kut.



sinus i kosinus suplementarnih kutova.

Na slici su nacrtana dva suplementarna kuta. Neka je $\alpha = \sphericalangle AOP$ i neka su (x, y) koordinate točke P. Označimo na drugom kraku kuta $180^\circ - \alpha$ točku T s ordinatom y i neka je B njezina projekcija na os apscisa. Trokuti AOP i BOT su sukladni jer se podudaraju u kutovima i stranici duljine y. To znači da je $|OB| = |OA| = x$ pa su $(-x, y)$ koordinate točke T. Sad imamo

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha.$$

Slika 3. Suplementarni kutovi (skenirani dio str. 6 iz udžbenika [5])

Uspoređivanjem udžbenika [1] i [5] primjećujemo da su autori prethodno navedeni nastavni sadržaj u udžbeniku [5] za drugi razred gimnazije obradili na identičan način kao što su ga prije Kurikuluma obrađivali u udžbeniku [1] za treći razred gimnazije u sklopu šeste nastavne cjeline *Poučci o trokutu.* Naglasimo da je navedena cjelina slijedila nakon nastavnih cjelina *Kut i brojevna kružnica, Trigonometrijske funkcije* i *Trigonometrijski identiteti* u kojima su definirane trigonometrijske funkcije na brojevnoj kružnici i obrazložene adicijske formule. Drugim riječima, učenicima drugih razreda gimnazije je nakon Kurikuluma prezentiran isti nastavni sadržaj na identičan način kako je prije Kurikuluma bio prezentiran učenicima trećih razreda gimnazija i srednjih škola koji su tada imali veće predznanje iz trigonometrije u odnosu na učenike koji nakon Kurikuluma pohađaju druge razrede gimnazija. Time je učenicima drugih razreda gimnazija dodatno otežano razumijevanje i usvajanje nastavnih sadržaja redoslijedom koji je naveden u udžbeniku [5], gdje se definicija sinusa i kosinusa tupog kuta navodi prije definicije suplementarnih kutova kao i trigonometrijskih identiteta za sinus i kosinus suplementarnih kutova.

Smatram da bi se učenicima znatno olakšalo razumijevanje definicija sinusa i kosinusa tupog kuta kada bi se najprije definirala dva suplementarna kuta, a zatim obrazložila valjanost trigonometrijskih identiteta za sinus i kosinus suplementarnih kutova u kojima se sinus (kosinus) tupog kuta α izražava pomoću sinusa (kosinusa) njemu suplementarnog šiljastog kuta $180° - \alpha$, što će se detaljnije objasniti u odjeljku 2.2. U ovom pristupu nije potrebno koristiti definicije trigonometrijskih funkcija na brojevnoj kružnici, tj. polukružnici (kako je prikazano na slici 2.) jer se one ne koriste niti primjenjuju u nastavnim sadržajima iz trigonometrije trokuta za drugi razred gimnazije.

S druge strane, uzimajući u obzir preporuku iz Kurikuluma [6] i pritom poštivajući načela postupnosti i zornosti prije definiranja sinusa i kosinusa tupog kuta mogu se najprije objasniti definicije trigonometrijskih funkcija na brojevnoj polukružnici polumjera 1 sa središtem u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava ravnine, a zatim detaljnije argumentirati da su koordinate bilo koje točke P na brojevnoj polukružnici u prvom (drugom) kvadrantu potpuno određene vrijednostima kosinusa i sinusa odgovarajućeg šiljastog (tupog) kuta koji polupravac s početkom u ishodištu kroz tu točku P zatvara s pozitivnim dijelom osi x. Primjenom definicije sinusa i kosinusa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu kojemu su x i $y\,(x > 0,\ y > 0)$ duljine kateta i kojemu je duljina hipotenuze jednaka 1, proizlazi da je $cos\,\alpha = x$ i $sin\,\alpha = y$. Time dobivamo da je kosinus kuta α jednak apscisi točke P i da je sinus kuta α jednak ordinati točke P, gdje je P točka na brojevnoj polukružnici polumjera 1 sa središtem u ishodištu. Navedena argumentacija može se zorno prikazati grafičkim prikazom analognim na slici 2. koji se eventualno može upotpuniti s još jednom točkom na danoj brojevnoj polukružnici tako da pripada i prvom kvadrantu. Nakon toga treba obrazložiti da je prikazani tupi kut α suplementaran kut šiljastom kutu $180^0 - \alpha$ (s vrhom u ishodištu) naznačenog pravokutnog trokuta na slici 2. u odnosu na koji se definiraju sinus i kosinus (šiljastog) kuta $180^0 - \alpha$. Pritom treba također objasniti kada su dva kuta suplementarna, a zatim argumentirati valjanost trigonometrijskih identiteta za sinus i kosinus suplementarnih kutova.

Naglasimo da formule za izračunavanje sinusa i kosinusa tupog kuta imaju važnu ulogu u trigonometriji trokuta koje se između ostalog primjenjuju u obrazloženju valjanosti poučka o sinusima i poučka o kosinusu za bilo koji (raznostraničan) trokut, ali i u izračunavanju površine trokuta koji sadrži jedan kut tupi. Također, navedene formule se općenito primjenjuju u planimetriji (ali i stereometriji) kao što je računanje duljina dijagonala četverokuta i površine raznih geometrijskih likova.

U nastavku će se navesti prednosti i nedostaci nastavnih sadržaja *Poučak o sinusima* i *Poučak o kosinusu* koji se obrađuju nakon nastavnog sadržaja *Trigonometrijske funkcije kutova u trokutu*. Autori su pri navođenju spomenutih poučaka naglasili da oni vrijede i za šiljasti i za tupi kut proizvoljnog raznostraničnog trokuta, no nisu detaljnije obrazložili zašto navedeni poučci vrijede i za tupi kut.

Nadalje, u sljedećem nastavnom sadržaju *Trigonometrija trokuta* (iz udžbenika [5]) najprije se ponavlja poznata formula za izračunavanje površine trokuta kao polovice produkta duljine bilo koje stranice tog trokuta i duljine visine na tu stranicu. Iz navedene formule primjenom definicije trigonometrijske funkcije sinusa kuta (šiljastog ili tupog) dobivamo da se površina trokuta može također izračunati kao polovica produkta duljina dviju stranica tog trokuta i sinusa kuta između njih. Ova je formula istaknuta u udžbeniku [5], ali nedostaje dodatno pojašnjenje, tj. argumentacija općenite valjanosti te formule. Naime, izvod ove formule je očigledan ako je pripadni kut šiljasti, ali nije očigledan kada je pripadni kut tupi, stoga se u argumentaciji izvoda ove formule treba pozvati na definiciju trigonometrijskih funkcija sinusa i kosinusa tupog kuta. Zbog manjkavosti potrebnog obrazloženja, u odjeljku 2.2. detaljnije će se objasniti izvod navedene formule za izračunavanje površine trokuta, pri čemu će se koristiti definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog i tupog kuta, poučak o sinusima i poučak o kosinusu. Istaknimo sada i nekoliko prednosti u obrazloženju nastavnog sadržaja *Trigonometrija trokuta*. Autori najprije ponavljaju Heronovu formulu za izračunavanje površine trokuta, a zatim objašnjavaju izvode formula za površinu trokuta obzirom na polumjer opisane i polumjer upisane kružnice tog trokuta neovisno o tome jesu li sva tri kuta u trokutu šiljasta ili je jedan kut tupi, a preostala dva šiljasta. Također, ukratko pojašnjavaju definicije visine, simetrale i težišnice stranice trokuta.

Sada ćemo se posebno osvrnuti na primjenu trigonometrije u planimetriji i analizirati nastavnu cjelinu *Četverokut* u udžbeniku [5] (poglavlje 6.4. str. 29-36). Pritom je uočeno da niti jedan geometrijski lik nije detaljno objašnjen, već su u navedenim riješenim primjerima korištene formule koje prethodno nisu obrazložene. Autori započinju ovu nastavnu cjelinu vrlo sažetim opisom četverokuta uz standardne oznake za duljine njegovih stranica i odgovarajuće mjere kutova, nakon čega kroz riješene primjere obrađuju neke četverokute. Također, ukratko opisuju paralelogram i tetivni četverokut bez dodatnih pojašnjenja izvoda formula. Međutim, uočene su neprecizne formulacije rečenica koje se koriste u objašnjavanju svojstava četverokuta. Jedan od takvih primjera je sljedeća rečenica *„zbroj dvaju kutova uz njegove krakove jednak je 180º“* koja bi se trebala ispravnije formulirati na sljedeći način: *„zbroj mjera dvaju kutova uz njegove krakove jednak je 180º.“* Većini učenika gimnazijskog programa ovakav stil pisanja neće predstavljati problem, odnosno razumjet će smisao takvih rečenica. No, s druge strane, učenici na ovaj način usvajaju nepravilne obrasce matematičkog jezika koji bi u udžbenicima kao i pri izvođenju nastave matematike trebao biti što precizniji kako bi se očuvalo načelo znanstvenosti.
Analizom nastavnog sadržaja koji se u udžbeniku [5] odnosi na paralelogram i tetivni četverokut uočeno je da je tetivni četverokut oskudno obrazložen te da je paralelogram nešto bolje, ali nedovoljno objašnjen, što se između ostalog odnosi i na izvod formula za izračunavanje duljine dijagonala i površine paralelograma. Konkretno, autori navode da jedna ili obje dijagonale paralelograma dijele paralelogram na odgovarajuće trokute, a zatim pozivajući se na poučak o kosinusu navode formule za izračunavanje kvadrata duljina dijagonala paralelograma. Pritom je kvadrat duljine jedne dijagonale paralelograma izražen zbrojem kvadrata duljina njegovih stranica uvećanim za dvostruki umnožak

duljina tih stranica i kosinusa kuta između njih i da je duljina druge dijagonale paralelograma izražena zbrojem kvadrata duljina njegovih stranica umanjenim za dvostruki umnožak duljina tih stranica i kosinusa kuta između njih.

U udžbeniku nije obrazloženo zašto se u jednoj formuli za izračun kvadrata duljine dijagonale paralelograma dobiva u njezinom trećem članu zdesna predznak plus (prva formula), a u drugoj predznak minus (druga formula). Drugim riječima, nije argumentirano da se u prvoj formuli razmatra ona dijagonala paralelograma koja je nasuprot tupom kutu paralelograma te da se u drugoj formuli razmatra ona dijagonala paralelograma koja je nasuprot šiljastom kutu paralelograma i pritom da su ta dva kuta suplementarna. Dakle, fali obrazloženje da su kutovi uz istu stranicu paralelograma zapravo suplementarni kutovi α i $180^0 - \alpha$ te da pri izračunu duljine dijagonale paralelograma primjenom poučka o kosinusu treba obratiti pozornost je li ta dijagonala nasuprot šiljastom kutu α ili njemu suplementarnom tupom kutu $180^0 - \alpha$, pri čemu se koristi svojstvo da je $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$.

Također, autori bez dodatnog objašnjenja navode dvije formule za izračunavanje površine paralelograma, pri čemu je prva formula izražena umnoškom duljina njegovih stranica i sinusa kuta između njih, a druga kao polovica umnoška duljina njegovih dijagonala i sinusa kuta između njih. Potaknuti nedovoljnim pojašnjenjem navedenih formula, u odjeljku 2.2.2. detaljnije ćemo obrazložiti izvode tih formula.

