Vizualizacija u dokazima iz geometrije

Babić, Marija

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Marija Babić

Vizualizacija u dokazima iz geometrije

Završni rad

Rijeka, rujan 2024.

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Marija Babić

Vizualizacija u dokazima iz geometrije

Završni rad

Mentor: mr. sc. Ines Radošević Medvidović

Rijeka, rujan 2024.

Sažetak

Svaki oblik slikovnog prikaza, bilo korištenjem slika, grafova, dijagrama, tablica, i sl., može se smatrati vizualizacijom pa tako i slikovni prikaz korišten u matematici predstavlja vizualizaciju u matematici. Vizualizacija je korisna metoda u mnogim područjima ljudskog djelovanja pa se tako često koristi i u matematici gdje uvelike pomaže u razumijevanju matematičkih pojmova, teorema i dokaza teorema. Geometrija je područje matematike u kojem je vizualizacija najviše prisutna, stoga je naglasak ovog rada na vizualizaciji u geometriji, točnije u dokazima teorema iz geometrije. U ovom radu istaknute su dobrobiti vizualizacije u matematici te su dani vizualni dokazi nekih formula za površine paralelograma, trokuta i trapeza, dokaz Pitagorinog poučka, poučka o sinusima, poučka o kosinusu, također nekih trigonometrijskih identiteta (sinus zbroja i razlike, sinus i kosinus dvostrukog kuta i tangens polovičnog kuta), te dokaz Vivianijevog teorema, Ptolomejevog teorema, Heronove formule i Morleyevog teorema.

Ključne riječi: vizualizacija, geometrija, dokazi bez riječi

Sadržaj

1 Uvod

Vizualizacija je proces stvaranja grafičkog prikaza podataka i informacija. Omogućuje bolje i jednostavnije razumijevanje apstraktnih pojmova, što je ponekad teško postići nekim drugim metodama te je kao slikovni prikaz zanimljiva promatraču. U povijesti se vizualizacija javlja vrlo rano te je prisutna već u špiljskim crtežima, a kasnije crtežima na papirusu, geografskim kartama pa sve do danas, u modernim digitalnim prikazima s ciljem prikazivanja podataka u vizualno pojednostavljenom obliku zbog lakšeg razumijevanja. Vizualni prikazi koriste se u mnogim područjima kao što su znanost, medicina, tehnologija i obrazovanje. Matematika nije oduvijek bila egzaktna znanost koja izučava aksiomatski definirane apstraktne strukture. U početcima je matematika bila empirijska, a razlog tome bio je nerazvijen matematički rječnik. Do raznih matematičkim spoznaja dolazilo se opažanjem, mjerenjem i modeliranjem, tj. vizualizacijom. Matematičke su se ideje i tvrdnje prikazivale, pokušale objasniti i dokazati slikom.

Vizualni dokazi ili često nazivani "dokazi bez riječi", matematički su dokazi prikazani samo slikom ili nizom slika, s kratkom formulom i vrlo malo popratnog teksta. Na slikama je jasno naznačena ideja i put dokaza, iako dokaz nije formalno proveden. No, problem može biti što pojedini vizualni dokazi obuhvaćaju samo specijalne slučajeve neke tvrdnje te zbog toga ne dokazuju tvrdnju u cijelosti. Također, ponekad različite osobe različito mogu protumačiti neku sliku, tj. vizualni dokaz, stoga je potrebno detaljno analizirati problem kako bi dokaz bio proveden ispravno i potpuno.

U ovom radu naglasak će biti na vizualizaciji u matematici, točnije u geometriji i dokazima tvrdnji iz tog područja. Rad obuhvaća jednostavnije, očite, odnosno prave "dokaze bez riječi", ali i kompliciranije dokaze u kojima vizualizacija skraćuje dokaz i pomaže u njegovom razumijevanju.

2 Vizualni dokazi nekih osnovnih pojmova i teorema u geometriji

2.1 Površina paralelograma

Za vizualni dokaz površine paralelograma potrebna je formula za površinu pravokutnika i S-S-K poučak o sukladnosti trokuta.

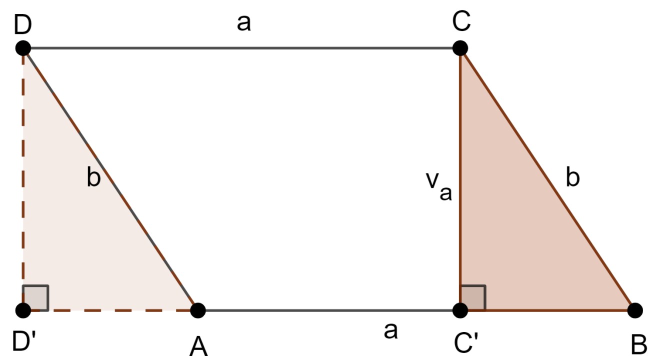
Teorem 2.1. (Površina pravokutnika) *Ako je $ABCD$ pravokutnik takav da je $|AB| = a$ i $|BC| = b$, onda je*

$$P(ABCD) = ab.$$

Teorem 2.2. (S-S-K poučak o sukladnosti trokuta) *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.*

Teorem 2.3. (Površina paralelograma) *Neka je $ABCD$ paralelogram kojemu su a i b duljine susjednih stranica te v_a duljina visine. Tada je*

$$P(ABCD) = av_a.$$



Slika 2.1: Površina paralelograma

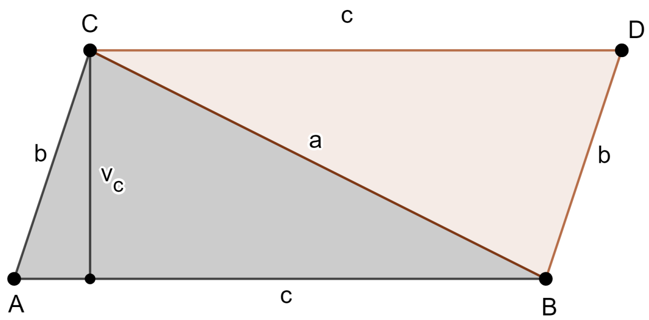
Analiza: Visinom iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ paralelograma $ABCD$ dobiven je trokut $\triangle CC'B$ koji je, prema teoremu 2.2, sukladan trokutu $\triangle DD'A$ ($|DD'| = |CC'| = v_a$, $|AD| = |BC| = b, |CC'| < b, |DD'| < b, |\measuredangle BC'C| = |\measuredangle AD'D|$) dobivenom povlačenjem okomice na pravac AB. Tada paralelogram $ABCD$ i pravokutnik $D'C'CD$ imaju istu površinu pa po teoremu 2.1 vrijedi

