Primjena Brunerove teorije učenja u nastavi matematike

Brckan, Ivana

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Matematika i informatika – smjer nastavnički

Ivana Brckan

Primjena Brunerove teorije učenja u nastavi matematike

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2024.

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Matematika i informatika – smjer nastavnički

Ivana Brckan

Primjena Brunerove teorije učenja u nastavi matematike

Mentorica: prof. dr. sc. Sanja Rukavina

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2024.

1. Sadržaj

Sažetak

U prvom dijelu ovoga rada opisane su osnovne postavke Brunerove teorije učenja. Opisana je Brunerova teorija kognitivnog rasta, spiralni kurikulum, teorija skela i konstruktivistički pristup učenju. U drugom dijelu je istraženo poklapaju li se postavke Brunerove teorije kognitivnog rasta s *Kurikulumom nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole* te je dano nekoliko primjera primjene Brunerove teorije u Kurikulumu. U trećem je dijelu opisana radionica „Koliko boja je potrebno?“ namijenjena učenicima od petog do osmog razreda koja je provedena u svrhu istraživanja primjene Brunerove teorije u nastavi matematike. U četvrtom dijelu su evaluirane provedene aktivnosti i anketa koju su učenici ispunili nakon sudjelovanja u radionici. Na kraju je dan zaključak o primjenjivosti Brunerove teorije u nastavi matematike.

Ključne riječi

Brunerova teorija kognitivnog rasta, spiralni kurikulum, teorija skela, konstruktivizam

Uvod

Jerome S. Bruner (1915. – 2016.) bio je psiholog koji je uvelike doprinio razvoju kognitivne psihologije i teorija učenja. On je smatrao da svaki učenik, neovisno o svojoj dobi, može shvatiti svaki novi nastavni sadržaj ako mu je on prezentiran na odgovarajući način, tj. ako mu je dovoljno pojednostavljen i prilagođen njegovim kognitivnim sposobnostima. Bruner je razvio teoriju kognitivnog rasta prema kojoj djeca uče pomoću tri modela reprezentacije stvarnosti – iskustveni, slikovni i simbolički način prikaza, što je često primjenjivo u nastavi matematike. Također, Bruner je predstavio spiralni kurikulum čija načela se poklapaju s načelima aktualnog *Kurikuluma nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole*. Nadalje, on se zalagao za konstruktivistički pristup učenju prema kojemu učenici razvijaju svoja znanja aktivnim sudjelovanjem u nastavi te je smatrao da treba učenike poticati da samostalno dolaze do zaključka iz čega je razvio teoriju skela.

U ovom radu opisana je Brunerova teorija učenja, pojašnjeno je kako se ta teorija može primijeniti u matematici te je dan prijedlog aktivnosti za nastavu matematike koja slijedi načela Brunerove teorije kognitivnog rasta. U sklopu rada napravljeno je malo istraživanje o tome kako učenici prihvaćaju ovakav pristup učenju u školi. Izvedene su aktivnosti koje se baziraju na Brunerovoj teoriji učenja, a sve kako bi se istražilo odgovara li učenicima ovakav način rada, jesu li se već susreli s takvim tipom aktivnosti i kako prihvaćaju aktivno učenje u odnosu na klasičnu nastavu. Očekuje se da će učenici imati pozitivan stav prema ovakvim aktivnostima te da bi primjena Brunerove teorije trebala pridonijeti kvaliteti nastave matematike.

1. Brunerova teorija učenja

1.1. Brunerova teorija kognitivnog rasta

Brunerova teorija kognitivnog rasta opisuje način na koji se znanje pohranjuje ili predstavlja u pamćenju. Bruner predlaže tri modela obrade informacija, odnosno tri načina reprezentacije stvarnosti. Prvi od njih je iskustveni način prikaza i on se razvija od rođenja. Drugi, slikovni način prikaza se postupno pojavljuje u drugoj godini života, dok se treći, simbolički javlja oko sedme godine života. Dakle, sva tri načina obrade informacija učenici bi trebali spoznati prije polaska u školu. Važno je napomenuti da se sva tri načina reprezentacije isprepliću te da se usvajanjem novih načina obrade informacija prethodni ne prestaju koristiti, već djeca uče primjenjujući sva tri načina reprezentacije stvarnosti. Nadalje, osobe u odrasloj dobi također koriste sva tri načina obrade informacija.

U prvoj godini života bebe ne mogu koristiti simbole i slike u interakciji s okolinom pa se za interakciju koriste akcijom, odnosno pokretima. Zbog toga se već u prvoj godini javlja iskustveni način prikaza. Bebe koriste akcije kao što su dodirivanje, pomicanje i hvatanje kojima se stvaraju aktivne reprezentacije stvarnosti. Znanje koje se pohranjuje u njihovo pamćenje je u obliku motoričkih odgovora. Odrasli također koriste ovaj oblik reprezentacije kada obavljaju motoričke zadatke, primjerice u vožnji. U matematici, iskustveni način prikaza očituje se u eksperimentalnoj metodi te korištenjem materijala i modela kojima se prikazuju matematički koncepti.

Kako djeca odrastaju, kod njih se razvija sposobnost obrade informacija u obliku mentalnih slika. Tada se kod djece javlja slikovni način prikaza. Slikovni način reprezentacije u nastavi se koristi prikazivanjem slika, dijagrama, videozapisa i slično. Slikovni prikazi u nastavi matematike su najčešće skice matematičkih situacija ili geometrijskih likova i tijela, dijagrami, grafovi i matematičke konstrukcije.

Simbolički način prikaza se počinje razvijati posljednji. On uključuje predstavljanje informacija dobivenih iskustvom i kroz slike u obliku apstraktnih simbola. Simbolički način prikaza koristimo u govoru i pismu te on zapravo postaje najčešći oblik pohrane informacija jednom kada ga djeca usvoje. U nastavi matematike, simbolički način se koristi za opisivanje matematičkih koncepata riječima te za zapisivanje matematičkih koncepata rečenicama i matematičkim simbolima (npr. algebarski izrazi).

Prema Brunerovoj teoriji, sva tri načina obrade informacija trebala bi biti zastupljena u nastavnom procesu kako bi učenici uspješno usvojili predviđena znanja i vještine. Dakle, nastava bi prema Bruneru trebala biti koncipirana tako da se sadržaji prikazuju sekvencijalno od iskustvenog preko slikovnog do simboličkog načina prikazivanja. Nastavnici koji slijede ovaj pristup uvode teme koristeći konkretne materijale i stvaraju konkretne situacije prije nego što prijeđu na vizualne, a zatim na apstraktne prikaze.

1.2. Spiralni kurikulum

Bruner je u svojem radu "Toward a theory of instruction", napisao: „Bilo koja ideja, problem ili znanje mogu se predstaviti na dovoljno jednostavan način tako da ih bilo koji učenik može razumjeti u prepoznatljivom obliku" (Bruner 1965, str. 44). On je smatrao da učenici neovisno o njihovoj dobi mogu razumjeti svaki predmet, pa čak i njegove složenije koncepte, ako im je on prikazan na dovoljno jednostavan način. U skladu s tim razmišljanjem, Bruner je predstavio obrazovni pristup nazvan spiralni kurikulum. U spiralnom kurikulumu teme se više puta ponavljaju tijekom obrazovanja učenika, pri čemu svaka nova tema nadograđuje prethodnu i svakim novim ponavljanjem prezentirani sadržaj sve više ide u dubinu i širinu same biti. Primjerice, u nastavi matematike bi učenik prvo naučio baratati s osnovnim aritmetičkim operacijama u skupu prirodnih brojeva u ranom osnovnoškolskom razdoblju, a zatim bi to znanje primjenjivao na računanje u skupu cijelih, racionalnih i realnih brojeva u višim razredima osnovne škole te bi to znanje primjenjivao i za učenje drugih matematičkih koncepata. Naposljetku, učenik bi koristio ove koncepte pri usvajanju složenijeg matematičkog sadržaja u srednjoj školi.

Spiralni kurikulum je osmišljen na način da se svaka tema i koncept nadograđuju na ono što je prethodno usvojeno. Takav pristup potiče učenike na razmišljanje i povezivanje sadržaja te na primjenu usvojenih sadržaja prilikom učenja novih. Da bi spiralni kurikulum bio učinkovit, nastavnici moraju biti upoznati s djetetovim predznanjem. Ako nastavnici ponovno podučavaju informacije koje učenici već znaju ili previše detaljno ponavljaju neke pojmove, učenici bi mogli izgubiti interes za temu. S druge strane, ako nastavnici krivo pretpostave da se učenici sjećaju temeljnih pojmova teme koja se podučavala u prethodnim razredima, učenici bi mogli imati poteškoća sa usvajanjem novog sadržaja koje se nadograđuje na prethodno usvojene sadržaje.

U kontekstu teorije kognitivnog rasta, nastavnici spiralni kurikulum mogu primjenjivati na način da nastavni materijal prezentiraju u nizu od iskustvenih (koristeći materijale kojima reprezentiraju matematičke koncepte), preko slikovnih (koristeći slike, dijagrame i sl.), do simboličkih (koristeći jezik i matematičke simbole). Na primjer, pojam razlomka se može uvesti učenicima u aktivnom obliku, na primjer dijeljenjem čokolade na jednake dijelove. Nakon toga, razlomci se prezentiraju učenicima pomoću slika kao dio kruga (ili pravokutnika). Naposlijetku, učenici uče kako razlomke zapisati simbolima i kasnije pri računanju s razlomcima, oni koriste simbolički zapis.

1.3. Teorija skela

Jerome Bruner također je zagovarao proces poznat kao skele, u kojem nastavnici pružaju stalnu podršku dok učenici pokušavaju svladati problem ili riješiti zadatak koji nisu u stanju sami riješiti. Nastavnici pružaju privremenu podršku i potiču učenike da postignu maksimum u svom radu. Teorija skela ima za cilj pružiti taman toliko podrške koliko je učeniku potrebno da bi došao do određenog zaključka ili riješio određeni problem. Dakle, kako bi nastavnici osigurali takav pristup, oni moraju dobro procijeniti koliko njihovi učenici znaju i koliko dobro mogu sami zaključivati kako im ne bi pružali premalo, ali niti previše pomoći u obavljanju zadatka. Nastavnici moraju znati kada intervenirati, kada se povući i kako učinkovito motivirati. Pružena pomoć mora se stalno prilagođavati kako bi zadovoljila promjenjive potrebe učenika. Pri uvođenju novih koncepata učenici mogu biti jako ovisni o potpori nastavnika, ali kako se proces učenja odvija tako učenici stječu određena znanja i vještine te se podrška može postupno smanjivati.

Nastavnici mogu primijeniti teoriju skela u svojoj nastavi na različite načine. Primjerice, nastavnici trebaju osigurati da učenici zadrže interes za zadatak koji im je zadan, davati učenicima upute i postaviti jasna očekivanja svakog zadatka te ukazivati na eventualne pogreške u rješavanju zadatka. Nadalje, nastavnici mogu skrenuti učenicima pozornost na dijelove informacija koje su možda previdjeli, a pomogli bi im u rješavanju, te složene zadatke razložiti na manje, za učenike lakše rješive dijelove zadatka. Dobro je učenicima na nastavi zadavati aktivnosti za samostalan rad. Uloga nastavnika tijekom takvih aktivnosti je nadgledanje učenika, ukazivanje na eventualne pogreške, postavljanje potpitanja koja će učenicima pomoći u zaključivanju te motiviranje učenika za rad.

Prilikom primjene teorije skela u nastavi, posebnu pozornost treba obratiti na individualne razlike između učenika jer nemaju svi učenici jednake sposobnosti za usvajanju novih sadržaja pa tome treba prilagoditi stupanj podrške svakom od učenika čime se zadovoljava načelo individualizacije u nastavi matematike.

1.4. Konstruktivistički pristup učenju

Bruner je zastupao mišljenje prema kojemu učenici trebaju biti aktivni sudionici u procesu učenja, a ne pasivni primatelji znanja. Promicao je ideju učenja otkrivanjem u kojem djeca uče eksperimentiranjem i istraživanjem. Prema Bruneru, cilj poučavanja je pripremiti učenike za samostalno rješavanje problema. Umjesto da nastava bude koncipirana tako da nastavnici prenose unaprijed pripremljene činjenice i objašnjenja, koje učenici potom trebaju upamtiti, nastavnici bi trebali djelovati kao voditelji koji pomažu učenicima da sami otkrivaju koncepte. To znači da bi nastavnici učenicima trebali omogućiti pristup potrebnim informacijama, a da ih pritom za njih ne organiziraju. Učenici bi sami trebali sortirati informacije, otkrivajući pritom odnose između različitih pojmova i ideja.

Brunerov pristup učenju je konstruktivistički pristup jer uključuje učenika koji aktivno konstruira nove ideje na temelju prošlih i sadašnjih iskustava. U svom konstruktivističkom pristupu, on je koristio teoriju kognitivnog rasta, teoriju skela i spiralni kurikulum. Bruner je vjerovao da se znanje stečeno na ovaj način bolje čuva od informacija koje je nastavnik prenio učeniku jednostavnim prijenosom činjenica.

U nastavi matematike konstruktivistički pristup može se ostvariti poticanjem učenika na samostalno zaključivanje, postavljanjem potpitanja te stvaranjem situacija za samostalan rad. U ovakvom bi pristupu trebalo koristiti što više modela koji predstavljaju matematičke koncepte, koristiti eksperimentalnu metodu kada je to moguće te dobivene zaključke prezentirati slikama i naposlijetku simbolima.

2. Primjeri primjene Brunerove teorije u nastavi

2.1. Kurikulum iz matematike

Kurikulum nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole (u nastavku: *„Kurikulum"*) je osnovni dokument u kojem su propisani ciljevi učenja i poučavanja nastavnog predmeta Matematika te odgojno-obrazovni ishodi, dana je razrada odgovarajućih ishoda, preporuke za ostvarivanje ishoda, te su navedeni sadržaji koje je potrebno usvojiti. Matematički koncepti navedeni u Kurikulumu grupirani su u pet domena: (A) Brojevi, (B) Algebra i funkcije, (C) Oblik i prostor, (D) Mjerenje i (E) Podatci, statistika i vjerojatnost.

Kurikulum je primarno usmjeren na ishode učenja, a ne na sadržaj i nastavne metode te prema tome nastavnici imaju slobodu u radu. Jedini uvjet je da tijekom školske godine učenici usvoje sve odgojno-obrazovne ishode planirane za određeni razred. Za svaki od ishoda navedenih u Kurikulumu navedene su preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda. Te preporuke često sadrže smjernice prema kojima bi nastava trebala biti aktivna, trebali bi se koristiti razni modeli i slikovni prikazi koji će olakšati učenicima shvaćanje određenih koncepata. U nastavku su navedena dva primjera za uvođenje nastavnih sadržaja iz matematike u skladu s Brunerovom teorijom učenja te je prikazano na koji se način mogu usmjeravati aktivnosti učenika.

2.2. Primjeri primjene Brunerove teorije kognitivnog rasta u kurikulumu

Primjer 1: Početno zbrajanje u skupu prirodnih brojeva

U prvom razredu osnovne škole, učenici u dobi od sedam godina tek su počeli razvijati simbolički način razmišljanja te im je potrebna podrška u vidu iskustvenog i slikovnog načina prikaza matematičkog sadržaja kako bi došli do razine da simbolički zapisuju matematičke koncepte. Primjerice, to je vidljivo prilikom uvođenja prirodnih brojeva te zbrajanja i oduzimanja u skupu prirodnih brojeva do 20, kada učenici povezuju prirodne brojeve s količinom konkretnih objekata te uče zbrajati i oduzimati prebrojavanjem određenih objekata. Zatim, učenici zbrajaju i oduzimaju promatrajući slike i određujući količinu objekata na slici, a tek nakon toga zapisuju zbroj i razliku pomoću simbola. U nastavku su prikazani ishodi i smjernice iz Kurikuluma za uvođenje tog sadržaja te je navedena jedna aktivnost koja se može provesti s učenicima.

U prvom razredu učenici se upoznaju s prirodnim brojevima i nulom te uče zbrajati i oduzimati u skupu prirodnih brojeva do 20 i s nulom. Dakle, ostvaruju sljedeće ishode iz Kurikuluma:

- MAT OŠ A.1.1. Učenik opisuje i prikazuje količine prirodnim brojevima i nulom. (Kurikulum, str. 16)

- MAT OŠ A.1.4., MAT OŠ B.1.1. Učenik zbraja i oduzima u skupu brojeva do 20. (Kurikulum, str. 18)

Razrada navedenih ishoda dana je u Kurikulumu kako slijedi.