S druge strane, autori definiraju tetivni četverokut kao četverokut kojemu je moguće opisati kružnicu i pritom navode tvrdnju da su nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta suplementarni, odnosno da je zbroj njihovih mjera jednak 180°. Ova tvrdnja nije dokazana već je riješen samo jedan primjer gdje se određuju mjere kutova tetivnog četverokuta kojemu su zadane duljine svih njegovih stranica. U suglasnosti s načelom znanstvenosti smatram da bi bilo poticajno dokazati navedenu tvrdnju jer se time može dodatno potaknuti učenike na razvijanje sposobnosti primjene stečenog znanja i pritom im ukazati da se svaka tvrdnja u matematici dokazuje na temelju prethodno uvedenih definicija i prethodno dokazanih tvrdnji, stoga će se dokaz detaljno raspisati u odjeljku 2.2.3. Budući da autori nisu naveli ni izvode formula za izračunavanje duljine dijagonala i površine tetivnog četverokuta, te izvode obrazložit ćemo u odjeljku 2.2.3.

Iz prethodno navedenog, uočavamo da bi se neki dijelovi udžbenika [5] mogli poboljšati, stoga ćemo u sljedećim odjeljcima detaljnije objasniti pojedine nastavne sadržaje i pritom obrazložiti valjanosti navedenih formula. Drugim riječima, dat će se prijedlog za poboljšanje i unaprjeđenje strukture poglavlja *Trigonometrija trokuta* uz detaljne argumentacije i obrazloženja nastavnog sadržaja. Pritom će se poštivati načelo postupnosti i načelo zornosti s ciljem da se učenicima olakša usvajanje definicija trigonometrijskih funkcija šiljastog i tupog kuta, poučka o sinusima i poučka o kosinusu koji se nadalje primjenjuju pri izvođenju novih formula.

Smatram da je navedeni pristup u obradi paralelograma i tetivnog četverokuta u udžbeniku [5] dovoljno kvalitetan za one učenike koji nemaju veći interes za dubljom analizom i primjenom trigonometrije trokuta na navedene geometrijske likove. Međutim, učenicima bi trebalo svakako omogućiti i uvid u znanstveni pristup kojim se podrazumijeva da pri uvođenju nove tvrdnje ili nove formule treba najprije dokazati tu tvrdnju ili raspisati izvod te formule, nakon čega se primjenjuje u dokazima sljedećih novih tvrdnji, izvodima novih formula i pri rješavanju raznih odgovarajućih zadataka. Time učenici stječu kvalitetnije znanje na temelju kojeg razvijaju sposobnosti boljeg razumijevanja i povezivanja nastavnih sadržaja čime se ujedno potiče učenike da nauče formule s razumijevanjem kako se one dobivaju i odakle proizlaze.

Prednost donošenja Kurikuluma po pitanju nastavnih sadržaja iz trigonometrije je da se oni obrađuju u prva tri razreda gimnazije čime se učenicima postepeno uvode novi pojmovi, tvrdnje i formule iz područja trigonometrije. Međutim, neki udžbenici objavljeni nakon donošenja Kurikuluma ne sadrže detaljna obrazloženja i argumentacije tih nastavnih sadržaja koja bi se svakako trebala navesti obzirom na predznanje učenika iz pojedinog razreda gimnazije.

2.2. Prijedlozi za poboljšanje nekih dijelova nastavnog sadržaja iz trigonometrije trokuta i njezine primjene u planimetriji

Analizom udžbenika [5] proizlazi da neki dijelovi trigonometrije trokuta i njezine primjene u planimetriji nisu dovoljno obrazloženi i razrađeni, stoga će se u nastavku dati nekoliko prijedloga za njihovo poboljšanje kojima se želi motivirati učenike da svaku formulu nauče s razumijevanjem bez da je nauče napamet. Kao primjer možemo navesti Pitagorin poučak koji učenici najčešće zapamte samo s uobičajenim standardnim oznakama za duljine stranica u pravokutnom trokutu, stoga se pri promjeni oznaka stranica pravokutnog trokuta događa da učenici ne razumiju i ne znaju primijeniti tu formulu. Iz tog razloga ćemo sve navedene formule detaljno objasniti i riječima, a ne samo primjenom odgovarajućih standardnih oznaka.

U ovom odjeljku ćemo:

1. ponoviti definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta u pravokutnom trokutu,
2. definirati dva suplementarna kuta i objasniti formule za izračunavanje sinusa i kosinusa tupog kuta (u raznostraničnom trokutu),
3. navesti poučak o sinusima i poučak o kosinusu i argumentirati njihovu valjanost u odnosu na svaki kut (šiljasti ili tupi) trokuta.

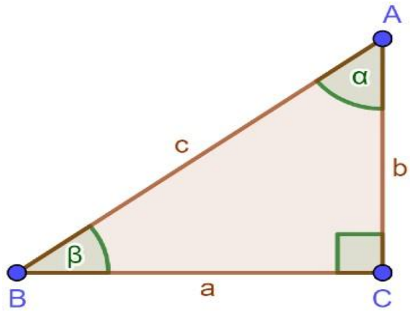
Navedene nastavne sadržaje primijenit ćemo u planimetriji s posebnim naglaskom na paralelogram i tetivni četverokut, vidi odjeljak 2.2.2. i 2.2.3. Konkretno, za paralelogram će se detaljno objasniti izvodi formula za izračunavanje duljina njegovih dijagonala i njegove površine. Nadalje, za tetivni četverokut također će se detaljno obrazložiti formule za izračunavanje njegovih dijagonala i njegove površine i dokazat će se tvrdnja da je zbroj mjera dva nasuprotna kuta tetivnog četverokuta jednak 180^0.

Teorijski dio koji će se detaljno raspisati može poslužiti učenicima kako bi u što većoj mjeri razumjeli nastavne sadržaje iz trigonometrije trokuta i povezali više nastavnih jedinica, čime će im se olakšati razumijevanje problemskih zadataka i njihovo rješavanje.

2.2.1. Trigonometrija trokuta

Koristeći se činjenicom da su učenici u prvom razredu gimnazije usvojili definicije trigonometrijskih funkcija (sinus, kosinus, tangens i kotangens) šiljastog kuta u pravokutnom trokutu kroz nastavnu cjelinu *Trigonometrija pravokutnog trokuta*, u drugom razredu gimnazije započinjemo nastavnu cjelinu *Trigonometrija trokuta* ponavljanjem navedenih definicija kako bi učenici obnovili prethodno stečeno znanje.

Neka je zadan pravokutan trokut ABC (vidi sliku 4.) kojemu su a i b duljine kateta, a c je duljina hipotenuze.



Slika 4. *Pravokutni trokut*

U tom pravokutnom trokutu označimo sa α mjeru šiljastog kuta nasuprot kateti a i sa β mjeru šiljastog kuta nasuprot kateti b. Podsjetimo se da zbroj mjera šiljastih kutova u pravokutnom trokutu iznosi 90° što direktno proizlazi iz tvrdnje da je zbroj mjera kutova u trokutu jednak $180°$. U usporedbi s udžbenikom [5], autori su nacrtali pravokutan trokut, uveli standardne oznake za duljine stranica i mjere kutova tog trokuta, a zatim definirali trigonometrijske funkcije šiljastog kuta pomoću uvedenih standardnih oznaka na sljedeći način:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}. \tag{1}$$

Predlažem da se trigonometrijske funkcije šiljastog kuta definiraju primjenom terminologije: nasuprotna kateta, priležeća kateta i hipotenuza. Pritom se pod nasuprotnom katetom podrazumijeva ona kateta pravokutnog trokuta koja se nalazi nasuprot šiljastom kutu i analogno se priležećom katetom smatra ona kateta koja se nalazi uz šiljasti kut za koji se definiraju trigonometrijske funkcije. Time definiramo:

> *Sinus šiljastog kuta u pravokutnom trokutu jednak je omjeru nasuprotne katete i hipotenuze, a kosinus tog šiljastog kuta jednak je omjeru priležeće katete i hipotenuze.*

Drugim riječima:

$$\sin\alpha = \frac{nasuprotna\ kateta}{hipotenuza}, \tag{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{priležeća\ kateta}{hipotenuza}. \tag{3}$$

Iako tangens i kotangens šiljastog kuta u pravokutnom trokutu nećemo koristiti u nastavku, navodimo i njihove definicije:

$$\tan\alpha = \frac{nasuprotna\ kateta}{priležeća\ kateta}, \qquad \cot\alpha = \frac{priležeća\ kateta}{nasuprotna\ kateta} \tag{4}$$

koje su u suglasnosti s formulama (1).

Način definiranja sinusa i kosinusa šiljastog kuta formulama (2) i (3) kvalitetniji je od načina njihova definiranja pomoću standardnih oznaka jer se time smanjuje mogućnost učenja tih formula napamet, a ujedno se potiče učenike na razumijevanje njihovih definicija. Dakle, poželjno je da se formule opisuju i riječima, a ne da se samo upotrebljavaju uobičajene standardne oznake jer se one uglavnom ne koriste u njihovim primjenama.

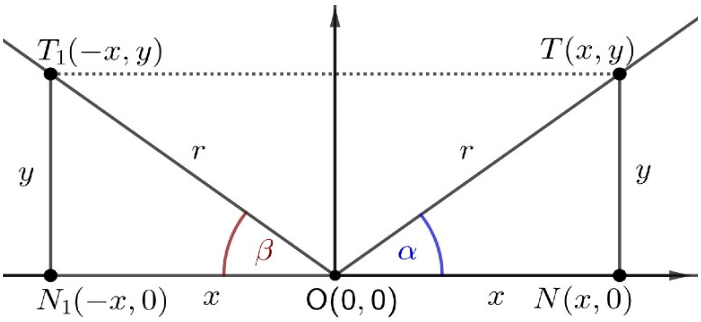
Nadalje, nakon uvedenih definicija (2), (3) i (4) može se naglasiti da se s obzirom na pravokutan trokut prikazan na slici 4. trigonometrijske funkcije šiljastog kuta α mogu pisati i u obliku (1).

Naposljetku nakon uvođenja definicija sinusa i kosinusa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu nameće se potreba za definiranjem sinusa i kosinusa tupog kuta (proizvoljni kut čija je mjera između 90° i 180°), budući da ćemo te definicije primjenjivati u nastavku. Iako tangens i kotangens tupog kuta nećemo koristiti u nastavku, možemo ih definirati na sljedeći način:

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, što direktno slijedi iz (4) primjenom (2) i (3) ako je α šiljasti kut.

Naglasimo da navedene formule za tangens i kotangens (kao i za sinus i kosinus) također vrijede i u slučajevima kada je mjera kuta α između 0^0 i 360^0, što će se detaljnije obrazložiti u nastavnim sadržajima iz trigonometrije u trećem razredu gimnazije.

U pravokutnom koordinatnom sustavu ravnine odaberimo proizvoljnu točku $T(x, y)$ koja pripada prvom kvadrantu. Drugim riječima, neka su koordinate x i y točke T strogo pozitivni realni brojevi. Tada točki T korespondira šiljasti kut α koji polupravac kroz tu točku s početkom u ishodištu zatvara s pozitivnim dijelom osi x. Spustimo li ortogonalnu projekciju točke $T(x, y)$ na os x, tada dobivamo točku $N(x, 0)$, a time i pravokutni trokut ONT kojemu je duljina hipotenuze jednaka r, a x i y su duljine njegovih kateta. Pritom koristimo oznaku r za udaljenost točke T od ishodišta i pišemo $r = d(O, T)$, gdje je $r > 0$. Analogno je $x = d(O, N)$, $y = d(N, T)$, gdje je $x > 0, y > 0$, vidi sliku 5.