$$P(ABCD) = P(D'C'CD) = av_a.$$

2.2 Površina trokuta

Teorem 2.4. (Površina trokuta) *Neka je $\triangle ABC$ trokut sa stranicom duljine c i pripadnom visinom duljine v_c. Tada je*

$$P(\triangle ABC) = \frac{cv_c}{2}.$$



Slika 2.2: Površina trokuta

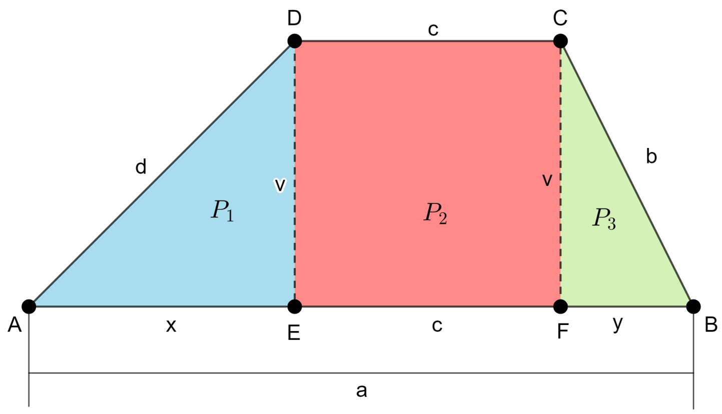
Analiza: Zadani trokut $\triangle ABC$ s duljinama stranica a, b, c i visinom duljine v_c nadopunjen je do paralelograma pomoću trokuta koji je sukladan trokutu $\triangle ABC$. Dobiveni paralelogram ima stranice duljine b i c. Prema teoremu 2.3 vrijedi da je $P(ABDC) = cv_c$, a kako je paralelogram dobiven pomoću dva sukladna trokuta, vrijedi

$$P(\triangle ABC) = \frac{cv_c}{2}.$$

2.3 Površina trapeza

Tvrdnja 2.5. (Površina trapeza) *Neka je $ABCD$ trapez kojemu su osnovice duljine a i c te je visina duljine v. Tada je*

$$P(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot v.$$



Slika 2.3: Površina trapeza

Analiza: Visinama iz vrhova C i D na stranicu $\overline{\mathrm{AB}}$ trapez $ABCD$ podijeljen je na trokute $\triangle AED$ i $\triangle CFB$ i na pravokutnik $DEFC$ čije su oznake za duljine stranica i površine prikazane na slici 2.3. Primjenom teorema 2.1 i 2.4 na dobivene trokute i pravokutnik slijedi

$$P_1 = \frac{xv}{2}, P_2 = cv, P_3 = \frac{yv}{2}.$$

Suma površina triju dobivenih geometrijskih likova daje površinu trapeza

$$P(ABCD) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{xv}{2} + cv + \frac{yv}{2} = \frac{(x + 2c + y)v}{2}.$$

Kako je $x + c + y = a$, slijedi

$$P(ABCD) = \frac{a + c}{2} \cdot v.$$

2.4 Pitagorin poučak

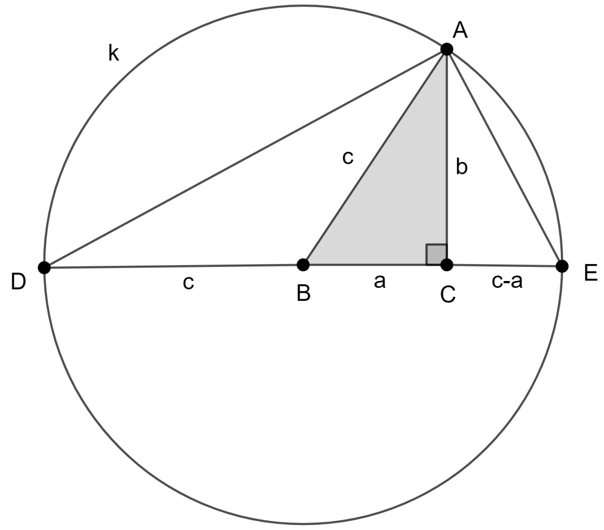
U analizi vizualnog dokaza ovog teorema bit će primijenjeni sljedeći teoremi:

Teorem 2.6. (Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice) *Svaki kružnici upisani trokut nad promjerom kružnice je pravokutan.*

Teorem 2.7. (K-K sličnost) *Dva su trokuta slična ako su im dva odgovarajuća kuta jednakih mjera.*

Teorem 2.8. (Pitagorin poučak) *U pravokutnom je trokutu kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina obje katete.*

1. način:



Slika 2.4: Pitagorin poučak

Analiza: Zadan je pravokutan trokut $\triangle ABC$ s duljinma stranica a, b, c, pravim kutom u vrhu C, kružnica k sa središtem u točki B polumjera duljine stranice c. Primjenom teorema 2.6, kut $\measuredangle DAE$ je pravi kut, odnosno, trokut $\triangle DEA$ je pravokutan trokut. Tada vrijedi

$$|\measuredangle EDA| = 90^\circ - |\measuredangle AED| \tag{2.1}$$

Kako je stranica $\overline{AC}$ okomita na promjer $\overline{DE}$, trokut $\triangle ACE$ je pravokutan te vrijedi

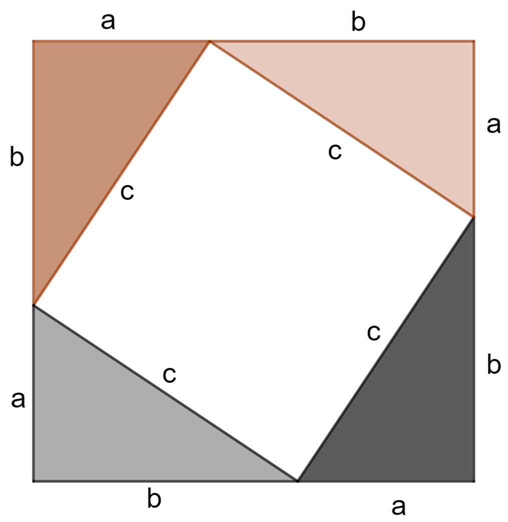
$$|\measuredangle CAE| = 90^\circ - |\measuredangle AED| \tag{2.2}$$

Dakle, $|\measuredangle EDA| = |\measuredangle CAE|$. Tada su, prema teoremu 2.7, trokuti $\triangle DCA$ i $\triangle ACE$ slični. Stranice b i $c + a$ te stranice b i $c - a$ katete su sličnih pravokutnih trokuta. Tada zbog proporcionalnosti tih stranica, tj. iz jednakosti

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

slijedi tvrdnja $a^2 + b^2 = c^2$.

