Integralni račun i primjena u srednjoškolskoj nastavi matematike

Matajčić, Barbara

Sveučilište u Rijeci – Fakultet za matematiku

Diplomski sveučilišni studij matematika – smjer nastavnički

Integralni račun i primjena u srednjoškolskoj nastavi matematike

Barbara Matajčić

Diplomski rad

Rijeka, 2022.

Sveučilište u Rijeci – Fakultet za matematiku

Diplomski sveučilišni studij matematika – smjer nastavnički

Integralni račun i primjena u srednjoškolskoj nastavi matematike

Barbara Matajčić

Mentorica: Doc. dr.sc. Milena Sošić

Kolegij: Metodika nastave matematike 2

Diplomski rad

Rijeka, 2022.

Zahvala

Zahvaljujem se svojoj mentorici dr.sc. Mileni Sošić na odgovornom mentorstvu, prenesenom znanju i pomoći pri izradi diplomskog rada.

Također, htjela bi se zahvaliti svojoj obitelji, prijateljima i dečku na cjelokupnoj podršci tijekom svog akademskog obrazovanja.

Sažetak

U ovom diplomskom radu kritički ćemo se osvrnuti i usporediti dva odabrana udžbenika za 4. razred srednje škole u sadržajima integralnog računa. Osim toga provest ćemo i usporedbu navedenog sadržaju iz predmeta matematika prije i poslije donošenja novoga kurikuluma 2019. godine. Komentirat ćemo i analizirati promjene u načinu izlaganja gradiva te sam način obrade gradiva prije i poslije donošenja kurikuluma. Također obuhvatit ćemo aktivnosti i pristupe koji se mogu primijeniti u nastavi matematike iz područja integralnog računa i primjene, a sve s ciljem poboljšanja i unapređenja njezine kvalitete.

Ključne riječi

integral, problem površine, krivocrtni trapez, određeni integral, neodređeni integral, integralne sume, primitivna funkcija, Newton-Leibnizova formula

Sadržaj

1. Uvod

Integralni račun dio je grane matematike koja se bavi diferencijalnim i integralnim izračunom, a najvećim se dijelom temelji na proučavanju metoda izračunavanja vrijednosti integrala na nekome intervalu (podskupu skupa realnih brojeva). Glavni pojmovi integralnog računa su određeni integral te primitivna funkcija i neodređeni integral. Određeni integral u današnje vrijeme ima vrlo široku primjenu, no u svojim se počecima počeo upotrebljavati u tada sveprisutnom, jednostavnom problemu određivanja površine. Problem određivanja površine lika u ravnini, odnosno tijela u prostoru, seže još u daleko antičko razdoblje. Arhimed je prilikom izračunavanja površine kruga koristio posebnu metodu za izračunavanje površine likova na način da se u navedeni lik umetne niz poligona, takvih da im površine konvergiraju ka površini cijelog lika. Navedena metoda naziva se metoda ekshaustije i predstavlja početak razvitka integralnog računa. U sljedećih nekoliko stoljeća nije bilo značajnijih promjena u ovome području sve do kraja 17. stoljeća kada su matematičari počeli detaljnije proučavati određene mehaničke probleme, kao što je problem određivanja težišta tijela, problem brzine i mnogi drugi. U svojim su radovima prilikom određivanja površina likova promatrali površine njihovih segmenata koje su računali kao sume dužina pa se, obzirom na danas poznatu definiciju integrala, takav pristup može smatrati početkom integralnog računa. Uz nastanak integralnog računa povezani su mnogi poznati matematičari, koji su uvelike doprinijeli njegovu nastanku i razvoju, no ipak se osnivačima integralnog računa smatraju I.Newton (1642.-1727., engleski fizičar, matematičar i astronom) i G.W.Leibniz (1646. – 1716., njemački filozof i matematičar). Oba matematičara su međusobno neovisna jedan o drugome došli do brojnih otkrića i time postavili temelje integralnog računa. U svojim izračunima oba matematičara uočavaju povezanost između diferenciranja i integriranja, kao međusobno invertnih operacija. Konkretno, Newton je baveći se problemima mehanike, odnosno proučavanjem fizikalnog modela brzine, uočio navedenu povezanost, dok je nekoliko godina kasnije Leibniz promatrajući problem tangente, geometrijskim načinom razmatranja došao do istoga otkrića. Spomenimo da je Leibniz proučavajući pronalaženje jednostavne metode za određivanje kvadrature krivulje uveo simbol $\int$ za oznaku integrala koji i danas koristimo. U to vrijeme djelovanja radovi Newton i Leibniza bili su dosta nejasni i neshvaćeni za većinu matematičara. Ono što danas smatramo temeljem integralnog računa razvilo se tek početkom 19. stoljeća kada su A. L. Cauchy i K. Weierstrass od integralnog računa stvorili jedno od najznačajnijih područja matematičke analize. Takvim saznanjem, problem određivanja površine lika odnosno tijela počinje se rješavati analitičkim, a ne samo geometrijskim metodama, kako se rješavalo prije tog saznanja. Primjena integralnog računa sveprisutna je u mnogim prirodnim područjima, kao što su matematika, fizika, mehanika, građevina. Obzirom na kompleksnost primjene, integralni se račun, na nešto jednostavniji način uvodi u 4.razredu gimnazija i tehničkih škola.

U ovom diplomskom radu kritički će se analizirati i argumentirati integralni računa prije donošenja novog kurikuluma u školstvu (2019. godina) i nakon donošenja istoga. Ta analiza provest će se usporedbom dva udžbenika [1] i [2] izdanih prije, odnosno poslije donošenja kurikuluma. Pri tome će se istaknuti razlike u sadržaju i načinu izlaganja gradiva te dati prijedlozi aktivnosti za lakše usvajanje istog. Tijekom analize posebno će se obratiti pozornost i na zastupljenost matematičkih načela: načelo znanstvenosti, pristupačnosti, postupnosti, sistematičnosti, zornosti. Navedimo da je načelo znanstvenosti najčešće zanemareno, jer se određeni pojmovi, zbog nedostatka učeničkog predznanja, pojednostavljuju sa svrhom lakšeg svladavanja nastavnih sadržaja.

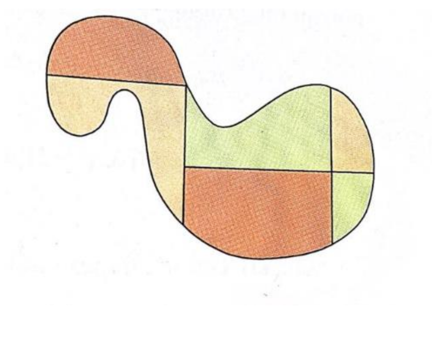
2. Integralni račun u matematici

Kao što je u uvodnom dijelu navedeno, određeni integral ima najveću primjenu upravo u izračunavanju površina likova (u ravnini) omeđenih krivuljama. U ovome će se dijelu iznijeti analiza sadržaja udžbenika [1] i [2] pri čemu će se navesti koja se područja i na koji način obrađuju prije i poslije donošenja novog kurikuluma. Razmatrat će se problem površine i njegova povezanost s definicijom određenog integrala. Analizirat će se uvođenje i primjena Newton-Leibnizove formule. Također, analizirat će se primjena metoda (metoda supstitucije, metoda parcijalne integracije) za izračunavanje integrala kroz navedene udžbenike. Na kraju istaknut će se primjena integrala u računanju površina.

2.1. Analiza udžbenika i osvrt – problem površine

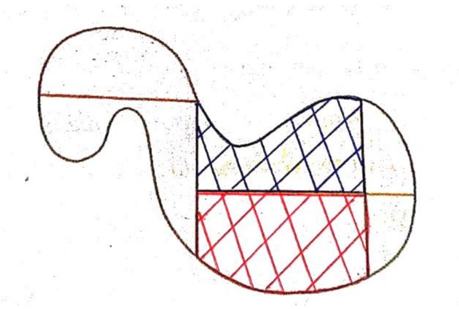
2.1.1. Problem površine i izračunavanje površine krivocrtnog trapeza

S problemom izračunavanja površine zadanog lika u ravnini učenici se prvi put susreću na kraju svog srednjoškolskog obrazovanja, u 4. razredu srednje škole, u nastavnoj cjelini integralni račun. Kroz oba se udžbenika prva nastavna cjelina obrađuje na isti način, no pod različitim naslovima. Autori započinju nastavnu cjelinu „Integral i primitivna funkcija“ u [1], odnosno „Integralni račun“ u [2] s problemom određivanja površine nekog lika u ravnini koji se horizontalnim i vertikalnim cijepanjem dijeli na dijelove koje nazivamo krivocrtnim trapezima. Pritom autori navode da je krivocrtni trapez lik koji ima tri stranice poput stranica trapeza, a četvrta stranica opisana je lukom krivulje, pri čemu koriste lik, prikazan na slici 1 koji nije detaljnije objašnjen.



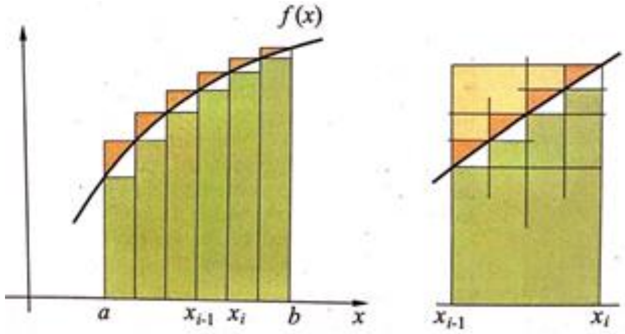
Slika 1: Krivocrtni trapez (skenirana slika iz udžbenika [2], str.129.)

Sa slike 1 lako je vidljivo da je prikazan lik podijeljen na 6 dijelova, međutim nije jasno jesu li svi ti dijelovi ujedno i krivocrtni trapezi. Naime, pojedini dijelovi prikazanog lika imaju dvije ili jednu stranicu „poput stranica trapeza“ (dužine), a preostala stranica je opisana lukom krivulje. Pritom treba naglasiti da je nejasno na koje se tri stranice misli da su „poput stranica trapeza“. Time je narušeno načelo znanstvenosti, jer iz navedenog proizlazi da se učenicima daje kriva i neprecizna predodžba pojma krivocrtnog trapeza. Dakle, svi dijelovi navedenog lika nisu ujedno i krivocrtni trapezi, stoga je potreban dodatan opis slike 1 u kojoj treba istaknuti krivocrtne trapeze. Smatram da bi se slika 1 trebala prikazati u obliku slike 2 uz dodatni komentar da su na slici 2 prikazana dva krivocrtna trapeza od koji je jedan osjenčan plavom, a drugi crvenom bojom.