Ostvarivanjem ishoda MAT OŠ A.1.1. učenik:

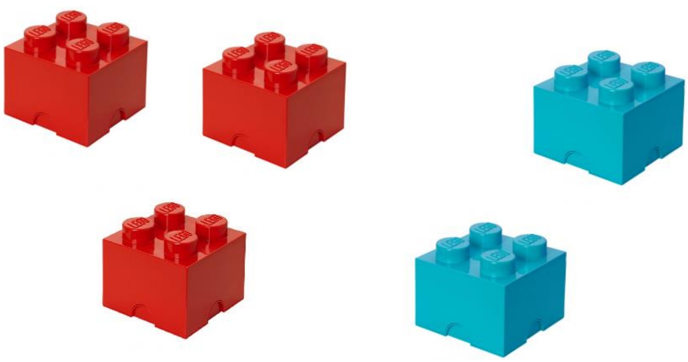
- povezuje količinu i broj.
- broji u skupu brojeva do 20.
- prikazuje brojeve do 20 na različite načine.
- čita i zapisuje brojeve do 20 i nulu brojkama i brojevnim riječima.
- razlikuje jednoznamenkaste i dvoznamenkaste brojeve.
- objašnjava vezu između vrijednosti znamenaka i vrijednosti broja. (Kurikulum, str. 16)

Nadalje, ostvarivanjem ishoda MAT OŠ A.1.4., MAT OŠ B.1.1. učenik:

- zbraja i oduzima brojeve do 20.
- računske operacije zapisuje matematičkim zapisom.
- imenuje članove u računskim operacijama.
- primjenjuje svojstva komutativnosti i asocijativnosti te vezu zbrajanja i oduzimanja.
- određuje nepoznati broj u jednakosti. (Kurikulum, str. 18)

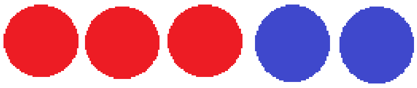
U Kurikulumu su navedene i preporuke za ostvarivanje tih ishoda. Preporuka je da učenici pojam broja spoznaju na konkretima i na crtežima. Također, nastavnici se trebaju služiti konkretima i slikama prilikom uvođenja zbrajanja i oduzimanja. Prilikom objašnjavanja tih računskih operacija s konkretnim objektima i slikama trebaju koristiti izraze „više“ i „manje“ te povezivati te izraze s operacijama zbrajanja i oduzimanja. Tek nakon toga uvodi se matematički zapis. Dakle, vidljivo je da kod uvođenja zbrajanja i oduzimanja u prvom razredu treba koristiti sva tri načina obrade informacija. U nastavku je prikazan jedan primjer uvođenja zbrajanja.

Učenicima možemo račun $3 + 2 = 5$ prvo prikazati pomoću LEGO® kockica, kao što je prikazano na *Slici 2.1.*



Slika 2.1: Zbrajanje pomoću LEGO® kockica

Nakon toga, može im se prikazati slika koja predstavlja taj zbroj, a kasnije se može zadati i da sami prikažu određeni zbroj crtežom. Jedan slikovni prikaz koji prikazuje zbroj $3 + 2 = 5$ dan je na *Slici 2.2.*



Slika 2.2: Slikovni prikaz u početnom zbrajanju

Nakon toga, uvodi se matematički zapis $3 + 2 = 5$ te se naglašava učenicima kako se taj izraz čita. Nakon rješavanja većeg broja sličnih primjera, učenici počinju automatizirati zbrajanje.

Primjer 2: Pojam razlomka

Učenici se u petom razredu upoznaju s pojmom razlomka. Već i u nižim razredima, prilikom uvođenja dijeljenja, učenici se susreću s pojmovima polovina, trećina i četvrtina u sklopu nekih zadataka u kojima treba podijeliti cjelinu na jednake dijelove te su im u takvim zadacima grafički prikazani odgovarajući razlomci, bez uvođenja pojma razlomak, najčešće krugom koji je podijeljen na jednake dijelove. U petom razredu uvodi se pojam razlomka te učenici ostvaruju ishod iz Kurikuluma:

- MAT OŠ A.5.3. Učenik povezuje i primjenjuje različite prikaze razlomaka (Kurikulum, str. 55)

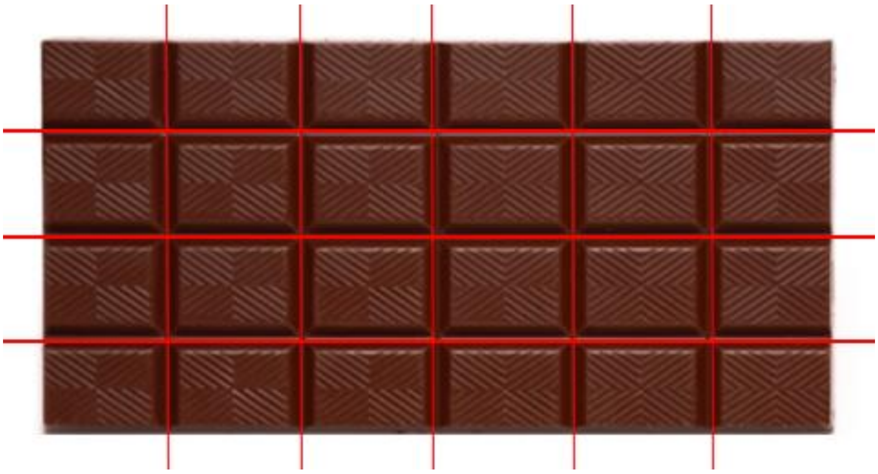
Razrada ovog ishoda dana je kako slijedi.

Ostvarivanjem ishoda MAT OŠ A.5.3. učenik:

- povezuje slikovni prikaz razlomka s brojevnim zapisom i obratno.
- zapisuje i tumači razlomak povezujući ga s dijeljenjem.
- prikazuje razlomke na brojevnome pravcu.
- povezuje različite brojevne zapise nepravih razlomaka, mješovitih brojeva i prirodnih brojeva.
- opisuje i određuje udio u skupu istovrsnih podataka.
- tumači dobiveno rješenje u kontekstu problema. (Kurikulum, str. 55)

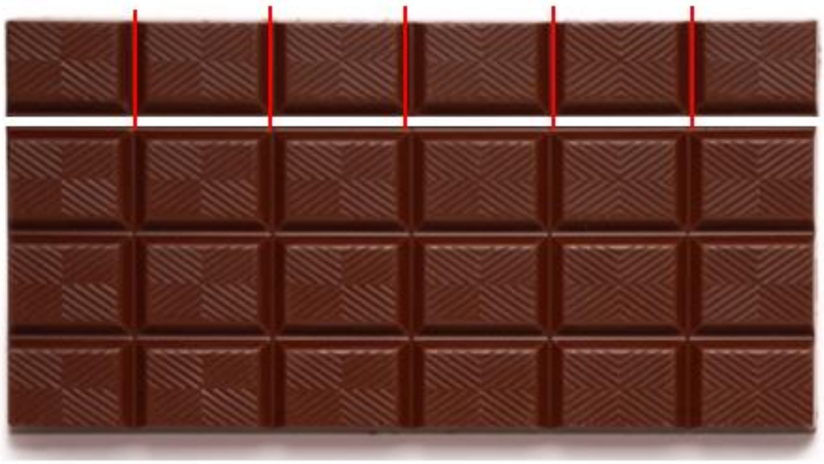
U Kurikulumu je navedena preporuka da se prilikom povezivanju različitih brojevnih zapisa razlomaka koriste crteži, modeli te brojevni pravac. Također, navodi se kako učenicima treba naglasiti ekvivalentnost razlomaka jednakih vrijednosti, ali bez računskog postupka proširivanja i skraćivanja razlomaka. U tome mogu pomoći matematički modeli i slikovni prikazi kao što je to prikazano u sljedećem primjeru.

Pojam razlomka najbolje je uvesti primjerima iz svakodnevnog života. Na primjer, učenicima možemo pokazati dijeljenje čokolade na jednake dijelove te na taj način modelom prikazati određene razlomke te uočavati različite zapise istog broja. Primjerice, uzmimo čokoladu koja je oblikovana tako da ju lako možemo trganjem podijeliti na 24 jednaka komadića. Na *Slici 2.3* prikazana je jedna takva čokolada i način na koji se može podijeliti na 24 jednaka dijela.



Slika 2.3: Iskustveni prikaz razlomka 1/24 na primjeru čokolade

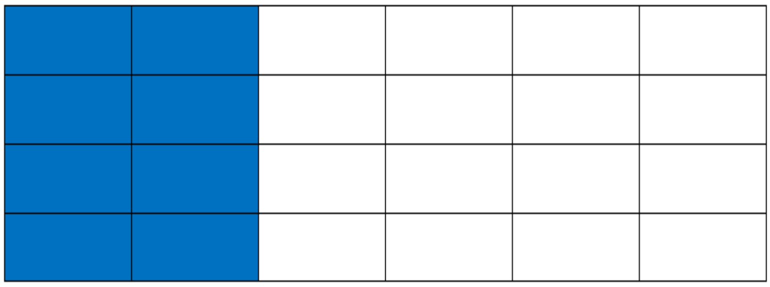
Dakle, svaki komadić čokolade prikazan na *Slici 2.3* iznosi $\frac{1}{24}$ čokolade sa slike. Nadalje, možemo otrgnuti jedan od četiri redaka navedene čokolade, odnosno, jednu četvrtinu čokolade. Taj redak možemo podijeliti na šest manjih komadića čokolade, kao što je prikazano na *Slici 2.4*, iz čega možemo zaključiti da je $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$.



Slika 2.4: Iskustveni prikaz jednakosti $1/4 = 6/24$ *pomoću čokolade*

Nadalje, kada bismo tu istu čokoladu podijelili po stupcima, podijelili bismo je na šestine jer je čokolada na *Slici 2.3* podijeljena na šest stupaca. Analogno bismo zaključili da je $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$, jer svaku od tih šestina čokolade možemo lako podijeliti na 4 jednaka manja komadića.

Nakon pokazivanja ovog primjera na čokoladi, nastavnik može učenicima dati radni listić na kojem je prikazan pravokutnik podijeljen na 24 jednaka dijela, slično kao što je podijeljena čokolada, pa zadati učenicima zadatak da oboje određeni dio pravokutnika, primjerice $\frac{2}{6}$. Primjer rješenja tog zadatka prikazan je na *Slici 2.5*.



Slika 2.5: Prikaz $2/6$ *pravokutnika*

Nadalje, nastavnik može učenike pitati koliko je dvadesetčetvrtina pravokutnika obojeno te se očekuje da će učenici zaključiti da je $\frac{2}{6}=\frac{8}{24}$. Također, može se još primijetiti i da je $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Ovim primjerom će učenici pomoću stvarnog objekta i pomoću slike zaključiti da postoje različiti zapisi istoga broja te će znati prepoznati ekvivalentne razlomke na stvarnom primjeru. Učenici će ujedno ovim primjerom koristiti iskustveni, slikovni i simbolički način prikaza razlomaka.

U sljedećem poglavlju detaljnije je prikazan još jedan primjer primjene Brunerove teorije kognitivnog rasta koji je osmišljen u obliku radionice za učenike od petog do osmog razreda osnovne škole.

3. Radionica „Koliko boja je potrebno?“

3.1. O matematičkim sadržajima u radionici

U ovom potpoglavlju navedeni su matematički pojmovi i činjenice na kojima se temelji radionica. Potpoglavlje je namijenjeno nastavnicima, koji namjeravaju organizirati radionicu opisanu u nastavku, kako bi se prisjetili sadržaja koji će im biti potrebni za vođenje i organizaciju radionice.

Skupovi

Učenici se s pojmom skupa upoznaju u petom razredu osnovne škole. U Kurikulumu je naveden odgojno-obrazovni ishod:

- MAT OŠ B.5.2. Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema. (Kurikulum, str. 58)

Nadalje, navedena je i razrada tog ishoda prema kojoj, ostvarivanjem tog ishoda, učenik:

- Oblikuje i prikazuje skupove (brojeva, podataka) i njihove odnose s pomoću Vennovih dijagrama (presjek, unija, podskup).
- Određuje broj elemenata skupa. Prepoznaje prazan skup.
- Koristi se matematičkim simbolima u zapisu skupova i njihovih odnosa.
- Skupovnim zapisom prikazuje rješenja jednostavne nejednadžbe u skupu prirodnih brojeva s nulom.

Skup je osnovni matematički pojam i kao takav se ne definira. Intuitivno ga možemo opisati kao kolekciju objekata koji zajedno čine cjelinu. Postoje konačni i beskonačni skupovi. Beskonačne skupove dijelimo na prebrojive i neprebrojive.

Konačne skupove određujemo navođenjem njihovih elemenata unutar vitičastih zagrada.
Primjer 1: *Skup jednoznamenkastih prirodnih brojeva zapisat ćemo ovako:*
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Tvrdnju da je broj 1 element skupa S možemo zapisati simbolima na sljedeći način: $1 \in S$. Nadalje, možemo simbolima zapisati i kada neki element nije element zadanog skupa. Primjerice, $10 \notin S$.
Skup koji nema niti jedan element naziva se prazan skup. Oznake za prazan skup: $\emptyset$ *i* $\{\}$.

Kada skup ima velik broj elemenata, najčešće nećemo zapisati taj skup navođenjem svih njegovih elemenata, već ćemo koristiti simbol “. . . “ i navest ćemo samo neke elemente tog skupa na način da iz zapisa bude jasno koji elementi skupa nisu navedeni u zapisu.
Primjer 2: *Skup svih parnih prirodnih brojeva manjih od 200 zapisat ćemo ovako:*
$\{\, 2, 4, 6, 8, \ldots, 198\}$.

Na sličan način možemo zapisati i neke beskonačne skupove brojeva.
Primjer 3: *Skup prirodnih brojeva možemo zapisati ovako:* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Još jedan način na koji možemo zapisati skup, koji je čest kod zadavanja beskonačnih skupova, je navođenjem karakterističnog svojstva koje imaju svi elementi toga skupa.
Primjer 4: *Skup rješenja nejednadžbe $x + 2 \geq 3$ možemo zapisati na sljedeći način:* $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$.

Skup A je podskup skupa B ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B. Pišemo: $A \subseteq B$. Tada je skup B nadskup skupa A. Pišemo $B \supseteq A$.

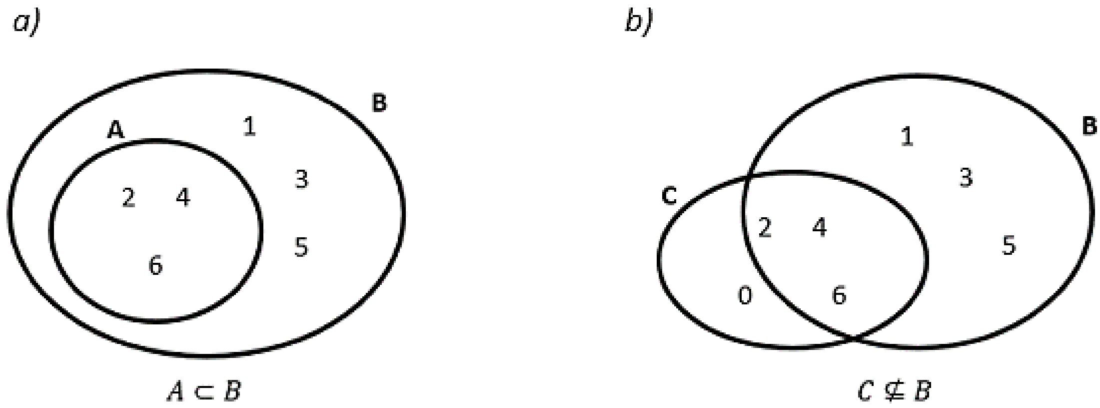
Dakle, ako postoji barem jedan element x iz skupa A koji nije element skupa B, tada skup A nije podskup skupa B. Pišemo: $A \nsubseteq B$. Nadalje, ako je $A \subseteq B$ i postoji barem jedan element y iz skupa B koji nije element skupa A, tada je skup A pravi podskup skupa B. Pišemo: $A \subset B$. Skupovi A *i* B su jednaki ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$*,* Pišemo: $A = B$.

Kao što je navedeno u Kurikulumu, u petom razredu odnose među skupovima najčešće prikazujemo Vennovim dijagramima. U nastavku su dani primjeri odnosa među skupovima koji su prikazani Vennovim dijagramima.

Primjer 5: *Neka je* $A = \{2, 4, 6\}$*,* $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *i* $C = \{0, 2, 4, 6\}$*. Tada je:*

a) $A \subset B$*,*
b) $C \nsubseteq B$*,*

što je prikazano na Slici 3.1. Vennovim dijagramima.



Slika 3.1: Prikaz podskupovnosti Vennovim dijagramom

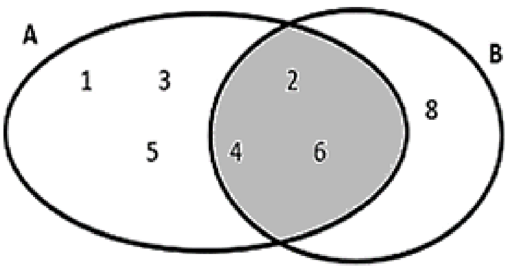
Presjek skupova A i B je skup $A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}$. Ako je $A \cap B = \emptyset$, kažemo da su A i B disjunktni skupovi.

