Magični pravokutnici

Meštrović, Irja

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Irja Meštrović

MAGIČNI PRAVOKUTNICI

Završni rad

Rijeka, rujan 2024.

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Irja Meštrović

MAGIČNI PRAVOKUTNICI

Mentor: doc. dr. sc. Sara Ban Martinović

Završni rad

Rijeka, rujan 2024.

SAŽETAK

U ovom završnom radu ćemo definirati magične pravokutnike. Pokazat ćemo da magični pravokutnik reda 2×2 ne postoji. Navest ćemo konstrukciju magičnih pravokutnika parnog reda. Ovu konstukciju ćemo prikazati na nekoliko primjera.

KLJUČNE RIJEČI

Magični pravokutnik, magične konstante, magični pravokutnik parnog reda

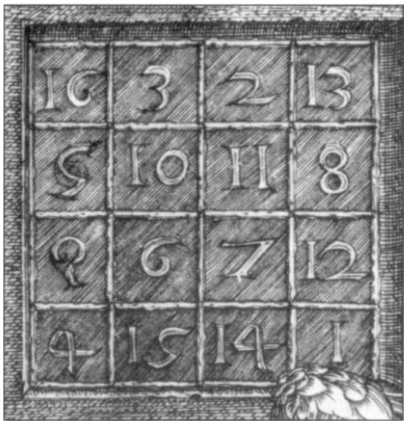
SADRŽAJ

UVOD

Magični pravokutnici su generalizacija magičnih kvadrata. Najstariji magični kvadrat potječe iz Kine (oko 2800. g. pr. Kr.). Poznat je pod nazivom Lo-Shu kvadrat. Radi se o magičnom kvadratu reda 3×3 (vidi sliku 1). Drugi najpoznatiji magični kvadrat je Dürerov magični kvadrat. To je magični kvadrat reda 4×4, kojeg je 1514. g. njemački umjetnik Albrecht Dürer prikazao na znamenitom bakrorezu *Melancholia I*. Slika 2 prikazuje ovaj magični kvadrat.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Slika 1: Lo-Shu kvadrat (preuzeto s https://en.wikipedia.org/wiki/Luoshu_Square#cite_note-1)



Slika 2: Dürerov magični kvadrat (preuzeto s https://hr.m.wikipedia.org/wiki/Datoteka:D%C3%BCrer_Melancholia_I.jpg)

U ovom završnom radu bavit ćemo se magičnim pravokutnicima te ćemo promatrati konstrukciju magičnih pravokutnika parnog reda. O konstrukciji magičnih pravokutnika naparnog reda možete pročitati u [2].

U prvom poglavlju definiramo realnu matricu, redak i stupac matrice, kvadratnu matricu, transponiranu matricu, te magični kvadrat, magični pravokutnik, magične konstante, magični pravokutnik parnog reda i magični pravokutnik neparnog reda. U drugom poglavlju navodimo jednostavnu metodu za konstrukciju magičnog pravokutnika parnog reda. Dokazujemo da tom konstrukcijom dobivamo magični pravokutnik parnog reda. Također ćemo navesti nekoliko primjera u kojima će detaljno biti objašnjen svaki korak konstrukcije.

1 MAGIČNI PRAVOKUTNICI

Definirajmo najprije osnovne pojmove koje ćemo koristiti u radu.

Neka su m i n prirodni brojevi. **(Realna) matrica** reda $m \times n$ je preslikavanje $A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1,2, \dots, n\} \to R$, gdje je R skup realnih brojeva. Pišemo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ili $A = (a_{ij})$ te kažemo da je $a_{ij} = A(i, j)$ **opći član** matrice A, za $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

***i*–ti redak** matrice A je matrica $(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in})$, $i = 1, \dots, m$, a ***j*–ti stupac** matrice A je matrica $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1, \dots, n$.

Kvadratna matrica je matrica u kojoj je broj redaka jednak broju stupaca, tj. $m = n$. Kažemo da je takva matrica reda n.

Neka je $A = (a_{ij})$ matrica reda $m \times n$. **Transponirana matrica** matrice A je matrica $A^T = (a_{ji})$. Ova matrica je reda $n \times m$.