Slika 5. *Sinus i kosinus šiljastog kuta*

Primjenom formula (2) i (3) za sinus i kosinus šiljastog kuta α u pravokutnom trokutu ONT proizlazi da je:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}. \tag{5}$$

Osnom simetrijom pravokutnog trokuta ONT iz prvog kvadratna s obzirom na os y dobivamo njemu sukladan pravokutan trokut ON_1T_1 u drugom kvadrantu koordinatnog sustava ravnine. Koristeći svojstvo da je svakoj točki iz prvog kvadranta jednoznačno pridružena točka iz drugog kvadranta tako da su ordinate tih točaka jednake, a apscise suprotnog predznaka, proizlazi da je vrhu $T(x,y)$ (tj. vrhu $N(x,0)$) pravokutnog trokuta ONT pridružen vrh $T_1(-x,y)$ (tj. vrh $N_1(-x,0)$) pravokutnog trokuta ON_1T_1 tako da vrijedi:

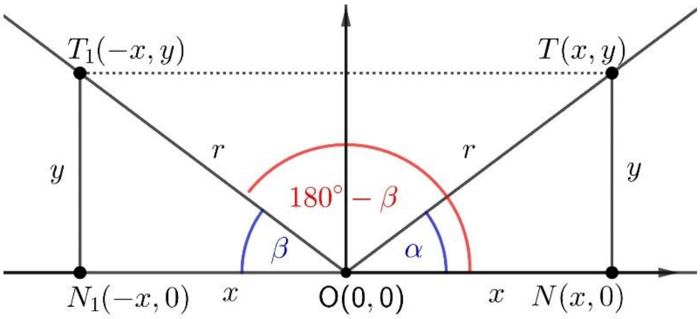
$$x = d(O,N) = (O,N_1),\ y = d(N,T) = d(N_1,T_1),\ r = d(O,T) = d(O,T_1)$$

jer se osnom simetrijom čuvaju udaljenosti točaka.

Iz sukladnosti trokuta ONT i ON_1T_1 slijedi da je mjera šiljastog kuta β pravokutnog trokuta ON_1T_1 jednaka mjeri šiljastog kuta α pravokutnog trokuta ONT i pišemo:

$$\beta = \alpha. \tag{6}$$

Primjenom definicije dva suplementarna kuta za koje vrijedi da je zbroj njihovih mjera jednak 180° proizlazi da je šiljastom kutu β suplementaran tupi kut $180^0 - \beta$ prikazan na slici 6.



Slika 6. *Suplementarni kutovi*

Promotrimo sada najprije specijalan slučaj za $r = 1$, što se interpretira na način da je točka $T(x,y)$ udaljena od ishodišta za jednu mjernu jedinicu. Tada iz formule (5) slijedi da za koordinate točke $T(x,y)$ (iz prvog kvadranta) vrijedi $x = \cos\alpha$ i $y = \sin\alpha$ odakle primjenom identiteta $\alpha = \beta$, vidi (6), proizlazi:

$$x = \cos\beta \text{ i } y = \sin\beta. \tag{7}$$

Koristeći prethodno navedeno, osnom simetrijom s obzirom na os y točki $T(x,y)$, gdje je $x > 0, y > 0$, jednoznačno je pridružena točka $T_1(-x,y)$ za čije koordinate $-x < 0,\ y > 0$ vrijedi:

$$y = \sin(180^0 - \beta) \tag{8}$$

i $-x = \cos(180^0 - \beta)$, odakle slijedi da je:

$$x = -\cos\,(180^0 - \beta). \tag{9}$$

Uspoređivanjem formula (8) i (9) s formulama (7) direktno proizlaze sljedeći identiteti

$\sin\,(180° - \beta) = \sin\beta,\ \cos\,(180° - \beta) = -\cos\beta$ koje obzirom na identitet (6) možemo pisati u obliku:

$$\sin\,(180° - \alpha) = \sin\alpha\,,\ \ \cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \tag{10}$$

Formule (10) nazivamo trigonometrijskim identitetima za sinus i kosinus suplementarnih kutova, a interpretiraju se da je vrijednost sinusa tupog kuta jednaka vrijednosti sinusa njemu suplementarnog šiljastog kuta i da je vrijednost kosinusa tupog kuta jednaka negativnoj vrijednosti kosinusa njemu suplementarnog šiljastog kuta.

U općem slučaju kada je udaljenost r između točke $T(x,y)$ i ishodišta bilo koji pozitivan realan broj, odnosno za $r = d(O,T),\ r > 0$ primjenom formula (10) i (5) i identiteta $\alpha = \beta$, vidi (6), proizlazi:

$$\sin\,(180^0 - \beta) = \frac{y}{r}\,,\quad \cos\,(180^0 - \beta) = -\frac{x}{r}\,,$$

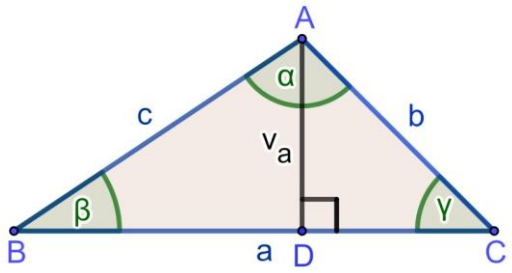
gdje je $-\frac{x}{r} < 0$ i $\frac{y}{r} > 0$, vidi sliku 6.

Dakle, sinus (kosinus) tupog kuta definiramo sinusom (kosinusom) njemu suplementarnog šiljastog kuta u odgovarajućem pravokutnom trokutu, pri čemu se primjenjuju formule (5) tako da predznak sinusa tupog kuta ostaje pozitivan, a predznak kosinusa tupog kuta postaje negativan.

U nastavku ćemo obrazložiti izvod formule za izračunavanje površine trokuta kojemu su zadane duljine bilo kojih dviju njegovih stranica i mjera kuta između njih. Prije toga, podsjetimo se poznate formule za izračunavanje površine trokuta koja se izražava polovicom umnoška duljine bilo koje njegove stranice i duljine visine na tu stranicu, odnosno $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$, što najčešće zapisujemo u obliku:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}\,, \tag{11}$$

gdje a označava duljinu osnovice (raznostraničnog) trokuta, a v_a duljinu visine na stranicu a, vidi sliku 7.



Slika 7. *Raznostraničan trokut*

Označimo s D nožište visine v_a iz vrha A na stranicu a trokuta ABC. Tada koristeći se svojstvom da visina v_a dijeli trokut ABC na dva pravokutna trokuta ADC i ABD i primjenom formule (2) na šiljasti kut γ pravokutnog trokuta ADC dobivamo:

$$\sin\gamma = \frac{v_a}{b},$$

odakle slijedi $v_a = b\sin\gamma$, što uvrštavanjem u formulu (11) povlači da se površina trokuta može također izračunati primjenom sljedeće formule:

$$P = \frac{ab\sin\gamma}{2}. \tag{12}$$

Formula (12) koristi se za izračunavanje površine trokuta ukoliko su zadane duljine njegovih stranica a i b i mjera kuta γ između njih. Na analogan način, primjenom formule $P = \frac{b\cdot v_b}{2}$ ili $P = \frac{c\cdot v_c}{2}$ dobivamo da se površina trokuta u odnosu na preostala dva para duljina stranica tog trokuta i mjere kuta između njih može pisati u obliku $P = \frac{bc\sin\alpha}{2}$ ili $P = \frac{ac\sin\beta}{2}$. Time dobivamo da vrijedi:

$$P = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2}. \tag{13}$$

Dakle, površina trokuta može se također izračunati i formulom (13) koja se interpretira da je površina trokuta jednaka polovici umnoška duljina bilo kojih dviju stranica tog trokuta i sinusa kuta između njih. Uočimo da formula (13) vrijedi i u slučaju kada je jedan kut trokuta tupi jer se tada primjenjuje identitet (10).

U proizvoljnom trokutu ABC kojemu su a, b i c duljine stranica, a α, β i γ mjere odgovarajućih njima nasuprotnih kutova vrijede poučci poznati pod nazivom poučak o sinusima i poučak o kosinusu. U nastavku ćemo bez dokaza iskazati navedene poučke, budući da su oni izvedeni i dokazani u udžbeniku [5].

Poučak o sinusima iskazuje se na sljedeći način:

- *U svakom trokutu omjeri duljina stranica i sinusa njima nasuprotnih kutova međusobno su jednaki.*

Drugim riječima, vrijedi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,. \tag{14}$$

Poučak o sinusima koristi se ukoliko su poznate duljine dviju stranica trokuta i mjera kuta nasuprot jedne od tih stranica ili ako su poznate mjere dvaju kutova trokuta i duljina jedne stranice nasuprot jednom od tih kutova.

Poučak o kosinusu iskazuje se na sljedeći način:

- *Kvadrat duljine stranice trokuta jednak je sumi kvadrata duljina preostalih dviju stranica tog trokuta umanjenoj za dvostruki umnožak duljina tih dviju stranica i kosinusa kuta između njih.*

Drugim riječima, vrijedi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha, \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma, \tag{15}$$

što se najčešće zapisuje formulom:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma. \tag{16}$$

Poučak o kosinusu koristi se ukoliko su poznate duljine dviju stranica trokuta i mjera kuta između njih ili ako su poznate duljine svih triju stranica trokuta, pri čemu se formule (15) zapisuju u obliku:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \qquad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \qquad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,.$$

Primjenom formule (10) pokazuje se da poučak o kosinusu i poučak o sinusima vrijede za tupe kutove kao i za šiljaste kutove.

Pretpostavimo sada da je $\gamma = 90^0$. Tada razlikujemo sljedeća dva specijalna slučaja takva da jedan od njih proizlazi iz poučka o kosinusu, a drugi iz poučka o sinusima.

1. Za $\gamma = 90^0$ iz formule (16) proizlazi Pitagorin poučak.

Naime, u ovom slučaju trokut ABC (prikazan na slici 7.) postaje pravokutan trokut (prikazan na slici 4.) kojemu je c duljina hipotenuze, a a i b su duljine njegovih kateta. U ovom slučaju iz formule (16) direktno slijedi identitet $c^2 = a^2 + b^2$ poznat pod nazivom *Pitagorin poučak*, pri čemu se koristi svojstvo da za $\gamma = 90^0$ vrijedi da je $\cos\gamma = \cos 90^0 = 0$. Time zaključujemo da je Pitagorin poučak specijalan oblik poučka o kosinusu ako je jedan kut u trokutu pravi. Drugim riječima, poučak o kosinusu je poopćenje Pitagorinog poučka u slučaju kada je trokut pravokutan.

2. Za $\gamma = 90^0$ iz formule (14) proizlaze formule (2) i (3).
   Koristeći svojstvo da je $\sin\gamma = \sin 90^0 = 1$, iz formule (14) proizlazi $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, odakle slijedi $\frac{a}{\sin\alpha} = c$, odnosno $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.
   Analogno, iz formule (14) proizlazi $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, odakle slijedi $\frac{b}{\sin\beta} = c$, odnosno $\sin\beta = \frac{b}{c}$. Time dobivamo da je poučak o sinusima poopćenje definicije trigonometrijskih funkcija sinusa i kosinusa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu.