Slika 2: Krivocrtni trapezi

Prilikom definiranja površine krivocrtnog trapeza autori se ne izražavaju u potpunosti precizno čime se djelomično narušava načelo znanstvenosti. Konkretno, promatra se neprekinuta i pozitivna funkcija f „*na intervalu* $[a, b]$". Uobičajeno je da se pod pojmom interval podrazumijeva otvoreni ili eventualno poluotvoreni (poluzatvoreni) interval te da se zatvoreni interval naziva segment. Time bi preciznije bilo reći na segmentu $[a, b]$. Također, uvode se pojmovi neprekinuta pozitivna funkcija koji nisu dodatno objašnjeni, stoga se nameće pitanje: jesu li ti pojmovi učenicima jasni i shvaćaju li oni što se pod tim pojmovima podrazumijeva? Pri definiranju pojmova donja i gornja integralna suma ističu. „*Nad svakim dijelom* $[x_{i-1}, x_i]$ *postavit ćemo dva pravokutnika, jedan koji leži ispod grafa funkcije i drugi koji ga premašuje*“. Ispravnije i matematički preciznije bi bilo reći da postavljamo jedan pravokutnik ispod, a drugi iznad grafa funkcije f nad segmentom $[x_{i-1}, x_i]$, pri čemu prvi nazivamo upisanim, a drugi opisanim pravokutnikom grafu funkcije $y = f(x)$ nad segmentom $[x_{i-1}, x_i]$. Autori površinu krivocrtnog trapeza grafički prikazuju slikom (vidi sliku 3) ispod koje komentiraju: *„Površina krivocrtnog trapeza uklopljena je između površine upisanih i površine opisanih pravokutnika. Dijeleći intervale na sve veći broj dijelova, razlike između tih dviju površina će se smanjivati“.*



Slika 3: Površina krivocrtnog trapeza (skenirana slika iz udžbenika [2], str.130.)

Dakle, kako smo prethodno naveli, autori eksplicitno ne navode što je upisani, a što opisani pravokutnik te iz grafičkog prikaza nije sasvim jasno da će se povećanjem broja n razlika između navedenih površina smanjivati, čime je narušeno načelo sistematičnosti i postupnosti. U oba udžbenika, odjeljak „*Površina krivocrtnog trapeza*“, autori završavaju: *Površina krivocrtnog trapeza uklopljena je između donje i gornje sume*“, nakon čega izjavljuju

> *„Uzimajući sve veći broj djelišnih točaka donja se suma općenito povećava, a gornja suma smanjuje. Možemo zamisliti da broj n teži u beskonačnost, tako da duljine pojedinih intervala podjele teže nuli. U graničnom slučaju donja i gornja suma imat će isti limes, koji ćemo označiti s I. Taj limes mora biti jednak površini krivocrtnog trapeza.“*

Smatram da je učenicima na ovome stupnju obrazovanja vrlo teško zamisliti navedeno, pogotovo što se učenici s pojmovima integralne sume, površine krivocrtnog trapeza i integrala općenito susreću prvi puta tijekom svog srednjoškolskog obrazovanja. Osim toga sam postupak određivanja donje i gornje integralne sume sadrži mnoštvo izraza i oznaka koje su nejasne ili neprecizne te učenicima nepoznate. Samim time nisam sigurna koliko im je razumljivo da je vrijednost navedenog limesa jednaka površini krivocrtnog trapeza. U ovome odjeljku bi bilo korisno primijeniti načelo zornosti i navedene pojmove predočiti grafički, uz neke od dostupnih alata, kako ćemo prikazati u odjeljku 2.1.2.

Nadalje, u oba udžbenika autori navode: „*Broj I određen je samo funkcijom f i ne ovisi o načinu računanja donje i gornje sume. Nazivamo ga određenim integralom funkcije f.“* te zatim definiraju određeni integral na sljedeći način.

> *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitivna neprekinuta funkcija. Zajednički limes donje i gornje sume nazivamo određenim integralom funkcije f i označavamo s*
>
> $$I = \int_a^b f(x)dx.$$

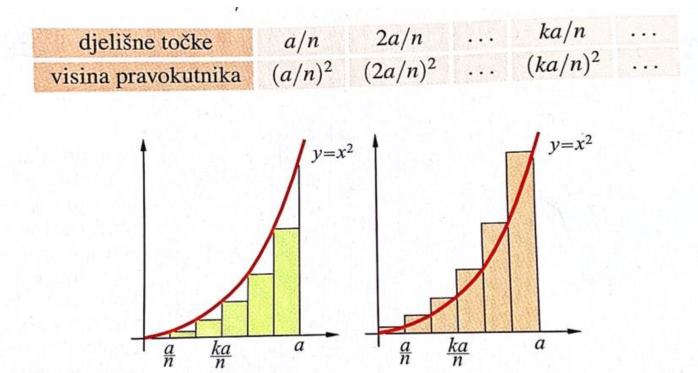
On je jednak površini ispod grafa funkcije, nad intervalom [a,b].

Znak $\int$ *zovemo znakom integracije, broj a donjom granicom integrala, broj b gornjom granicom integrala, a funkciju f podintegralnom funkcijom. dx se naziva diferencijal varijable x.*

Slijedeći načelo postupnosti, određeni integral kao temeljni pojam integralnog računa ne bi trebao biti sastavni dio ovog odjeljka, već dio novog odjeljka (nastavne jedinice), a trebao bi slijediti nakon odjeljka „Površina ispod luka parabole“. Pogotovo jer se u navedenom odjeljku ne primjenjuje formula za izračunavanje određenog integrala, već se površina ispod luka parabole $y = x^2$ nad segmentom $[0, a]$ određuje pomoću izračuna donje i gornje sume koje imaju isti limes kad *n* teži u beskonačnost.

Odjeljak „*Površina ispod luka parabole*“ autori započinju na sljedeći način:

„Promotrimo parabolu $y = x^2$*. Odredit ćemo površinu ispod njezinog grafa, a nad intervalom* $[0, a]$*. Podijelimo interval* $[0, a]$ *na n jednakih dijelova. Duljina svakog dijela je* $\frac{a}{n}$*. Upišimo ispod grafa parabole pravokutnike kojima je visina određena funkcijskim vrijednostima u točkama* $\frac{a}{n}$*. Tako dobivamo“*

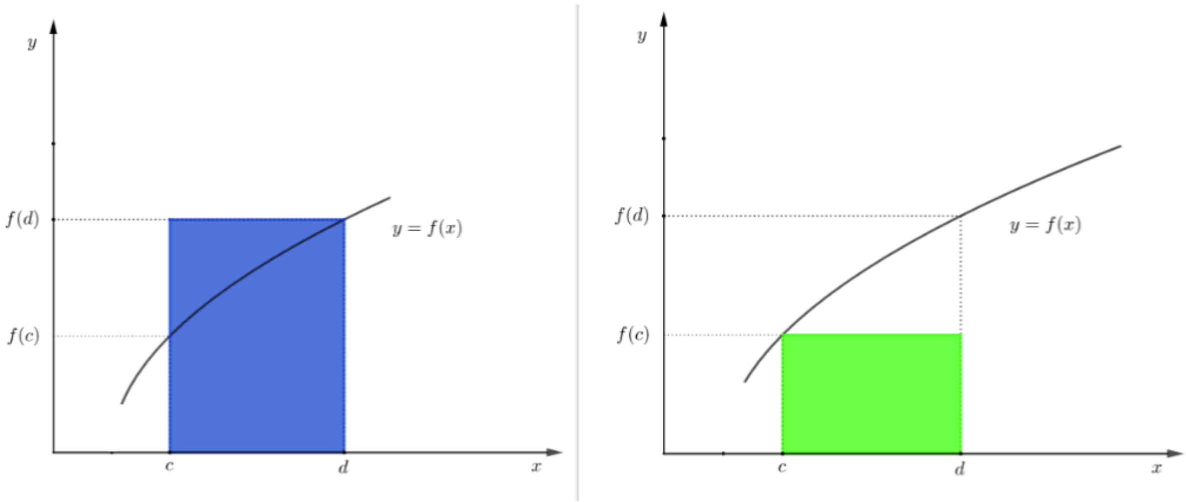


Slika 4: Upisani i opisani pravokutnici (skenirana slika iz udžbenika [2], str. 131.)

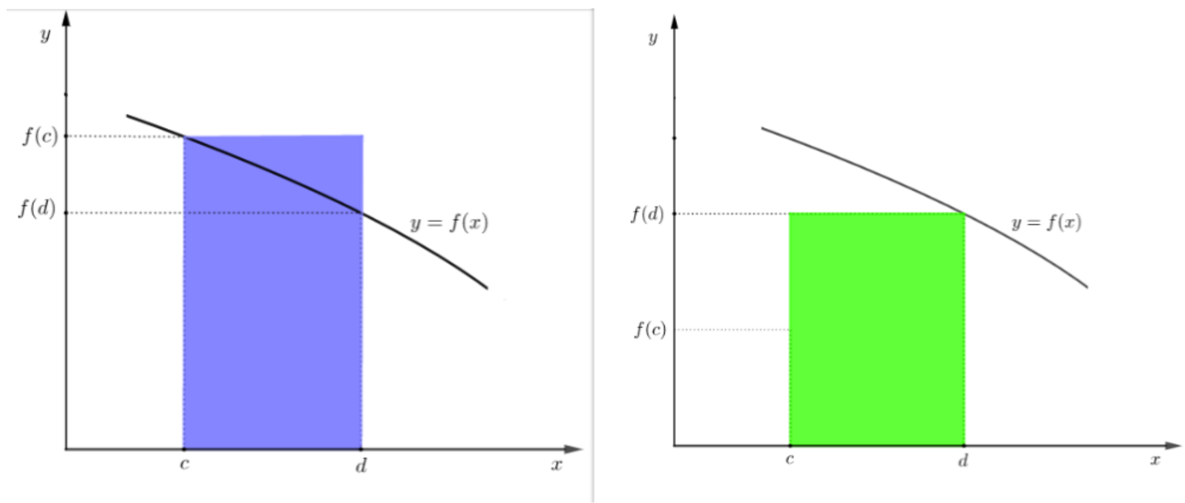
Obzirom na načelo zornosti i postupnosti možemo primijetiti da je u navedenom tekstu i na prikazanoj slici u udžbeniku (vidi sliku 4) korišteno nekoliko nejasnih i nepreciznih iskaza. Konkretno, iz priložene slike dobiva se dojam da nije određena posljednja djelišna točka segmenta $[0, a]$, što nije točno jer je ona jednaka $\frac{(n-1)a}{n}$. Time u retku djelišne točke trebalo bi upisati $\frac{(n-1)a}{n}$ kao posljednju djelišnu točku kojoj je funkcijska vrijednost (visina pravokutnika) jednaka $\frac{(n-1)^2a^2}{n^2}$. Nadalje, iz priložene tablice nije potpuno jasno koja je visina pravokutnika u odnosu na pripadajuću djelišnu točku jednaka visini odgovarajućeg upisanog, odnosno opisanog pravokutnika. Također, nigdje nije naznačeno da je uz izračunavanje funkcijskih vrijednosti (visina pravokutnika) u djelišnim točkama potrebno izračunati i funkcijsku vrijednost u nuli i u a, gdje je nula lijeva granica i a desna granica segmenta $[0, a]$. Jasno, iz $f(x) = x^2$ proizlazi da je $f(0) = 0$ i $f(a) = a^2$. Ako promatramo pravokutnik $[0, \frac{a}{n}]$, onda je nad njim visina upisanog pravokutnika jednaka nuli, a visina opisanog pravokutnika jednaka je $\frac{a^2}{n^2}$, jer je $f(0) < f\left(\frac{a}{n}\right)$, gdje je $f(0) = 0$ i $f\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{a^2}{n^2}$.