Magični kvadrat reda $n \times n$, ili kraće reda n, je matrica reda $n \times n$ u kojoj se svaki element skupa $\{1, 2, \dots, n^2\}$ nalazi na točno jednoj poziciji tako da je zbroj brojva u svakom stupcu, svakom retku i na obje dijagonale jednak konstanti N. Broj N zovemo **magična konstanta**.

Magični pravokutnik reda $m \times n$ je matrica reda $m \times n$ u kojoj se svaki element skupa $\{1, 2, \dots, mn\}$ nalazi na točno jednoj poziciji tako da je zbroj brojeva u svakom retku jednak konstanti M, a zbroj brojeva u svakom stupcu jednak konstanti N. Brojeve M i N zovemo **magičnim konstantama**.

Aritmetička sredina svih elemenata magičnog pravokutnika reda $m \times n$ je $A = \frac{mn+1}{2}$ te vrijedi $M = An$ i $N = Am$, gdje su M i N magične konstante. Zbroj svih elemenata magičnog pravokutnika jednak je $mnA = mM = nN$.

Ako je mn paran broj, onda je $mn + 1$ neparan, pa da bi $M = An = \frac{n(mn+1)}{2}$ i $N = Am = \frac{m(mn+1)}{2}$ bili prirodni brojevi, i m i n moraju biti parni brojevi.

Ako je mn neparan broj, onda i m i n moraju biti neparni. U tom slučaju konstante M i N su prirodni brojevi jer je $mn + 1$ paran.

Dakle, ne postoji magični pravokutnik reda $m \times n$, gdje su m i n različite parnosti.

Magični pravokutnik reda $m \times n$, gdje su m i n parni prirodni brojevi, zovemo **magičnim pravokutnikom parnog reda**.

Magični pravokutnik reda $m \times n$, gdje su m i n neparni prirodni brojevi zovemo **magičnim pravokutnikom neparnog reda**.

U drugom poglavlju se bavimo konstrukcijom magičnog pravokutnika parnog reda i navodimo koliko primjera konstrukcije. O konstukciji magičnih pravokutnika naparnog reda možete pročitati u [2].

Trivijalni magični pravokutnik je reda 1×1 i to je matrica:

$$(1).$$

Magični pravokutnik reda 2×2 ne postoji. Ukoliko elemente skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ zapišemo u matricu reda 2×2 na način da je zbroj elemenata u svakom retku jednak $M = \frac{n(mn+1)}{2} = 5$, tada zbroj elemenata po stupcima iznosi 3 i 7, ili 4 i 6:

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ili $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Matrica $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ je primjer magičnog pravokutnika reda 2×4 s magičnim konstantama $M = \frac{n(mn+1)}{2} = 18$ i $N = \frac{m(mn+1)}{2} = 9$.

2 KONSTRUKCIJA MAGIČNIH PRAVOKUTNIKA PARNOG REDA

Neka su $m = 2p$ i $n = 2q$, gdje su p i q prirodni brojevi. Posebno ćemo razmatrati konstrukciju magičnog pravokutnika reda $m \times n$ za slučaj kada je bar jedan od brojeva p i q paran te za slučaj kada su i p i q neparni.

2.1 Prvi slučaj

Razmotrimo najprije slučaj kada je barem jedan od brojeva p i q paran. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je p paran broj, jer je transponirana matrica magičnog pravokutnika reda $m \times n$ magični pravokutnik reda $n \times m$.

Korak A1: Matricu reda $m \times n$ popunjavamo prirodnim brojevima od 1 do mn po stupcima na sljedeći način. U prvi stupac upisujemo brojeve od 1 do m. Drugi stupac popunjavamo brojevima $2m$, $2m-1$, $2m-2, \ldots$, $m+1$, treći stupac sadrži brojeve $2m+1$, $2m+2, \ldots$, $3m$, dok četvrti stupac sadrži brojeve $4m$, $4m-1$, $4m-2, \ldots$, $3m+1$. $(n-1)$ – ti stupac popunjavamo brojevima $(n-2)m+1$, $(n-2)m+2$, $(n-2)m+3, \ldots$, $(n-1)m$ te posljedni, n – ti stupac, popunjavamo brojevima nm, $nm-1$, $nm-2, \ldots$, $(n-1)m+1$.