2.2.2. Paralelogram

U ovom odjeljku obrazložit će se primjena trigonometrije trokuta na određivanje duljina dijagonala paralelograma i njegove površine, pri čemu će se također primijeniti poučak o kosinusu.

Podsjetimo se najprije definicije paralelograma:

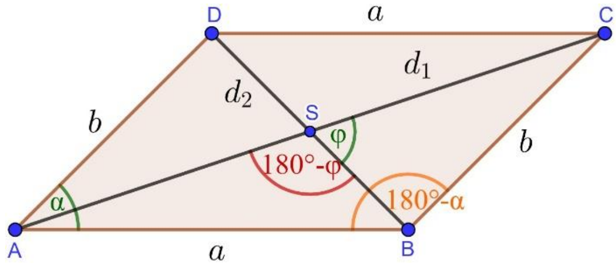
- *Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice sukladne i paralelne, a nasuprotni kutovi jednakih veličina.*

Također, ponovimo da paralelogram ima dvije dijagonale od kojih ga svaka dijeli na dva sukladna trokuta, stoga se pri određivanju duljina njegovih dijagonala i izračunavanju njegove površine mogu primijeniti sve formule koje vrijede za trokut (definicija trigonometrijskih funkcija za šiljasti i tupi kut, poučak o sinusima, poučak o kosinusu).

Neka je zadan paralelogram $ABCD$ kojemu su a i b duljine stranica i α mjera (šiljastog) kuta između njih. Tada iz definicije paralelograma proizlazi da je drugi (tupi) kut između stranica tog paralelograma suplementaran kut (šiljastog) kuta α, stoga njegova mjera iznosi $180^0 - \alpha$, vidi sliku 8. i pritom vrijedi:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha,$$

vidi formule (10). Označimo sa d_1 i d_2 duljine dijagonala paralelograma i sa φ mjeru kuta između njih kako je prikazano na slici 8.



Slika 8. *Paralelogram*

Tada u odnosu na uvedene oznake možemo uočiti da dijagonala d_1 dijeli paralelogram $ABCD$ na sukladne trokute ABC i ACD, a dijagonala d_2 dijeli paralelogram $ABCD$ na sukladne trokute ABD i BCD. Pritom je dijagonala d_1 ujedno stranica trokuta ABC nasuprot suplementarnom kutu $180^0 - \alpha$ kuta α, a dijagonala d_2 je ujedno stranica trokuta ABD nasuprot kutu α, gdje je α šiljasti kut paralelograma $ABCD$.

Primjenom poučka o kosinusu (vidi formule (16)) na trokut ABD dobivamo:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \tag{17}$$

a njegovom primjenom na trokut ABC dobivamo:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\,(180^0 - \alpha),$$

odnosno:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha, \tag{18}$$

gdje se primijenila formula $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$, vidi (10).

Podsjetimo se, u odjeljku 2.1. prokomentirali smo da autori ovaj nastavni sadržaj u udžbeniku [5] obrađuju na način da navode formule (18) i (17), gdje se koriste oznake e za dijagonalu d_1 i f za dijagonalu d_2, bez dodatnih pojašnjenja zašto se u jednoj formuli koristi plus, a u drugoj minus za član koji sadrži $\cos \alpha$ i bez argumentacije da predznak (plus ili minus) člana $2ab \cos \alpha$ ovisi o kutu (tupom ili šiljastom) nasuprot odgovarajuće dijagonale paralelograma.

Drugim riječima, autori nisu argumentirali da se uz član $2ab \cos \alpha$ u formuli za izračun kvadrata dijagonale paralelograma piše minus ako je dijagonala nasuprot šiljastom kutu α, odnosno da se piše plus ako je dijagonala nasuprot suplementarnom kutu $(180^0 - \alpha)$ kuta α, gdje je $180^0 - \alpha$ tupi kut.

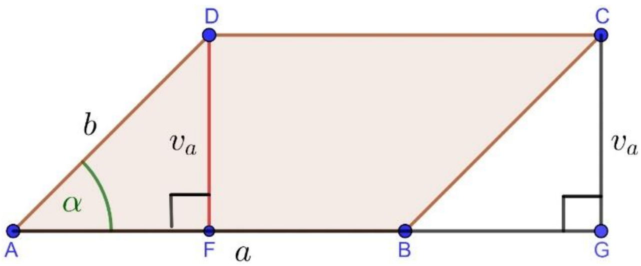
Zbrajanjem izraza (17) i (18) proizlazi:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\,(a^2 + b^2) \tag{19}$$

čime je dana veza između zbroja kvadrata duljina dijagonala i zbroja kvadrata duljina stranica paralelograma. Drugim riječima, zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak je dvostrukom zbroju kvadrata duljina stranica tog paralelograma. Formula (19) primjenjuje se u zadacima u kojima su poznate duljine stranica paralelograma i duljina jedne njegove dijagonale ili ako su poznate duljine dijagonala paralelograma i duljina jedne njegove stranice.

Objasnimo sada formule za izračunavanje površine paralelograma.

Spustimo li visinu v_a iz vrha D paralelograma $ABCD$ na stranicu a tog paralelograma i označimo sa F nožište te visine i analogno spustimo li visinu v_a iz vrha C paralelograma $ABCD$ na stranicu a tog paralelograma i označimo nožište te visine sa G, tada možemo primijetiti da su pravokutni trokuti AFD i BGC sukladni, vidi sliku 9.



Slika 9. *Visine na osnovicu paralelograma*

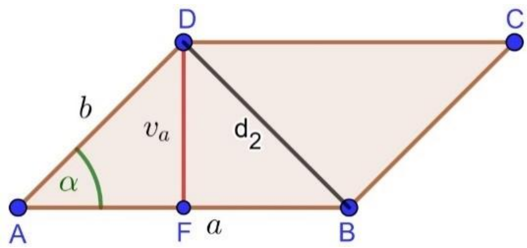
Koristeći se činjenicom da sukladni trokuti imaju jednake površine zaključujemo da je površina paralelograma $ABCD$ jednaka površini pravokutnika $FGCD$. Time se površina paralelograma $ABCD$ izračunava primjenom formule:

$$P = a \cdot v_a \tag{20}$$

koja se interpretira da je površina paralelograma izražena umnoškom duljine jedne stranice tog paralelograma i duljine visine na tu stranicu.

Naglasimo da se formula (20) mogla također dobiti i na sljedeći način.

Uzimajući u obzir da dijagonala d_2 dijeli paralelogram $ABCD$ na dva sukladna trokuta ABD i BCD koji imaju jednake površine, proizlazi da je površina paralelograma $ABCD$ jednaka dvostrukoj površini trokuta ABD, vidi sliku 10.



Slika 10. *Visina na osnovicu i dijagonala paralelograma*

Primjenom prethodno razmatranog u odjeljku 2.2.1. proizlazi da se površina trokuta ABD izračunava formulom (11), odnosno $P_{\Delta ABD} = \frac{a \cdot v_a}{2}$, stoga za površinu paralelograma $ABCD$ dobivamo formulu $P = 2\,\frac{a \cdot v_a}{2}$ iz koje slijedi formula (20). Na analogan način kako smo formulu (12) za izračunavanje površine trokuta izveli iz formule (11) pokazuje se da formulu $P_{\Delta ABD} = \frac{a \cdot v_a}{2}$ za izračunavanje površine trokuta ABD u paralelogramu $ABCD$ možemo pisati u obliku formule $P_{\Delta ABD} = \frac{ab \sin \alpha}{2}$ primjenom koje dobivamo da se površina paralelograma $ABCD$ također može izračunati formulom:

$$P = ab \sin \alpha. \tag{21}$$

Naime, ako iz vrha D spustimo visinu v_a na stranicu a trokuta ABD paralelograma $ABCD$ i označimo nožište te visine sa F, onda dobivamo pravokutan trokut AFD kojemu je b duljina hipotenuze i v_a je duljina njegove katete nasuprot šiljastom kutu α. Primjenom formule (2) dobivamo da je sinus kuta α (s vrhom u točki A) jednak omjeru duljine visine v_a na stranicu a i duljine hipotenuze b u pravokutnom trokutu AFD, stoga je $\sin \alpha = \frac{v_a}{b}$, odakle slijedi

$v_a = b \sin\alpha$. Time dobivamo da je $P_{\Delta ABD} = \frac{ab \sin\alpha}{2}$ površina trokuta ABD, stoga je $P = 2\, P_{\Delta ABD}$ površina paralelograma $ABCD$ iz koje slijedi formula (21). Formulu (21) za izračunavanje površine paralelograma $ABCD$ možemo također dobiti i u slučaju kada se uzima u obzir tupi kut između stranica paralelograma čiju mjeru zapisujemo u obliku $180^0 - \alpha$ uz pretpostavku da je α mjera šiljastog kuta paralelograma. U ovom slučaju primjenom formule (12) na izračunavanje površine trokuta ABC (vidi sliku 8.) i činjenice da je površina paralelograma $ABCD$ jednaka dvostrukoj površini trokuta ABC proizlazi da je $P = 2\, \frac{ab\ \sin(180^0 - \alpha)}{2} = ab \sin(180^0 - \alpha)$ površina paralelograma $ABCD$, odakle primjenom formule $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ (vidi formulu (10)) direktno slijedi formula (21).

Navedene formule (20) i (21) za izračunavanje površine paralelograma koriste se u ovisnosti o tome koji su elementi paralelograma zadani. Konkretno, formula (20) se koristi kada je zadana duljina jedne stranice paralelograma i duljina visine na tu stranicu, a formula (21) kada su zadane duljine stranica paralelograma i mjera kuta između njih.

Napomenimo da se površina paralelograma može također izračunati i ako su poznate duljine njegovih dijagonala i mjera kuta između njih, što ćemo u nastavku detaljnije obrazložiti. Označimo sa φ (šiljasti) kut između dijagonala d_1 i d_2 paralelograma $ABCD$ i označimo sa S sjecište dijagonala d_1 i d_2, odnosno vrh tog kuta φ, kako je prikazano na slici 8. Iz svojstva da se dijagonale paralelograma raspolavljaju proizlazi da dijagonale d_1 i d_2 dijele paralelogram $ABCD$ na četiri trokuta ABS, BCS, CDS i DAS među kojima su sukladni trokuti ABS i CDS, odnosno trokuti BCS i DAS.