2. način:



Slika 2.5: Pitagorin poučak

Analiza: Zadan je kvadrat čije su stranice duljine $a + b$ te je podijeljen na četiri pravokutna trokuta i kvadrat kako je prikazano na slici 2.5. Površina početnog kvadrata jednaka je sumi površina pet dobivenih geometrijskih likova na koje je podijeljen, tj. koristeći teoreme 2.1 i 2.4 vrijedi

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2.5 Poučak o sinusima

U analizi vizualnog dokaza ovog teorema bit će primijenjen teorem o obodnom i središnjem kutu.

Teorem 2.9. (Teorem o obodnom i središnjem kutu) *Središnji kut nad nekim lukom jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.*

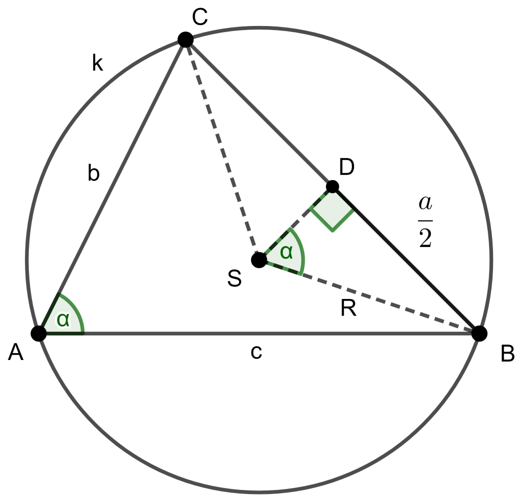
Teorem 2.10. (Poučak o sinusima) *Stranice u trokutu odnose se kao sinusi tim stranicama nasuprotnih kutova, tj. ako su a, b, c duljine stranica i α, β, γ redom mjere tim stranicama nasuprotnih kutova, onda vrijedi*

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

ili preciznije

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

gdje je R radijus opisane kružnice trokuta.



Slika 2.6: Poučak o sinusima

Analiza: (Jedan slučaj, ostali analogno): Zadan je trokut $\triangle ABC$ s duljinama stranica a, b, c, istaknutim kutom veličine α i njemu opisana kružnica sa središtem u točki S radijusa R. Prema teoremu 2.9 vrijedi da je $|\measuredangle BSC| = 2|\measuredangle BAC|$, tj. $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BSD|$. Iz trokuta $\triangle BDS$ iščitavamo

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}.$$

Analogno vrijedi i za ostale kutove. Dakle,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} (= 2R).$$

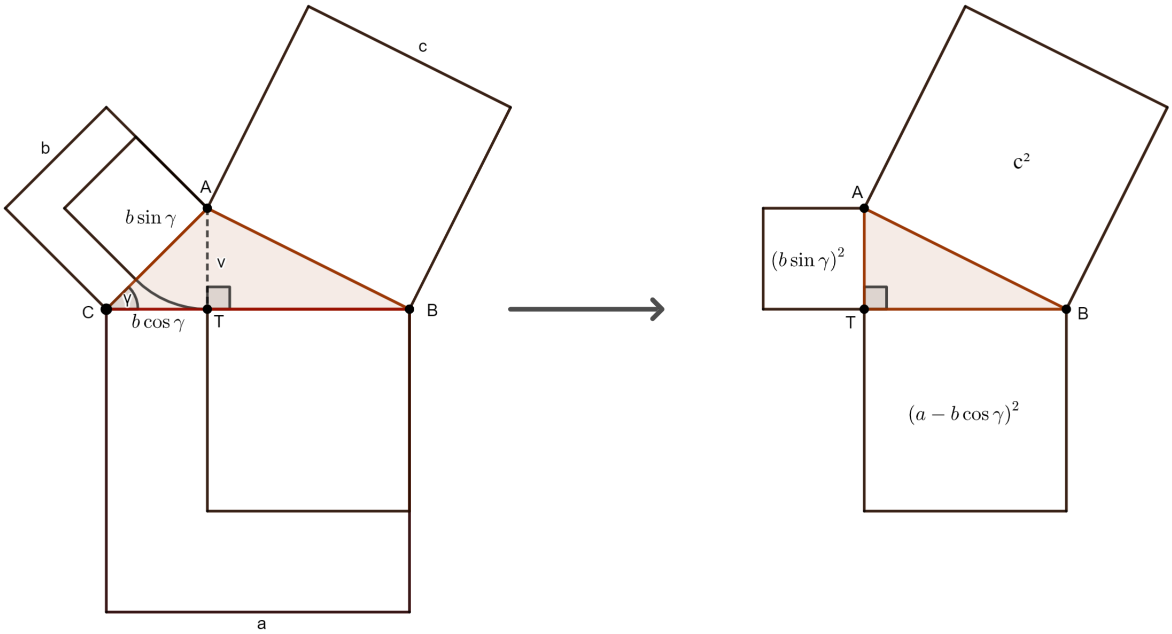
2.6 Poučak o kosinusu

Teorem 2.11. (Poučak o kosinusu) *Ako su a, b, c duljine stranice trokuta i α, β, γ veličine njegovih kutova, onda vrijedi*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



Slika 2.7: Poučak o kosinusu

Analiza: (Jedan slučaj, ostali analogno): Zadan je trokut $\triangle ABC$ s duljinama stranica a, b, c, istaknutim kutom veličine γ i visinom duljine v iz vrha A. Po definiciji sinusa kuta vrijedi $\sin\gamma = \frac{v}{b}$, tj. $v = b\sin\gamma$. Sada, primjenom teorema 2.8, vrijedi sljedeća jednakost

$$c^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2,$$

tj.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Analogno se dobiju preostale dvije tvrdnje.