U ovom koraku kažemo da smo brojeve od 1 do mn **zapisali u zmijolikom obliku po stupcima**.

Korak A2: Neka je $i = \frac{p}{2}+1, \ldots, \frac{3p}{2}$. U ovom koraku napravimo obrat elemenata i–tog retka na sljedeći način: zamjenimo par elemenata na pozicijama (i,j) i $(i, n-(j-1))$, gdje $j = 1, \ldots, q$.

U ovom koraku kažemo da **zrcalimo središnjih p redaka.**

Primjer 1

Konstruirajmo magični pravokutnik reda 4×6.Tada je $m = 2p = 4$, $n = 2q = 6$ te $p = 2$ i $q = 3$.

<u>Korak A1</u>: U ovom koraku zapisujemo brojeve od 1 do 24 u zmijolikom obliku po stupcima u matricu reda 4×6.

U prvi supac upisujemo brojeve od 1 do m, tj. u ovom slučaju prvi stupac popunjavamo brojevima od 1 do 4:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Drugi stupac popunjavamo brojevima $2m$, $2m-1$, $2m-2, \ldots$, $m+1$, tj. popunjavamo ga brojevima 8, 7, 6 i 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

U treći stupac zapisujemo brojeve $2m+1$, $2m+2, \ldots$, $3m$, tj. dodajemo brojeve 9, 10, 11 i 12:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 10 \\ 3 & 6 & 11 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

U četvrti stupac zapisujemo redom brojeve $4m$, $4m-1$, $4m-2, \ldots$, $3m+1$, tj. dodajemo mu brojeve 16, 15, 14 i 13:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 16 \\ 2 & 7 & 10 & 15 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \\ 4 & 5 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

U peti stupac zapisujemo redom brojeve $(n-2)m+1$, $(n-2)m+2$, $(n-2)m+3, \ldots$, $(n-1)m$, tj. brojeve 17, 18, 19 i 20:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 16 & 17 \\ 2 & 7 & 10 & 15 & 18 \\ 3 & 6 & 11 & 14 & 19 \\ 4 & 5 & 12 & 13 & 20 \end{pmatrix}.$$

Posljednji, šesti stupac popunjavamo prirodnim brojevima nm, $nm-1$, $nm-2,\dots$, $(n-1)m+1$, tj. brojevima 24, 23, 22 i 21:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 16 & 17 & 24 \\ 2 & 7 & 10 & 15 & 18 & 23 \\ 3 & 6 & 11 & 14 & 19 & 22 \\ 4 & 5 & 12 & 13 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

Korak A2: Zrcalimo središnja dva retka, odnosno drugi i treći redak. Parove zamijenjenih elemenata obojimo istom bojom:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 16 & 17 & 24 \\ 23 & 18 & 15 & 10 & 7 & 2 \\ 22 & 19 & 14 & 11 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 13 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

Zbroj elemenata svakog retka u dobivenoj matrici jednak je $M=\frac{n(mn+1)}{2}=75$, a zbroj elemenata svakog stupca jednak $N=\frac{m(mn+1)}{2}=50$ pa smo dobili magični pravokutnik reda 4×6.

Dokaz za prvi slučaj

Neka su $m=2p$ i $n=2q$, gdje je p paran broj. Pokažimo da se, primjenjujući korake A1 i A2, dobiva magični pravokutnik reda $m\times n$.

Zapis brojeva od 1 do mn u zmijolikom obliku po stupcima osigurava da su elementi i – tog retka redom brojevi: i, $4p+1-i$, $4p+i$, $8p+1-i$, $8p+i$, $12p+1-i$, ..., $4p(q-1)+i$, $4pq+1-i$, za sve $i=1,\dots,m$.

Izračunajmo zbroj elemenata i–tog retka:

$$\begin{aligned}(4p+1)+(12p+1)+\cdots+(4p(2q-1)+1) &= \\ &= q+4p\big(1+3+5+\cdots+(2q-1)\big) \\ &= q+4p\cdot\frac{q}{2}(2q-1+1) \\ &= q+4pq^2 \\ &= \frac{2q(4pq+1)}{2} \\ &= \frac{n(mn+1)}{2} \\ &= M.\end{aligned}$$

Dakle, zbroj elemenata u i–tom retku jednak je magičnoj konstanti M, za sve $i=1,\dots,m$.