Smatram da je učenicima na ovome stupnju obrazovanja potrebno detaljnije objasniti način na koji se dobiva visina upisanog, odnosno opisanog pravokutnika grafu funkcije $y = f(x)$ nad nekim segmentom $[c, d]$. Pritom se možemo poslužiti slikama 5 i 6.

c



Slika 5: Upisani i opisani pravokutnici rastuće funkcije y=f(x) nad segmentom $[c, d]$



Slika 6: Upisani i opisani pravokutnici padajuće funkcije y=f(x) nad segmentom $[c, d]$

Uz navedene slike može se napisati dodatno pojašnjenje da najprije treba izračunati funkcijske vrijednosti u granicama c i d zadanog segmenta $[c, d]$, pri čemu je manja funkcijska vrijednost jednaka visini upisanog pravokutnika, a veća funkcijska vrijednost je jednaka visini opisanog pravokutnika grafu funkcije $y = f(x)$ nad segmentom $[c, d]$.

S ciljem poboljšanja i unapređenja kvalitete nastave, smatram da bi bilo pogodnije priloženu tablicu na slici 4 prikazati sljedećom tablicom:

$točke$	0	$\frac{a}{n}$	$\frac{2a}{n}$	...	$\frac{(k-1)a}{n}$	$\frac{ka}{n}$	...	$\frac{(n-1)a}{n}$	$\frac{na}{n} = a$
$funkcijske$ $vrijednosti$	0	$\frac{a^2}{n^2}$	$\frac{2^2a^2}{n^2}$	...	$\frac{(k-1)^2a^2}{n^2}$	$\frac{k^2a^2}{n^2}$	...	$\frac{(n-1)^2a^2}{n^2}$	$\frac{n^2a^2}{n^2} = a^2$

uz objašnjenje da funkcijske vrijednosti kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ rastu na cijelom segmentu $[0, a]$, a time i na svakom njegovom podsegmentu. Duljina svakog podsegmenta $\left[\frac{(k-1)a}{n}, \frac{ka}{n}\right], k = 1,2, \dots, n$, segmenta $[0, a]$ jednaka je $\frac{a}{n}$ što proizlazi iz početne pretpostavke da je segment $[0, a]$ podijeljen na n jednakih dijelova. Dakle iz činjenice da je $f\left(\frac{(k-1)a}{n}\right) < f\left(\frac{ka}{n}\right)$, gdje je $f\left(\frac{(k-1)a}{n}\right) = \frac{(k-1)^2a^2}{n^2}$, $f\left(\frac{ka}{n}\right) = \frac{k^2a^2}{n^2}$, proizlazi da je $\frac{(k-1)^2a^2}{n^2}$ visina upisanog, a $\frac{k^2a^2}{n^2}$ visina opisanog pravokutnika paraboli $y = x^2$ nad segmentom $[0, a]$. Pritom je duljina osnovice svakog pravokutnika jednaka $\frac{a}{n}$. Primjenom svojstva da je površina pravokutnika jednaka umnošku duljina njegove osnovice i visine, te da je zbroj svih površina pravokutnika jednakih duljina osnovica i različitih duljina visina jednaka umnošku duljine osnovice i zbroja svih duljina visina tih pravokutnika proizlazi:

- donja integralna suma, odnosno zbroj svih površina upisanih pravokutnika paraboli $y = x^2$ nad segmentom $[0, a]$ dana je izrazom

$$p_n = \frac{a}{n}\left[0 + \frac{a^2}{n^2} + \frac{2^2a^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2a^2}{n^2}\right]$$
$$= \frac{a^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right] \qquad (1)$$

- gornja integralna suma, odnosno zbroj svih površina opisanih pravokutnika paraboli $y = x^2$ nad segmentom $[0, a]$ dana je izrazom

$$P_n = \frac{a}{n}\left[\frac{a^2}{n^2} + \frac{2^2a^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2a^2}{n^2}\right]$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\,[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\,]. \qquad (2)$$

Prilikom izračuna donje i gornje integralne sume, vidi identitete (1) i (2), autori navode „*Za računanje zbroja kvadrata prvih n prirodnih brojeva koristimo formulu* $1 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.“ Navedeno može djelovati zbunjujuće, jer se u ovome slučaju prirodni brojevi *n* i *k* poistovjećuju, što je u suprotnosti s prethodnim razmatranjem, gdje se podrazumijeva da je *k* bilo koji prirodan broj manji ili jednak od *n*. Dakle, ispravnije bi bilo reći: *„ Za računanje zbroja kvadrata prvih k prirodnih brojeva, gdje je* $k \leq n$“, pogotovo jer se navedena formula koristi u izračunu identiteta (1) ako je $k = n - 1$, a identiteta (2) ako je $k = n.$ Također, uz navođenje spomenute formule bilo bi poželjno istaknuti da se valjanost formule dokazuje matematičkom indukcijom te da se dokaz formule ostavlja učenicima za vježbu. Samim time navedeni zadatak može poslužiti za ponavljanje prethodno obrađenog gradiva iz nastavne cjeline matematička indukcija, ali i za motivaciju učenika u povezivanju svladanog gradiva s novim gradivom. Time se uspostavlja povezanost između nastavnih cjelina i potiče učenike na primjenu prethodno naučenog.

Također, prilikom izračuna donje i gornje integralne sume, autori ne navode dodatna pojašnjenja i komentare o pojedinim zaključcima i rezultatima, nego sažeto ističu „ …*donja i gornja suma imaju isti limes kad n teži u beskonačnost,…*“ . Zastupanjem načela sistematičnosti, smatram da bi bilo poželjno raspisati limes donje i gornje integralne sume na sljedeći način

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} a^3\,\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^3}{6}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot n\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{a^3}{6}\lim_{n\to\infty}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{a^3}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{a^3}{3}, \qquad (3)$$

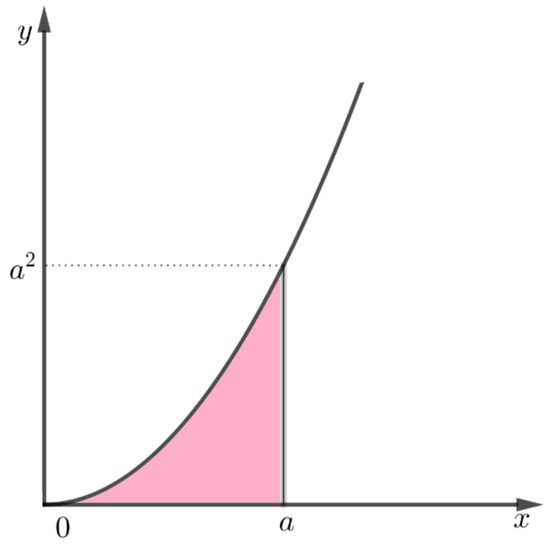
$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} a^3\,\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^3}{6}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{a^3}{6}\lim_{n\to\infty}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{a^3}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{a^3}{3}\ . \qquad (4)$$

S druge strane, navedeni izračuni mogu se izostaviti uz komentar da učenici za vježbu samostalno dokažu jednakost navedenih limesa, budući da su izračunavanje limesa prethodno svladali u nastavnoj jedinici nizovi. Time se učenici potiču na aktivnije sudjelovanje u nastavi kroz primjenu prethodno naučenog gradiva.

Iz (3) i (4) proizlazi da su vrijednosti limesa donje i gornje integralne sume jednake $\frac{a^3}{3}$ kada n teži u beskonačnost što povlači da je površina P lika određenog lukom parabole $y = x^2$ nad segmentom $[0, a]$ (prikazanog na slici 7) jednaka $\frac{a^3}{3}$ i pišemo $P = \frac{a^3}{3}$.

Zastupanjem načela zornosti prilikom uvođenja novih pojmova, u svrhu lakšeg i jednostavnijeg usvajanja istih, poželjno je koristiti slikovite i grafičke prikaze, kao na slici 7, gdje se grafički prikazuje površine ispod luka parabole $y = x^2$ nad segmentom $[0, a]$.