Koristeći svojstvo da sukladni trokuti imaju jednake površine zaključujemo da se površina paralelograma $ABCD$ može pisati u obliku dvostrukog zbroja površina trokuta ABS i BCS koji nisu sukladni jer su općenito a i b međusobno različite duljine stranica paralelograma. Time dobivamo:

$$P = 2\,(P_{\Delta ABS} + P_{\Delta BCS}), \tag{22}$$

gdje je:

$$P_{\Delta ABS} = \frac{\frac{d_1}{2}\frac{d_2}{2}\sin\,(180^0 - \varphi)}{2} \tag{23}$$

površina trokuta ABS i gdje je:

$$P_{\Delta BCS} = \frac{\frac{d_1}{2}\frac{d_2}{2}\sin\varphi}{2} \tag{24}$$

površina trokuta BCS. U svakoj od formula (23) i (24) površina odgovarajućeg trokuta izražena je polovicom umnoška duljina dviju stranica trokuta i sinusa kuta između njih, što je u suglasnosti s formulom (13). Budući da su kutovi φ i $180^0 - \varphi$ (uz istu dijagonalu) suplementarni, iz formule (10), odnosno svojstva $\sin\,(180^0 - \varphi) = \sin\varphi$ proizlazi da je površina trokuta ABS jednaka površini trokuta BCS iako ta dva trokuta nisu sukladna. Drugim riječima, uspoređivanjem formula (23) i (24) uz navedeno svojstvo $\sin\,(180^0 - \varphi) = \sin\varphi$ proizlazi da je $P_{\Delta ABS} = P_{\Delta BCS}$. Time dobivamo da se formula (22) može pisati u obliku $P = 4\,P_{\Delta BCS}$, odakle primjenom formule (24) slijedi da je $P = 4\,\frac{\frac{d_1}{2}\frac{d_2}{2}\sin\varphi}{2}$, odnosno:

$$P = \frac{d_1\,d_2\,\sin\varphi}{2}. \tag{25}$$

Formulom (25) je površina paralelograma izražena polovicom umnoška duljina njegovih dijagonala i sinusa kuta između njih.

2.2.3. Tetivni četverokut

U ovom odjeljku detaljno ćemo analizirati primjenu trigonometrije na tetivnom četverokutu analogno kao kod paralelograma, pri čemu ćemo izvesti formule za određivanje duljina dijagonala i površine tetivnog četverokuta i navesti tvrdnje s odgovarajućim dokazom. Tetivni četverokut vrlo je oskudno obrađen u udžbeniku [5] na način da se samo navodi svojstvo da je zbroj mjera njegovih dvaju nasuprotnih kutova jednak 180^0. Pritom navedeno svojstvo nije detaljnije objašnjeno niti argumentirano već se rješava jedan primjer u kojemu se određuju mjere kutova tetivnog četverokuta obzirom na zadane duljine svih njegovih stranica. U nastavku ćemo navedeno svojstvo iskazati u obliku tvrdnje koju ćemo ujedno i dokazati. Također, navest ćemo još dvije tvrdnje poznate pod nazivom *Ptolomejev teorem* i *Kvocijentni oblik Ptolomejevog teorema* za koje ćemo argumentirati njihove dokaze i pritom detaljno izvesti svaku navedenu formulu s ciljem da se učenike potakne na dokazivanje tvrdnji uz primjenu prethodno stečenog znanja. Naime, učenici najčešće nauče tvrdnje bez dokaza i koriste ih kao pravila za rješavanje zadataka, a da pritom ne razumiju zbog čega navedena tvrdnja vrijedi. Iz tog razloga ćemo u nastavku obrazložiti nastavne sadržaje tetivnog četverokuta kojima se omogućava učenicima da na dodatnoj nastavi matematike ili kroz samostalni rad dobiju uvid kako se izvode formule i dokazuju tvrdnje, pozivanjem na prethodno dokazane tvrdnje i obrazložene valjanosti pojedinih formula.

Tetivni četverokut definira se na sljedeći način:

- *Tetivni četverokut je četverokut kojemu je moguće opisati kružnicu, odnosno njegove stranice su tetive opisane kružnice.*

Iz navedene definicije proizlazi da duljine stranica tetivnog četverokuta mogu biti međusobno različite, stoga ih označavamo sa a, b, c i d. Tetivni četverokut ima dvije dijagonale čije ćemo duljine označiti sa e i f, a mjere njegovih unutarnjih kutova sa α, β, γ i δ.

Svaka dijagonala tetivnog četverokuta dijeli tetivni četverokut na dva odgovarajuća trokuta, stoga se pri određivanju duljina dijagonala i površine tetivnog četverokuta koriste prethodno navedeni nastavni sadržaji iz trigonometrije trokuta među kojima se najčešće primjenjuje poučak o kosinusu.

Tetivni četverokut ima svojstvo da je zbroj mjera njegovih nasuprotnih kutova jednak 180^0, što ima za posljedicu da su nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta suplementarni. Navedeno svojstvo iskazujemo u obliku sljedeće tvrdnje koju ujedno i dokazujemo.

Tvrdnja 1.

> *Ako je četverokut tetivan, onda mu je zbroj mjera dvaju nasuprotnih (unutarnjih) kutova jednak* 180^0.

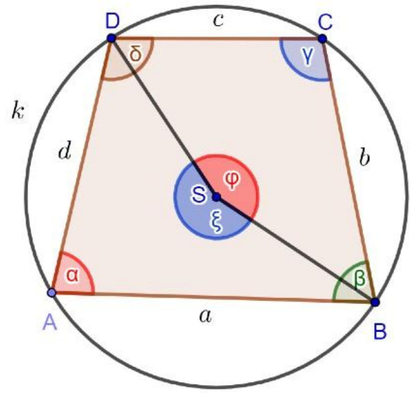
Dokaz:

Neka je k kružnica i $ABCD$ tetivni četverokut čiji se vrhovi nalaze na kružnici k. Budući da trebamo pokazati da je zbroj mjera nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta jednak 180^0, promotrimo najprije nasuprotne kutove $\measuredangle DAB$ i $\measuredangle BCD$ tetivnog četverokuta $ABCD$ čije mjere u danom poretku označavamo sa α i γ, a zatim nasuprotne kutove $\measuredangle ABC$ i $\measuredangle CDA$ tog tetivnog četverokuta čije mjere u danom poretku označavamo sa $\beta\ i\ \delta$, vidi sliku 11. U suglasnosti s navedenim oznakama treba dokazati da vrijedi:

$$\alpha + \gamma = 180^0 \quad \text{i} \quad \beta + \delta = 180^0 \tag{26}$$

Pri dokazivanju izraza (26) primjenjivat će se *Poučak o središnjem i obodnom kutu* koji glasi:

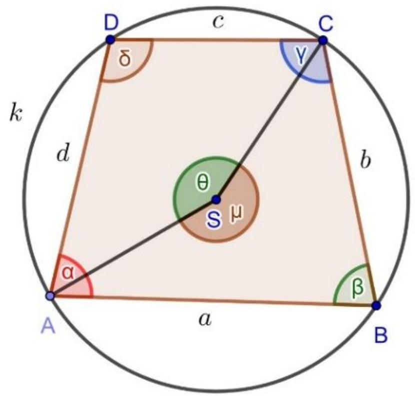
- *Za središnji i obodni kut nad istim kružnim lukom zadane kružnice vrijedi da je mjera središnjeg kuta dvostruko veća od mjere njemu pridruženog obodnog kuta.*



Slika 11. *Nasuprotni kutovi α i γ u tetivnom četverokutu i njima pridruženi središnji kutovi*

Uočimo da je kut $\measuredangle DAB$ tetivnog četverokuta $ABCD$, kojemu je α mjera, ujedno obodni kut s vrhom u točki A čiji krakovi sijeku kružnicu k u točkama B i D. Označimo sa φ mjeru središnjeg kuta $\measuredangle DSB$ pridruženog obodnom kutu $\measuredangle DAB$. Tada prema navedenom poučku o središnjem i obodnom kutu i uvedenim oznakama α i φ za mjere obodnog kuta $\measuredangle DAB$ i njemu pridruženog središnjeg kuta $\measuredangle DSB$ vrijedi da je $\varphi = 2\alpha$. Analogno, pozivajući se na navedeni poučak i uvedene oznake γ i ξ za mjere obodnog kuta $\measuredangle BCD$ i njemu pridruženog središnjeg kuta $\measuredangle BSD$ vrijedi da je $\xi = 2\gamma$. Koristeći se činjenicom da je $\varphi + \xi = 360^0$ (vidi sliku 11.), pri čemu je $\varphi = 2\alpha$ i $\xi = 2\gamma$ proizlazi $2\alpha + 2\gamma = 360^0$, odakle dijeljenjem sa dva slijedi $\alpha + \gamma = 180^0$. Time smo dokazali prvi izraz u (26).

Na sličan način, dokazuje se da je $\beta + \delta = 180^0$.



Slika 12. *Nasuprotni kutovi β i δ u tetivnom četverokutu i njima pridruženi središnji kutovi*

Uočimo da je kut $\measuredangle ABC$ tetivnog četverokuta $ABCD$, kojemu je β mjera, ujedno obodni kut s vrhom u točki B čiji krakovi sijeku kružnicu k u točkama A i C, vidi sliku 12. Označimo sa θ mjeru središnjeg kuta $\measuredangle ASC$ pridruženog obodnom kutu $\measuredangle ABC$. Prema navedenom poučku o središnjem i obodnom kutu i uvedenim oznakama β i θ za mjere obodnog kuta $\measuredangle ABC$ i njemu pridruženog središnjeg kuta $\measuredangle ASC$ vrijedi da je $\theta = 2\beta$. Analogno, uvedemo li oznaku δ za mjeru obodnog kuta $\measuredangle CDA$ i oznaku μ za mjeru njemu pridruženog središnjeg kuta $\measuredangle CSA$ vrijedi da je $\mu = 2\delta$. Na slici 12. vidljivo je da vrijedi $\theta + \mu = 360^0$, gdje je $\theta = 2\beta$ i $\mu = 2\delta$, stoga dobivamo $2\beta + 2\delta = 360^0$, odakle dijeljenjem sa dva slijedi da je $\beta + \delta = 180^0$. Time smo dokazali i drugi izraz u (26), čime smo ujedno dokazali Tvrdnju 1.

Napomenimo da vrijedi i obrat Tvrdnje 1. koji iskazujemo bez dokaza budući da se ne koristi u nastavku.

Obrat Tvrdnje 1.

Ako vrijedi da zbroj mjera dvaju nasuprotnih kutova nekog četverokuta iznosi 180^0*, onda je taj četverokut tetivan.*

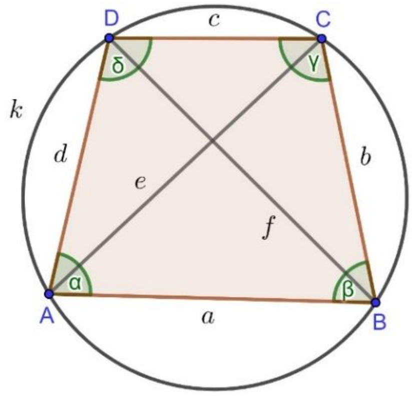
Dokaz ove tvrdnje detaljno je razrađen u članku [9] autorice S. Varošanec.

Iz činjenice da svaka dijagonala tetivnog četverokuta dijeli taj četverokut na dva odgovarajuća trokuta proizlazi da se duljina (kvadrat duljine) njegove dijagonale izračunava primjenom poučka o kosinusu na odgovarajući trokut. Odredimo najprije duljinu dijagonale f tetivnog četverokuta $ABCD$ koja ga dijeli na trokute ABD i BCD, kako je prikazano na slici 13.