2.7 Trigonometrijski identiteti

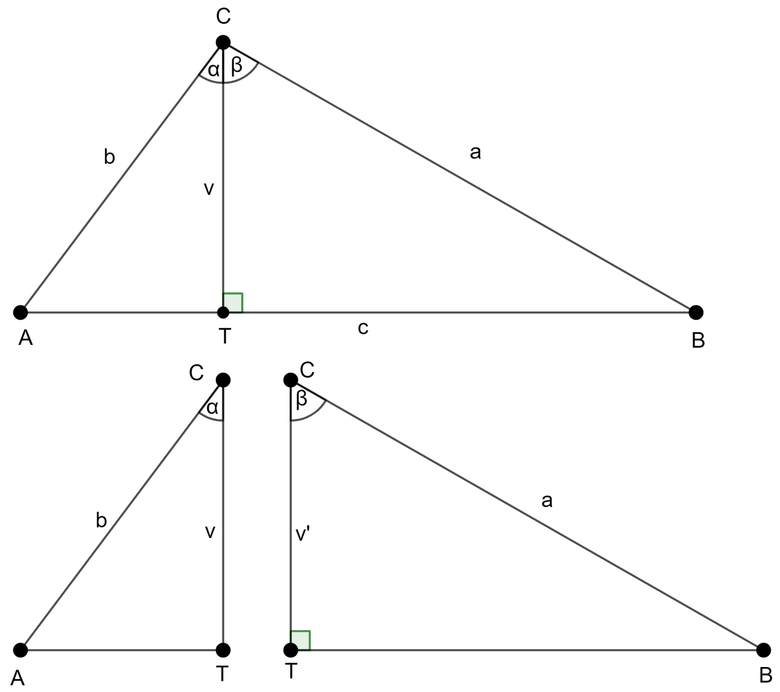
U analizama ovih dokaza bit će korišten sljedeći teorem.

Teorem 2.12. (Površina trokuta) *Površina trokuta jednaka je polovici umnoška duljina dviju stranica i sinusa kuta između njih.*

2.7.1 Sinus zbroja

Tvrdnja 2.13.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



Slika 2.8: Sinus zbroja

Analiza: Vrijedi

$$P(\triangle ABC) = P(\triangle ATC) + P(\triangle TBC) = \frac{|AT|v}{2} + \frac{|TB|v'}{2}$$

i

$$v = b\cos\alpha, v' = a\cos\beta,$$

pri čemu je $v = v'$. Primjenom formule za površinu trokuta iz teorema 2.12 dobiva se

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ab\sin(\alpha + \beta).$$

Tada slijedi

$$\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}bv\sin\alpha+\frac{1}{2}av'\sin\beta = \frac{1}{2}bv'\sin\alpha+\frac{1}{2}av\sin\beta = \frac{1}{2}ab\cos\beta\sin\alpha+\frac{1}{2}ab\cos\alpha\sin\beta,$$

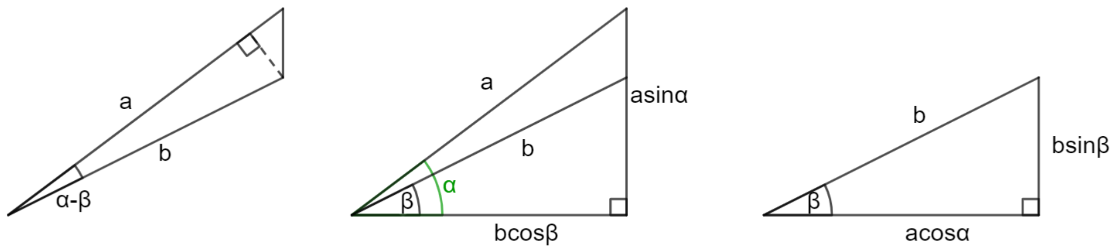
iz čega proizlazi početna tvrdnja

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

2.7.2 Sinus razlike

Tvrdnja 2.14.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$



Slika 2.9: Sinus razlike

Analiza: Primjenom teorema 2.12 na priloženu sliku vrijedi

$$\frac{1}{2}ab\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}ab\cos\beta\sin\alpha - \frac{1}{2}ba\cos\alpha\sin\beta,$$

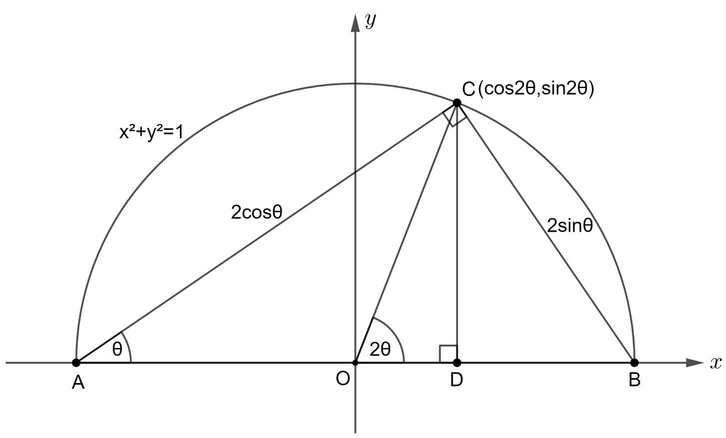
iz čega slijedi početna tvrdnja $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

2.7.3 Sinus i kosinus dvostrukog kuta

Tvrdnja 2.15.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$



Slika 2.10: Sinus i kosinus dvostrukog kuta

Analiza: Neka je zadan provokutan trokut $\triangle ABC$ i njemu opisana kružnica čija je jednadžba $x^2 + y^2 = 1$. Neka je θ veličina kuta pri vrhu A. Tada je $\measuredangle BOC$ tom kutu pripadni središnji kut pa prema teoremu o obodnom i središnjem kutu (2.9) vrijedi $|\measuredangle BOC| = 2\theta$. Budući da je opisana kružnica radijusa 1, vrijedi da je $|AB| = 2$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ vrijedi

$$\sin\theta = \frac{|BC|}{|AB|}, \cos\theta = \frac{|AC|}{|AB|},$$

tj.

$$|BC| = 2\sin\theta, |AC| = 2\cos\theta.$$

Iz trokuta $\triangle ODC$ proizlazi

$$\cos 2\theta = \tfrac{|OD|}{|OC|}, \text{ tj. } |OD| = \cos 2\theta$$

te

$$\sin 2\theta = \tfrac{|CD|}{|OC|}, \text{ tj. } |CD| = \sin 2\theta.$$

Iz te činjenice slijedi

$$|AD| = |AO| + |OD| = 1 + \cos 2\theta.$$

Promatrajući kutove trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ primjećuje se da oba trokuta imaju jedan kut veličine θ i jedan pravi kut. Tada su, prema K-K poučku o sličnosti trokuta (2.7), trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ slični, tj. $\triangle ABC \sim \triangle ADC$. Iz sličnosti dvaju trokuta slijedi proporcionalnost odgovarajućih stranica

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AB|}, \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

tj.