Primjer 6: *Neka je* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*,* $B = \{2, 4, 6, 8\}$ *i* $C = \{1, 3, 5\}$*.*
Tada je:

a) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$*,*
b) $B \cap C = \emptyset$*.*

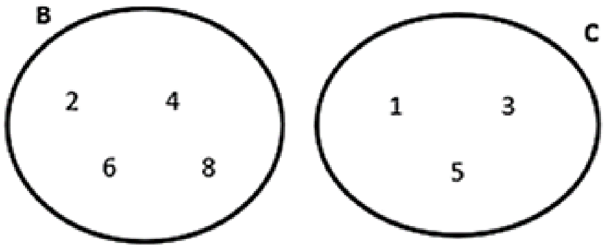
Prikažimo to Vennovim dijagramima (Slika 3.2).

a)



$A \cap B = \{2, 4, 6\}$

b)

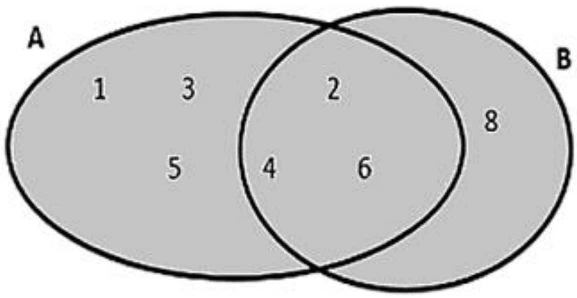


$B \cap C = \emptyset$

Slika 3.2 a) Prikaz presjeka Vennovim dijagramom
Slika 3.3 b) Prikaz disjunktnih skupova Vennovim dijagramom

Unija skupova A i B je skup $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} := \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A} \vee \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$.

Primjer 7: *Neka je* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. *Tada je* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$. *Prikažimo to Vennovim dijagramom (Slika 3.3).*



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

Slika 3.4: Prikaz unije Vennovim dijagramom

Grafovi i bojenje grafova

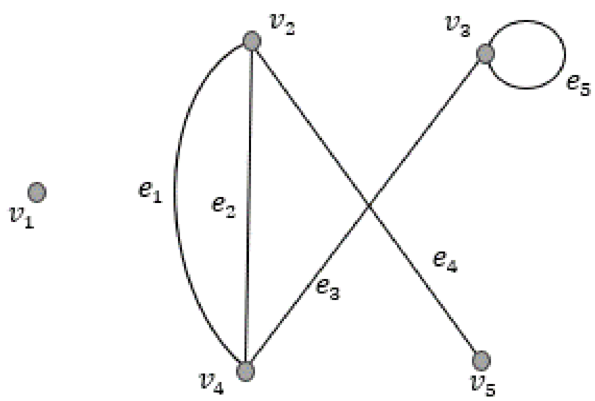
Premda se u Kurikulumu ne pojavljuju grafovi, moguće je učenike upoznati s nekim pojmovima iz teorije grafova, kao što je to napravljeno u radionici „Koliko boja je potrebno?“. Naravno, poznavanje tih pojmova nećemo naknadno provjeravati, s obzirom da to nije predviđeno Kurikulumom. U nastavku ćemo navesti neke osnovne pojmove i tvrdnje iz teorije grafova koji će se koristiti na radionici te koji će služiti nastavnicima u razumijevanju problema bojenja karte kako bi oni što uspješnije proveli radionicu s učenicima.

Grafovi – osnovni pojmovi

Graf G je struktura koja se sastoji od skupa $V(G)$, čiji su elementi vrhovi grafa G, te skupa $E(G)$, čiji su elementi bridovi grafa G, a svaki brid $e \in E(G)$ spaja dva vrha $u, v \in V(G)$ koji se zovu krajevi od e.

Graf možemo prikazati u ravnini. Pri tome, vrhove prikazujemo točkama, a bridove dužinama ili zakrivljenim crtama.

Primjer 1: *Prikažimo u ravnini jedan graf G čiji su vrhovi V(G) = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5}, te bridovi E(G) = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}.* (*Slika 3.4*).



Slika 3.5: Graf G

Neka su $u, v \in V(G)$ vrhovi grafa G, a $e \in E(G)$ je brid grafa G. Ako brid e spaja vrhove u i v, kažemo da su oni incidentni s bridom e, a vrhovi u i v su susjedni. Dva brida iz skupa $E(G)$ su susjedna ako su incidentna s istim vrhom.

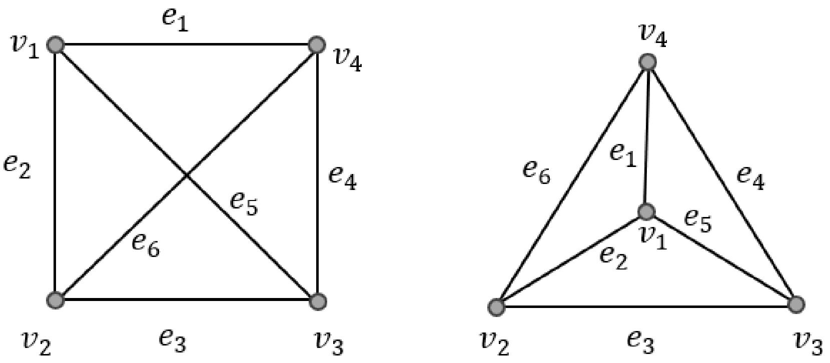
Brid koji je incidentan samo s jednim vrhom zove se *petlja*. Ako nikoja dva brida grafa G koji ne sadrži petlju ne spajaju isti par vrhova, kažemo da je graf G jednostavan. Graf G iz Primjera 1 nije jednostavan, sadrži jednu petlju - brid e_5, a bridovi e_1 i e_2 povezuju isti par vrhova v_2 i v_4.

Budući da je tema radionice bojenje karata, u nastavku ćemo opisati posebnu skupinu grafova, a to su planarni grafovi. Planarne grafove vežemo uz karte jer za svaku kartu možemo nacrtati odgovarajuću planarni graf, što će biti detaljnije objašnjeno nakon što se upoznamo s pojmom planarnog grafa i opišemo bojenje grafova.

Kažemo da je graf planaran ako se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.

Graf koji nije planaran naziva se neplanaran. Ukoliko je graf nacrtan tako da mu se bridovi koji nisu susjedni sijeku, ne slijedi nužno da graf nije planaran. Neke grafove, koji su nacrtani tako da im se bridovi koji nisu susjedni sijeku, moguće je nacrtati i na način da im se ti bridovi ne sijeku.

Primjer 2: *Na Slici 3.5 nacrtan je isti graf G_1, sa skupom vrhova $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ te skupom bridova $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, na dva načina. Na prvoj slici graf je nacrtan tako da mu se neki bridovi koji nisu susjedni sijeku, a zatim tako da mu se bridovi koji nisu susjedni ne sijeku.*



Slika 3.6: Dva prikaza grafa G_1

Budući da je graf na *Slici 3.5* moguće nacrtati na način da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima (desni prikaz), možemo zaključiti da je taj graf planaran graf.

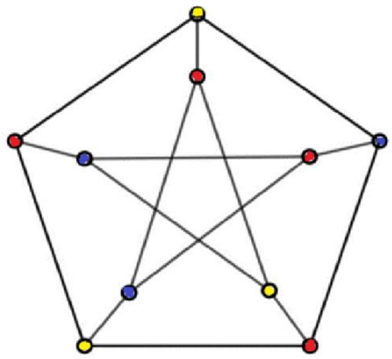
Bojenje grafova

Bojenje grafova odnosi se na označavanje elemenata grafa bojama uz neka ograničenja, ovisno o problemu. Možemo bojiti vrhove i bridove grafa. U nastavku ćemo detaljnije opisati bojenje vrhova jer se na bojenju vrhova temelji naša radionica.

Neka je G graf, $v \in V(G)$ vrh od G, a $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj. Tada je k - bojenje vrhova grafa funkcija $f: V(G) \to C$ koja svakom vrhu pridružuje jednu od točno k različitih boja. Ako je $f(v) = i$ kažemo da je vrh v obojen bojom i.
Pravilno bojenje vrhova grafa je bojenje vrhova grafa tako da su susjedni vrhovi različito obojeni.

Primijetimo da grafove s petljama nije moguće pravilno obojiti budući da je vrh s petljom sam sebi susjedan. U nastavku ćemo razmatrati samo grafove bez petlji, jer ćemo jedino takve grafove koristiti u našoj radionici.

Primjer 3: *Primjer pravilnog 3 – bojenja*
U ovom primjeru prikazano je pravilno 3 – bojenje Petersenovog grafa (Slika 3.6). Bojenje ovog grafa je ujedno i jedan od zadataka iz naše radionice.



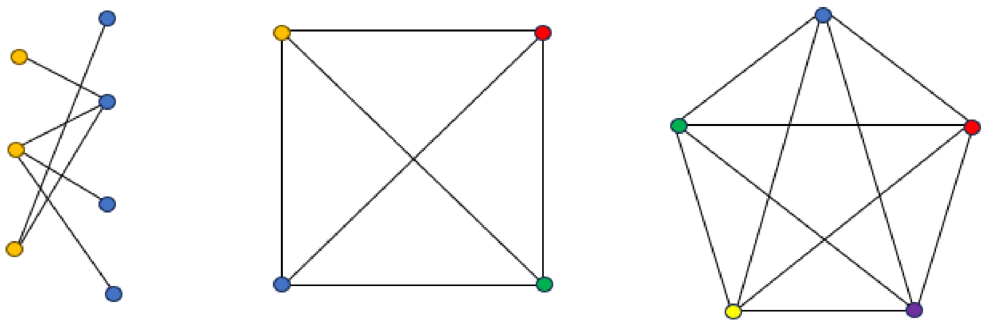
Slika 3.7: Pravilno 3- bojenje

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Kažemo da je graf G k - obojiv ako dopušta pravilno k - bojenje.

Svaki graf G s n vrhova je n – obojiv, odnosno svaki vrh grafa G možemo obojiti drugom bojom. Međutim, kod bojenja vrhova grafa, najčešće pokušavamo pronaći najmanji mogući broj boja kojima je moguće pravilno obojiti zadani graf. Taj broj nazivamo kromatski broj.

Kromatski broj grafa G je najmanji broj različitih boja potrebnih za pravilno bojenje grafa G, a označavamo ga sa $\chi(G)$. Ako je graf G k - obojiv, ali nije $(k-1)$ - obojiv, kažemo da je graf G k - kromatski.
Primjerice, kromatski broj grafa iz prethodnog primjera je 3.

Primjer 4: Na *Slici 3.7* prikazano je pravilno 2 – bojenje, pravilno 4-bojenje i pravilno 5-bojenje grafova. Nadalje, kromatski brojevi grafova sa slike *3.7* su redom 2, 4 i 5.



Slika 3.8: Primjeri pravilnog bojenja

Kromatski broj grafa nije uvijek lako odrediti. Kako bismo odredili kromatski broj grafa trebamo pronaći pravilno k – bojenje zadanog grafa te dokazati da za pravilno bojenje tog grafa trebamo barem k boja, odnosno da taj graf nije moguće pravilno obojiti s manje od k boja.

U nastavku ćemo vidjeti da za jednu skupinu grafova znamo maksimalan broj boja potrebnih za pravilno bojenje. Naime, za bojenje planarnih grafova potrebne su nam najviše četiri boje, što je iskazano Teoremom 1.

Teorem 1: *(Teorem o četiri boje)*
Svaki planaran graf je 4-obojiv.

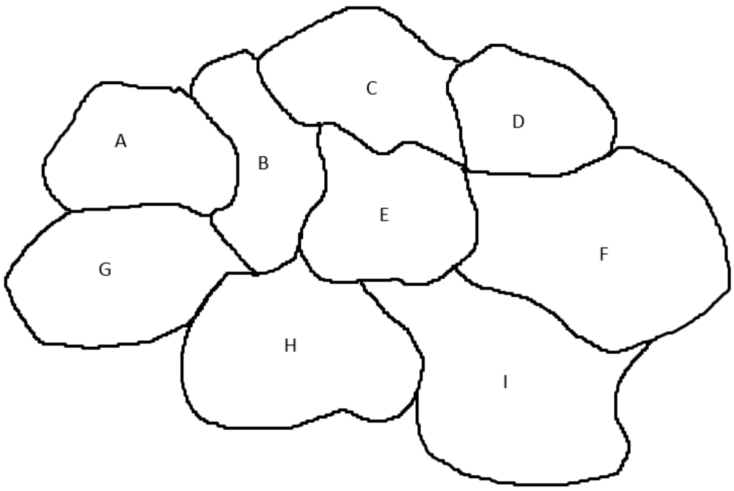
Bojenje karte

Problem četiriju boja postavio je britanski matematičar Francis Guthrie 1852. godine, kada je bio na postdiplomskom studiju u Londonu. On je otkrio da se karta Engleske podijeljena na grofovije može obojiti s najviše četiri boje, a da pri tome susjedne grofovije nisu obojene istom bojom. Zanimalo ga je vrijedi li to općenito, odnosno može li se bilo koja karta na taj način obojiti s četiri boje. Njegov brat Frederic zamolio je profesora Augustusa De Morgana da riješi problem, ali nije uspio. Međutim, De Morgan je slao upite o problemu mnogim drugim matematičarima te je jednom prilikom anonimno objavio problem i u književnom časopisu Athenaeum. Na taj način problem je postao svjetski poznat među matematičarima. Ubrzo nakon De Morganove smrti problem je na neko vrijeme pao u zaborav te je ostao neriješen desetljećima sve dok ga student matematike Arthur Cayley nije ponovno oživio 1878. godine na sastanku Londonskog matematičkog društva. Matematičari su pokušavali dokazati Teorem o četiri boje koristeći različite metode, uključujući teoriju grafova. Odvjetnik i zaljubljenik u matematiku Alfred Kempe, koji je bio prisutan na sastanku Londonskog matematičkog društva kada je Cayley predstavio problem, je 1879. godine tvrdio da je dokazao teorem, ali se kasnije pokazalo da njegov dokaz sadrži grešku. Trebalo je 11 godina da se ta greška otkrije, a taj dokaz je ostao jedan od najpoznatijih matematičkih pogrešnih dokaza. U to vrijeme započeo je brzi razvoj računala što su iskoristili matematičar Wolfgang Haken te matematičari i programeri Kenneth Appel i John Koch koji su godinama pokušavali dokazati teorem. Na kraju su uspjeli 1976. dokazati teorem pomoću računala Koristeći Kempeove tvrdnje. 1977. sva trojica objavljuju dokaz u časopisu Illinois Journal of Mathematics. Dokaz nije bio lako prihvaćen budući da su mnogi smatrali da se dokaz dobiven pomoću računala ne može prihvatiti kao pravi dokaz.

Dakle, kao što smo vidjeli iz priče o poznatom problemu bojenja karte, cilj je obojiti regije na karti tako da susjedne regije ne budu obojene istom bojom. U nastavku ćemo detaljnije opisati problem, no za početak ćemo navesti što bi se u ovom slučaju uopće podrazumijevalo pod pojmom karte te što znači da su regije susjedne.

Karta je cjelina koja se sastoji od međusobno povezanih regija. Regije su susjedne ako se dodiruju linijom, ali ne i ako se dodiruju samo u jednoj točki. U sljedećem primjeru prikazana je jedna karta.

Primjer 5: *Na Slici 3.8 prikazan je primjer jedne karte s 9 regija, na kojoj su regije imenovane velikim tiskanim slovima. Skup regija od kojih je sastavljena karta je {A, B, C, D, E, F, G, H, I}. Regija E ima 5 susjednih regija, a to su regije C, B, H, I i F. Regije E i D nisu susjedne jer se dodiruju samo u jednoj točki.*

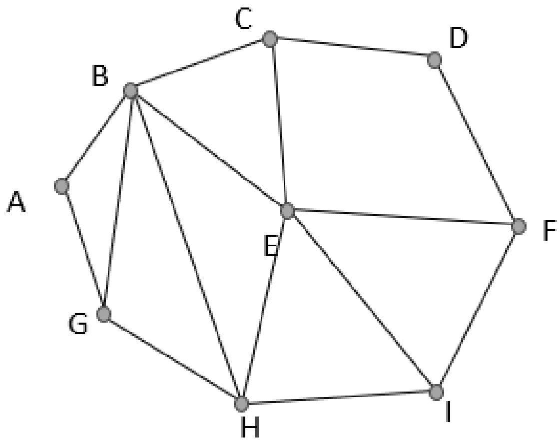


Slika 3.9: Primjer karte

Bojenje karata je pravilno ako su susjedne regije obojene različitom bojom.

Za svaku kartu moguće je nacrtati odgovarajući planarni graf. Planarni graf koji odgovara zadanoj karti dobit ćemo tako da regije zamijenimo vrhovima, a dva vrha spojimo bridom ako su regije koje odgovaraju vrhovima susjedne.