Tada primjenom poučka o kosinusu, odnosno primjenom formule (16) na navedene trokute dobivamo:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\alpha, \tag{27}$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\gamma. \tag{28}$$



Slika 13. *Tetivni četverokut i njegove dijagonale*

Iz Tvrdnje 1. proizlazi da je $\alpha + \gamma = 180^0$, odakle slijedi $\gamma = 180^0 - \alpha,$ stoga primjenom formule (10) dobivamo $\cos\gamma = \cos\,(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$, čime se izraz (28) zapisuje u sljedećem obliku:

$$f^2 = b^2 + c^2 + 2\,bc\cos\alpha. \tag{29}$$

Iz izraza (27) i (29) proizlazi:

$$a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2\,bc\cos\alpha$$

$$a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\alpha - b^2 - c^2 - 2\,bc\cos\alpha = 0$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 - 2\,(ad + bc)\cos\alpha = 0\ ,$$

odakle slijedi:

$$-2\,(ad + bc)\cos\alpha\ = -a^2 - d^2 + b^2 + c^2\ \ /:(-2\,(ad + bc))$$

$$\cos\alpha\ = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2\,(ad+bc)}. \tag{30}$$

Uočimo da je dijeljenje s faktorom $-2\,(ad + bc)$ dozvoljeno jer je $ad + bc \neq 0$ budući da su a, b, c i d duljine stranica tetivnog četverokuta pozitivni realni brojevi. Nadalje, uvrštavanjem izraza (30) u izraz (27) dobivamo:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad\ \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(ad + bc)}$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - ad\ \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{ad+bc}$$

$$f^2 = \frac{(a^2+d^2)\,(ad+bc) - ad\,(a^2+d^2-b^2-c^2)}{ad+bc}$$

$$f^2 = \frac{a^3d+a^2bc+ad^3+bcd^2-a^3d-ad^3+ab^2d+ac^2d}{ad+bc}$$

$$f^2 = \frac{a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2}{ad + bc}$$

$$f^2 = \frac{ac\,(ab + cd) + bd\,(ab + cd)}{ad + bc}$$

$$f^2 = \frac{(ab+cd)\,(ac+bd)}{ad+bc}. \tag{31}$$

Pritom smo koristili poznato svojstvo komutativnosti zbrajanja prema kojemu vrijedi da je $x + y = y + x$ za svaki x i y.

Analogno, pri određivanju (kvadrata) duljine dijagonale e koja dijeli tetivni četverokut $ABCD$ na trokute ABC i ACD, primjenjuje se formula (16) na navedene trokute i pritom dobiva:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\beta\ , \tag{32}$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2\,cd\cos\delta\ . \tag{33}$$

Koristeći Tvrdnju 1. proizlazi da je $\beta + \delta \ = 180^0$, odakle slijedi $\delta = 180^0 - \beta$, stoga primjenom formule (10) dobivamo $\cos\delta = \cos\,(180^0 - \beta) = -\cos\beta$, čime se izraz (33) zapisuje u obliku:

$$e^2 = c^2 + d^2 + 2\,cd\cos\beta. \tag{34}$$

Analogno izvodu formule (30) iz izraza (32) i (34) dobiva se sljedeća formula za izračunavanje $\cos\beta$ pomoću svih duljina stranica tetivnog četverokuta:

$$\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,(ab+cd)}$$

koju nadalje uvrštavamo u izraz (32) i nakon provedenih izračuna (slično kao u izračunavanju od f^2) dobivamo:

$$e^2 = \frac{(ac+bd)\,(ad+bc)}{ab+cd}\,. \tag{35}$$

Formulama (35) i (31) dani su izrazi kojima se kvadrati duljina dijagonala tetivnog četverokuta izražavaju pomoću duljina svih njegovih stranica.

Ako pomnožimo te kvadrate ili ako ih podijelimo, onda se dobiva veza između duljina dijagonala i duljina svih stranica tetivnog četverokuta. U nastavku ćemo navedeno iskazati pomoću dviju tvrdnji od kojih je prva tvrdnja poznata pod nazivom *Ptolomejev teorem*, a druga se naziva *Kvocijentni oblik Ptolomejevog teorema*. Pritom ćemo obje tvrdnje ujedno i dokazati.

Tvrdnja 2. (Ptolomejev teorem)

Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta $ABCD$ jednak je zbroju umnožaka duljina njegovih nasuprotnih stranica i pišemo:

$$ef = ac + bd. \tag{36}$$

Dokaz:

Množenjem kvadrata duljina dijagonala tetivnog četverokuta danih izrazima (35) i (31) dobivamo $e^2\,f^2 = \frac{(ac+bd)\,(ad+bc)}{ab+cd}\,\frac{(ac+bd)\,(ab+cd)}{ad+bc}$, odakle kraćenjem navedenih razlomaka slijedi $(ef)^2 = (ac+bd)^2$ i korjenovanjem proizlazi izraz (36), čime je dokazana Tvrdnja 2.

Tvrdnja 3. (Kvocijentni oblik Ptolomejevog teorema)

Kvocijent duljina dijagonala e i f tetivnog četverokuta $ABCD$ iskazuje se sljedećim izrazom:

$$\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd}. \tag{37}$$

Dokaz:

Koristeći izraze (35) i (31) dobivamo $\frac{e^2}{f^2} = \frac{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$, odakle kraćenjem navedenih razlomaka slijedi $\frac{e^2}{f^2} = \frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2}$ i korjenovanjem proizlazi izraz (37), što dokazuje Tvrdnju 3.

Izvedimo sada formulu za izračunavanje površine tetivnog četverokuta kojemu su a, b, c i d duljine stranica. Promatrajući sliku 13. možemo uočiti da se površina tetivnog četverokuta $ABCD$ može dobiti i kao zbroj površina trokuta ABD i BCD, što zapisujemo u obliku:

$$P = \frac{1}{2}\, ad \sin\alpha + \frac{1}{2}\, bc \sin\gamma, \tag{38}$$

gdje smo za izračun površina navedenih trokuta primijenili formulu (12).
Iz Tvrdnje 1. prema kojoj je $\gamma = 180^0 - \alpha$ i primjenom formule (10) slijedi da je $\sin\gamma = \sin\,(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$, odnosno $\sin\gamma = \sin\alpha$, što uvrštavanjem u izraz (38) povlači $P = \frac{1}{2}\, ad \sin\alpha + \frac{1}{2}\, bc\, \sin\alpha,$ odnosno:

$$P = \frac{1}{2}(ad + bc)\sin\alpha. \tag{39}$$

Analogno prethodno navedenom, površina tetivnog četverokuta $ABCD$ može se također izraziti kao zbroj površina trokuta ABC i ACD koje izračunavamo primjenom formule (12) i dobivamo $P = \frac{1}{2}\, ab \sin\beta + \frac{1}{2}\, cd \sin\delta.$ Primjenom Tvrdnje 1. prema kojoj je $\delta = 180^0 - \beta$ i primjenom formule (10) prema kojoj je $\sin\delta = \sin\,(180^0 - \beta) = \sin\,\beta$, odnosno $\sin\delta = \sin\beta$ dobivamo:

$$P = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\beta. \tag{40}$$

Uočimo da se formula (39) također može pisati u obliku $P = \frac{1}{2}(ad + bc)\sin\gamma$ jer je $\sin\alpha = \sin\gamma$ i da se formula (40) također može pisati u obliku

$P = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\delta$ jer je $\sin\beta = \sin\delta$. Time smo dobili da se površina tetivnog četverokuta može izračunati primjenom formula koje su izražene svim duljinama stranica tetivnog četverokuta i sinusom (mjere) jednog njegovog kuta tako da se sinus kuta tetivnog četverokuta množi s polovicom zbroja umnoška duljina njegovih stranica uz taj kut i umnoška duljina njegovih stranica uz njemu suplementaran kut, vidi (39) i (40).

Navedimo da se formula za izračunavanje površine tetivnog četverokuta može izraziti samo pomoću duljina njegovih stranica. Konkretno, kvadriranjem izraza (39) dobivamo:

$$P^2 = \frac{1}{4}(ad + bc)^2 \sin^2\alpha. \tag{41}$$

Primijenimo li osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ iz kojeg slijedi $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ dobivamo da se kvadrat površine tetivnog četverokuta iz izraza (41) može nadalje pisati u obliku:

$$P^2 = \frac{1}{4}(ad + bc)^2\,(1 - \cos^2\alpha)$$

$$4P^2 = (ad + bc)^2\,(1 - \cos^2\alpha)$$

$$4P^2 = (ad + bc)^2 - (ad + bc)^2\cos^2\alpha,$$

gdje uvrštavanjem izraza (30) za izračun $\cos\alpha$ povlači da je:

$$4P^2 = (ad + bc)^2 - (ad + bc)^2\,\frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4\,(ad + bc)^2}$$

$$4P^2 = (ad + bc)^2 - \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4}$$

$$16P^2 = 4\,(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2. \tag{42}$$

Desna strana izraza (42) je razlika kvadrata oblika $x^2 - y^2$, pri čemu je $x = 2\,(ad + bc)$ i $y = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$, stoga primjenom poznate formule $x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)$ proizlazi da se izraz (42) nadalje zapisuje u obliku:

$$16P^2 = \left(2\,(ad + bc) + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\right)\left(2\,(ad + bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\right)$$

$$16P^2 = (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\,(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2)$$

$$16P^2 = (a^2 + 2ad + d^2 - (b^2 - 2bc + c^2))\,(b^2 + 2bc + c^2 - (a^2 - 2ad + d^2)). \tag{43}$$

Primjenom poznatih formula za kvadrat zbroja i kvadrat razlike proizlazi da je

$$a^2 + 2ad + d^2 = (a + d)^2, \quad b^2 - 2bc + c^2 = (b - c)^2,$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = (b + c)^2, \quad a^2 - 2ad + d^2 = (a - d)^2,$$

što uvrštavanjem u izraz (43) povlači:

$$16P^2 = ((a + d)^2 - (b - c)^2)\,((b + c)^2 - (a - d)^2). \tag{44}$$

Uočimo da su oba faktora s desne strane izraza (44) također razlike kvadrata, stoga izraz (44) zapisujemo u obliku:

$$16P^2 = (a + d + b - c)\,(a + d - b + c)\,(b + c + a - d)\,(b + c - a + d)$$

$$P^2 = \frac{(a+d+b-c)\,(a+d-b+c)\,(b+c+a-d)\,(b+c-a+d)}{16},$$

odakle korjenovanjem proizlazi da se površina tetivnog četverokuta može izračunati sljedećom formulom:

$$P = \frac{\sqrt{(a+d+b-c)\,(a+d-b+c)\,(b+c+a-d)\,(b+c-a+d)}}{4} \tag{45}$$

ako su pritom zadane samo duljine stranica tetivnog četverokuta.

Formulu (45) također zapisujemo i u obliku:

$$P = \sqrt{\frac{(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)\,(a+b+c-d)\,(-a+b+c+d)}{16}},$$

odnosno:

$$P = \sqrt{\frac{-a+b+c+d}{2}\,\frac{a-b+c+d}{2}\,\frac{a+b-c+d}{2}\,\frac{a+b+c-d}{2}}, \tag{46}$$

pri čemu se primijenilo svojstvo komutativnosti za zbrajanje ($x + y = y + x$) i svojstvo komutativnosti za množenje ($x\,y = y\,x$).