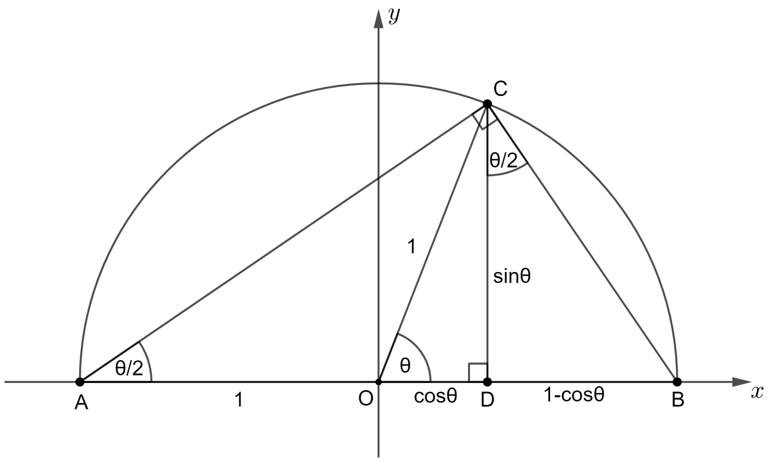
$$\frac{\sin 2\theta}{2\cos\theta} = \frac{2\sin\theta}{2},$$
$$\frac{1+\cos 2\theta}{2\cos\theta} = \frac{2\cos\theta}{2},$$

iz čega slijede tvrdnje koje je trebalo dokazati.

2.7.4 Tangens polovičnog kuta

Tvrdnja 2.16.

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta},$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$



Slika 2.11: Tangens polovičnog kuta

Analiza: Neka je zadan provokutan trokut $\triangle ABC$ i njemu opisana kružnica čija je jednadžba $x^2 + y^2 = 1$. Neka je $\frac{\theta}{2}$ veličina kuta pri vrhu A. Tada je $\measuredangle BOC$ tom kutu pripadni središnji kut pa prema teoremu o obodnom i središnjem kutu (2.9) vrijedi $|\measuredangle BOC| = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$. Budući da je zbroj kutova u trokutu jednak 180°, promatrajući trokut $\triangle ABC$ vrijedi

$$|\measuredangle CBA| = 180^\circ - |\measuredangle BAC| - |\measuredangle ACB| = 180^\circ - \frac{\theta}{2} - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\theta}{2}.$$

Budući da je $\overline{CD}$ zapravo visina iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, vrijedi da je $|\measuredangle BDC| = 90^\circ$. Tada promatrajući trokut $\triangle BCD$ slijedi

$$|\measuredangle DCB| = 180^\circ - |\measuredangle BDC| - |\measuredangle CBD| = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \frac{\theta}{2}) = \frac{\theta}{2}.$$

Iz trokuta $\triangle ODC$ slijedi

$$\sin\theta = \frac{|CD|}{|OC|} = \frac{|CD|}{1}, \cos\theta = \frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|OD|}{1},$$

tj.

$$|CD| = \sin\theta, |OD| = \cos\theta.$$

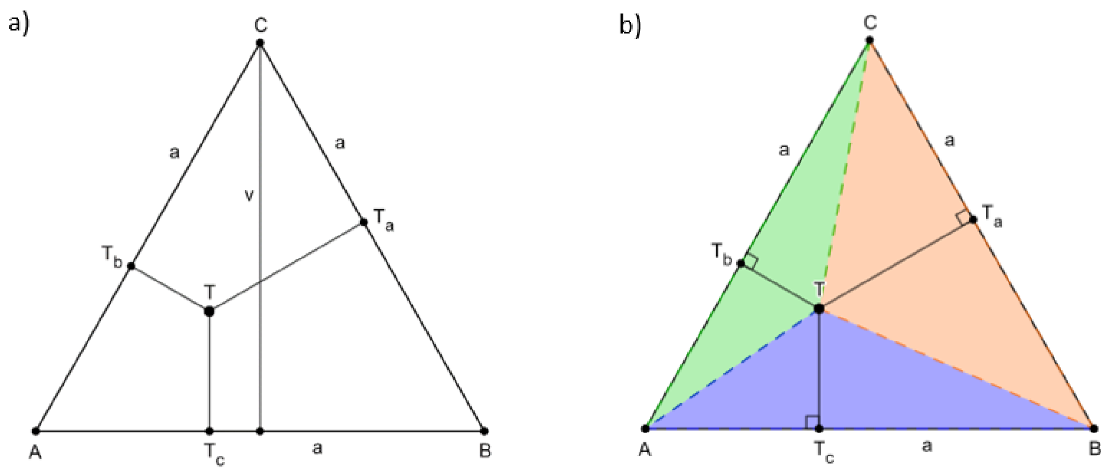
Prva jednakost tvrdnje koja se dokazuje slijedi iz trokuta $\triangle ADC$, dok druga jednakost slijedi iz trokuta $\triangle BDC$:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta},$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|DB|}{|CD|} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

2.8 Vivianijev teorem

Teorem 2.17. (Vivianijev teorem) *Neka je dan jednakostraničan trokut $\triangle ABC$. Tada je za bilo koju točku T trokuta $\triangle ABC$ zbroj udaljenosti točke T od stranica trokuta $\triangle ABC$ jednak duljini visine tog trokuta.*



Slika 2.12: Vivianijev teorem

Analiza: Neka je zadan jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ sa stranicama duljine a, visinom duljine v i proizvoljnom točkom T tog trokuta. Neka su T_a, T_b i T_c nožišta visina iz točke T na stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Tada vrijedi