Primjer 6: *Nacrtajmo graf koji odgovara karti iz Primjera 5 (Slika 3.9).*



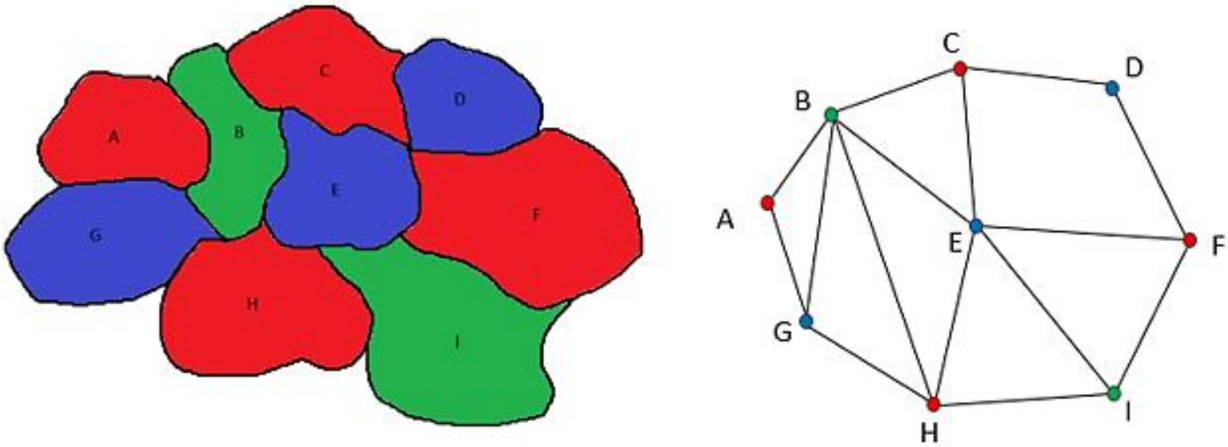
Slika 3.10: Graf koji odgovara karti iz primjera 6

Budući da za svaku kartu možemo nacrtati odgovarajući planarni graf, Teorem o četiri boje možemo iskazati i ovako:

Teorem 2: *Svaka karta može se obojiti najviše četirima bojama tako da su susjedne države obojene različito.*

Napomena: Ovaj teorem ćemo koristiti prilikom bojenja karata, odnosno, za bojenje karata ćemo koristiti najviše četiri boje.

Primjer 7: *Obojimo kartu iz primjera 5 i njezin ogovarajući graf (Slika 3.10).*



Slika 3.11: Pravilno obojena karta i njezin odgovarajući graf

U ovom primjeru vidjeli smo da je neke karte moguće obojiti i s manje od 4 boje (u ovom slučaju sa 3 boje), međutim, niti za jednu kartu neće nam trebati više od četiri boje. Naime, prema Teoremu 2, za pravilno bojenje bilo koje karte potrebne su nam najviše četiri boje.

Napomena: Učenicima se, radi jednostavnosti, tijekom radionice ne spominje pojam planarnog grafa. Budući da je za svaku kartu moguće nacrtati odgovarajući planarni graf, svi grafovi koje učenici nacrtaju tijekom predviđenih aktivnosti, kao i oni koji su im zadani, su planarni.

3.2. Opis radionice

Radionica „Koliko boja je potrebno?“ osmišljena je za učenike od petog do osmog razreda osnovne škole. Radionica je osmišljena u obliku grupnog rada, odnosno učenici rade u grupi od 3 do 5 učenika. Tema radionice je bojenje grafova i primjena teorema o četiri boje. Očekivano trajanje radionice je sat vremena (60 minuta).

Cilj radionice

Cilj ove radionice je povećati interes za matematiku te poticati aktivno učenje u nastavi matematike. Također, cilj je ponoviti (ili usvojiti) pojam skupa i odnose među skupovima te ponoviti osnovne pojmove o mnogokutima.

Ishodi učenja

Kao što smo već naveli, učenici se u osnovnoj školi ne susreću s pojmom grafa pa niti s teoremom o četiri boje te usvajanje tih sadržaja nije predviđeno Kurikulumom. Međutim, tijekom radionice će se ponoviti pojmovi vezani uz skupove i odnose među skupovima, s kojima se učenici upoznaju u petom razredu osnovne škole. Učenici će kroz nekoliko aktivnosti ponoviti određivanje elemenata nekog skupa te određivanje unije i presjeka skupova. Prema tome, tijekom radionice ostvaruje se ishod za peti razred osnovne škole koji je propisan Kurikulumom:

- MAT OŠ B.5.2. Učenik prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema. (Kurikulum, str. 58)

Također, tijekom određenih aktivnosti, u kojima se pojavljuju karte s motivima geometrijskih likova, voditelj/voditeljica radionice s učenicima može ponoviti neke pojmove vezane uz geometrijske likove. Primjerice, u jednoj od aktivnosti učenici imaju zadatak obojiti kartu podijeljenu na regije koje su dane u obliku mnogokuta. U završnoj aktivnosti učenici crtaju vlastitu kartu podijeljenu na regije u obliku mnogokuta, koje nakon toga treba pravilno obojiti. Navedene aktivnosti pridonose ostvarivanju sljedećih ishoda:

- MAT OŠ C.5.2. Učenik opisuje i crta/konstruira geometrijske likove te stvara motive koristeći se njima. (Kurikulum, str. 59)
- MAT OŠ C.6.2. Učenik konstruira trokute, analizira njihova svojstva i odnose. (Kurikulum, str. 70)
- MAT OŠ C.6.3. Učenik konstruira četverokute, analizira njihova svojstva i odnose. (Kurikulum, str. 71)
- MAT OŠ C.7.1. Učenik crta i konstruira mnogokute i koristi se njima pri stvaranju složenijih geometrijskih motiva. (Kurikulum, str. 81)

Osim prethodno navedenih ishoda iz Kurikuluma, ostvaruju se i neki ishodi koji nisu predviđeni u Kurikulumu niti za osnovnu niti za srednju školu, već su vezani uz grafove. Dakle, nakon sudjelovanja u radionici učenici će moći:

- nacrtati i opisati graf
- odrediti i simbolički zapisati vrhove i bridove grafa
- izreći teorem o četiri boje

Nadalje, učenici ovim aktivnostima razvijaju sposobnost rješavanja problema te logičkog zaključivanja.

Predznanje učenika

Budući da je radionica namijenjena za učenike od petog do osmog razreda, ne očekuje se da će učenici imati predznanje o grafovima. Međutim, učenici bi trebali biti upoznati s pojmovima

vezanim uz skupove, koje će ponoviti sudjelovanjem na ovoj radionici. Učenici već od prvog razreda intuitivno spoznaju pojam skupa kroz zadatke prebrojavanja, uspoređivanja, zbrajanja i oduzimanja prirodnih brojeva, u kojima se često pojavljuju slikovni prikazi skupa nekih predmeta. U petom razredu učenici se upoznaju s pojmom skupa te unije i presjeka skupova koji će se kroz ovu radionicu ponoviti te potencijalno usvojiti na višoj razini budući da će biti korištena sva tri načina prikaza prema Bruneru. Dakle, ukoliko se radionica izvodi s učenicima petog razreda, to je najbolje učiniti nakon usvajanja sadržaja vezanih uz skupove. Nije preporučljivo izvoditi radionicu u sklopu uvođenja pojma skupa jer bi za učenike petog razreda to bilo previše novih pojmova odjednom.
Također, učenici će kroz ovu radionicu primjenjivati znanje koje imaju o geometrijskim likovima. Učenici se s geometrijskim likovima postepeno upoznaju već od prvog razreda osnovne škole te se svake godine to znanje nadograđuje, baš kao što je Bruner to predložio sa svojim spiralnim kurikulumom. Neovisno o razredu koji učenici pohađaju, oni će moći koristiti znanja o mnogokutima koje su do tada usvojili. Tako će, primjerice, u zadatku u kojem moraju nacrtati kartu sastavljenu od geometrijskih likova, učenici viših razreda znati nacrtati više različitih geometrijskih likova, ali će svi učenici uspjeti odraditi zadatak bez obzira na predznanje.

Korelacija s drugim predmetima

Tijekom ove radionice, u jednom od zadataka, učenici se susreću s kartom Hrvatske podijeljenom po županijama, što je u korelaciji s predmetom Geografija. Nadalje, učenici na ovoj radionici boje i crtaju te se tako kroz radionicu ostvaruje korelacija s predmetom Likovna kultura.

Radionica u nastavi matematike

Radionica je prikladna za izvođenje na redovnoj nastavi u petom razredu nakon usvajanja sadržaja vezanih uz skupove jer ovom aktivnošću učenici ponavljaju pojam skupa i odnose među skupovima. Također, radionica se može izvoditi tijekom nastave i u petom, šestom, sedmom ili osmom razredu kada se uvode sadržaji vezani uz mnogokute jer ovom aktivnošću učenici usvajaju osnovne pojmove o mnogokutima te stječu vještinu crtanja mnogokuta. Nadalje, radionica se može izvoditi i na dodatnoj nastavi ili u sklopu izvannastavnih aktivnosti u svrhu popularizacije matematike. Primjerena je za učenike od petog do osmog razreda jer tema radionice nije direktno vezana za sadržaje iz osnovne škole pa se radionica može izvoditi s učenicima u bilo kojem trenutku, ako im se sadržaji, koji se usvajaju tijekom radionice, prezentiraju na odgovarajući način. Iako se radi o sadržaju koje nije predviđen za usvajanje u osnovnoj i srednjoj školi, prema pretpostavkama Brunerove teorije, učenici mogu aktivno sudjelovati u radionici jer je osmišljena poštujući ideju teorije kognitivnog rasta. Bojenje grafova i bojenje karte je intuitivan problem koji je lako mlađim učenicima prikazati na njima razumljiv način, pomoću konkreta.

Materijali za rad

Za radionicu su potrebne olovke i bojice, perlice u nekoliko različitih boja (*Slika 3.11*), ravnala i trokuti, karta Hrvatske podijeljena na županije (po jedna za svakog sudionika radionice) te radni listić sa zadacima. Također, potrebno je računalo i projektor te PowerPoint prezentacija.

Slika 3.12: Primjer perlica

Napomena: Umjesto perlica se za radionicu mogu koristiti i lego kockice, figurice iz nekih društvenih igara i slično. Bitno je samo da figurice budu u nekoliko različitih boja. Potrebno je imati figurice u više od četiri boje kako bi učenici sami zaključili da su im dovoljne samo četiri boje za obojiti zadanu kartu.

Tijek izvođenja radionice

Dolaskom u učionicu, voditeljica radionice priprema sve za rad. Budući da je radionica osmišljena kao grupni rad, voditeljica priprema klupe na odgovarajući način ta na njih stavlja materijale potrebne za rad – bojice, šiljilo i perlice. Po dolasku učenika u učionicu, voditeljica dijeli učenike u grupe od 3 do 5 učenika (ovisno o broju sudionika). Nakon grupiranja učenika, voditeljica započinje radionicu motivacijskim primjerom.

Aktivnost 1: Motivacijski primjer

Voditeljica radionice dijeli učenicima radne listiće na kojima se nalazi nekoliko zadataka koje će učenici rješavati tijekom radionice. Na prvoj stranici radnih listića nalazi se slijepa karta Hrvatske podijeljena po županijama (*Slika 3.12*).

Slika 3.13: Karta Hrvatske podijeljena po županijama [7]

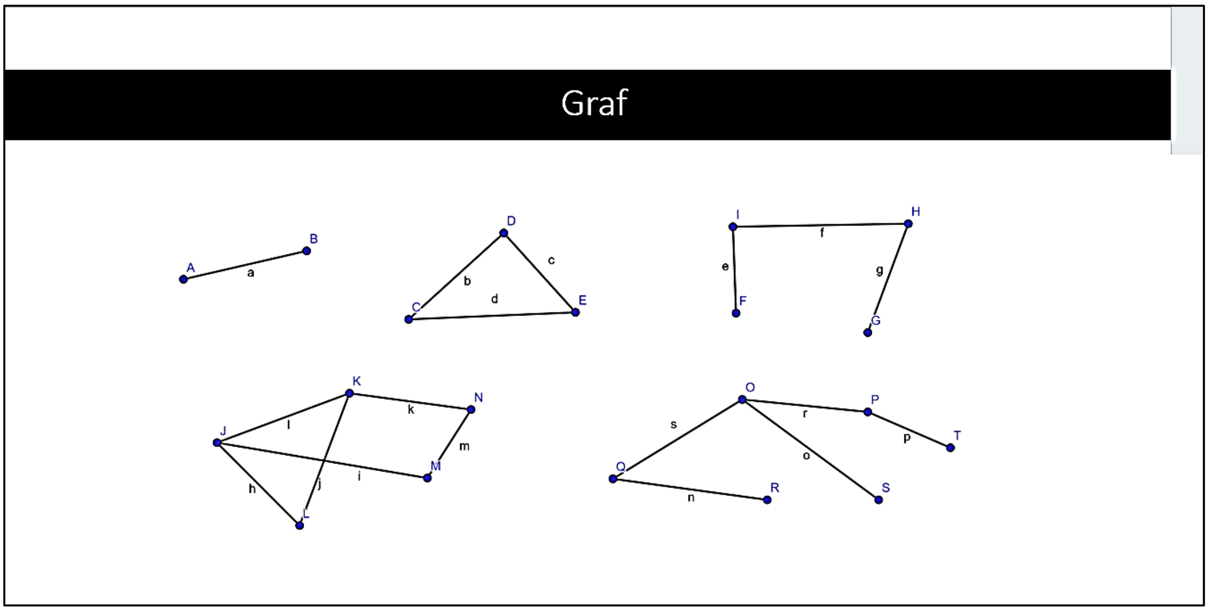
Voditeljica radionice zadaje učenicima prvi zadatak, a to je da oboje kartu Hrvatske na način da susjedne županije nisu obojene istom bojom, a da pritom koriste što manje boja. Ovaj zadatak učenici rješavaju samostalno. Voditeljica daje učenicima uputu da se prilikom bojenja služe perlicama, odnosno da prvo perlice poslože po karti tako da na svaku županiju stave jednu perlicu, a da pritom na susjednim županijama budu perlice različitih boja. Nakon što poslože perlice na odgovarajući način, učenici mogu obojiti kartu. Nakon što učenici oboje kartu, voditeljica ih pita koliko različitih boja su koristili za bojenje te raspravljaju o rezultatima. Očekuje se da će učenici obojiti kartu Hrvatske s četiri boje. Jedno od mogućih rješenja je prikazano na *Slici 3.13*.

Slika 3.14: Karta Hrvatske obojena sa četiri boje

Nakon uvodnog primjera, voditeljica radionice govori učenicima da će u ovoj radionici bojiti karte na sličan način, te da će svako bojenje, u kojem susjedne regije nisu obojene istom bojom, nazivati pravilno bojenje. Također, govori im da je cilj radionice otkriti koliko je najmanje boja potrebno da bi pravilno obojili bilo koju kartu.

Aktivnost 2: Pojam grafa

Budući da su u prošlom primjeru učenici zaključili da mogu kartu Hrvatske podijeljenu po županijama pravilno obojiti s najmanje četiri boje, voditeljica radionice pita učenike misle li da postoji karta koju mogu pravilno obojiti s manje od četiri boje, ali i postoji li karta za koju je potrebno više od četiri boje kako bi se pravilno obojila. Nakon kratke rasprave o tome s učenicima, voditeljica radionice govori im da će, kao što i sam naziv radionice govori, danas naučiti koliko je najviše boja potrebno da bi se pravilno obojila bilo koja karta. Nadalje, voditeljica govori učenicima da će im u bojenju karata pomoći grafovi jer se svaki ovakav tip grafa koji će upoznati na radionici može obojiti sa četiri boje, pa će tijekom radionice pokušati otkriti mogu li kako to saznanje o grafovima povezati s kartama. Voditeljica pita učenike jesu li se ikada susreli s grafovima ili čuli za pojam grafa. Očekuje se da učenici nisu upoznati s pojmom grafa, pa nastavnica učenicima govori da će danas upoznati taj pojam. Nadalje, voditeljica upoznaje učenike s pojmom grafa. Na PowerPoint prezentaciji prikazuje nekoliko primjera grafova te govori učenicima da je graf struktura koja se sastoji od vrhova i bridova, pri čemu svaki brid spaja dva vrha grafa. Voditeljica prilikom objašnjavanja učenicima na slikama s prezentacije pokazuje što su vrhovi, a što brodovi. U sklopu ove radionice nije potrebno previše vremena posvetiti definiranju grafa, niti učenici moraju znati točnu definiciju grafa, već je bitno da učenici intuitivno upoznaju taj pojam te da na slici znaju prepoznati graf. Na *Slici 3.14* prikazan je slajd s primjerima grafova na kojem voditeljica objašnjava učenicima što su to grafovi.



Slika 3.15: Primjeri grafova

Zatim voditeljica pita učenike da odrede skupove bridova te skupove vrhova grafova sa slike. Učenici ovaj zadatak rješavaju u grupi te nakon toga rješenje provjeravaju s voditeljicom.

Rješenje:
Skupovi vrhova: $V_1 = \{A,\ B\}$, $V_2 = \{C,\ D,\ E\}$, $V_3 = \{F,\ G,\ H,\ I\}$, $V_4 = \{J,\ K,\ L,\ M,\ N\}$, $V_5 = \{O,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T\}$.