Slika 7: Površina ispod luka parabole $y = x^2$ nad segmentom $[0, a]$

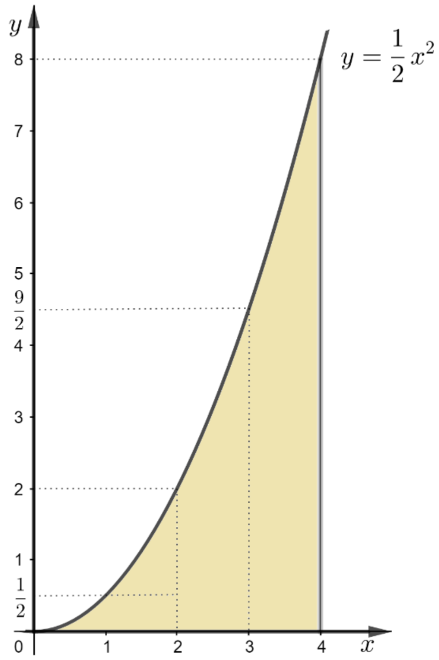
Poučena iskustvom davanja instrukcija iz matematike, ali i razgovorima s kolegama profesorima, uočila sam da učenici kroz srednjoškolsko obrazovanje nisu zainteresirani za teorijsku podlogu navedenih pojmova, odnosno za teorijski dio istih. Smatram da učenike treba poučiti ne samo na primjenu integralnog računa kroz rješavanje zadataka već i na pozadinu njegova nastanka kroz teorijski dio, no isti bi se trebao prezentirati na zanimljiv i učenicima na tom stupnju obrazovanja pristupačan način. Isto tako potrebno je povezivati prethodno usvojena saznanja s novima. Pri tome je efikasnije isto provesti najprije pomoću primjera kojima bi se bolje motiviralo učenike u svladavanju gradiva.

Dakle, na početku nastavne cjeline o integralima vrlo je važno motivirati učenike kako bi lakše shvatili i svladali sve pojmove povezane s izračunavanjem površine krivocrtnog trapeza. Vodeći se načelom postupnosti, na početku nastavne jedinice „Integralni račun“ najprije bih uvela primjer izračunavanja površine ispod luka parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom $[0,4]$. Pritom se uz manji broj djelišnih točaka segmenta $[0,4]$ mogu zorno objasniti pojmovi upisanih i opisanih pravokutnika kao i donje i gornje integralne sume. Nadalje, uvela bih aktivnost za učenike, izrađenoj u GeoGebri, kojom se učenicima omogućava da proizvoljno odabiru broj djelišnih točaka tog segmenta. Pritom potičemo učenike da uoče da se povećanjem broja djelišnih točaka razlika između donje i gornje integralne sume smanjuje, a za „relativno velik broj djelišnih točaka" one poprimaju približno jednaku vrijednost, što ima za posljedicu da će limesi donje i gornje integralne sume biti jednaki ako broj djelišnih točaka teži u beskonačnost, a dobiveni limes je površina zadanog lika. Nakon toga bilo bi pogodno grafički predočiti parabolu $y = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom $[2,4]$ i objasniti da se dobiveni lik naziva krivocrtni trapez, pri čemu bi se istaknule osobitosti krivocrtnog trapeza uz povezivanje istog s definicijom trapeza. Nadalje, uvela bih aktivnost za učenike, izrađenoj u GeoGebri, u kojoj bi učenici mogli izračunavati površine krivocrtnih trapeza omeđenih parabolom $y = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom $[a, 4]$ za proizvoljan $0 < a < 4$. Zatim bih uvela treću aktivnost za učenike kojom se mogu poopćiti prethodno dobiveni rezultati na način da učenici kroz tu aktivnost proizvoljno odabiru granice segmenta $[a, b], 0 < a < b$ i parabolu $y = \alpha x^2$ za proizvoljan $\alpha > 0$ te analogno kao i u prethodne dvije aktivnosti proizvoljno odabiru broj *n*, odnosno na koliko dijelova dijele segment $[a, b]$ s ciljem izračunavanja površine krivocrtnog trapeza odnosno površine lika ispod luka parabole.

Nakon provedenih aktivnosti predlažem da se uvede teorijski dio izračunavanja površine krivocrtnog trapeza omeđenog pozitivnom i neprekinutom funkcijom nad segmentom $[a, b]$, gdje je $0 < a < b$. Dakle, u teorijskom dijelu izložila bih gradivo redoslijednom kako je navedeno u odjeljku „*Površina krivocrtnog trapeza*" u udžbeniku [2], uz dodatna prethodno navedena pojašnjenja, vodeći se načelima zornosti, postupnosti i sistematičnosti. Na kraju ovog odjeljka postavila bih problem izračunavanja površine proizvoljnog lika, na način da se učenike potakne da uoče da se svaki mnogokut može podijeliti na dijelove dijagonalama ili horizontalnim ili vertikalnim cijepanjem, čime ih se navodi na zaključivanje da se i svaki lik u ravnini može uz horizontalno ili vertikalno cijepanje podijeliti na dijelove koji su (najčešće) krivocrtni trapezi. Time se problem izračunavanja površine lika svodi na problem izračunavanja površine krivocrtnog trapeza.

2.1.2. Primjeri aktivnosti za učenike (problem površine krivocrtnog trapeza)

Kako je opisano kroz prethodno poglavlje u ovome ćemo dijelu prikazati i detaljnije objasniti pristupačniji i više motivirajući način obrade gradiva. Prvi dio prve aktivnosti provodi se zajedno s učenicima uz korištenje ploče. Za početak nacrtajmo u pravokutnom koordinatnom sustavu ravnine graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2$, vidi sliku 8. Funkcija f je neprekinuta i pozitivna (poprima pozitivne vrijednosti) za svaki $x \in \mathbb{R}$, a time i na segmentu $[0,4]$.

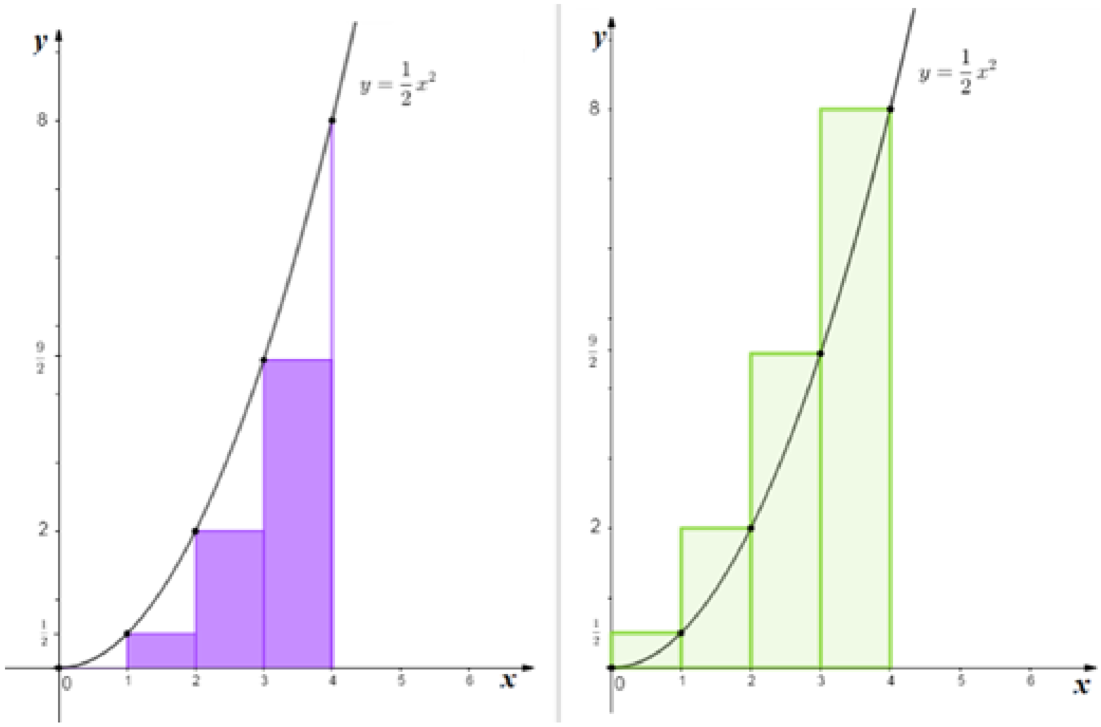


Slika 8: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom $[0,4]$

Podijelimo segment $[0,4]$ na četiri jednaka dijela. Time dobivamo podsegmente $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ i $[3,4]$, pri čemu su $1,2,3$ djelišne točke segmenta $[0,4]$. Zatim određujemo vrijednost funkcije $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2$ u djelišnim točkama 1,2,3 i u granicama 0 i 4 segmenta $[0,4]$, što se prikazuje sljedećom tablicom.

točke	0	1	2	3	4
funkcijske vrijednosti	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

Za svaki od dobivenih podsegmenata konstruiramo dva pravokutnika koja nazivamo upisanim i opisanim pravokutnikom grafu funkcije $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2$. Pritom je u granicama svakog podsegmenta manja funkcijska vrijednost jednaka visini upisanog, a veća funkcijska vrijednost jednaka visini opisanog pravokutnika nad promatranim podsegmentom. Konkretno, u granicama 1 i 2 podsegmenta $[1,2]$ je $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = 2$, stoga je nad $[1,2]$ visina upisanog pravokutnika jednaka $\frac{1}{2}$, a visina opisanog pravokutnika je jednaka 2, vidi sliku 9.



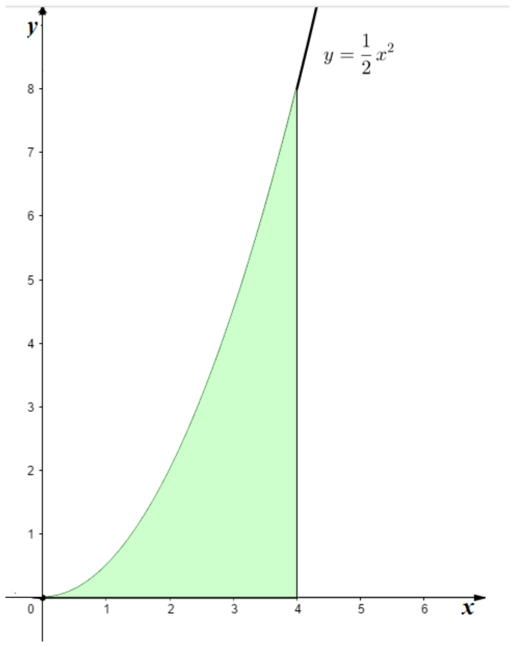
Slika 9: Upisani i opisani pravokutnici nad segmentom $[0,4]$