$$P(\triangle ABC) = P(\triangle ABT) + P(\triangle BCT) + P(\triangle ATC).$$

Primjenom formule za površinu trokuta (2.4) dobiva se sljedeća jednakost

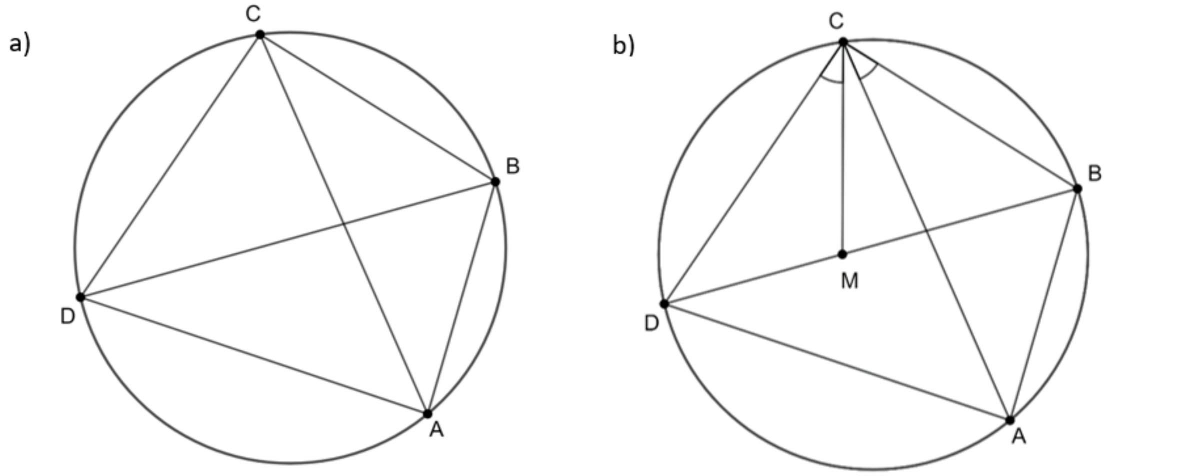
$$\frac{a \cdot v}{2} = \frac{a \cdot |TT_c|}{2} + \frac{a \cdot |TT_a|}{2} + \frac{a \cdot |TT_b|}{2},$$

iz čega slijedi tvrdnja

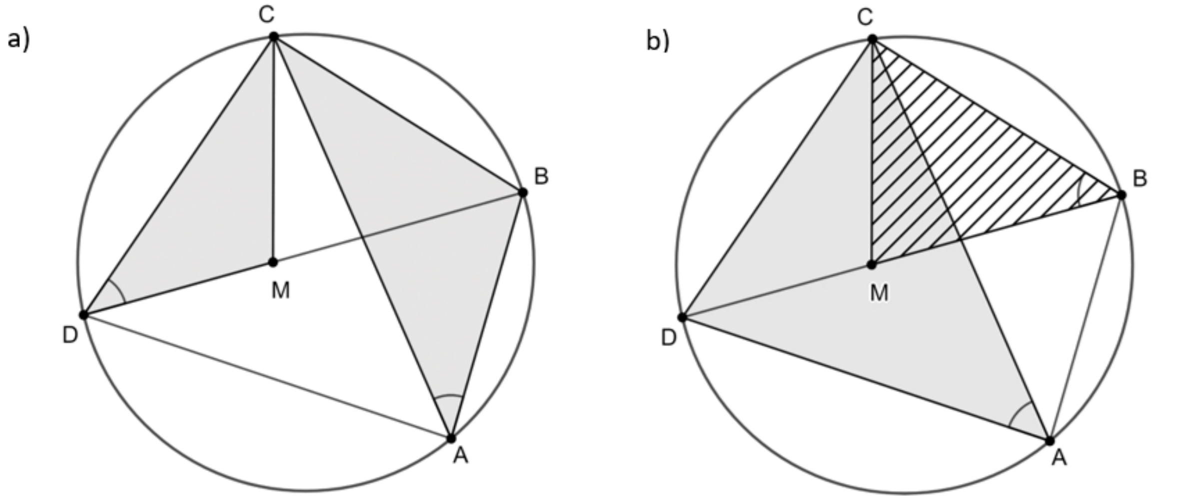
$$v = |TT_c| + |TT_a| + |TT_b|.$$

2.9 Ptolomejev teorem

Teorem 2.18. (Ptolomejev teorem) *U četverokutu upisanom u kružnicu, umnožak duljina dijagonala jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica.*



Slika 2.13: Ptolomejev teorem



Slika 2.14: Ptolomejev teorem

Analiza: Neka je zadana kružnica i njoj upisani četverokut $ABCD$ kao što je prikazano na slici 2.13 a). Neka je na zadanom četverokutu konstruirana dužina $\overline{CM}$ tako da vrijedi $|\measuredangle DCM| = |\measuredangle ACB|$ (slika 2.13 b)). Kutovi $\measuredangle BDC$ i $\measuredangle BAC$ su kutovi nad istim lukom CB zadane kružnice pa prema posljedici teorema o obodnom i središnjem kutu (2.9) vrijedi da su ta dva kuta jednake veličine. Tada, po K-K poučku o sličnosti (teorem 2.7), vrijedi da su trokuti $\triangle DMC$ i $\triangle ABC$ slični (slika 2.14 a)). Iz sličnosti ta dva trokuta vrijedi

$$\frac{|CD|}{|MD|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

iz čega slijedi

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |MD|. \tag{2.3}$$

Također, kutovi $\measuredangle CAD$ i $\measuredangle CBD$ su kutovi nad lukom DC. Prema posljedici teorema o obodnom i središnjem kutu (2.9) vrijedi da su ta dva kuta jednake veličine. Tada su, po K-K poučku o sličnosti (teorem 2.7), trokuti $\triangle DAC$ i $\triangle CMB$ slični (slika 2.14 b)). Iz toga slijedi

$$\frac{|BC|}{|BM|} = \frac{|AC|}{|AD|},$$

pa vrijedi

$$|BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BM|. \tag{2.4}$$

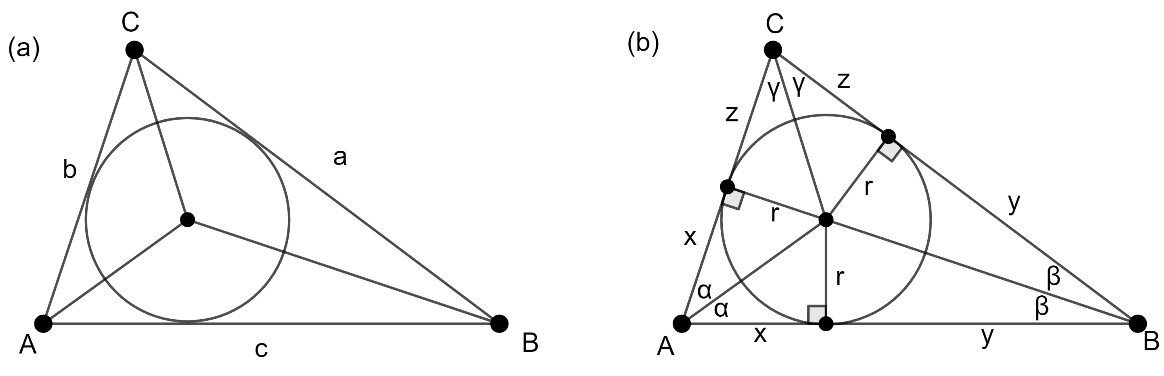
Koristeći dobivene jednakosti 2.3 i 2.4 slijedi