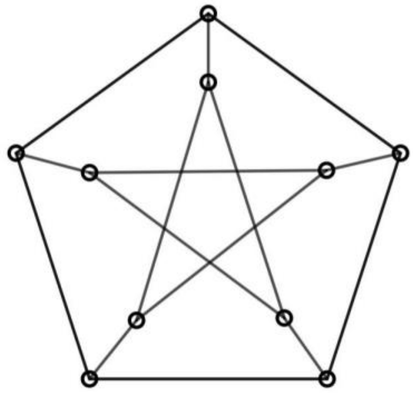
Skupovi bridova: $B_1 = \{a\}$, $B_2 = \{b,\ c,\ d\}$, $B_3 = \{e,\ f,\ g\}$, $B_4 = \{h,\ i,\ j,\ k,\ l,\ m\}$, $B_5 = \{n,\ o,\ p,\ r,\ s\}$.

Voditeljica pita učenike što bi bio presjek skupova V_1i B_1. Učenici odgovaraju da je presjek prazan skup i objašnjavaju da je to zato što je V_1 skup vrhova, a B_1 skup bridova. Zatim voditeljica pita učenike što bi bila unija ta dva skupa, a oni odgovaraju da je to skup svih vrhova i bridova prvog grafa.

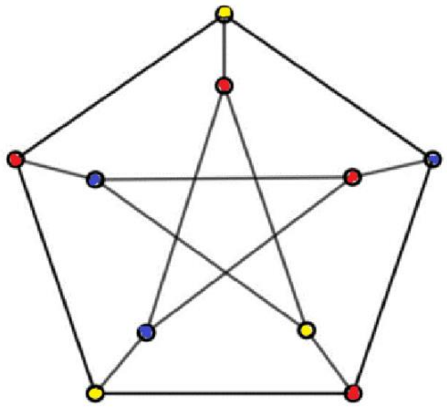
Aktivnost 3: Bojenje grafa

Voditeljica najavljuje učenicima da će se sada baviti bojenjem grafova te im govori da je pravilno bojenje grafa zapravo bojenje vrhova grafa na način da vrhovi, koji su povezani bridom, ne smiju biti obojeni istom bojom. Prema tome, voditeljica govori učenicima da u grupi pokušaju riješiti drugi zadatak na radnom listiću. Voditeljica daje učenicima uputu da se pri rješavanju zadatka služe perlicama.

Zadatak 2: Pokušajte sljedeći graf pravilno obojiti sa tri boje.



Jedno moguće rješenje je prikazano na *Slici 3.15*.

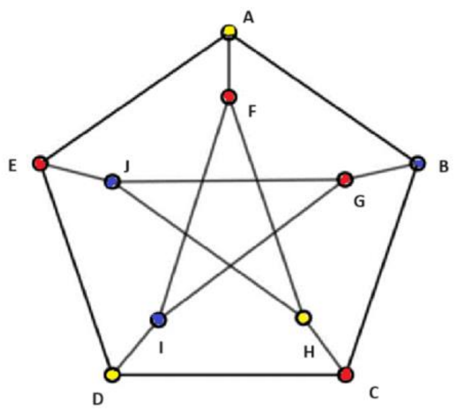


Slika 3.16: Rješenje 2. zadatka

Nakon što učenici oboje svoje grafove, voditeljica govori učenicima da je iz ovog zadatka vidljivo da postoje i grafovi koje je moguće pravilno obojiti i s manje od četiri boje.

Nadalje, voditeljica učenicima zadaje zadatak da označe vrhove slovima te da odrede skupove vrhova obojene istom bojom.

Rješenje:



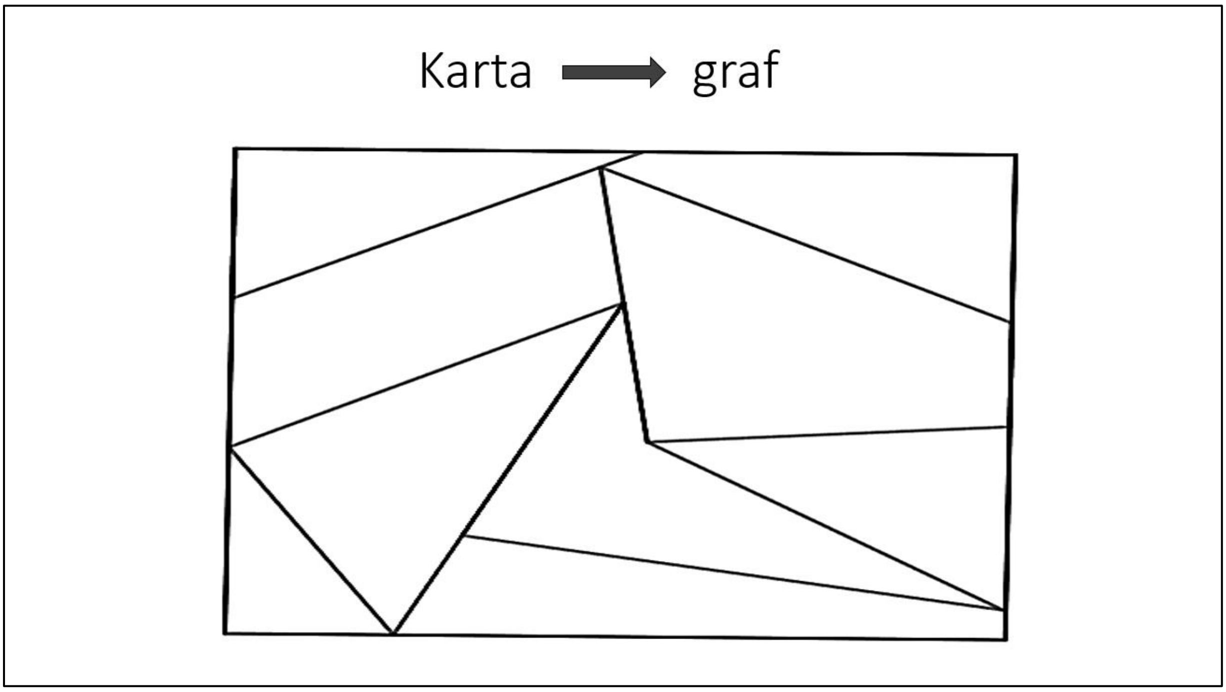
Skup vrhova obojenih crvenom bojom: $V_c = \{C, E, F, G\}$.

Skup vrhova obojenih žutim bojom: $V_ž = \{A, D, H\}$.

Skup vrhova obojenih plavom bojom: $V_p = \{B, I, J\}$.

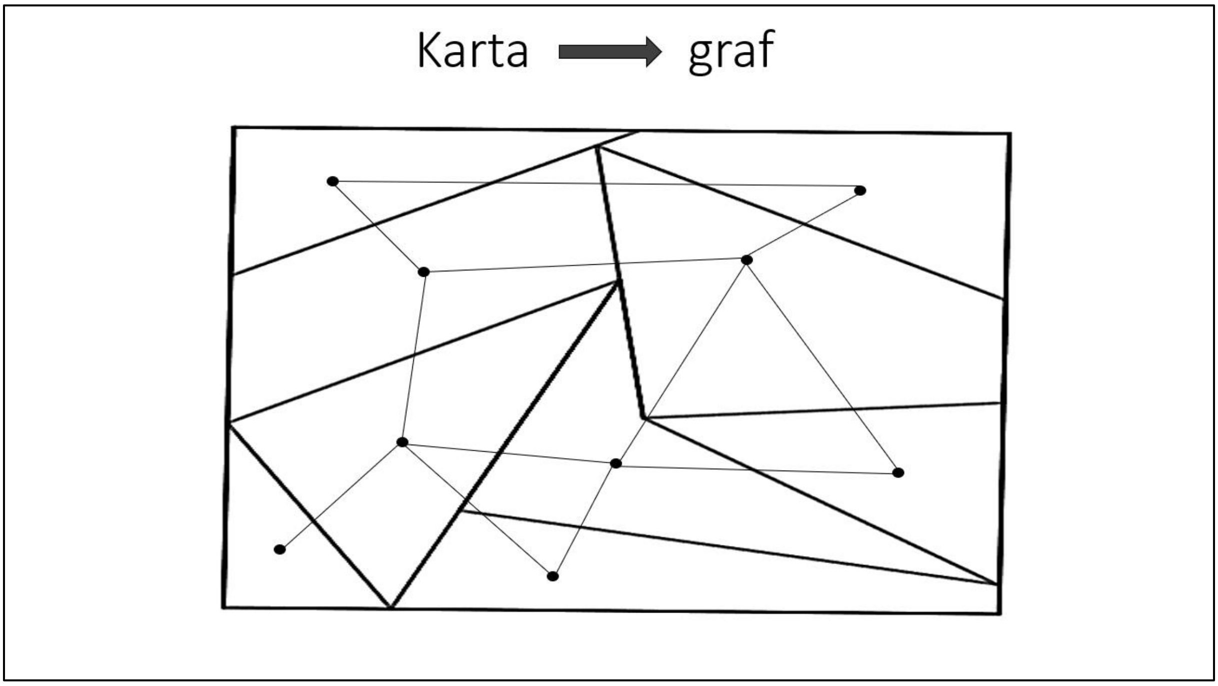
Aktivnost 4: Crtanje grafa

Voditeljica govori učenicima da im bojenje grafa može pomoći u bojenju karata te da će sada vidjeti koja je poveznica između grafa i karte. Na PowerPoint prezentaciji prikazuje slajd na kojem se nalazi primjer karte koju treba pravilno obojiti. Slajd je prikazan na *Slici 3.16.*



Slika 3.17: Primjer karte na prezentaciji

Voditeljica pita učenike što bi na karti predstavljalo bridove, a što vrhove grafa. Očekuje se da će učenici zaključiti da vrhovi grafa predstavljaju regije na karti, a bridovi grafa spajaju vrhove koji odgovaraju susjednim regijama. Moguće je da će učenici prema slici zaključiti da bi bridovi mogli odgovarati granicama između regija, no odgovarajućim potpitanjima voditeljica radionice usmjerava učenike do točnog zaključka. Učenici bi trebali bez većih poteškoća zaključiti da regije na karti možemo predstaviti vrhovima grafa budući da su se prilikom prethodnih zadataka koristili perlice kod bojenja, pa su tako u jednom zadatku perlice predstavljale regije na karti, a u drugom su perlice predstavljale vrhove grafa. Nakon što učenici zaključe za vrhovi grafa odgovaraju regijama na karti, voditeljica pita učenike čime su bili povezani susjedni vrhovi grafa, na što bi oni trebali odgovoriti da su susjedni vrhovi u grafu povezani bridovima. Prema tome, voditeljica pita učenike koje vrhove bi onda spajali bridovima u slučaju kada crtaju graf koji odgovara karti, na što bi učenici trebali odgovarati da će bridovima spajati one vrhove koji odgovaraju regijama koje su susjedne. Prilikom objašnjavanja učenicima kako nacrtati odgovarajući graf za zadanu kartu, voditeljica u suradnji s učenicima crta po ploči graf koji odgovara zadanoj karti. Prvo crta točke koje odgovaraju regijama na zadanoj karti. Dakle, budući da je zadana karta sastavljena od 9 regija, traženi graf će imati 9 vrhova. Nakon toga, voditeljica bridovima spaja vrhove koji odgovaraju susjednim regijama, učenici joj govore koje regije su susjedne te, prema tome, koje će vrhove spajati bridovima. Nakon toga, voditeljica prikazuje nacrtan graf i na prezentaciji. Nacrtan graf prikazan je na *Slici 3.17.*



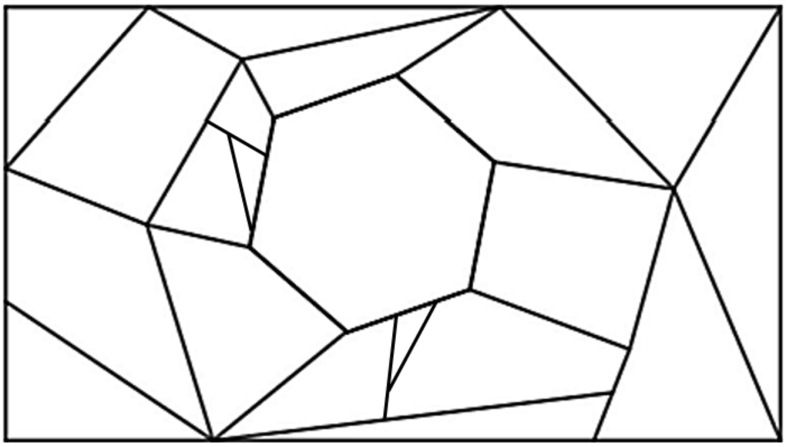
Slika 3.18: Primjer grafa na karti

Voditeljica napominje učenicima da za svaku zadanu kartu mogu na ovaj način nacrtati graf. Zatim, voditeljica pita učenike: „Što smo rekli, koliko boja će nam biti potrebno da obojimo grafove na ovoj radionici?“, na što bi učenici trebali odgovoriti da će im trebati najviše četiri boje. Nadalje, voditeljica pita učenike koliko boja će im onda biti potrebno da bi se obojila bilo koja karta. Očekuje se da će učenici zaključiti da su potrebne najviše četiri boje jer su sada vidjeli da za svaku kartu mogu nacrtati odgovarajući graf te da svaki takav graf mogu obojiti sa četiri boje.

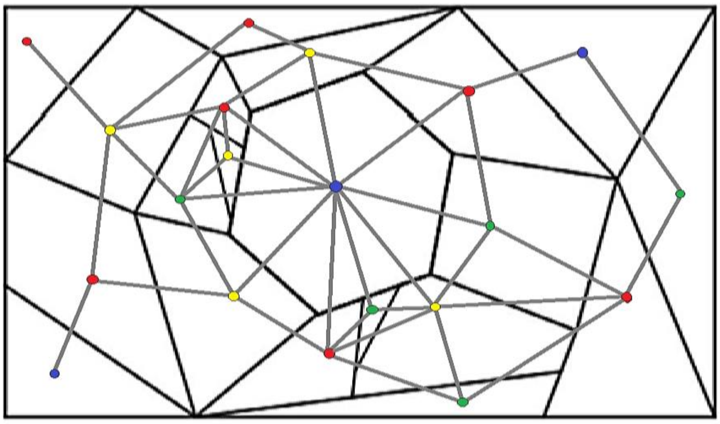
Aktivnost 5:

Nadalje, učenici dobivaju zadatak da za zadanu kartu nacrtaju odgovarajući graf te ga pravilno oboje. Učenici crtaju graf svaki na svoj radni listić i pritom se međusobno u grupi konzultiraju o rješenju. Voditeljica obilazi sve grupe te provjerava rad učenika i po potrebi im pomaže.

Zadatak 3: Nacrtajte graf koji odgovara karti na slici te ga pravilno obojite sa četiri boje.



Voditeljica daje učenicima uputu da mogu graf nacrtati na zadanoj karti te nakon toga samo obojiti vrhove grafa. Učenici se i dalje prilikom crtanja i bojenja služe perlicama kako bi lakše obojili. Jedno od mogućih rješenja zadatka je prikazano na *Slici 3.18.*



Slika 3.19: Rješenje 3. zadatka

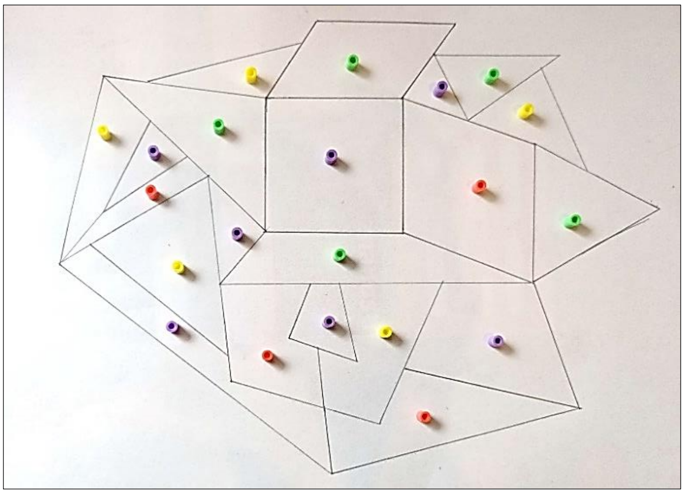
Na *Slici 3.19* prikazano je kako učenici tijekom radionice pomoću perlica rješavaju navedeni zadatak.