Ovim postupkom dobili smo tri upisana i četiri opisana pravokutnika jer je visina upisanog pravokutnika nad segmentom $[0,1]$ jednaka nuli. Označimo s p_4 zbroj svih površina upisanih pravokutnika i analogno s P_4 zbroj svih površina opisanih pravokutnika. Pritom p_4 zovemo donjom integralnom sumom, a P_4 gornjom integralnom sumom. Uzimajući u obzir da je duljina osnovice svakog pravokutnika jednaka jedan, proizlazi da su površine svih pravokutnika jednake odgovarajućim visinama promatranih pravokutnika, stoga je

$$p_4 = \frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} = 7,$$

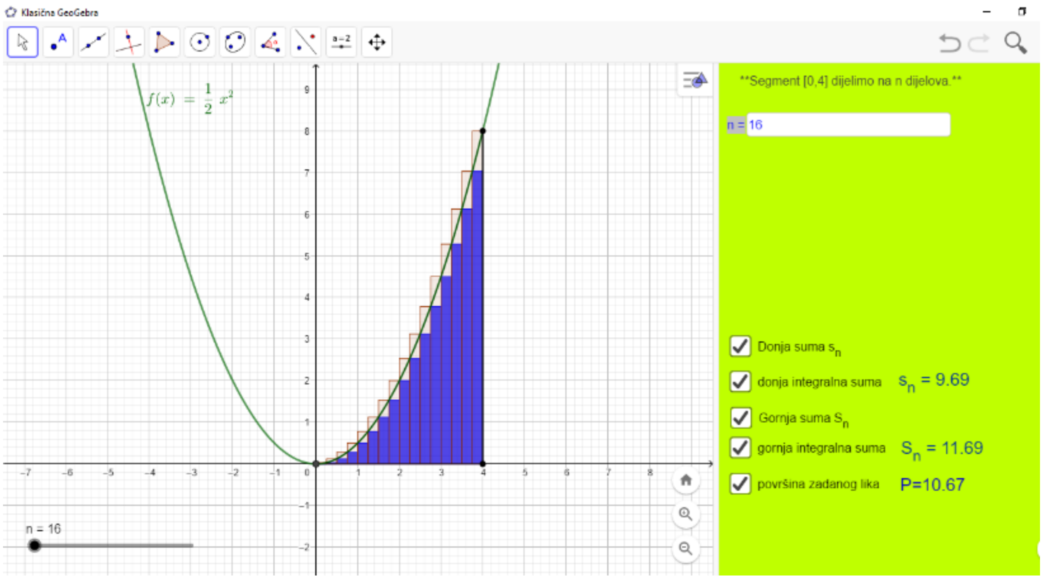
$$P_4 = \frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} + 8 = 15.$$

Površina P ispod luka parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom $[0,4]$ prikazana je na slici 10, a njezina je vrijednost veća od donje integralne sume p_4 i manja od gornje integralne sume P_4. Time možemo pisati $7 < P < 15$.



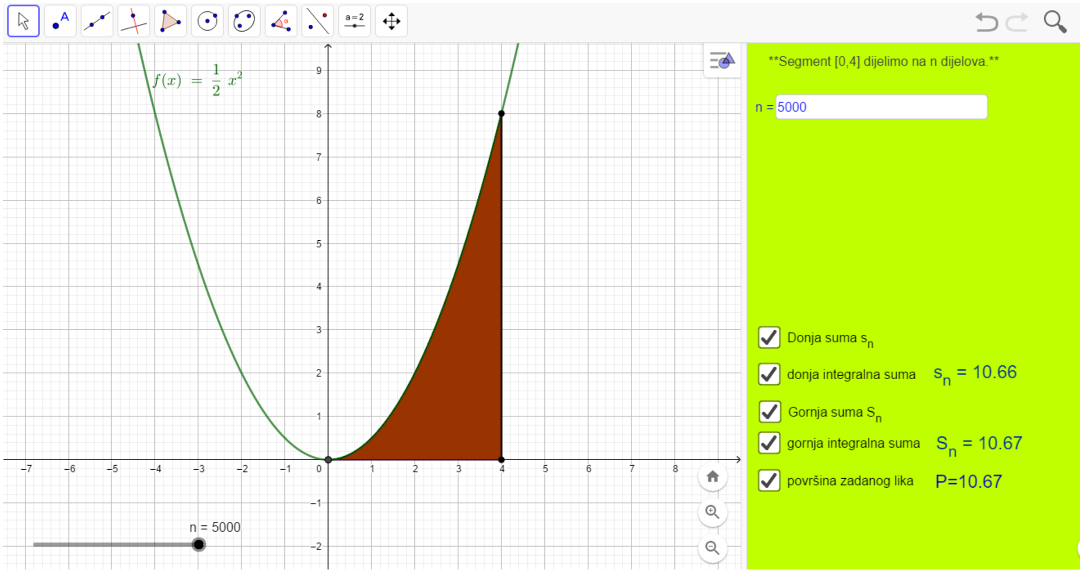
Slika 10: Površina P ispod parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ *nad segmentom* $[0,4]$

Obzirom na iscrpnost provođenja postupka na ploči, izrađena je aktivnost u GeoGebri u svrhu uočavanja povezanosti donje i gornje integralne sume s površinom lika ispod parabole. Uočimo kako je dobivena površina $7 < P < 15$ vrlo neprecizna, stoga se nameće potreba za dijeljenjem segmenta na osam, šesnaest, odnosno *n* dijelova, gdje je *n* proizvoljan prirodan broj. Konkretno, na slici 11 prikazani su upisani i opisani pravokutnici nad segmentom $[0,4]$ koji je podijeljen na 16 jednakih dijelova. U ovome slučaju dobivamo da se tražena površina lika nalazi u intervalu $\langle 9.69, 11.69 \rangle$.



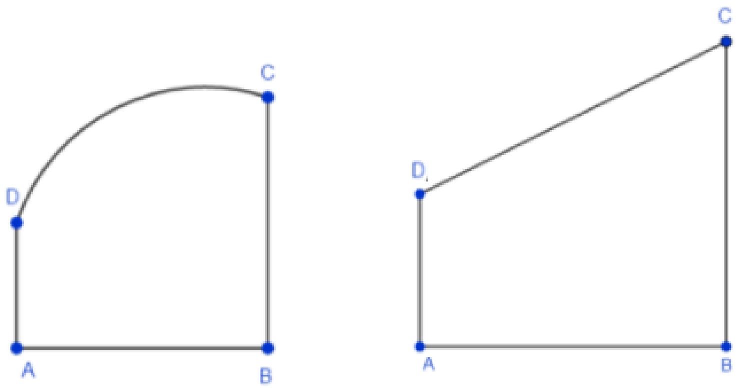
Slika 11: Podjela segmenta [0,4] na 16 dijelova

Izrađenom aktivnošću[1] učenici mogu proizvoljno odabrati prirodan broj n koji označava broj (jednakih) dijelova na koje je podijeljen zadani segment [0,4]. Time je učenicima omogućeno da se zorno uvjere kako se s povećanjem broja n smanjuje razlika između donje i gornje integralne sume čime se dobiva preciznija vrijednost tražene površine. Upravo zato uzmemo li da je n = 5000 možemo uočiti da su vrijednosti donje i gornje integralne sume približno jednake (vidi sliku 12), što nas dovodi do zaključka da je površina luka ispod parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom [0,4] jednaka 10.67 kvadratnih jedinica.



Slika 12: Podjela segmenta [0,4] na 5000 dijelova

U drugoj aktivnosti promatramo likove prikazane na slici 13.

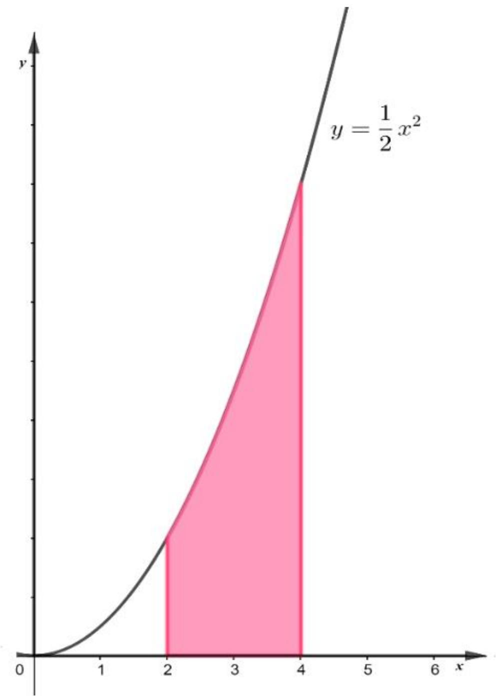


Slika 13: Krivocrtni i pravokutni trapez

Lik zdesna je četverokut tj. pravokutni trapez jer ima jedan par paralelnih stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, a preostale dvije stranice su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$. S druge strane, lik slijeva je vrlo sličnog izgleda kao

[1] Izrađenu aktivnost može se pogledati na GeoGebrinoj stranici putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/phyhy3q4

trapez *ABCD*, no stranica određena vrhovima *C* i *D* nije dužina, već luk neke krivulje. Lik s navedenim svojstvom, odnosno lik koji sadrži jedan par paralelnih stranica i kojemu je treća stranica dužina, a četvrta stranica je opisana lukom neke krivulje naziva se krivocrtni trapez. Promatrajmo parabolu $y = \frac{1}{2}x^2$ no ovoga puta nad segmentom [2,4], vidi sliku 14. Tada je dobiveni lik krivocrtni trapez jer sadrži jedan par paralelnih stranica, treća stranica mu je dužina čije su krajnje točke jednake granicama segmenta [2,4], a četvrta stranica je opisana lukom parabole $y = \frac{1}{2}x^2$. Kroz ovu aktivnost[2] također je učenicima omogućeno da za proizvoljan $0 < a < 4$ pronalaze vrijednost površine krivocrtnog trapeza nad segmentom $[a, 4]$ pomoću odgovarajućih, programom izračunatih donjih i gornjih integralnih suma u ovisnosti o izboru prirodnog broja *n*, odnosno broja dijelova ne koje se dijeli segment $[a, 4]$. Pritom učenici trebaju odabrati konkretan *n* za koji će donja i gornja integralna suma imati jednaku vrijednosti.