Nakon primjene koraka A1, za $j = 1, \dots, n$, zbroj svih elemenata j–tog stupca iznosi $m^2 j - \frac{m(m-1)}{2}$, a zbroj elemenata na pozicijama (i,j), za $i = \frac{p}{2} + 1, \dots, \frac{3p}{2}$, iznosi $\frac{m^2 j}{2} - \frac{m(m-1)}{4}$.

Za $j = 1, \dots, q$, zbroj elemenata j–tog stupca manji je od magične konstante $N = \frac{m(mn+1)}{2}$ za $\frac{(n+1-2j)m^2}{2}$.

Za $j = q + 1, \dots, n$, zbroj elemenata j–tog stupca veći je od magične konstante $N = \frac{m(mn+1)}{2}$ za $\frac{(2j-n-1)m^2}{2}$.

Prema tome, zrcaljenjem središnjih p redaka, dobivamo da je zbroj elemenata u j–tom stupcu jednak magičnoj konstanti N, za sve $j = 1, \dots, n$.

Dakle, navedenom konstrukcijom dobivamo magični pravokutnik reda $m \times n$.

■

2.2 Drugi slučaj

Neka su $m = 2p$ i $n = 2q$, gdje su p i q neparni brojevi. U nastavku navodimo korake za konstrukciju magičnog pravokutnika reda $m \times n$.

Budući da magični pravokutnik reda 2×2 ne postoji, brojevi p i q ne mogu istovremeno biti jednaki 1.

Korak B1: Ovaj korak jednak je koraku A1 iz prvog slučaja.

Korak B2: U ovom koraku radimo obrat elemenata prvih $q-1$ stupaca tako da za sve $j = 1, \dots, q-1$ zamijenimo elemente na pozicijama (i,j) i $(m-(i-1), j)$, gdje $i = 1, \dots, p$.

Korak B3: Napravimo obrat elemenata u prvih p redaka na sljedeći način: za sve $i = 1, \dots, p$, zamijenimo elemente na pozicijama (i,j) i $(i, n-(j-1))$, gdje $j = 1, \dots, q-1$.

Korak B4: U ovom koraku radimo zamjenu središnjih $p-3$ elementa q–tog stupca s odgovarajućim središnjim $p-3$ elementima u $(q+1)$–tom stupcu.

Ako je $p \geq 5$, napravimo zamjenu elemenata na pozicijama (i,q) i $(i,q+1)$ za sve $i = \frac{p+5}{2}, \dots, \frac{3p-3}{2}$.

U ovom koraku napravimo još i zamjenu elementa na poziciji $(1+\frac{p-3}{2}, q)$ s elementom na poziciji $(1+\frac{p-3}{2}, q+1)$ te zamijenimo elemente na pozicijama $(3+\frac{p-3}{2}, q)$ i $(3+\frac{p-3}{2}, q+1)$.

Primjer 2

Konstruirajmo magični pravokutnik reda 6×10. Tada je $m = 6$, $n = 10$, $p = 3$ i $q = 5$.