Slika 3.20: Korištenje perlica pri rješavanju zadatka

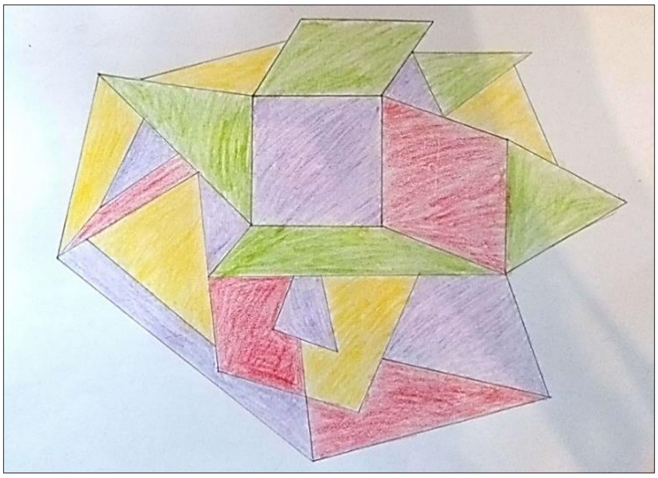
Aktivnost 6: Vlastita karta

U završnoj aktivnosti učenici izrađuju vlastitu kartu koju će trebati pravilno obojiti. Zadatak je na A4 papiru nacrtati kartu pomoću geometrijskih motiva. Voditeljica radionice govori učenicima da nacrtaju kartu čije su regije geometrijski likovi te da pokušaju nacrtati kartu tako da je potrebno što više boja za njezino bojenje. Nakon što učenici nacrtaju svoje karte, trebaju ih razmijeniti unutar grupe tako da nitko nema svoju kartu. Tada moraju kartu koju su dobili obojiti sa što manje boja. Učenici dobivaju uputu da prilikom bojenja koriste perlice te da na posebnom papiru pokušaju nacrtati odgovarajući graf za kartu koju trebaju obojiti.

Slika 3.20 i *Slika 3.21* prikazuju primjer korištenja perlica tijekom aktivnosti bojenja vlastite karte te kartu obojenu sa četiri boje.



Slika 3.21: Korištenje perlica tijekom aktivnosti 6



Slika 3.22: Karta obojena s četiri boje

Napomene i savjeti

- Dobro je imati pripremljeno još nekoliko zadataka (npr. još neke kompliciranije primjere karti i grafova za bojenje) za naprednije učenike koji će brže riješiti zadatke.
- Predviđeno trajanje radionice je 60 minuta, ali radionica se može izvesti i u jednom školskom satu ako bi se izvodila na nastavi. Učenici eventualno ne bi stigli završiti posljednji zadatak pa im se to može zadati za domaću zadaću.
- Što se tiče materijala za radionicu, učenici će koristiti bojice te im prije radionice treba napomenuti da donesu svoje bojice i šiljilo te treba imati u rezervi što više bojica kako bi učenici mogli nesmetano raditi. Također, bilo bi dobro da učenici donesu svoja ravnala i trokute kako bi ih imali dovoljno za rad.
- Nekim učenicima bojenje može postati dosadno pa se u nekim zadacima kod bojenja karata može napomenuti da ne moraju sve obojiti već mogu samo nacrtati graf i obojiti vrhove grafa. Na taj način učenici neće izgubiti interes za temu radionice unatoč tome što možda ne vole bojiti.

Radionica u okviru Brunerove teorije

Učenici se sudjelovanjem u ovoj radionici susreću s pojmom grafa, što nije predviđeno za učenike osnovne škole. Međutim, prema pretpostavkama Brunerove teorije kognitivnog rasta, učenici mogu shvatiti ovaj sadržaj ako im je on prezentirano kroz tri načina prikaza od iskustvenog preko slikovnog pa do simboličkog prikaza. Učenicima su vrhovi grafa te regije na karti prezentirani pomoću perlica te učenici na početku određuju boje vrhova grafa pomoću perlica što je, prema Bruneru, iskustveni način prikaza. Nakon toga, učenici crtaju graf na papiru i boje graf i karte prema uputstvima, što je slikovni način prikaza. Nadalje, učenici zapisuju simboličkim zapisom skup vrhova obojenih određenom bojom, što je simbolički način prikaza.

Učenici kroz ovu aktivnost također usvajaju pojam skupa i odnosa među skupovima kroz tri načina prikaza. Iskustveni prikaz elemenata skupa su perlice koje predstavljaju vrhove grafa, slikovni prikaz elemenata skupa su vrhovi grafa nacrtani na papiru, a simbolički prikaz skupa je upravo zapis skupa svih vrhova grafa navođenjem elemenata tog skupa. Na ovaj način učenici mogu steći dublje razumijevanje pojma skupa te presjeka i unije skupova jer su te pojmove ovom aktivnošću obradili na konkretnom primjeru obrađujući informacije kroz sva tri načina prikaza.

Nadalje, ova radionica je osmišljena prema konstruktivističkim načelima te načelima teorije skela jer je cilj da učenici sami otkrivaju, a voditelj radionice je tu samo da ih potiče te pomaže onoliko koliko je dovoljno da uspiju savladati zadatke. Također, slijedi i principe spiralnog kurikuluma jer je učenicima prezentiran pojam grafa, ali na način na koji će učenici taj pojam razumjeti te im nije predstavljen onaj dio teorije grafova koji im nije potreban za praćenje radionice. Prema spiralnom kurikulumu, u ovoj radionici učenicima su predstavljeni samo oni pojmovi teorije skupova koji su primjereni za usvajanje učenicima te dobi te koji su također za usvajanje u osnovnoj školi predviđeni Kurikulumom.

4. Evaluacija radionice „Koliko boja je potrebno?“

Radionica „Koliko boja je potrebno?“ provedena je 24. kolovoza 2023. u sklopu ljetne škole matematike pod nazivom „Matematika za 5“. U radionici su sudjelovali učenici od petog do osmog razreda. Ukupno je bilo 17 sudionika koji su tijekom radionice bili podijeljeni u četiri skupine od četiri ili pet učenika. Svi učenici su aktivno sudjelovali u radionici, pokazali su interes za temu te su pomoću perlica uspjeli pravilno obojiti sve zadane karte i grafove bez puno pomoći voditeljice. Dakle, učenici su uspješno odradili sve zadatke te usvojili nove sadržaje tijekom radionice. Nakon radionice, sudionici su ispunili kratku anketu kako bi se istražilo mišljenje učenika o ovakvom načinu učenja. Anketa je prikazana na *Slici 4.1*, a u nastavku su navedena pitanja iz ankete te su analizirani odgovori sudionika radionice.

Anketa o radionici

„Koliko boja je potrebno?“

Razred: 5. 6. 7. 8.

1. Ocijeni radionicu: 1 2 3 4 5

2. Ovu radionicu sam mogao/mogla pratiti:
   a. lakše nego redovnu nastavu
   b. teže nego redovnu nastavu
   c. jednakom težinom kao redovnu nastavu

3. Koliko često na satu matematike imate nastavu koja podsjeća na radionicu?
   a. Nikad.
   b. Rijetko.
   c. Ponekad.
   d. Često.

4. Biste li voljeli imati više radionica iz matematike u školi?
   a. Da.
   b. Ne.
   c. Svejedno mi je.

5. Što ti se svidjelo na radionici?

____

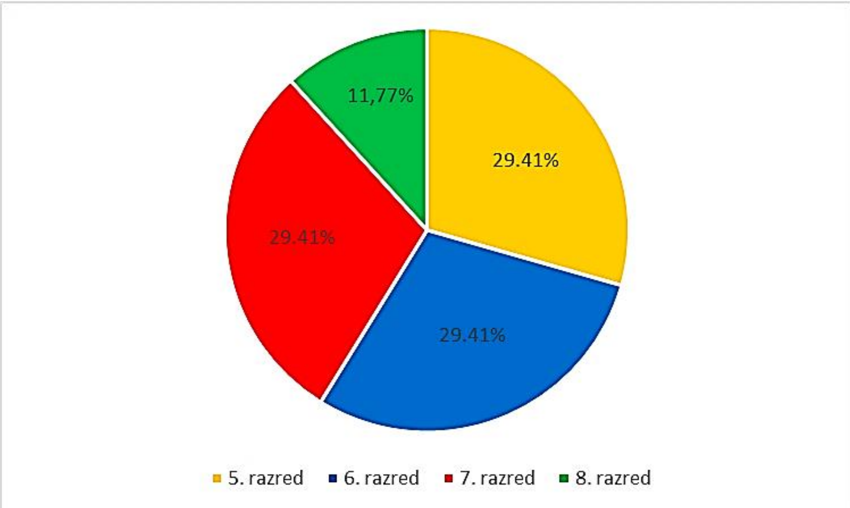
6. Imaš li kakav prijedlog kako unaprijediti radionicu? Što se nije svidjelo ili je moglo biti bolje?

____

Slika 4.1: Anketa o radionici „Koliko boja je potrebno?“

Rezultati ankete

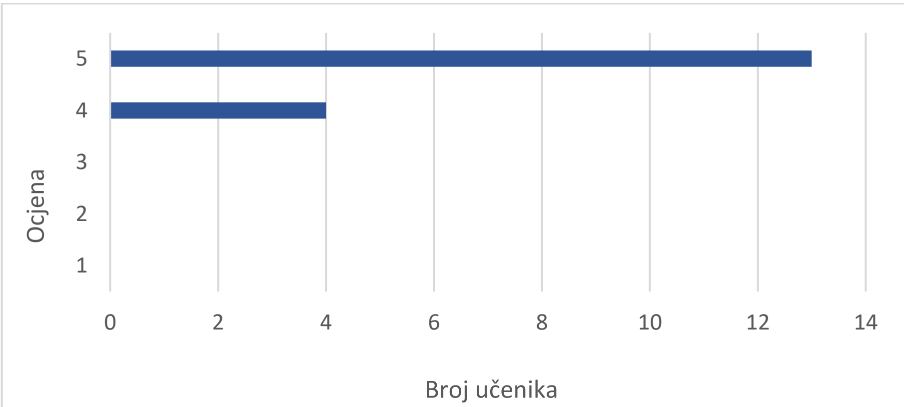
U radionici je sudjelovalo 17 učenika u dobi od 12 do 15 godina. Dakle, to su učenici koji su tada završili peti, šesti, sedmi ili osmi razred. Svi učenici su nakon radionice pristupili ispunjavanju ankete za evaluaciju radionice. Radionici je prisustvovalo petero učenika petog razreda, petero učenika šestog razreda te petero učenika sedmog razreda. Dakle, iz svakog razreda po 29.4% od ukupnog broja učenika koji su sudjelovali na radionici. Također, na radionici su bila i dva učenika osmog razreda. Odnosno, 11.4% od ukupnog broja učenika bili su učenici osmog razreda. Na *Slici 4.2* prikazan je udio učenika koji su sudjelovali u radionici prema dobi.



Slika 4.2: Pregled broja učenika koji su sudjelovali u radionici prema dobi

1. Pitanje: Ocijeni radionicu.

Prvo anketno pitanje bilo je ocijeniti radionicu ocjenom između 1 i 5 kako bi učenici dali povratnu informaciju o tome koliko im se ovakav način rada sviđa. Trinaest učenika ocijenilo je radionicu s ocjenom 5, dok je četvero učenika dalo ocjenu 4 za radionicu. Niti jedan od učenika nije ocijenio radionici s ocjenama 3, 2 ili 1. Učestalost pojedine ocjene prikazana je na *Slici 4.3*.



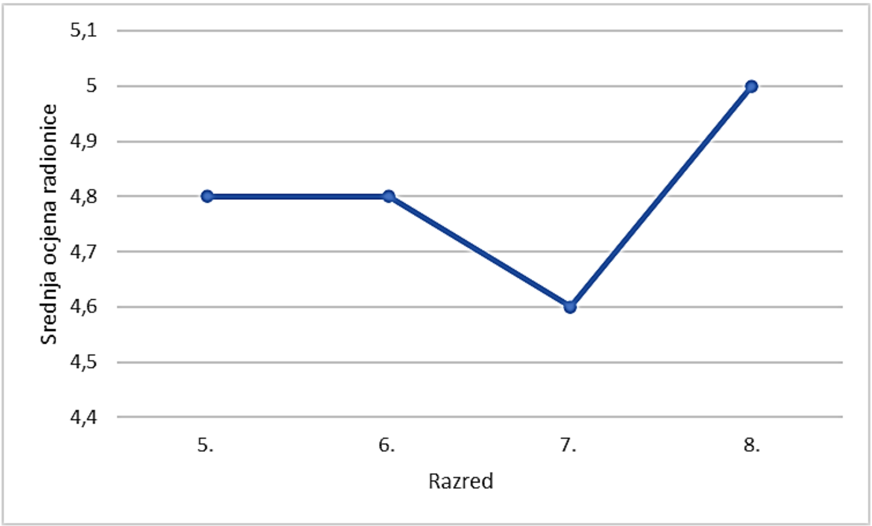
Slika 4.3: Učestalost pojedine ocjene za radionicu

Prema prethodno navedenim podacima, srednja ocjena radionice je 4.76. U *Tablici 1* prikazane su srednje ocjene za radionicu prema dobi, odnosno razredu koji učenici pohađaju.

Tablica 1: Ocjena radionice prema dobi učenika

Razred	Broj učenika	Srednja ocjena radionice
5.	5	5
6.	5	4.8
7.	5	4.6
8.	2	5
Ukupno:	17	4.76

Rezultati ocjena za radionicu pokazuju zadovoljstvo radionicom kod svih uzrasta. Učenici osmog razreda ocijenili su radionicu s najvišom ocjenom 5, dok su učenici sedmog razreda dali najnižu ocjenu 4.6. Ocjena radionice prema dobi ispitanika prokazana je i grafički (*Slika 4.4*).



Slika 4.4: Ocjena radionice prema dobi učenika (razredu)

Budući da nema prevelikih razlika u ocjenama ovisno o dobi učenika (odnosno završenog razreda), možemo zaključiti da su svi učenici mogli pratiti radionicu bez obzira na svoje predznanje iz matematike, što je u skladu s našom pretpostavkom o primjerenosti radionice za različite uzraste.

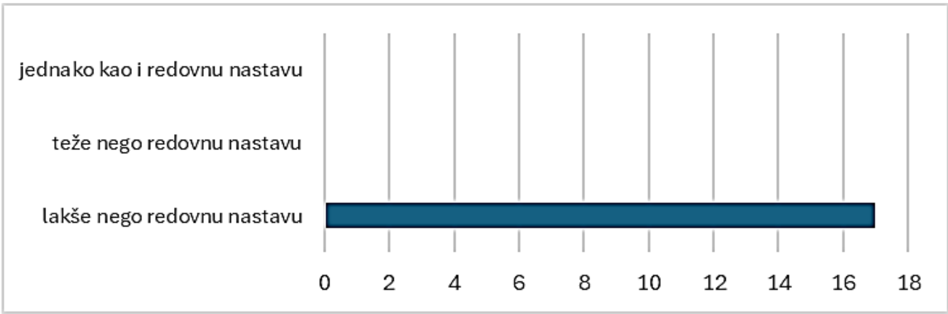
2. pitanje: Ovu radionicu sam mogao/mogla pratiti:

a) lakše nego redovnu nastavu

b) teže nego redovnu nastavu

c) jednakom težinom kao redovnu nastavu

Svi sudionici radionice odgovorili su da su sadržaj prezentiran na radionici mogli pratiti lakše nego redovnu nastavu, što je i prikazano grafom (*Slika 4.5*).



Slika 4.5: Učestalost odgovora na 2. pitanje

Ovaj rezultat potvrđuje pretpostavku da će učenici lakše usvojiti nove matematičke pojmove i koncepte aktivnim učenjem te će im kod usvajanja novih pojmova pomoći iskustveni i slikovni prikaz sadržaja.

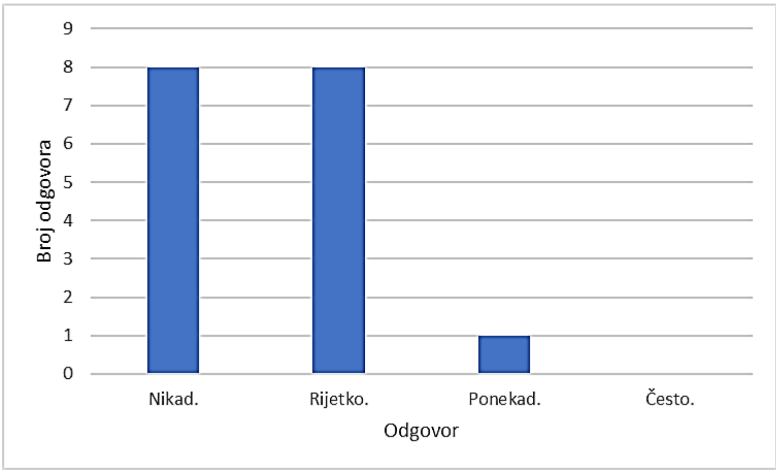
3. pitanje: Koliko često na satu matematike imate nastavu koja podsjeća na radionicu.

Cilj ovog pitanja bio je saznati od učenika koliko često je na satovima matematike kojima prisustvuju uočavaju elemente aktivnog i iskustvenog učenja. U *Tablici 2* prikazana je učestalost odgovora među učenicima.