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |MD| + |AC| \cdot |BM| = |AC| \cdot (|MD| + |BM|) = |AC| \cdot |BD|.$$

2.10 Heronova formula

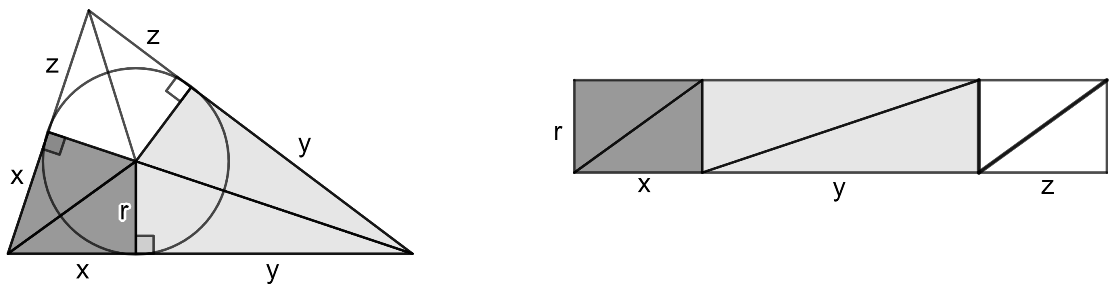
Za dokaz Heronove formule bit će potrebne dvije leme čiji su vizualni dokazi dani u nastavku.

Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ sa stranicama čije su duljine a, b, c, kako je prikazano na slici 2.15(a). Simetralama kutova određeno je središte trokutu upisane kružnice te je trokut podijeljen na šest pravokutnih trokuta čije su duljine stranica prikazane na slici 2.15(b).



Slika 2.15: Podjela trokuta na šest pravokutnih trokuta

Lema 2.19. *Površina trokuta jednaka je produktu poluopsega i radijusa tom trokutu upisane kružnice.*



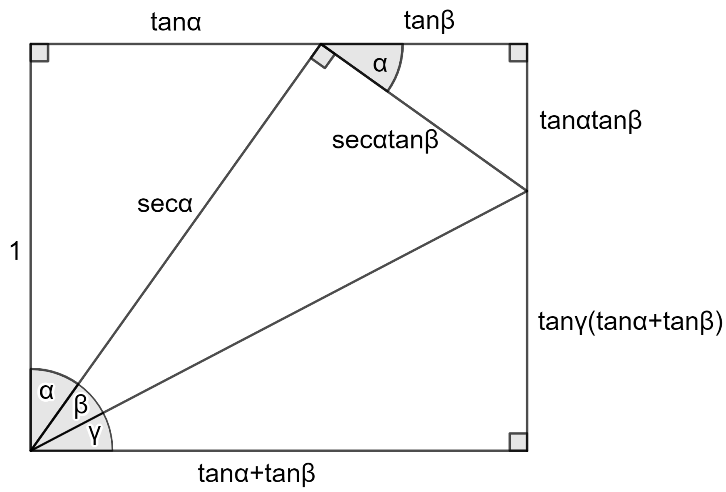
Slika 2.16: Površina trokuta

Analiza: Budući da su unutarnji trokuti pravokutni, mogu se složiti u pravokutnik čije su stranice duljine r i $x + y + z = s$ kao što je prikazano na slici 2.16, iz čega slijedi tvrdnja leme

$$P = r(x + y + z) = rs.$$

Lema 2.20. *Ako su α, β i γ veličine kutova takve da je $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, tada vrijedi*

$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1.$$



Slika 2.17: Prikaz tvrdnje leme 2.20.

Analiza: Prvo je konstruiran pravokutan trokut sa šiljastim kutom veličine α i katetama duljine 1 i $\tan\alpha$. Zatim, pravokutan trokut sa šiljastim kutom veličine β i katetama kako je prikazano na slici 2.17 te je konstruiran manji pravokutan trokut sa šiljastim kutom veličine α i katetama duljine $\tan\alpha\tan\beta$ i $\tan\beta$. Na kraju je dodan pravokutan trokut sa šiljastim kutom veličine γ tako da vrijedi $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$. Budući da je dobiven pravokutnik, vertikalne stranice su jednake duljine pa slijedi tvrdnja leme.

Teorem 2.21. (Heronova formula) *Površina P trokuta, čije su stranice duljine a, b, c i poluopseg $s=\frac{a+b+c}{2}$, dana je sa*

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokaz. Primjenom leme 2.20 na kutove veličine α, β i γ sa slike 2.15(b) vrijedi

$$\begin{aligned}1&=\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha\\&=\frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y}+\frac{r}{y}\cdot\frac{r}{z}+\frac{r}{z}\cdot\frac{r}{x}\\&=\frac{r^2(x+y+z)}{xyz}\\&=\frac{r^2s}{xyz}\\&=\frac{P^2}{sxyz}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Zadnji korak sijedi iz leme 2.19. Kako za poluopseg s vrijedi

$$s=x+y+z=x+a=y+b=z+c,$$

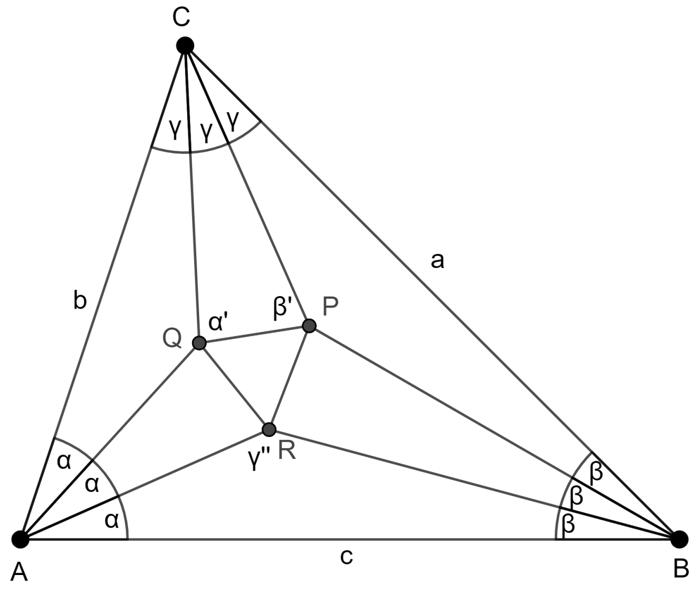
tada je

$$P^2=sxyz=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

2.11 Morleyev teorem

Teorem 2.22. (Morleyev teorem) *Susjedni parovi trisektrista kutova trokuta čine vrhove jednakostraničnog trokuta.*