Korak B1:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 11 \\ 3 & 10 \\ 4 & 9 \\ 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 12 & 13 \\ 2 & 11 & 14 \\ 3 & 10 & 15 \\ 4 & 9 & 16 \\ 5 & 8 & 17 \\ 6 & 7 & 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 12 & 13 & 24 \\ 2 & 11 & 14 & 23 \\ 3 & 10 & 15 & 22 \\ 4 & 9 & 16 & 21 \\ 5 & 8 & 17 & 20 \\ 6 & 7 & 18 & 19 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 13 & 24 & 25 \\ 2 & 11 & 14 & 23 & 26 \\ 3 & 10 & 15 & 22 & 27 \\ 4 & 9 & 16 & 21 & 28 \\ 5 & 8 & 17 & 20 & 29 \\ 6 & 7 & 18 & 19 & 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 12 & 13 & 24 & 25 & 36 \\ 2 & 11 & 14 & 23 & 26 & 35 \\ 3 & 10 & 15 & 22 & 27 & 34 \\ 4 & 9 & 16 & 21 & 28 & 33 \\ 5 & 8 & 17 & 20 & 29 & 32 \\ 6 & 7 & 18 & 19 & 30 & 31 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 13 & 24 & 25 & 36 & 37 \\ 2 & 11 & 14 & 23 & 26 & 35 & 38 \\ 3 & 10 & 15 & 22 & 27 & 34 & 39 \\ 4 & 9 & 16 & 21 & 28 & 33 & 40 \\ 5 & 8 & 17 & 20 & 29 & 32 & 41 \\ 6 & 7 & 18 & 19 & 30 & 31 & 42 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 13 & 234 & 25 & 36 & 37 & 48 \\ 2 & 11 & 14 & 23 & 26 & 35 & 38 & 47 \\ 3 & 10 & 15 & 22 & 27 & 34 & 39 & 46 \\ 4 & 9 & 16 & 21 & 28 & 33 & 40 & 45 \\ 5 & 8 & 17 & 20 & 29 & 32 & 41 & 44 \\ 6 & 7 & 18 & 19 & 30 & 31 & 42 & 43 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 13 & 24 & 25 & 36 & 37 & 48 & 49 \\ 2 & 11 & 14 & 23 & 26 & 35 & 38 & 47 & 50 \\ 3 & 10 & 15 & 22 & 27 & 34 & 39 & 46 & 51 \\ 4 & 9 & 16 & 21 & 28 & 33 & 40 & 45 & 52 \\ 5 & 8 & 17 & 20 & 29 & 32 & 41 & 44 & 53 \\ 6 & 7 & 18 & 19 & 30 & 31 & 42 & 43 & 54 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 13 & 24 & 25 & 36 & 37 & 48 & 49 & 60 \\ 2 & 11 & 14 & 23 & 26 & 35 & 38 & 47 & 50 & 59 \\ 3 & 10 & 15 & 22 & 27 & 34 & 39 & 46 & 51 & 58 \\ 4 & 9 & 16 & 21 & 28 & 33 & 40 & 45 & 52 & 57 \\ 5 & 8 & 17 & 20 & 29 & 32 & 41 & 44 & 53 & 56 \\ 6 & 7 & 18 & 19 & 30 & 31 & 42 & 43 & 54 & 55 \end{pmatrix}$$

Korak B2:

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 18 & 19 & 25 & 36 & 37 & 48 & 49 & 60 \\ 5 & 8 & 17 & 20 & 26 & 35 & 38 & 47 & 50 & 59 \\ 4 & 9 & 16 & 21 & 27 & 34 & 39 & 46 & 51 & 58 \\ 3 & 10 & 15 & 22 & 28 & 33 & 40 & 45 & 52 & 57 \\ 2 & 11 & 14 & 23 & 29 & 32 & 41 & 44 & 53 & 56 \\ 1 & 12 & 13 & 24 & 30 & 31 & 42 & 43 & 54 & 55 \end{pmatrix}$$

Korak B3:

$$\begin{pmatrix} 60 & 49 & 48 & 37 & 25 & 36 & 19 & 18 & 7 & 6 \\ 59 & 50 & 47 & 38 & 26 & 35 & 20 & 17 & 8 & 5 \\ 58 & 51 & 46 & 39 & 27 & 34 & 21 & 16 & 9 & 4 \\ 3 & 10 & 15 & 22 & 28 & 33 & 40 & 45 & 52 & 57 \\ 2 & 11 & 14 & 23 & 29 & 32 & 41 & 44 & 53 & 56 \\ 1 & 12 & 13 & 24 & 30 & 31 & 42 & 43 & 54 & 55 \end{pmatrix}$$