Tablica 2: Učestalost odgovora na 3. anketno pitanje

Odgovor:	**Nikad.**	**Rijetko.**	**Ponekad.**	**Često.**
Broj odgovora:	8	8	1	0
Udio odgovora u ukupnom broju sudionika:	47.06%	47.06%	5.88%	0%

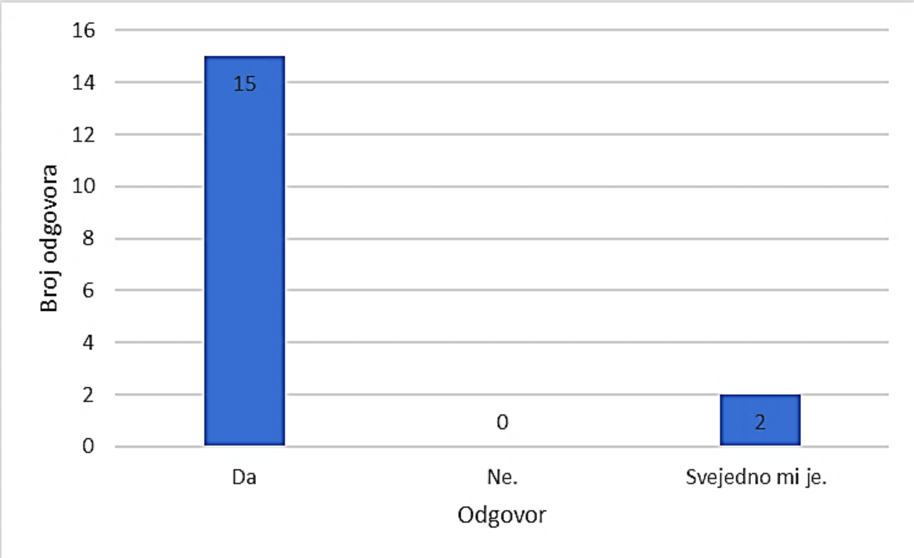
Kao što je vidljivo iz tablice, učenici koji su sudjelovali u radionici ne susreću se često u nastavi matematike s ovakvim pristupom radu. Samo jedan učenik je odgovorio da ponekad na matematici imaju takav tip sata, dok je ostatak učenika odgovorilo da ih nastava matematike nikad ili rijetko podsjeća na radionicu. Učestalost odgovora prikazana je i grafički u na *Slici 4.6*.



Slika 4.6: Učestalost odgovora na 3. anketno pitanje

4. Pitanje: Biste li voljeli imati više radionica iz matematike u školi?

Učenicima je postavljeno ovo pitanje kako bi se istražilo kako učenici prihvaćaju ovakav oblik rada te sviđa li im se ovakav tip aktivnosti više nego aktivnosti na redovnoj nastavi. Čak 15 učenika (odnosno 88.24%) odgovorilo je da bi voljeli imati više radionica iz matematike u školi, dok je dvoje njih odgovorilo da im je svejedno. Dakle, nitko nije odgovorio da ne bi volio imati radionice iz matematike u školi. Učestalost odgovora prikazana je na *Slici 4.7.*



Slika 4.7: Učestalost odgovora na 4. anketno pitanje

Iz odgovora na ovo pitanje vidljivo da učenicima ovakav način usvajanja novih sadržaja prihvatljiv, a većina učenika ga i preferira u odnosu na klasičnu nastavu.

Posljednja dva pitanja na radionici bila su otvorenog tipa. Tako su učenici mogli komentirati što im se na radionici posebno svidjelo, što je moglo biti bolje te su također mogli dati sugestije kako bi se radionica poboljšala. Na taj način htjelo se detaljnije istražiti kako su učenici doživjeli radionicu te vidjeti ima li prostora za poboljšanje. Budući da su neki odgovori na pitanja otvorenog tipa bili vrlo slični, odgovori su podijeljeni u nekoliko kategorija te su u tablici prikazani odgovori učenika te učestalost pojedinih odgovora. Neki učenici su dali opširnije odgovore na ova pitanja pa su dijelovi njihovih odgovora svrstani u više kategorija u tablici.

5. pitanje: Što ti se svidjelo na radionici?

Cilj ovog pitanja bio je istražiti kako su učenici doživjeli radionicu te koji dio im se najviše svidio. Svi učenici odgovorili su na ovo pitanje. Četiri učenika navela su da im se sve svidjelo, dok su preostali učenici naveli konkretne odgovore koji su prikazani u nastavku. Dakle, odgovori na 5. pitanje su prikazani u *Tablici 3.*

Tablica 3: Odgovori na 5. anketno pitanje

Odgovor	Broj odgovora
Kreativnost, bojenje, crtanje.	9
Sve.	4
Povezivanje bojenja s matematikom.	2
Grupni rad (suradnja).	2
Sloboda pri radu.	1
Jednostavno i opuštajuće gradivo.	1
Voditeljica i njen način objašnjavanja.	1
Učenje nečeg novog.	1

Kao što je vidljivo iz tablice, najviše učenika je navelo da im se radionica svidjela zbog toga što su na radionici mogli biti kreativni te što su bojili i crtali. Dakle, učenicima se općenito svidjela tema radionice, to jest, bojenje grafova i karata, ali svidjelo im se i to što su morali nešto sami otkrivati i izrađivati.

6. pitanje: Imaš li kakav prijedlog kako unaprijediti radionicu? Što ti se nije svidjelo ili je moglo biti bolje?

Cilj ovog pitanja bio je vidjeti imaju li učenici kakve zamjerke na radionicu, odnosno, postoji li nešto što bi se moglo napraviti da radionica bude što bolja. Devet učenika je odgovorilo da nemaju prijedloga ni primjedbi ili da im se sve svidjelo, dok je ostatak učenika naveo konkretnije odgovore. Odgovori na 6. pitanje su prikazani u *Tablici 4.*

Tablica 4: Odgovori na 6. anketno pitanje

Odgovor	*Broj odgovora*
Nemam prijedloga ili primjedbi/sve mi se svidjelo.	9
Radionica je mogla duže trajati.	4
Primjedbe na pribor (bolje bojice, više bojica i šiljila).	4
Više zadataka za bojenje.	1
Teži zadaci pred kraj radionice.	1
Više novih matematičkih sadržaja.	1

Najviše učenika je navelo da nemaju nikakve primjedbe niti prijedloge za poboljšanje, odnosno da im se sve svidjelo. Četiri učenika navela su da je radionica mogla duže trajati. Budući da su svi učenici završili sve aktivnosti s radionice u predviđenom vremenu, pretpostavlja se da su učenici koji su naveli da je radionica trebala duže trajati zapravo smatrali da je moglo biti više sadržaja/aktivnosti na radionici. Također, vezano uz sadržaj radionice pojedini učenici su naveli da je moglo biti više zadataka za bojenje, da je moglo biti težih zadataka pred kraj radionice te da je moglo biti više matematičkog sadržaja. Dakle, bilo bi dobro da se za učenike koji su brži u rješavanju pripremi još nekoliko zadataka koji će biti zahtjevniji od zadataka s radionice. Valja napomenuti da je učenik sedmog razreda napisao da bi moglo biti više matematičkog sadržaja, a učenik osmog razreda napisao je da bi pred kraj radionice trebali biti teži zadaci. Dakle, ukoliko se radionica izvodi s učenicima različitih uzrasta, treba obratiti pažnju na različite mogućnosti učenika te prema tome prilagoditi zadatke. Nadalje, 4 učenika su imala pritužbe na pribor, tj. smatraju da je trebalo biti više bojica i šiljila ili da su trebale biti bolje bojice. Budući da učenici nisu znali da će im trebati bojice, oni su dobili bojice na radionici pa su ih morali dijeliti s drugim učenicima iz grupe. Preporuka je da se učenicima unaprijed najavi da će za radionicu trebati bojice i šiljilo kako bi učenici imali svoj pribor i kako bi mogli neometano pratiti radionicu.

Zaključak o provedenim aktivnostima

Prema rezultatima provedene ankete možemo zaključiti da su učenici bili zadovoljni s radionicom. Radionica je ocijenjena s ocjenom 4.76 od 5 te je čak 13 od 17 učenika radionicu ocijenilo s ocjenom 5. Nadalje, učenici su naveli da su sadržaj koji je bio predstavljen na ovoj radionici mogli shvatiti lakše nego na način na koji inače spoznaju nove pojmove i koncepte na redovnoj nastavi. Dakle, učenicima je lakše pratiti nastavu ako im je sadržaj prvo prezentiran iskustvenim, zatim slikovnim, a tek onda simboličkim načinom prikaza, te ako u njoj aktivno sudjeluju. To je i u skladu s odgovorima učenika da bi voljeli da im više nastave u školi bude poput radionice. S druge strane, učenici navode da se rijetko susreću s ovakvim načinom rada u nastavi matematike, odnosno da ih nastava matematike nikad ili rijetko podsjeća na radionicu. Dakle, trebalo bi težiti da se u nastavu matematike uvede što više aktivnosti u kojima učenici aktivno sudjeluju te da učenicima nastavni sadržaji budu što više prezentirani iskustvenim i slikovnim načinom prikaza kako bi ih učenici što bolje shvatili. Treba uzeti u obzir da učenici, koji su sudjelovali u ovoj radionici, imaju velik interes za matematiku te da su to učenici koji su napredni u usvajanju matematičkih sadržaja te zbog toga nisu imali nikakve poteškoće prilikom rješavanja zadataka s radionice. Prema tome, ako bi se radionica izvodila na redovnoj nastavi, nastavnik treba prilagoditi zadatke, ali i stupanj pomoći tijekom izvođenja zadataka tako da svi učenici u razredu mogu aktivno sudjelovati u radionici. Također, u redovnoj nastavi može se očekivati i manji interes za radionicu budući da nisu svi učenici u razredu jednako motivirani za otkrivanje novog matematičkog sadržaja. Međutim, kako je radionica osmišljena prema Brunerovoj teoriji kognitivnog rasta, učenici bi trebali sadržaj usvojiti bez većih poteškoća jer će ga usvajati postepeno kroz sva tri načina obrade informacija, što bi moglo povećati interes za ovakav način rada u nastavi.

Zaključak

U ovom radu cilj je bio istražiti koliko je nastava matematike u skladu s idejama Brunerove teorije učenja te kako će učenici usvojiti matematički sadržaj koji im je prezentiran po uzoru na Brunerovu teoriju. U Kurikulumu te u udžbenicima se mogu pronaći primjeri uvođenja novog matematičkog sadržaja u kojima prepoznajemo elemente Brunerove teorije učenja. Također, mogli smo vidjeti da su ispitani učenici bili zadovoljni s radionicom u kojoj su sudjelovali te da bi voljeli da na nastavi matematike češće bude zastupljen takav način rada.

U nastavi bi trebalo težiti konstruktivističkom pristupu poučavanju jer tim pristupom učenici ostvaruju ishode najviših razinama Bloomove taksonomije. Poučavanje matematike isključivo na apstraktan način, bez iskustvenog načina reprezentacije stvarnosti te bez prikazivanja sadržaja na slikovit način, za učenike može biti previše kompleksno što uzrokuje frustraciju i demotiviranost kod učenika. Također, bez iskustvenog i slikovnog prikaza, učenici često uče matematičke koncepte „napamet" jer ne razumiju o čemu se radi pa to dovodi do pojave formalizama u naučenom gradivu. Dakle, koncepte prikazane pomoću matematičkih modela i slikovnih prikaza nastavnici trebaju povezati sa apstraktnim razumijevanjem matematike kako bi učenici usvojili novi sadržaj na odgovarajući način. Kurikulum daje nastavnicima slobodu da sami biraju metode kojima će učenicima prezentirati i uvoditi nove matematičke koncepte, ali često sadrži smjernice prema kojima bi sadržaj trebao biti prezentiran iskustvenim i slikovnim načinom prije nego se počne sa simboličkim načinom prikaza. Takav pristup trebao bi motivirati učenike i te im olakšati usvajanje predviđenih ishoda na što višoj razini.