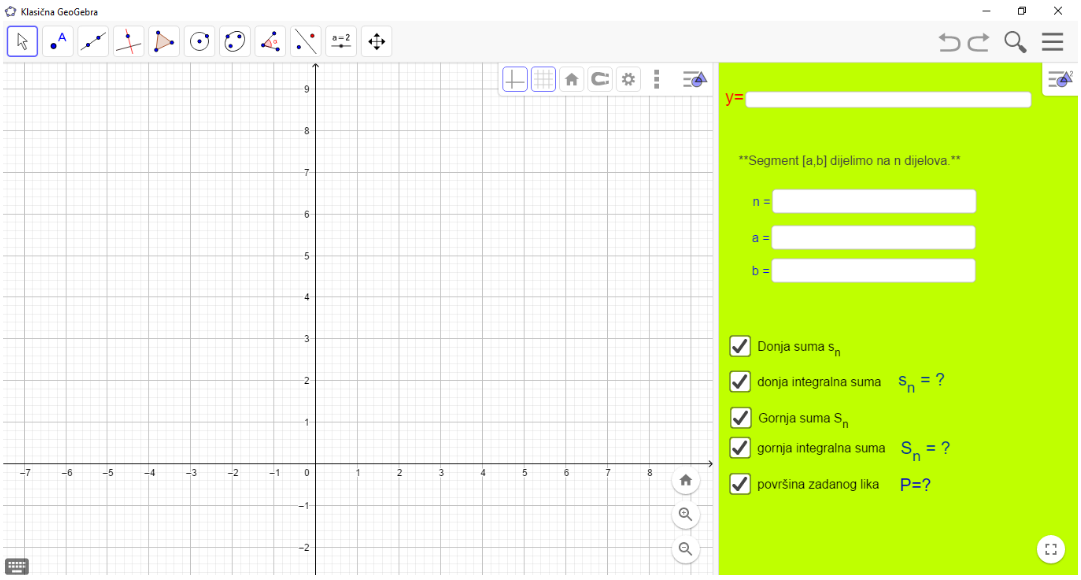


Slika 14: Krivocrtni trapez

U trećoj aktivnosti možemo poopćiti dobivene rezultate kroz izrađenu aktivnosti u GeoGebri. Unutar aktivnosti[3] učenici mogu zadati proizvoljnu parabolu $y = \alpha x^2$ za $\alpha > 0$. Također kao i kroz prethodne aktivnosti proizvoljno odabiru promatrani segment $[a, b], 0 < a < b$ te proizvoljno određuju n (broj dijelova segmenta). Za postavljene uvjete pritiskom na neki od

[2] Izrađenu aktivnost može se pogledati na GeoGebrinoj stranici putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/yjtauu2k
[3] Izrađenu aktivnost može se pogledati na GeoGebrinoj stranici putem poveznice: https://www.geogebra.org/m/she2ghra

ponuđenih gumbova u izborniku učenici mogu odrediti vrijednost donje i gornje integralne sume kao i površinu luka ispod parabole, odnosno površinu krivocrtnog trapeza.



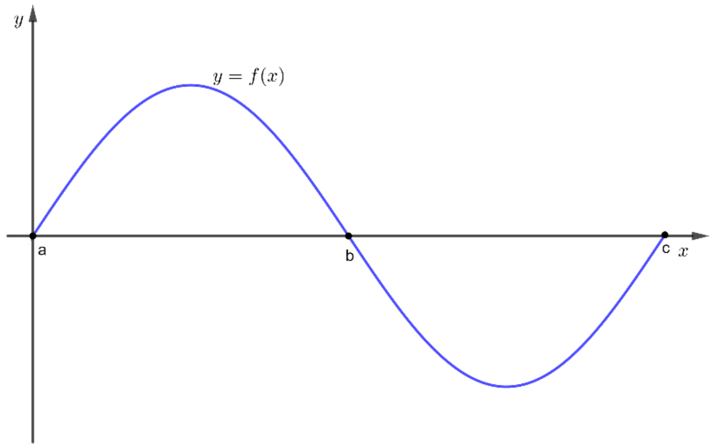
Slika 15: Određivanje površine ispod luka parabole $y = \alpha x^2$ *nad segmentom* $[a, b]$

Navedena aktivnosti izrađene su s ciljem da se učenicima omogući lakše shvaćanje određivanja integralnih suma i njihovu povezanost s površinom krivocrtnog trapeza. Naime, nakon zorno prikazanih pojmova kroz navedene aktivnosti na konkretnim primjerima, učenici će zasigurno bolje shvatiti teorijsko izlaganje svih pojmova povezanih s problemom izračunavanja površine proizvoljnog krivocrtnog trapeza. Smatram da je ovakav način obrade gradiva učenicima pristupačniji i sistematičniji obzirom na njihov stupanj obrazovanja, čime se ujedno poboljšava i unapređuje kvaliteta nastavnog procesa.

2.2. Analiza udžbenika i osvrt- određeni i neodređeni integral

2.2.1. Primitivna funkcija i Newton-Leibnizova formula.

Autori postupno na isti način u oba udžbenika, prije uvođenja pojma primitivne funkcije na kojem se temelji Newton-Leibnizova formula, na pristupačan način uvode osnovna svojstva određenog integrala (aditivnost i linearnost određenog integrala, određeni integral negativne funkcije). Sva svojstva popraćena su grafičkim prikazima što uvelike olakšava učenicima predodžbu istih. Međutim, istaknimo kako autori često koriste pojam pozitivna i negativna funkcija, ali bez eksplicitnog definiranja istih. Obzirom na čestu uporabu tih pojmova korisno je iste i objasniti, kako se kod učenika ne bi stvorila kriva predodžba. Upravo iz tog razloga, primjenom načela zornosti i s motivacijom poticanja učenika na aktivnije sudjelovanje u nastavnom procesu, može se koristiti grafički prikaz neke funkcije $y = f(x)$ (kako je prikazano na slici 16) pomoću koje se učenike potiče da uoče kako je funkcija f pozitivna na intervalu $\langle a, b\rangle$ jer je $f(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ (poprima samo pozitivne funkcijske vrijednosti), dok je funkcija f negativna na intervalu $\langle b, c\rangle$ jer je $f(x) < 0$ za svaki $x \in \langle b, c\rangle$ (poprima samo negativne funkcijske vrijednosti), a za $x = a, x = b$ i $x = c$ je $f(x) = 0$.



Slika 16: Graf funkcije y=f(x) nad segmentom $[a, c]$

Također, prilikom definiranja svojstva linearnosti određenog integrala autori navode sljedeće:

> *„Iz definicije integrala slijede ova dva njegova svojstva, koja zajedno nazivamo linearnost određenog integrala:*
>
> $$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx\,, \qquad c \in \mathbb{R}$$
>
> $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx."$$

Primijetimo kako prilikom definiranja ovog svojstva autori koriste izraz *„iz definicije integrala slijedi“*, no istaknuta definicija je spomenuta u prethodnom odjeljku. Upravo iz tog razloga, sljedeći načelo postupnosti, trebalo bi najprije napisati definiciju određenog integrala, a potom istaknuti neka njegova svojstva. Također prilikom definiranja svojstva linearnosti bilo bi poželjno istaknuti kako se navedena dva svojstva objedinjuju u jednom svojstvu linearnosti koje zapisujemo na sljedeći način:

$$\int_a^b [\alpha\, f(x) + \beta g(x)\,]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dakle, prilikom definiranja navedenih svojstva autori ne navode što vrijedi za funkcije f i g, odnosno ne navode da funkcije f i g trebaju biti neprekidne na segmentu $[a, b]$.

U nastavku autori definiraju pojam primitivne funkcije navodeći da je F primitivna funkcija ili antiderivacija funkcije f ako vrijedi $F'(x) = f(x)$ te u nastavku navode tvrdnju kojom ističu da se primitivne funkcije iste funkcije f mogu razlikovati za konstantu. Istaknimo da prilikom definiranja primitivne funkcije funkcije f ne ističu njezinu povezanost s neodređenim integralom funkcije f kojeg uvode nakon Newton-Leibnizove formule, gdje navode:

> *„Ako je F po volji uzeta primitivna funkcija neprekinute funkcije f na intervalu* $[a, b]$, *onda vrijedi:*
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)."$$

Slijedeći načelo znanstvenosti sadržaj (primitivna funkcija, Newton-Leibnizova formula te neodređeni integral) koji autori iznose matematički je ispravan, no postavlja se pitanje prati li ovakav slijed iznošenja gradiva načelo postupnosti i povezanosti. Smatram da učenike treba poučiti ne samo u definiranju navedenih pojmova već i u povezanosti među njima. Važno je da učenici uoče povezanost između diferencijalnog i integralnog računa, ali i temeljnu povezanost primitivne funkcije s neodređenim integralom, a potom i s određenim integralom.

Smatram da bi prethodnim argumentiranjem veze između diferencijalnog i integralnog računa, odnosno primitivnih funkcija s neodređenim integralom mnoštvo zaključaka učenici mogli samostalno proizvesti. Time bi sat bio dinamičniji, učenici bi se više uključili u nastavni proces i rasla bi njihova razina motivacije, čime bi se poboljšala kvaliteta izvođenja nastave. U svrhu navedenog predlažem sljedeći način obrade nastavnih sadržaja.

Dakle, vodeći se načelom postupnosti i povezanosti na početku nastavne jedinice „Primitivna funkcija“ najprije bih uvela nekoliko primjera funkcija: $F_1 = \frac{x^5}{5}$, $F_2 = \frac{x^5}{5} + 2$, $F_3 = \frac{x^5}{5} - \sqrt{5}$, $F_4 = \frac{2x^5+1}{10}$ koje učenici trebaju derivirati, a u svrhu ponavljanja prethodno obrađenog gradiva iz nastavne cjeline diferencijalni račun. Pritom prilikom deriviranja istih uočavamo da je derivacija svih navedenih funkcija jednaka funkciji $f(x) = x^4$. Poopćimo li navedene funkcije za konstantu $C \in \mathbb{R}$, tada možemo zaključiti da će za svaku funkciju oblika $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$, derivacija funkcije F biti jednaka funkciji $f(x) = x^4$. Time dolazimo do pojma primitivne funkcije, jer upravo funkciju F za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$ nazivamo primitivnom funkcijom funkcije f. Dakle, funkcije F_1, F_2, F_3, F_4 , odnosno funkcije F su primitivne funkcije funkcije $f(x) = x^4$. Navedenim postupkom potičemo učenike na zaključak da svaka funkcija ima beskonačno mnogo primitivnih funkcija koje se međusobno razlikuju za konstantu, a potom ističemo da za svaku proizvoljno odabranu funkciju f je $\{F(x) + C,\ \ C \in \mathbb{R}\}$ skup svih njezinih primitivnih funkcija koji nazivamo neodređenim integralom i pišemo

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

U odjeljku neodređeni integral autori nakon definiranja neodređenog integrala navode pet primjera neodređenih integrala, a potom prikazuju tablicu neodređenih integrala, vidi sliku 17.