Označimo li sa s polovicu opsega tetivnog četverokuta kojemu su a, b, c i d duljine stranica, tada je $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. Uočimo da je:

$$s - a = \frac{a+b+c+d}{2} - a = \frac{-a+b+c+d}{2},$$

$$s - b = \frac{a+b+c+d}{2} - b = \frac{a-b+c+d}{2},$$

$$s - c = \frac{a+b+c+d}{2} - c = \frac{a+b-c+d}{2},$$

$$s - d = \frac{a+b+c+d}{2} - d = \frac{a+b+c-d}{2},$$

što uspoređivanjem s faktorima drugog korijena u izrazu (46) direktno povlači da se izraz (46) može pisati u obliku:

$$P = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}. \tag{47}$$

Formula (47) koristi se za izračunavanje površine tetivnog četverokuta i poznata je pod nazivom *Poopćenje Heronove formule.* Podsjetimo se da se Heronovom formulom izračunava površina trokuta i zapisuje se u obliku $P = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, gdje je s polovica opsega trokuta, odnosno $s = \frac{a+b+c}{2}$.

3. Primjena trigonometrije u stereometriji

Stereometrija je dio geometrije koji proučava svojstva geometrijskih tijela u prostoru i njihove međusobne odnose. U ovom poglavlju najprije će se usporediti udžbenici objavljeni prije i poslije donošenja Kurikuluma u odnosu na primjenu trigonometrije u stereometriji, a zatim će se obrazložiti primjena trigonometrije na odabranim geometrijskim tijelima, stošcu upisanom u kuglu i paralelopipedu. Pritom će se detaljnije objasniti primjena trigonometrije u određivanju mjere kuta pri vrhu osnog presjeka stošca upisanog u kuglu i u izvođenju formule za računanje volumena paralelopipeda.

3.1. Kritički osvrt na udžbenike objavljene prije i poslije donošenja Kurikuluma

Uvidom u udžbenike [1] i [2] za treći razred gimnazija objavljenih prije i poslije donošenja Kurikuluma provedena je analiza nastavnih sadržaja u odnosu na primjenu trigonometrije u stereometriji. Pritom je ustanovljeno da se prije donošenja Kurikuluma primjena trigonometrije trokuta u stereometriji obrađivala u trećim razredima gimnazija (i srednjih škola), vidi udžbenik [1], ali se ona nakon donošenja Kurikuluma više ne obrađuje u trećim razredima gimnazija, vidi udžbenik [2]. Budući da je donošenjem Kurikuluma došlo do promjena u obradi nastavnih sadržaja iz područja trigonometrije tako da se neki sadržaji iz trećeg razreda gimnazije (prije Kurikuluma) obrađuju u drugom razredu gimnazije (nakon Kurikuluma), analiziran je i udžbenik [5] za drugi razred gimnazije, pri čemu je ustanovljeno da primjena trigonometrije u stereometriji nije obuhvaćena ni udžbenikom [5] za drugi razred gimnazije, gdje se u nastavnoj cjelini koja sadrži poučke o trokutu nalazi samo prethodno obrazložena primjena trigonometrije na četverokute.

Smatram da bi se uz primjenu trigonometrije u planimetriji također trebala obraditi i njezina primjena u stereometriji u drugom razredu gimnazije u sklopu nastavne cjeline *Poliedri i rotacijska tijela*, gdje predviđeni nastavni sadržaji obuhvaćaju prizme, piramide, valjak, stožac, kuglu, sferu i rotacijska tijela ili u trećem razredu gimnazije na kraju poglavlja *Trigonometrija*.

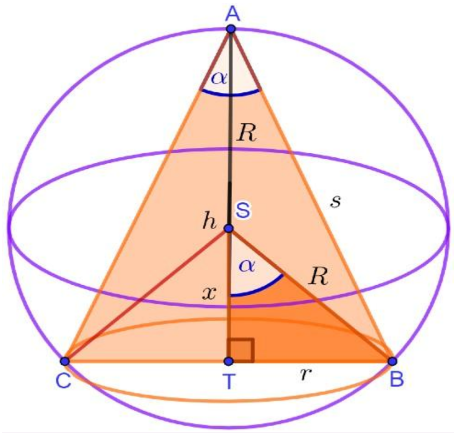
U nastavku će se detaljno razraditi dva nastavna sadržaja od kojih prvi obuhvaća stožac upisan u kuglu, a drugi paralelopiped koji mogu poslužiti kao prijedlozi za njihovu obradu u nastavi matematike za drugi ili treći razred gimnazije budući da primjena trigonometrije u stereometriji nije dio redovnog nastavnog programa ni za drugi ni za treći razred gimnazija. Također, navedeni nastavni sadržaji su prikladni i za samostalni rad onih učenika koji žele proširiti svoje znanje iz područja trigonometrije i njezine primjene u rješavanju odgovarajućih problemskih zadataka vezanih uz geometrijska tijela. Postupak argumentacije izvoda formula provodit će se poštivajući načela postupnosti i zornosti analogno kao u poglavlju 2., gdje se argumentirala primjena trigonometrije trokuta na paralelogram i tetivni četverokut. Dakle, primjenjivat će se prethodno obrađena trigonometrija pravokutnog trokuta i trigonometrija trokuta koja obuhvaća definiciju sinusa i kosinusa tupog kuta, poučak o sinusima i poučak o kosinusu. Naglasimo da je nastavni sadržaj koji se odnosi na stožac upisan u kuglu pogodniji za učenike trećeg razreda gimnazije jer se u izračunu pojavljuje rješavanje trigonometrijskih jednadžbi, dok je nastavni sadržaj koji se odnosi na paralelopiped prikladan i za učenike drugih i za učenike trećih razreda gimnazije.

3.2. Stožac upisan u kuglu

Ponovimo najprije definicije stošca i kugle.

- *Stožac je oblo geometrijsko tijelo omeđeno krugom koji je ujedno baza stošca i dijelom zakrivljene plohe koji se naziva plašt stošca.*
- *Kugla polumjera $R > 0$ sa središtem u točki S jest skup svih točaka X u prostoru za koje vrijedi $d(S, X) \leq R$.*

Pritom $d(S, X)$ označava udaljenost središta kugle do njezine proizvoljne točke X.



Slika 14. *Stožac upisan u kuglu*

Neka je zadana kugla sa središtem u točki S polumjera $R > 0$ u koju je upisan stožac čija je baza krug sa središtem u točki T polumjera $r > 0$.

U nastavku ćemo odrediti mjeru kuta pri vrhu osnog presjeka stošca, stoga najprije ponovimo

definiciju osnog presjeka stošca.

- *Osni presjek stošca je jednakokračni trokut koji nastaje presijecanjem stošca ravninom koja sadrži os stošca i promjer njegove baze, pri čemu je os stošca pravac koji prolazi vrhom tog stošca i središtem njegove baze.*

Konkretno, promatrajući sliku 14. osni presjek stošca je jednakokračan trokut CBA kojemu je duljina osnovice jednaka $2r$, a duljina krakova jednaka je s. Označimo sa A vrh osnog presjeka stošca i sa α mjeru kuta $\measuredangle BAC$, tj. mjeru kuta s vrhom u točki A. U nastavku ćemo odrediti α, tj. mjeru kuta s vrhom u točki A

osnog presjeka proizvoljnog stošca upisanog u proizvoljnu kuglu. Uočimo najprije da je kut $\measuredangle BAC$ obodni kut nad kružnim lukom $\widehat{CB}$ kružnice polumjera r sa središtem u točki T, stoga primjenom poučka o središnjem i obodnom kutu koji je objašnjen u odjeljku 2.2.3. slijedi da je kut $\measuredangle BSC$ njemu pridruženi središnji kut čija je mjera dvostruko veća od mjere kuta $\measuredangle BAC$. Iz navedenog proizlazi da je polovica mjere središnjeg kuta $\measuredangle BSC$, odnosno mjera kuta $\measuredangle BST$ jednaka mjeri pripadnog obodnog kuta $\measuredangle BAC$ koju smo prethodno označili sa α, vidi sliku 14. Time se pri određivanju mjere kuta $\measuredangle BST$ podrazumijeva određivanje mjere kuta $\measuredangle BAC$, tj. mjere kuta s vrhom u točki A osnog presjeka stošca, čime se podrazumijeva određivanje vrijednosti od α.

Nadalje, udaljenost od točke A do točke T definira se kao duljina visine tog stošca koju označavamo sa h i pišemo $h = d(A,T)$. Pritom točku T koja je središte baze stošca ujedno nazivamo nožište visine h, obzirom da je visina stošca okomita na bazu stošca. Time dobivamo pravokutni trokut TBS kojemu je $R = d(S,B)$ duljina hipotenuze, a $x = d(S,T)$ i $r = d(T,B)$ su duljine njegovih kateta. Uočimo da je $d(A,T) = d(A,S) + d(S,T) = R + x$, stoga u odnosu na prethodno navedeno $h = d(A,T)$ proizlazi da je:

$$h = R + x. \tag{48}$$

Primjenom definicije trigonometrijske funkcije sinus u pravokutnom trokutu TBS, odnosno primjenom formule (2) dobivamo da je sinus šiljastog kuta α u pravokutnom trokutu TBS jednak omjeru polumjera r baze stošca i polumjera R kugle u koju je upisan stožac i pišemo:

$$\sin\alpha = \frac{r}{R}$$

iz čega proizlazi da je:

$$r = R\sin\alpha. \tag{49}$$

Time smo dobili da je polumjer baze stošca jednak umnošku polumjera kugle i sinusa mjere kuta s vrhom u točki A osnog presjeka stošca. Analogno, za izračunavanje kosinusa šiljastog kuta α u pravokutnom trokutu TBS primjenom formule (3) dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}$$

iz čega proizlazi da je:

$$x = R\cos\alpha, \tag{50}$$

gdje je $x = d(S,T)$ duljina priležeće katete, a $R = d(S,B)$ je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta TBS, pri čemu je R ujedno polumjer kugle u koju je upisan stožac. Uvrštavanjem izraza (50) u izraz (48) dobivamo $h = R + R\cos\alpha$, odnosno:

$$h = R\,(1 + \cos\alpha), \tag{51}$$

što se interpretira da je visina stošca jednaka umnošku polumjera kugle (u koju je upisan taj stožac) i faktora $1 + \cos\alpha$, gdje je α mjera kuta s vrhom u točki A osnog presjeka stošca. Promatrajući izraze (49) i (51) može se uočiti da su polumjer r baze stošca i duljina njegove visine h izraženi polumjerom R kugle u koju je upisan stožac i sinusom, odnosno kosinusom mjere kuta s vrhom u točki A osnog presjeka stošca koju ćemo u nastavku izračunati. Nadalje, uzimajući u obzir da je volumen kugle izražen pomoću njezinog polumjera i da je volumen stošca izražen pomoću njegovog polumjera i duljine njegove visine, podsjetimo se formula za izračunavanje volumena kugle i volumena stošca. Označimo sa A vrh osnog presjeka stošca i sa α mjeru kuta $\measuredangle BAC$, tj. mjeru kuta s vrhom u točki A. Volumen kugle izračunava se formulom:

$$V_K = \frac{4\,R^3\,\pi}{3}, \tag{52}$$

gdje je R polumjer kugle, a volumen stošca izračunava se formulom:

$$V_{St} = \frac{r^2\,\pi\,h}{3}, \tag{53}$$

gdje je r polumjer baze stošca, a h duljina visine tog stošca. Koristeći svojstvo da je volumen kugle četiri puta veći od volumena stošca, primjenom izraza (52) i (53) proizlazi $V_K = 4\,V_{St}$, odnosno:

$$\frac{4\,R^3\,\pi}{3} = 4\,\frac{r^2\,\pi\,h}{3}$$

$$R^3\,\pi = r^2\,\pi\,h$$

$$R^3 = r^2\,h. \tag{54}$$

Uvrštavanjem izraza (49) i (51) u izraz (54) slijedi

$$R^3 = R^3 \sin^2\alpha\,(1+\cos\alpha),$$

što možemo podijeliti sa R^3 jer je R polumjer kugle strogo pozitivan realan broj. Time dobivamo sljedeću trigonometrijsku jednadžbu:

$$\sin^2\alpha\,(1+\cos\alpha) = 1. \tag{55}$$

Primjenom poznatog trigonometrijskog identiteta $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, odakle proizlazi $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ dobivamo da se trigonometrijska jednadžba (55) može nadalje pisati u obliku:

$$(1-\cos^2\alpha)\,(1+\cos\alpha) = 1$$

$$1+\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos^3\alpha = 1$$

$$\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos^3\alpha = 0$$

$$\cos\alpha\,(1-\cos\alpha-\cos^2\alpha) = 0$$

koju ako pomnožimo sa (-1), onda dobivamo:

$$\cos\alpha\,(\cos^2\alpha+\cos\alpha-1) = 0. \tag{56}$$

Koristeći svojstvo: $x\,y = 0$ ako je $x = 0$ ili $y = 0$, iz trigonometrijske jednadžbe (56) proizlazi $\cos\alpha = 0$ ili $\cos^2\alpha+\cos\alpha-1 = 0$.