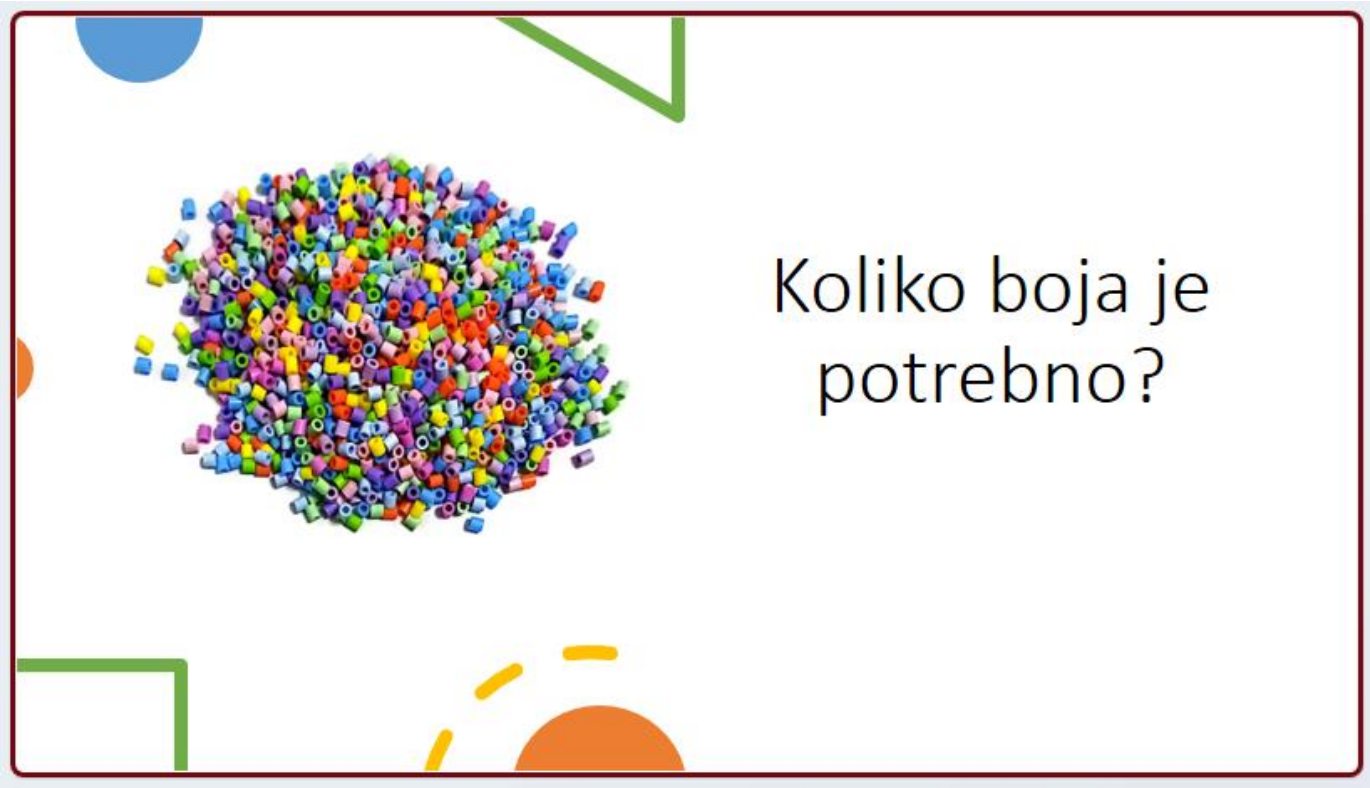
Popis slika

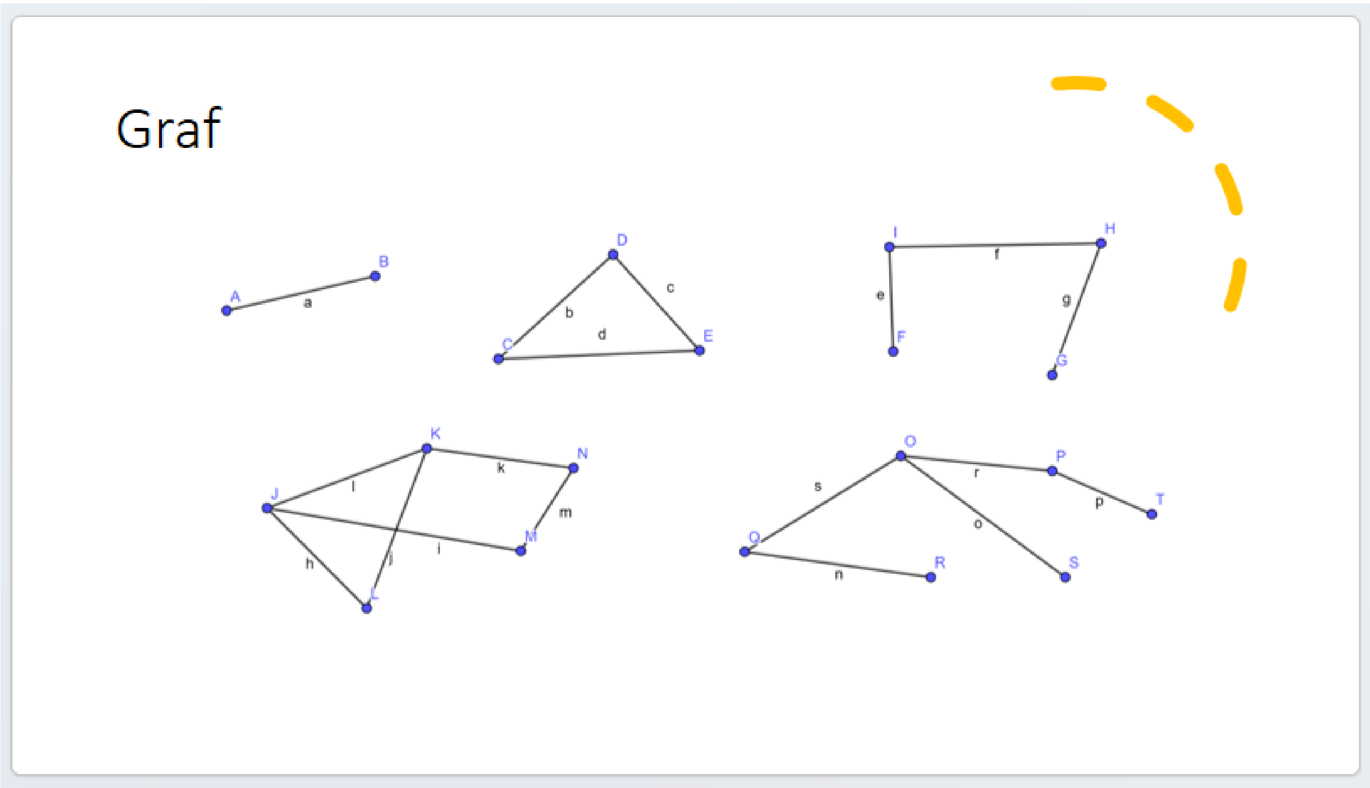
Literatura

1. Ban Kirigin, T., Bujačić Babić, S., Sušanj, R.: Teorija skupova - Skripta, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci, 2020.
2. Bruner, J. S.: Toward a theory of instruction, Mass.: Belknap Press, Cambridge, 1966.
3. EnLeMaH: Smjernice za iskustveno učenje matematike kod kuće, 2020.
   URL:https://www.unibielefeld.de/fakultaeten/mathematik/fakultaet/idm/projekte/enlemah/uber-das-projekt/HR_EnLeMaH_Guidelines.pdf
4. Furner, Joseph M. and Worrell, Nancy L.:"The Importance of Using Manipulatives in Teaching Math Today," Transformations: Vol. 3 : Iss. 1 , Article 2., 2017.
   URL: The Importance of Using Manipulatives in Teaching Math Today (nova.edu)
5. Gningue, S., Menil, V., Fuchs, E.: Applying Bruner's Theory of Representation to Teach Pre-Algebra and Algebra Concepts to Community College Students Using Virtual Manipulatives, The Electronic Journal of Mathematics and Technology 8(3), 2014,
   URL: (20) (PDF) Applying Bruner's Theory of Representation to Teach Pre-Algebra and Algebra Concepts to Community College Students Using Virtual Manipulatives (researchgate.net)
6. Gračan, S. (2007.) „Četiri su dovoljne!". Zanimljiva matematika broj 41, 26. – 35. str.
   URL: https://www.halapa.com/odmor/pravipdf/boje4.pdf
7. Karta Hrvatske
   URL: https://karta-hrvatske.com.hr/slijepa-karta-hrvatske-zupanije (22.7.2023.)
8. Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2., Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019.
9. Rukavina S., Milotić, B., Jurdana-Šepić, R., Žuvić-Butorac, M., Ledić, J..: Razvoj prirodoznanstvene i matematičke pismenosti aktivnom učenjem, Udruga Zlatni rez, Rijeka, 2010.
10. Veljan D.: Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb, 2001.
11. Gregurić I. (2011): Bojenje grafova (Diplomski rad), Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku. URL: https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/GRE10.pdf

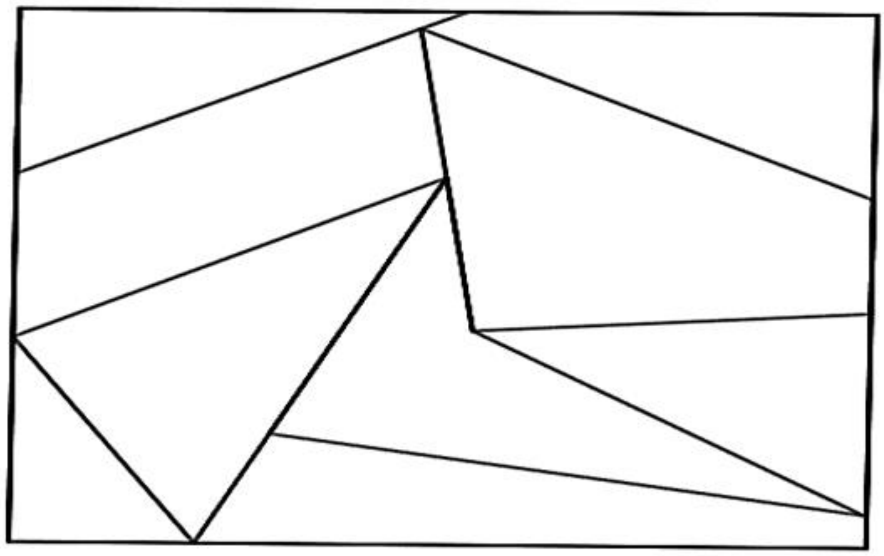
Prilozi

Prilog 1 – prezentacija za radionicu „Koliko boja je potrebno?“

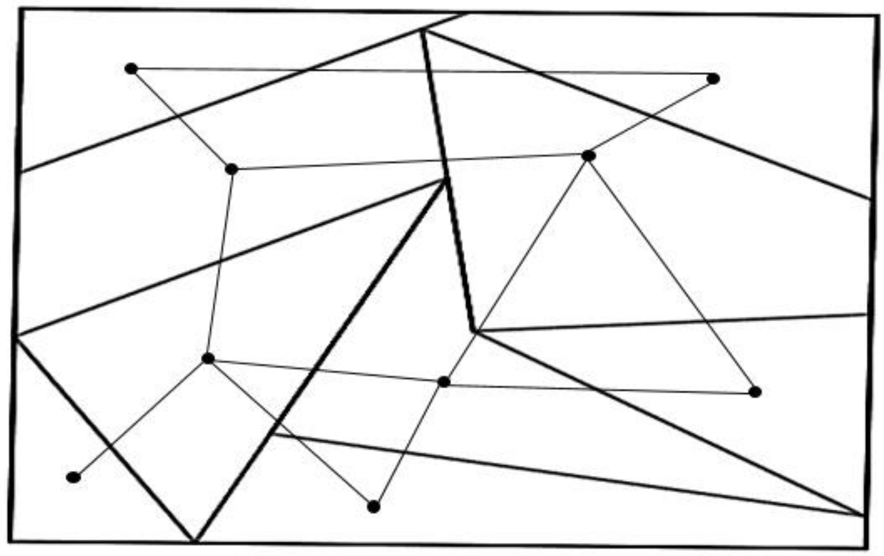




Karta ➡ graf



Karta ➡ graf

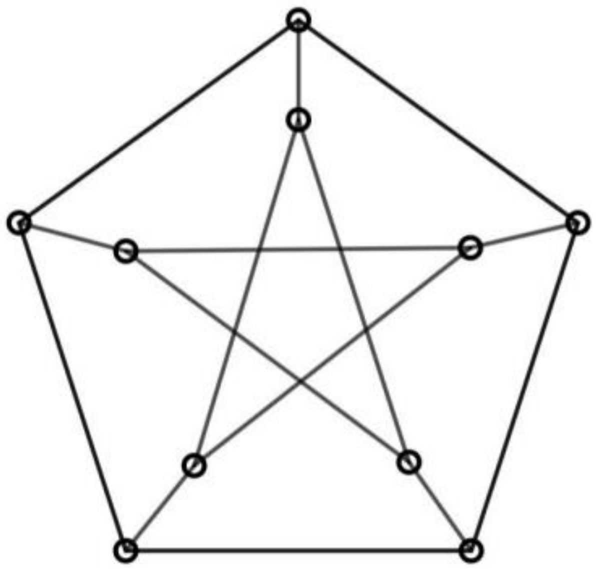


Prilog 2 – Radni listić za radionicu „Koliko boja je potrebno?“

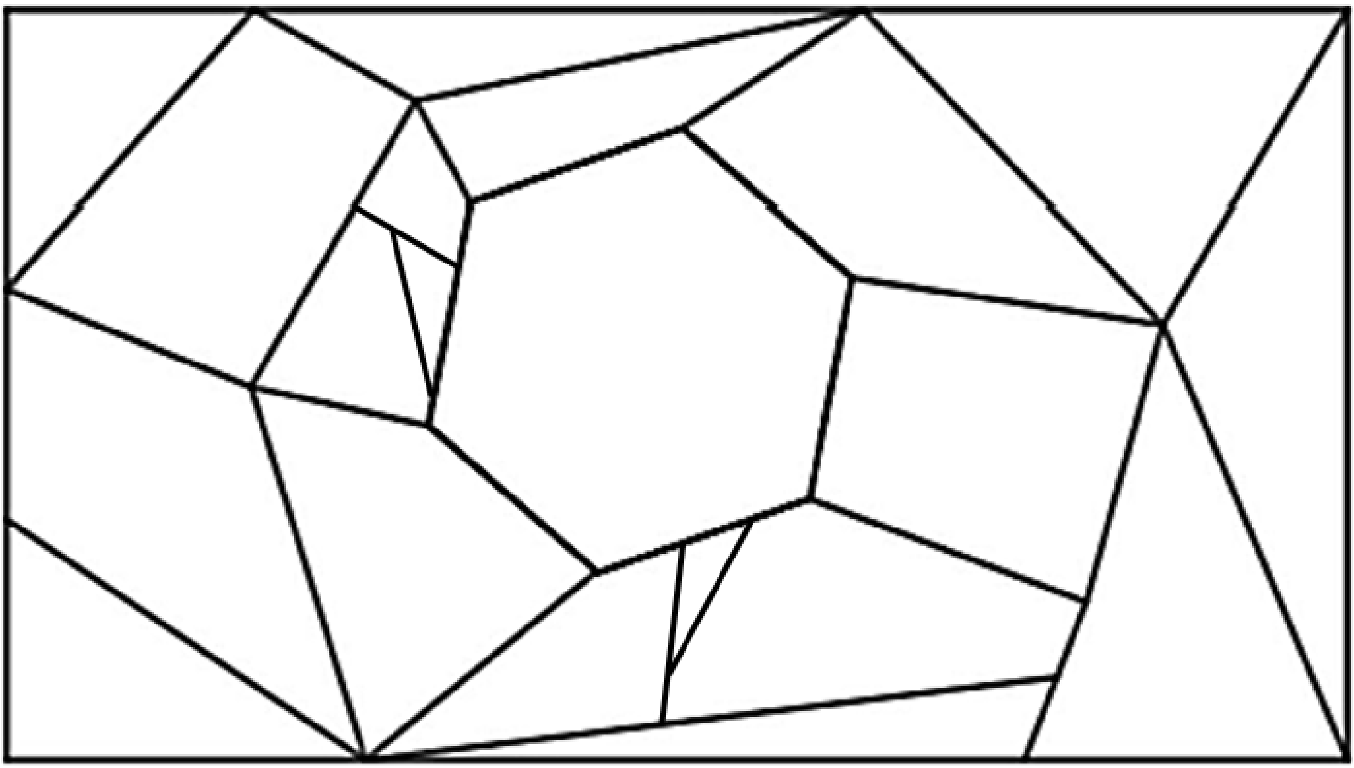
Koliko boja je potrebno?

1. Oboji kartu Hrvatske tako da susjedne županije nisu obojene istom bojom.

2. Pokušajte sljedeći graf obojiti sa tri boje. Nakon bojenja, označite vrhove grafa slovima te odredite skupove vrhova koji su obojeni istom bojom.



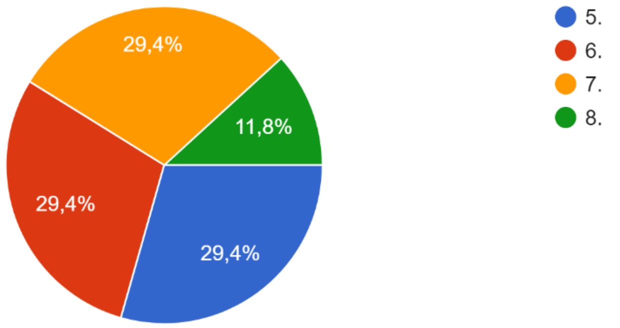
3. Nacrtajte graf koji odgovara karti na slici te ga pravilno obojite sa četiri boje.



Prilog 3 – rezultati ankete za radionicu „Koliko boja je potrebno?“

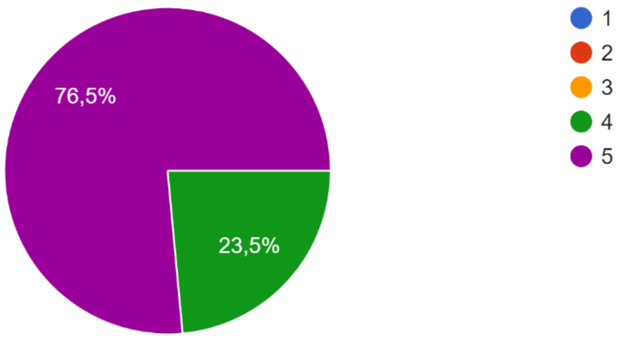
Razred:

17 odgovora



Ocijeni radionicu:

17 odgovora

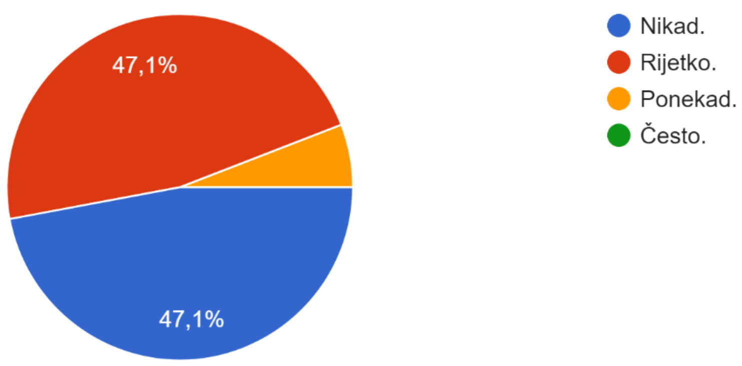


Ovu radionicu sam mogao/mogla pratiti:

17 odgovora

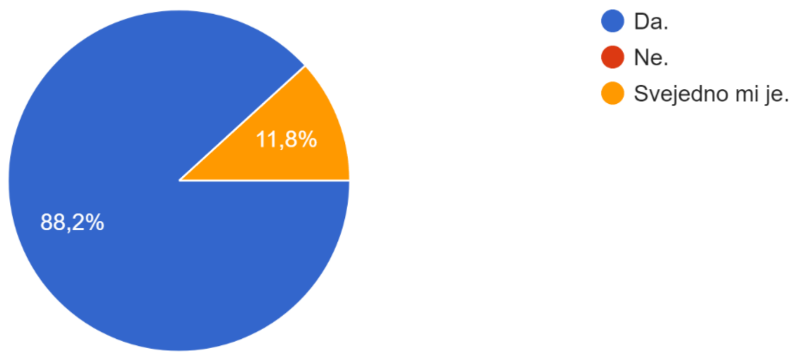
Koliko često na satu matematike imate nastavu koja podsjeća na radionicu?

17 odgovora



Biste li voljeli imati više radionica iz matematike u školi?

17 odgovora



Što ti se svidjelo na radionici?

Sve.

Bilo je vrlo kreativno te opuštenije nego na ostalim satovima. Svidjelo mi se što smo svi surađivali i naučili nešto novo.

Bojenje i crtanje.

Bojenje i crtanje.

Svidjelo mi se to što nismo trebali puno pisati i to što smo bojili.

Bojenje, crtanje i povezivanje s matematikom.

Mogli smo bojiti i sami crtati. Voditeljica je bila jako draga i sve je lijepo objasnila, bilo je puno materijala za rad.

Sve mi se svidjelo.

Sve.

Velika količina slobode pri radu.

Kada smo crtali grafove.

Gradivo je bilo dosta jednostavno, ali i opuštajuće. Prikazano je na vrlo kreativan način.

Sve je bilo super.

Bojenje županija i grafova.

Kada smo crtali grafove, sve bez dizanja ruke.

Svidjelo mi se kako smo povezali bojenje s matematikom.

Jer smo radili zajedno i jer nije bilo dosadno.

Imaš li kakav prijedlog kako unaprijediti radionicu? Što ti se nije svidjelo ili je moglo biti bolje?

Svidjelo mi se to što je učiteljica imala dovoljno zabavnog materijala i mislim da nam je dobro objasnila gradivo.

Nemam prijedlog ili primjedbe.

Sve je bilo dobro.

Radionica je mogla biti malo duža.

Bolje bojice.

Trebalo je donijeti više šiljila jer se bojice brzo troše (ili više bojica) i trajanje bi se moglo produljiti da stignemo završiti rad.

Da duže traje.

Moglo bi dulje trajati i moglo bi imati više zadataka za bojenje.

Više šiljila i teži zadatci na kraju.

Da ima više bojica.

/

Sve mi se svidjelo.

Nemam prijedlog.

Ne.

Nemam nikakav prijedlog jer je bilo odlično.

Objasniti nam još neke pojmove iz matematike.

Sve mi je bilo super.