Slika 2.18: Morleyev teorem

Analiza: Neka se trisektrise kutova trokuta $\triangle ABC$ sijeku u točkama P, Q i R kao što je prikazano na slici 2.18. Neka je $\triangle PQR$ Morleyev trokut polaznog trokuta $\triangle ABC$. Cilj je pokazati da je $\triangle PQR$ jednakostraničan. Za analizu ovog vizualnog dokaza bit će potreban poučak o sinusima (teorem 2.10) i formula za trostruki kut

$$\sin 3x = 3\sin x - 4(\sin x)^3 = 4\sin x \sin x' \sin x'',$$

gdje je $x' = x + \frac{\pi}{3}$, $x'' = x + \frac{2\pi}{3}$. Neka su kutovi trokuta $A' = 3\alpha$, $B' = 3\beta$, $C' = 3\gamma$. Tada je

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi,$$

tj.

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Neka je r radijus trokutu $\triangle ABC$ opisane kružnice. Tada prema poučku o sinusima vrijedi

$$\frac{a}{\sin A'} = \frac{b}{\sin B'} = \frac{c}{\sin C'} = 2r. \tag{2.6}$$

Iz trokuta $\triangle ABR$ vrijedi

$$\begin{aligned} |\measuredangle BRA| &= \pi - \alpha - \beta \\ &= \pi - \frac{\pi}{3} + \beta + \gamma - \beta \\ &= \frac{2\pi}{3} + \gamma \\ &= \gamma'' \end{aligned} \tag{2.7}$$

te

$$\frac{|AR|}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma''} \tag{2.8}$$

Iz tvrdnje 2.6 slijedi

$$c = 2r\sin 3\gamma = 8r\sin\gamma\sin\gamma'\sin\gamma''.$$

Sada se iz 2.8 i prethodne jednakosti dobiva

$$|AR| = 8r\sin\beta\sin\gamma\sin\gamma'.$$

Promatrajući trokute $\triangle CQA$ i $\triangle CPB$, analogno se dobije

$$|CQ| = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\beta'$$

i

$$|CP| = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\alpha',$$

iz čega slijedi

$$\frac{|CQ|}{\sin\beta'} = \frac{|CP|}{\sin\alpha'} = 8r\sin\alpha\sin\beta.$$

Ta tvrdnja vrijedi za trokut s vrhovima C,Q i P te kutovima α' i β'. Treći kut je γ, što slijedi iz raspisa

$$\alpha' + \beta' = \alpha + \frac{\pi}{3} + \beta + \frac{\pi}{3} = \alpha + \beta + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \gamma + \frac{2\pi}{3},$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma = \pi.$$

Prema poučku o sinusima slijedi da je taj trokut sukladan s $\triangle CPQ$. Stoga je

$$\frac{|CQ|}{\sin\beta'} = \frac{|CP|}{\sin\alpha'} = \frac{|PQ|}{\sin\gamma} = 8r\sin\alpha\sin\beta$$

i vrijedi

$$|PQ| = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Zbog simetričnosti ovog izraza slijedi

$$|PQ| = |QR| = |RP|.$$

Dakle, $\triangle PQR$ je jednakostraničan.

3 Zaključak

U ovom radu prikazani su dokazi iz područja geometrije na malo drugačiji način od uobičajenih formalnih dokaza, dokazani su metodom vizualizacije. Vizualizacija uvelike olakšava razumijevanje i shvaćanje pojmova koji nisu na prvi pogled jasni, stoga je vizualizacija izrazito primjenjiva u raznim područjima ljudskog djelovanja pa tako i u matematici. Vizualni dokazi korisni su u mnogim granama matematike i omiljeni su među učenicima i studentima jer su lakši za razumijevanje u usporedbi s formalnim, "pravim", dokazima. Oni pomažu u shvaćanju matematičkih ideja, koncepata i tvrdnji, olakšavaju prihvaćanje, razumijevanje i pamćenje složenijih matematičkih dokaza. Vizualni dokazi su posebno korisni u poučavanju geometrije, gdje vizualne metode služe kao osnovni alati za prikazivanje i tumačenje svojstava i odnosa ravninskih likova te računanje njihovih površina.

Popis slika

Bibliografija

[1] C. Alsina, R.B. Nelsen, *Math made visual: Creating Images for Understanding Mathematics*, The Mathematical Association of America, 2006.

[2] A. Čižmešija, D. Marić, *Dokaz bez riječi kao metoda uvođenja dokaza u nastavu matematike*, Zagreb

[3] Z. Kolar-Begović, V. Ždralović, *Vivianijev teorem*, Osječki matematički list 19 (2019.), 31-33.

[4] I. Marušić, D.Veljan, *Vizualni i kratki dokazi - prilog kreativnoj nastavi matematike (1.dio)*, Hrvatski matematički elektronički časopis 32 (2018.)

[5] I. Marušić, D.Veljan, *Vizualni i kratki dokazi - prilog kreativnoj nastavi matematike (2.dio)*, Hrvatski matematički elektronički časopis 33

[6] R.B. Nelsen, *Proofs without words*, MAA, Washington, 1993.

[7] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[8] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[9] I. Radošević Medvidović, M. Štefan Trubić, *Vizualizacija u nastavi matematike*

[10] S. Varošanec, *Teorem o obodnom i središnjem kutu*, Zagreb, URL:https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2014/12/Matka13-m02-obodni-kut.pdf(Pristupljeno: ožujak 2024.)

[11] *Primjena Pitagorina poučka na trapez*, URL:https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/d2d61772-7e7a-4f5b-98f9-6bbb5d5d13ca/html/4395_Primjena_Pitagorina_poucka_na_trapez.html(Pristupljeno: ožujak 2024.)

[12] Mathematical Visual Proofs, *Sine of a Sum I (visual proof; trigonometry)*, URL:https://www.youtube.com/watch?v=OCIHS2vmdRA(Pristupljeno: ožujak 2024.)