U prvom slučaju iz $\cos\alpha = 0$ direktno slijedi da je $\alpha = 90^0$.

U drugom slučaju trigonometrijska jednadžba $\cos^2\alpha+\cos\alpha-1 = 0$ rješava se uvođenjem supstitucije $\cos\alpha = t$, čime se ona svodi na kvadratnu jednadžbu oblika:

$$t^2+t-1 = 0,$$

kojoj su rješenja

$$t_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1.61805,$$

$$t_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.61805.$$

Pritom se koristila poznata formula $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ za određivanje rješenja kvadratne jednadžbe općeg oblika $ax^2+bx+c = 0$.

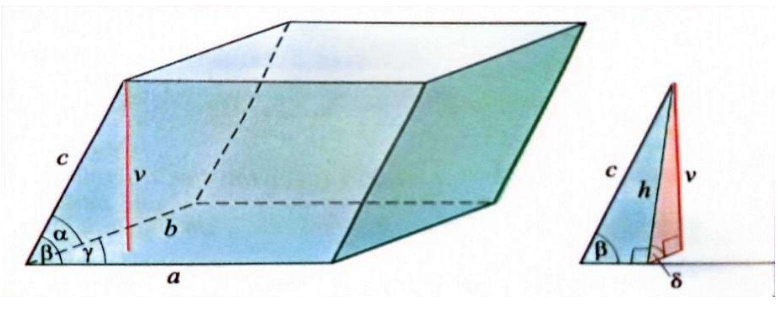
Uvrštavanjem dobivene vrijednosti t_1 u $\cos\alpha = t$ proizlazi jednadžba $\cos\alpha = -1.61805$ koja nema rješenja jer je $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
Analogno, za dobivenu vrijednost t_2 proizlazi jednadžba $\cos\alpha = 0.61805$ kojoj je rješenje $\alpha = 52°23'$.
Time smo dobili da mjera kuta s vrhom u točki A osnog presjeka stošca, koju smo prethodno označili sa α, može poprimiti sljedeće dvije vrijednosti: $\alpha_1 = 90°$ ili $\alpha_2 = 52°23'$.

3.3. Paralelopiped

Budući da je paralelopiped jedan specijalan slučaj prizme, najprije ćemo definirati prizmu, a zatim paralelopiped.

- *Prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim mnogokutima koji pripadaju paralelnim ravninama i nazivamo ih baze prizme te paralelogramima koje nazivamo pobočke prizme.*
- *Paralelopiped je prizma omeđena s tri para sukladnih paralelograma, odnosno prizma čije su baze paralelogrami.*

Dakle, za paralelopiped vrijedi da su mu obje baze kao i sve njegove četiri pobočke zapravo paralelogrami. Označimo sa a, b i c duljine bridova paralelopipeda, a sa α, β i γ šiljaste kutove između odgovarajućih bridova kako je prikazano na slici 15.



Slika 15. *Paralelopiped (skenirani dio str. 156 iz udžbenika [1])*

U nastavku će se izvesti formula za izračunavanje volumena paralelopipeda.
Volumen paralelopipeda iskazuje se umnoškom površine njegove baze i duljine njegove visine, što zapisujemo u sljedećem obliku:

$$V = B \cdot v, \tag{57}$$

Budući da je baza paralelopipeda zapravo paralelogram kojemu su a i b duljine stranica i γ šiljasti kut između njih, površina baze paralelopipeda izračunava se primjenom formule (21) iz odjeljka 2.2.2. prema kojoj je:

$$B = ab \sin \gamma. \tag{58}$$

Promotrimo sada prednju pobočku paralelopipeda, odnosno paralelogram kojemu su a i c duljine stranica i β šiljasti kut između njih. Označimo li sa h duljinu visine tog paralelograma, tada dobivamo pravokutni trokut označen plavom bojom na slici 15. kojemu je c duljina hipotenuze, a h duljina katete nasuprot kutu β. Primjenom definicije sinusa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu koja je dana formulom (2) dobivamo:

$$\sin \beta = \frac{h}{c},$$

odakle slijedi:

$$h = c \sin \beta. \tag{59}$$

Nadalje, promotrimo crveni pravokutni trokut na slici 15. kojemu je duljina hipotenuze jednaka duljini visine prednje pobočke (paralelograma kojemu su a i c duljine stranica i β šiljasti kut između njih) i kojemu je duljina katete nasuprot kutu δ jednaka duljini visine paralelopipeda, gdje je δ šiljasti kut koji razmatrana prednja pobočka zatvara s bazom paralelopipeda. Tada primjenom definicije sinusa šiljastog kuta u pravokutnom trokutu dobivamo:

$$\sin \delta = \frac{v}{h},$$

iz čega proizlazi:

$$v = h \sin \delta. \tag{60}$$

Time smo dobili formulu kojom se duljina visine paralelopipeda može izračunati kao umnožak duljine visine jedne pobočke i sinusa kuta između te pobočke i baze paralelopipeda. Uvrštavanjem izraza (59) u izraz (60) dobivamo:

$$v = c \sin \beta \sin \delta, \tag{61}$$

a uvrštavanjem izraza (58) i (61) u izraz (57) slijedi da se volumen paralelopipeda može izračunati i sljedećom formulom:

$$V = abc \sin \beta \sin \gamma \sin \delta. \tag{62}$$

Dakle, primjenom izvedenih formula za izračun površine baze paralelopipeda i za izračun duljine njegove visine, tj. izraza (58) i (61) iz opće formule (57) za izračunavanje volumena paralelopipeda dobiva se formula (62) kojom se volumen paralelopipeda izražava umnoškom duljina svih njegovih bridova i sinusa odgovarajućih šiljastih kutova. Dakle, ako bismo umjesto prednje pobočke (tj. paralelograma kojemu su a i c duljine stranica i β šiljasti kut između njih) razmatrali lijevu pobočku paralelopipeda, odnosno paralelogram s duljinama stranica b i c i šiljastim kutom α između njih, onda bismo analogno prethodno navedenom dobili da se duljina visine v paralelopipeda u ovom slučaju može pisati u obliku $v = c \sin\alpha \sin\delta,$ čime bi formula (57) poprimila sljedeći oblik: $V = abc \sin\alpha \sin\gamma \sin\delta,$ usporedite ga s izrazom (62).

4. Zaključak

Detaljnom analizom sadržaja udžbenika za prvi, drugi i treći razred gimnazija objavljenih poslije donošenja Kurikuluma dolazimo do zaključka da su neki nastavni sadržaji obrađeni u skladu s prethodno stečenim znanjem učenika, ali i da postoje nastavni sadržaji koji nisu usklađeni s predznanjem učenika, čime se učenicima znatno otežava usvajanje tih nastavnih sadržaja. Također, uočeni su neki nedostaci u obradi i načinu prezentiranja pojedinih definicija, tvrdnji i svojstava, stoga smo te nastavne sadržaje detaljnije pojasnili u obliku prijedloga kojima bi se oni mogli unaprijediti. Pritom je poseban naglasak bio na obrazloženju i argumentaciji trigonometrije trokuta i njezine primjene kao i na detaljnijim objašnjenjima izvoda formula s ciljem da učenici usvoje trigonometrijske sadržaje s razumijevanjem budući da trigonometrija predstavlja veliki dio nastavnog gradiva u gimnazijama koje učenici teže savladavaju. Navedeni nastavni sadržaji iz područja planimetrije i stereometrije na kojima je detaljno obrazložena primjena trigonometrije mogu poslužiti kao dodatak redovnoj nastavi u sklopu dodatne nastave matematike, ali mogu poslužiti i za samostalni rad učenika koji imaju naglašen interes prema matematici i koji žele proširiti svoje znanje iz područja trigonometrije. Unatoč navedenim preporukama kojima bi se pojedini dijelovi udžbenika za drugi razred gimnazija proširili dodatnim nastavnim sadržajima, to je često teže izvedivo zbog nedostatka vremena i velikog opsega nastavnog gradiva predviđenog Kurikulumom. Iako se većina nastavnih sadržaja iz matematike temelji na sadržajima pojedinog udžbenika, svaki nastavnik u nastavi matematike pokušava pronaći kvalitetniji pristup i osmisliti metode kojima poboljšava uočene nedostatke iz udžbenika tako da te sadržaje prezentira na razumljiviji i pristupačniji način. Jedan od načina kojima nastavni sadržaji mogu postati pristupačniji učenicima je korištenje digitalnih alata, kao što je matematički alat GeoGebra zbog jednostavnosti njezinog korištenja, čime se učenicima olakšava razumijevanje tih nastavnih sadržaja i postiže veća zainteresiranost učenika za njihovim usvajanjem.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović: Matematika 3 - udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio, Element, Zagreb, 2014.

[2] B. Dakić, N. Elezović: Matematika 3 - udžbenik za 3. razred gimnazija i strukovnih škola, 1. dio, Element, Zagreb, 2020.

[3] B. Dakić, N. Elezović: Matematika 1 - udžbenik za 1. razred gimnazija i strukovnih škola, 2. dio, Element, Zagreb, 2019.

[4] B. Dakić, N. Elezović: Matematika 2 - udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio, Element, Zagreb, 2014.

[5] B. Dakić, N. Elezović: Matematika 2 - udžbenik za 2. razred gimnazija i strukovnih škola, 2. dio, Element, Zagreb, 2020.

[6] Narodne novine - službeni list Republike Hrvatske, Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (Preuzeto s https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html, 1.2.2024.)

[7] D. Palman: Planimetrija, Element, Zagreb, Hrvatska, 1999.

[8] D. Palman: Stereometrija, Element, Zagreb, Hrvatska, 2005.

[9] S. Varošanec: Tetivni četverokuti, Matematička natjecanja, Zagreb (Preuzeto s https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2014/12/Matka23-m04-tetivni.pdf, 10.3.2024.)

[10] Hrvatska akademska i istraživačka mreža - CARNET: Matematika 3 (Preuzeto s https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/1e40c8b9-6d5d-45ae-8776-fe29974fbdfc/html/304_graf_i_svojstva_funkcije_sinus.html, 6.6.2024.)

Popis slika