Tablica neodređenih integrala

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + C$	e^x	$e^x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\quad n \neq -1$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C,\quad n \neq 1$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
		$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Slika 17: Tablica neodređenih integrala (skenirana slika iz udžbenika [2], str.143.)

Zbog iznimne važnosti inverznosti integrala i derivacije smatram da bi integrale prikazane u navedenoj tablici trebalo pobliže i jasnije objasniti. Konkretno, navedimo funkcije koje znamo tablično derivirati i primijenimo definiciju neodređenog integrala:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ \ C \in \mathbb{R} \qquad \text{ako i samo ako} \qquad F'(x) = f(x),$$

gdje se koristi svojstvo $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$, jer je derivacija konstante jednaka nuli. Time dobivamo:

1. $F(x) = C,\ C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int 0\, dx = 0 \cdot \int dx = C$
2. $F(x) = x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int 1 \cdot\, dx = \int dx = x + C$
3. $F(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Uočimo da za $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$ vrijedi $F'(x) = \frac{(n+1)\, x^n}{n+1} = x^n$, stoga je

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \;\; n \neq -1. \tag{5}$$

Formila (5) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$, stoga u tablici neodređenih integrala prikazanoj na slici 17 nije potrebno isticati integral funkcije $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \neq 1$ kao ni integral funkcije $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dovoljno bi bilo prokomentirati svojstva potencija negativnog eksponenta i racionalnog eksponenta, odnosno

- za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$,
- za svaki $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ vrijedi $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

Time iz (5) za $n \neq 1$ direktno proizlazi:

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n}\, dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{x^{-(n-1)}}{-(n-1)} + C = -\frac{1}{x^{n-1}(n-1)} + C$$

i analogno:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

4. $F(x) = \ln x, x > 0 \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C, \;\; x > 0$
5. $F(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \int e^x\, dx = e^x + C$
6. $F(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = a^x \ln a$

Uočimo da za $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$ proizlazi $F'(x) = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x$, prema tome vrijedi da je

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \;\; a > 0, \qquad a \neq 1.$$

7. $F(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int \cos x \;\, dx = \sin x + C$
8. $F(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin x = \; -\cos x + C$
9. $F(x) = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \; \operatorname{tg} x + C$
10. $F(x) = \operatorname{ctg} x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx \; = -\operatorname{ctg} x + C$

Obzirom na navedenu povezanost između primitivnih funkcija funkcije f i neodređenog integrala funkcije f u nastavku možemo ispisati tablicu nekih osnovnih neodređenih integrala.

U nastavku definiramo određeni integral i Newton-Leibnizovu formulu pomoću uvedene definicije neodređenog integrala. Pretpostavimo da je f pozitivna i neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ i da je F primitivna funkcija funkcije f. Tada integral oblika

$$\int_a^b f(x)dx \tag{6}$$

nazivamo određenim integralom funkcije f, a izračunava se primjenom Newton-Leibnizove formule

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{7}$$

Pritom broj a nazivamo donjom granicom integrala, broj b gornjom granicom integrala, funkciju f podintegralnom funkcijom, a dx diferencijal varijable x. Nadalje, potičemo učenike da uoče sljedeće svojstvo:

- ako je F primitivna funkcija funkcije f, odnosno ako je derivacija funkcije F jednaka podintegralnoj funkciji f, onda primjenom Newton-Leibnizove formule proizlazi da je određeni integral funkcije f u granicama a i b jednak razlici vrijednosti primitivne funkcije u gornjoj i donjoj granici integrala.

Određeni integral ima važnu ulogu u određivanju površine krivocrtnog trapeza i površine likova u ravnini. Konkretno, određeni integral, dan formulom (6) jednak je zajedničkom limesu donje i gornje integralne sume. Time proizlazi: ako je f pozitivna i neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$, onda se primjenom formule (7) dobiva vrijednost površine ispod grafa funkcije f na segmentu $[a, b]$. Prisjetimo se sada da smo u prethodnom odjeljku određivali površinu lika ispod luka parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom [0,4]. Pritom smo navedeno rješavali uz podjelu segmenta [0,4] na n jednakih dijelova čime smo određivali vrijednosti donje i gornje integralne sume. Uočili smo kako s povećanjem broja n dobivamo da su te vrijednosti približno jednake te smo tim postupkom odredili površinu ispod luka parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom [0,4]. Obzirom na prethodno istaknuto da je zajednički limes donje i gornje integrale sume jednak određenom integralu, proizlazi da se primjenom uz Newton-Leibnizove formule može jednostavnije i brže odrediti vrijednost površine ispod luka parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom [0,4], gdje je:

$$\int_0^4 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^2 dx = = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{1}{6}(4^3 - 0^3) = \frac{64}{6} = 10.\dot{6}.$$

Pritom potičemo učenike da uoče kako je dobivena površina jednaka prethodno izračunatoj površini (vidi sliku 12) i da se primjenom Newton-Leibnizove formule određivanje površine uvelike olakšava. Analogno, promatramo li lik ispod luka parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ nad segmentom [2,4] (vidi sliku 14) koji je zapravo krivocrtni trapez, tada također primjenom formule (7) možemo jednostavnije odrediti njegovu površinu:

$$\int_2^4 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_2^4 = \frac{1}{6}(4^3 - 2^3) = \frac{56}{6} = 9.\dot{3}.$$

Uočimo kako primjere obrađene u odjeljku 2.1.2. uz korištenje aktivnosti u GeoGebri sada možemo na jednostavan način riješiti na papiru korištenjem Newton-Leibnizove formule i povezivanjem diferencijalnog i integralnog računa. Prilikom računanja određenih i neodređenih integrala ne postoje stroga pravila kao pri izračunu derivacija funkcija, no u nastavku ćemo obrazložiti neke od metoda integriranja kojima se postupak integriranja uvelike olakšava.

2.3. Metode integriranja i primjena integrala

2.3.1. Metoda supstitucije i metoda parcijalne integracije

Kroz analizu udžbenika možemo prvi puta uočiti razliku između udžbenika [1] izdanog prije i udžbenika [2] izdanog poslije donošenja kurikuluma 2019. godine, gdje se metoda supstitucije u oba udžbenika uvodi na isti način, dok se metoda parcijalne integracije obrađuje u [1], ali je izostavljena u [2]. Prilikom iznošenja gradiva poštuju se načela znanstvenosti, postupnosti i sistematičnosti. Naime, autori najprije uvode dodatna pojašnjenja pojma diferencijala koji se koristi u metodama integriranja, a zatim objašnjavaju primjenu metoda u rješavanju zadataka.

Smatram kako je ovakav pristup obrade gradiva pristupačan za učenike na ovome stupnju obrazovanja. Konkretno, u obrazloženju metode supstitucije opisuje se postupak kako se ona provodi, čime se povezuje prethodno obrađeno gradivo derivacija s integriranjem te se s nekoliko riješenih primjera uvježbava njezina primjena u rješavanju zadataka. Udžbenik u tom segmentu nudi mnoštvo različitih zadataka za primjenu navedenih metoda u rješavanju jednostavnijih i složenijih zadataka. Također istaknula bi kako se nakon donošenja kurikuluma, 2019. godine, izbacivanjem metode parcijalne integracije smanjio obujam gradiva koje učenici obrađuju kroz nastavnu cjelinu integralni račun. Istaknimo da je metoda supstitucije jedna od osnovnih metoda za rješavanje integrala, stoga je po mom mišljenju ona dovoljna za upoznavanje učenika s metodama integriranja na ovom stupnju obrazovanja, čime se učenici osposobljavaju u rješavanju integrala primjenom navedene metode, kao i njezinu primjenu u računanju površine likova u ravnini. Samim time učenici nisu preopterećeni novim gradivom, a upoznati su s osnovnom i temeljnom metodom za izračunavanje integrala te mogu bez većih problema izračunavati jednostavnije integrale.

2.3.2. Primjena integralnog računa u računanju površine i obujma

Osim prethodno navedene razlike u udžbenicima [1] i [2], izdanih prije i poslije donošenja novog kurikuluma, istaknimo još jednu razliku pri obradi primjene integrala u računanju površina likova u ravnini. Naime prije donošenja kurikuluma 2019. godine obrađivala se primjena integrala u računanju površine i obujma, dok se nakon donošenja kurikuluma obrađuje samo primjena integrala na izračunavanju površine. Obje navedene primjene integrala autori iznose kroz mnoštvo riješenih primjera počevši od jednostavnih ka složenijima, pri čemu koriste grafičke prikaze te je time zastupljeno načelo zornosti, postupnosti i sistematičnosti.

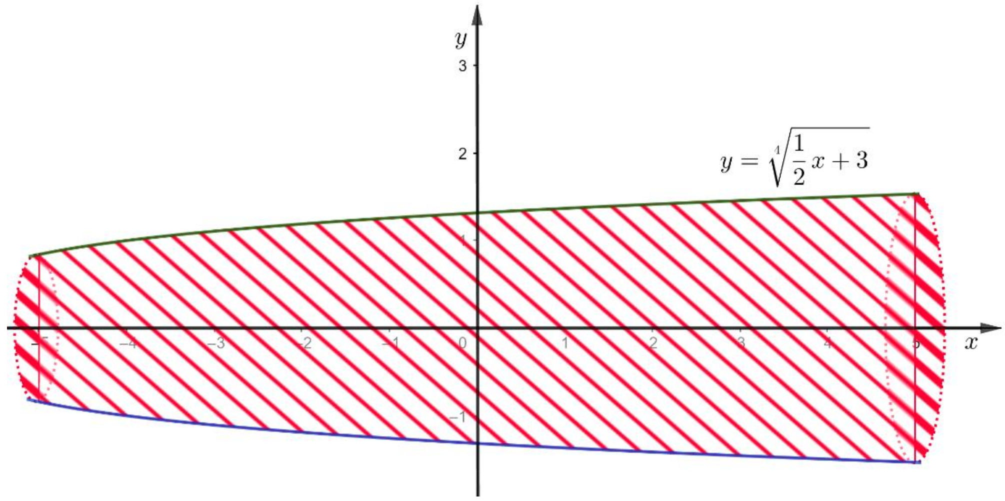
Smatram kako se kroz nastavni predmet matematike, koji je učenicima vrlo često odbojan i nezanimljiv, treba na pristupačan način iznositi gradivo, motivirati učenike za njegovo usvajanje i ukazati na povezivanje nastavnih sadržaja i njegovu primjenu bilo u matematici ili u našem okruženju. Time se unapređuje i poboljšava nastavni proces, ali također osposobljavaju se učenici da primijene stečena znanja u rješavanju raznih zadataka vezanih uz integralni račun. Naime, integralni račun je grana matematike koja je sveprisutna u mnogim znanostima (građevina, mehanika, fizika), stoga je potrebno učenicima ukazivati na njegovu primjenu. Samim time izbacivanjem primjene integrala na računanje obujma ne ide u korist tome. Važno je da učenici povezuju primjenu nastavnog gradiva obrađenog kroz predmet sa situacijama u našem okruženju. Iz tog sam razloga u nastavku riješila jedan primjer kojim se na to ukazuje.