Korak B4:

$$\begin{pmatrix} 60 & 49 & 48 & 37 & 36 & 25 & 19 & 18 & 7 & 6 \\ 59 & 50 & 47 & 38 & 26 & 35 & 20 & 17 & 8 & 5 \\ 58 & 51 & 46 & 39 & 34 & 27 & 21 & 16 & 9 & 4 \\ 3 & 10 & 15 & 22 & 28 & 33 & 40 & 45 & 52 & 57 \\ 2 & 11 & 14 & 23 & 29 & 32 & 41 & 44 & 53 & 56 \\ 1 & 12 & 13 & 24 & 30 & 31 & 42 & 43 & 54 & 55 \end{pmatrix}$$

Zbroj elemenata svakog retka u dobivenoj matrici jednak je $M = \frac{n(mn+1)}{2} = 305$, a zbroj elemenata svakog stupca je $N = \frac{m(mn+1)}{2} = 183$ pa smo u ova četiri koraka dobili magični pravokutnik reda 6×10.

Primjer 3

U ovom primjeru konstruirat ćemo magični pravokutnik reda 10×14. Tada je $m = 10$, $n = 14$, $p = 5$ i $q = 7$.

Korak B1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 20 & 21 & 40 & 41 & 60 & 61 & 80 & 81 & 100 & 101 & 120 & 121 & 140 \\ 2 & 19 & 22 & 39 & 42 & 59 & 62 & 79 & 82 & 99 & 102 & 119 & 122 & 139 \\ 3 & 18 & 23 & 38 & 43 & 58 & 63 & 78 & 83 & 98 & 103 & 118 & 123 & 138 \\ 4 & 17 & 24 & 37 & 44 & 57 & 64 & 77 & 84 & 97 & 104 & 117 & 124 & 137 \\ 5 & 16 & 25 & 36 & 45 & 56 & 65 & 76 & 85 & 96 & 105 & 116 & 125 & 136 \\ 6 & 15 & 26 & 35 & 46 & 55 & 66 & 75 & 86 & 95 & 106 & 115 & 126 & 135 \\ 7 & 14 & 27 & 34 & 47 & 54 & 67 & 74 & 87 & 94 & 107 & 114 & 127 & 134 \\ 8 & 13 & 28 & 33 & 48 & 53 & 68 & 73 & 88 & 93 & 108 & 113 & 128 & 133 \\ 9 & 12 & 29 & 32 & 49 & 52 & 69 & 72 & 89 & 92 & 109 & 112 & 129 & 132 \\ 10 & 11 & 30 & 31 & 50 & 51 & 70 & 71 & 90 & 91 & 110 & 111 & 130 & 131 \end{pmatrix}$$

Korak B2:

$$\begin{pmatrix}
10 & 11 & 30 & 31 & 50 & 51 & 61 & 80 & 81 & 100 & 101 & 120 & 121 & 140 \\
9 & 12 & 29 & 32 & 49 & 52 & 62 & 79 & 82 & 99 & 102 & 119 & 122 & 139 \\
8 & 13 & 28 & 33 & 48 & 53 & 63 & 78 & 83 & 98 & 103 & 118 & 123 & 138 \\
7 & 14 & 27 & 34 & 47 & 54 & 64 & 77 & 84 & 97 & 104 & 117 & 124 & 137 \\
6 & 15 & 26 & 35 & 46 & 55 & 65 & 76 & 85 & 96 & 105 & 116 & 125 & 136 \\
5 & 16 & 25 & 36 & 45 & 56 & 66 & 75 & 86 & 95 & 106 & 115 & 126 & 135 \\
4 & 17 & 24 & 37 & 44 & 57 & 67 & 74 & 87 & 94 & 107 & 114 & 127 & 134 \\
3 & 18 & 23 & 38 & 43 & 58 & 68 & 73 & 88 & 93 & 108 & 113 & 128 & 133 \\
2 & 19 & 22 & 39 & 42 & 59 & 69 & 72 & 89 & 92 & 109 & 112 & 129 & 132 \\
1 & 20 & 21 & 40 & 41 & 60 & 70 & 71 & 90 & 91 & 110 & 111 & 130 & 131
\end{pmatrix}$$

Korak B3:

$$\begin{pmatrix}
140 & 121 & 120 & 101 & 100 & 81 & 61 & 80 & 51 & 50 & 31 & 30 & 11 & 10 \\
139 & 122 & 119 & 102 & 99 & 82 & 62 & 79 & 52 & 49 & 32 & 29 & 12 & 9 \\
138 & 123 & 118 & 103 & 98 & 83 & 63 & 78 & 53 & 48 & 33 & 28 & 13 & 8 \\
137 & 124 & 117 & 104 & 97 & 84 & 64 & 77 & 54 & 47 & 34 & 27 & 14 & 7 \\
136 & 125 & 116 & 105 & 96 & 85 & 65 & 76 & 55 & 46 & 35 & 26 & 15 & 6 \\
5 & 16 & 25 & 36 & 45 & 56 & 66 & 75 & 86 & 95 & 106 & 115 & 126 & 135 \\
4 & 17 & 24 & 37 & 44 & 57 & 67 & 74 & 87 & 94 & 107 & 114 & 127 & 134 \\
3 & 18 & 23 & 38 & 43 & 58 & 68 & 73 & 88 & 93 & 108 & 113 & 128 & 133 \\
2 & 19 & 22 & 39 & 42 & 59 & 69 & 72 & 89 & 92 & 109 & 112 & 129 & 132 \\
1 & 20 & 21 & 40 & 41 & 60 & 70 & 71 & 90 & 91 & 110 & 111 & 130 & 131
\end{pmatrix}$$

Korak B4:

$$\begin{pmatrix}
140 & 121 & 120 & 101 & 100 & 81 & 61 & 80 & 51 & 50 & 31 & 30 & 11 & 10 \\
139 & 122 & 119 & 102 & 99 & 82 & 62 & 79 & 52 & 49 & 32 & 29 & 12 & 9 \\
138 & 123 & 118 & 103 & 98 & 83 & 63 & 78 & 53 & 48 & 33 & 28 & 13 & 8 \\
137 & 124 & 117 & 104 & 97 & 84 & 64 & 77 & 54 & 47 & 34 & 27 & 14 & 7 \\
136 & 125 & 116 & 105 & 96 & 85 & 76 & 65 & 55 & 46 & 35 & 26 & 15 & 6 \\
5 & 16 & 25 & 36 & 45 & 56 & 75 & 66 & 86 & 95 & 106 & 115 & 126 & 135 \\
4 & 17 & 24 & 37 & 44 & 57 & 67 & 74 & 87 & 94 & 107 & 114 & 127 & 134 \\
3 & 18 & 23 & 38 & 43 & 58 & 68 & 73 & 88 & 93 & 108 & 113 & 128 & 133 \\
2 & 19 & 22 & 39 & 42 & 59 & 69 & 72 & 89 & 92 & 109 & 112 & 129 & 132 \\
1 & 20 & 21 & 40 & 41 & 60 & 70 & 71 & 90 & 91 & 110 & 111 & 130 & 131
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 140 & 121 & 120 & 101 & 100 & 81 & 61 & 80 & 51 & 50 & 31 & 30 & 11 & 10 \\ 139 & 122 & 119 & 102 & 99 & 82 & 79 & 62 & 52 & 49 & 32 & 29 & 12 & 9 \\ 138 & 123 & 118 & 103 & 98 & 83 & 63 & 78 & 53 & 48 & 33 & 28 & 13 & 8 \\ 137 & 124 & 117 & 104 & 97 & 84 & 77 & 64 & 54 & 47 & 34 & 27 & 14 & 7 \\ 136 & 125 & 116 & 105 & 96 & 85 & 76 & 65 & 55 & 46 & 35 & 26 & 15 & 6 \\ 5 & 16 & 25 & 36 & 45 & 56 & 75 & 66 & 86 & 95 & 106 & 115 & 126 & 135 \\ 4 & 17 & 24 & 37 & 44 & 57 & 67 & 74 & 87 & 94 & 107 & 114 & 127 & 134 \\ 3 & 18 & 23 & 38 & 43 & 58 & 68 & 73 & 88 & 93 & 108 & 113 & 128 & 133 \\ 2 & 19 & 22 & 39 & 42 & 59 & 69 & 72 & 89 & 92 & 109 & 112 & 129 & 132 \\ 1 & 20 & 21 & 40 & 41 & 60 & 70 & 71 & 90 & 91 & 110 & 111 & 130 & 131 \end{pmatrix}$$

Zbroj elemenata svakog retka dobivene matrice jednak je $M = \frac{n(mn+1)}{2} = 987$, a zbroj elemenata svakog stupca je $N = \frac{m(mn+1)}{2} = 705$ te smo dobili magični pravokutnik reda 10×14.

Dokaz za drugi slučaj

Neka su $m = 2p$ i $n = 2q$, gdje su p i q neparni brojevi.

U nastavku dokazujemo da se primjenom koraka B1, B2, B3 i B4 dobiva magični pravokutnik reda $m \times n$.

Za korake B1 i B2, dokaz je analogan prvom slučaju konstrukcije.

Nakon primjene koraka B3, elementi q–tog stupca su redom $(q-1)m+1$, $(q-1)m+2$, $(q-1)m+3, \ldots, qm$.
Elementi $(q+1)$–tog stupca su redom $(q+1)m+1$, $(q+1)m-1$, $(q+1)m-2, \ldots, qm+1$.

Kako je $n = 2q$, zbroj svih elemenata q–tog stupca manji je od magične konstante N za $\frac{m^2}{2}$. Zbroj središnjih $p-3$ elemenata u q–tom stupcu je

$$\sum_{i=(p+5)/2}^{3(p-1)/2} [(q-1)m+i] = \frac{1}{2}(p-3)(4pq-2p+1),$$

a zbroj središnjih $p-3$ elemenata $(q+1)$–tog stupca je

$$\sum_{i=(p+5)/2}^{3(p-1)/2} [(q+1)m+1-i] = \frac{1}{2}(p-3)(4pq+2p+1).$$

Dakle, zamjena središnjih $p-3$ elemenata q–tog stupca sa središnjih $p-3$ elemenata $(q+1)$–tog stupca povećava zbroj elemenata q–tog stupca za $m(p-3)$ i smanjuje zbroj elemenata $(q+1)$–tog stupca za $m(p-3)$.

Nadalje, primijetimo da se na poziciji $(1+\frac{p-3}{2},q)$ nalazi element $(q-1)m+1+\frac{p-3}{2}$, a na poziciji $(1+\frac{p-3}{2},q+1)$ je element $(q+1)m+1-1-\frac{p-3}{2}$. Na poziciji $(3+\frac{p-3}{2},q)$ se nalazi element $(q-1)m+3+\frac{p-3}{2}$, dok je na poziciji $(3+\frac{p-3}{2},q+1)$ element $(q+1)m+1-3-\frac{p-3}{2}$.

Posljednje dvije zamjene elemenata u koraku B4 povećavaju zbroj elemenata q–tog stupca za $4m-2(p-3)-6$, a smanjuju zbroj elemenata $(q+1)$–tog stupca za isti iznos.

Prema tome, sveukupne zamjene u koraku B4 dovode do povećanja i smanjenja zbroja elemenata odgovarajućih stupaca za $m(p-3)+4m-2(p-3)-6=mp=\frac{m^2}{2}$, čime se osigurava da budu zadovoljena svojstva magičnog pravokutnika.

■

ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu definirali smo magične kvadrate i magične pravokutnike te smo naveli metodu za konstrukciju magičnih pravokutnika parnog reda. Dokazali smo da navedena metoda konstrukcije daje magični pravokutnik parnog reda te smo konstruirali nekoliko primjera.

LITERATURA

[1] Das, A., De Los Reyes, J. P., Midha, C. K., Vellaisamy, P., *On a method to construct magic rectangles of even order*, Utilitas Mathematica, 55 (2009), 131 – 144.
URL: http://www.math.iitb.ac.in/~ashish/Magic/paper2.pdf (31.08.2024.)

[2] Chai, F. S., Das, A., Midha C. K., *Constuction of magic rectangles of odd order*, Australasian Journal of Combinatorics, 80 (2013), 277 – 284.
URL: http://www.math.iitb.ac.in/~ashish/Magic/paper.pdf (31.08.2024.)

[3] Jakobović, Z., *Brojevi i brojke*, Kiklos – krug knjige, Zagreb, 2016.

[4] *Magic Square*, Wikipedia
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square (31.08.2024)

POPIS SLIKA