Primjer: *Inženjeri brodogradnje rade nacrt na temelju kojega će se izgraditi novi brod za potrebe brodogradilišta. Prema njihovom nacrtu jedan od dijelova broda dobiven je rotacijom krivulje (zadane jednadžbom)* $y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}x + 3}$ *oko osi apscisa na segmentu* $[-5,5]$.

Prilikom proizvodnje dijelova radnici su naišli na problem jer tvrtka koja ispostavlja metalne ploče, potrebne za izgradnju na stanju ima ograničen broj ploča, ukupnog obujma $55\ m^3$ *. Postavlja se pitanje hoće li to biti dovoljno za izgradnju ovoga dijela broda?*

Rješenje:

Obzirom na postavljen problem nameće se potreba određivanja obujma tijela nastalog rotacijom krivulje $y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}x + 3}$, $x \in [-5,5]$ oko x-osi prikazano na slici 18.



Slika 18: Grafički prikaz rotacije krivulje $y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}x + 3}$ krivulje oko x-osi na segmentu $[-5,5]$

Primjenom formule

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

za izračunavanje obujma tijela nastalog rotacijom krivulje $y = f(x)$ oko $x -$ osi na segmentu $[a, b]$ proizlazi da se traženi obujam izračunava formulom:

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}x + 3} \right)^2 dx$$

iz koje slijedi:

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}\, dx = 2\pi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{11}{2}} \sqrt{t}\, dt = \frac{4\pi}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} = \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{11}{2}} = 52.55. \tag{8}$$

Određeni integral u izrazu (8) rješavamo metodom supstitucije, gdje je:

$$t = \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow dt = \frac{1}{2}dx$$

$$dx = 2dt$$

Pritom se nove granice t_1 i t_2 integrala dobivaju iz navedene supstitucije $t = \frac{1}{2}x + 3$, gdje za $x_1 = -5$ proizlazi $t_1 = \frac{1}{2}$ i analogno za $x_2 = 5$ dobivamo $t_2 = \frac{11}{2}$.

Obujam navedenog dijela broda iznosi $52.55\ m^3$, a tvrtka za ispostavu metalnih ploča raspolaže s pločama ukupnog obujma $55\ m^3$. Prema tome zaključujemo da je to dovoljna količina ploča za izgradnju ovoga dijela broda.

3. Nastavni plan i program

U ovome ćemo dijelu usporediti Nastavni plan i program prije i poslije donošenja kurikuluma 2019. godine. Također ćemo istaknuti razlike u godišnjem planu i programu za 4. razred srednje škole ovisno o fondu sati te ćemo ukazati na neke važne promjene donesene novim kurikulumom.

3.1. Nastavni plan i program prije donošenja kurikuluma

Ministarstvo znanosti i obrazovanja redovito donosi kurikulume kojima se na nacionalnoj razini objedinjuju namjere povezane sa svrhom, ciljem, očekivanjima i ishodima djece i mladih s povezivanjem odgojno-obrazovnog procesa i načina vrednovanja. Kurikulum donesen 2006. godine prikazan u [6] objedinjuje odgojno-obrazovne ishode po razredima i domenama. U tablici 1 prikazani su ishodi i njihova razrada za gimnazije i strukovne škole obzirom na godišnji fond sati.

Tablica 1: Odgojno-obrazovni ishodi za nastavnu cjelinu Integralni račun prema kurikulumu 2006. godine

srednja škola	fond sati	odgojno – obrazovni ishodi	razrada ishoda
strukovna srednja škola	64	-	-
strukovna srednja škola gimnazija	96	MAT SŠ B.4.8. MAT SŠ D.4.1. Primjenjuje računanje površine ispod grafa funkcije	-računa površinu ispod grafa linearne funkcije, složene funkcije (po dijelovima linearne), povezuje pojam površine ispod grafa s prijeđenim putom u *v-t* dijagramu
strukovna srednja škola gimnazija	128	MAT SŠ B.4.8. MAT SŠ D.4.1. Primjenjuje računanje površine ispod grafa funkcije	-računa površinu ispod grafa linearne funkcije, složene funkcije (po dijelovima linearne), povezuje pojam površine ispod grafa s prijeđenim putom u *v-t* dijagramu

strukovna srednja škola	160	MAT SŠ B.4.9. Računa neodređeni integral	-računa neodređeni integral rabeći svojstva i tablicu neodređenih integrala -primjenjuje metodu supstitucije
gimnazija		MAT SŠ B.4.10. MAT SŠ B.4.11. Primjenjuje integral u problemskim zadacima	-računa određeni integral rabeći Newton-Leibnizovu formulu -određuje površinu ispod grafa funkcije i obujam rotacijskih tijela s pomoću integrala -primjenjuje integrale u rješavanju problema iz matematike i fizike
gimnazija	192	MAT SŠ B.4.10 MAT SŠ B.4.11.	
gimnazija	224	MAT SŠ B.4.10. MAT SŠ B.4.11.	

Smatram kako je ovakav raspored razrade odgojno-obrazovnih ishoda u suglasnosti obzirom na fond sati. Možemo uočiti kako se nastavna cjelina Integralni račun ne obrađuje jedino u srednjim strukovnim školama s fondom od 64 sata godišnje, odnosno 2 sata tjedno. Učenici koji tijekom godine imaju tjedno 2 ili 3 sata matematike, tijekom 4. razreda srednje škole usvajaju osnovne matematičke pojmove te obzirom na kompleksnost i zahtjevnost Integralnog računa nije ih potrebno opterećivati širim sadržajem. Također razredi s tjednim fondom od 5 i više sati matematike su razredi matematičkih gimnazija u kojima su učenici puno zainteresiraniji za kompleksnija i zahtjevnija nastavna gradiva, kao što je Integralni račun. S učenicima matematičkih gimnazija potrebno je obrađivati nastavno gradivo Integralni račun, povezivati to gradivo s drugim predmetima te ukazati na teorijsko i praktično povezivanje. Također uočimo kako se prilikom razrede ishoda nigdje ne navodi ishod koji obuhvaća teorijski dio Integralnog računa.

Osim navedenog kurikuluma za svaki se nastavni predmet na mrežnim stranica NCVVO-a objavljivao Nastavni plan i program kako je prikazano u [7]. Taj se dokument zasnivao na ciljevima i zadacima nastavnog predmeta matematika u srednjim školama. Istaknute su neke od osnovnih zadaća koje učenici 4. razreda srednje škole trebaju znati, naučiti, svladati i slično. Također se ističe sadržaj koji prati navedene zadaće, pa se tako unutar nastavne cjeline Integral obrađuje integral funkcije, primitivna funkcija, Newton-Leibnizova formula. Primjenjuje se integralni račun na izračunavanje površine likova i obujma rotacijskih tijela. Možemo uočiti kako se ovim dokumentom navode samo nastavni sadržaji koji su obuhvaćeni kroz udžbenik.

3.2. Nastavni plan i program poslije donošenja kurikuluma

Ministarstvo znanosti i obrazovanja 2019. godine donijelo je odluku o donošenju novoga kurikuluma za nastavni predmet Matematika za srednje škole čime su unutar školstva unose neke važne promjene. Pritom se kurikulum kao i svi dokumenti vezani uz njega objavljuje na mrežnim stranicama MZO-a. Donošenje novoga kurikuluma jedna od važnijih promjena, kojom se uvelike pomaže nastavnicima u formiranju sadržaja nastavnog sata i ostvarivanju odgojno-obrazovnih ishoda koji su obuhvaćeni u okvirnom godišnjem izvedbenom kurikulumu (kratica GIK). Kurikulum vrijedi određeni vremenski period, dok se GIK izdaje svake godine obzirom na sadržaj i ishode koji će se u toj nastavnoj godini obrađivati. U ovome poglavlju ćemo navesti promjene donesene novim kurikulum 2019. godine [3] i [4] te analizirati i usporediti okvirni godišnji izvedbeni kurikulum [5] u odnosu na godišnji fond sati.

Obzirom na godišnji fond sati obrađuje se različito nastavno gradivo čime se i ostvaruju različiti odgojno-obrazovni ishodi kako je i prikazano u tablici 2.

Tablica 2: Odgojno-obrazovni ishodi za nastavnu cjelinu Integralni račun prema kurikulumu 2019. godine

<table>
<tr><th>srednja škola</th><th>fond sati</th><th>odgojno – obrazovni ishodi</th><th>razrada ishoda</th></tr>
<tr><td>strukovna srednja škola</td><td>64</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>strukovna srednja škola</td><td rowspan="2">96</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">-</td></tr>
<tr><td>gimnazija</td></tr>
<tr><td>strukovna srednja škola</td><td rowspan="2">128</td><td rowspan="2">MAT SŠ B.4.
MAT SŠ D.4.
Primjenjuje računanje površine ispod grafa funkcije (IZBORNI ISHODI)</td><td rowspan="2">-računa neodređeni integral rabeći svojstva i tablicu neodređenih integrala</td></tr>
<tr><td>gimnazija</td></tr>
</table>

			-izračunava površinu ispod grafa jednostavnih funkcija rabeći Newton- Leibnizovu formulu i tablicu neodređenih integrala
strukovna srednja škola	160	MAT SŠ B.4.9. Računa neodređeni integral	-računa neodređeni integral rabeći svojstva i tablicu neodređenih integrala -primjenjuje metodu supstitucije
gimnazija		MAT SŠ B.4.10. MAT SŠ B.4.11. Primjenjuje integral u problemskim zadacima	-računa određeni integral rabeći Newton-Leibnizovu formulu -određuje površinu ispod grafa funkcije i obujam rotacijskih tijela s pomoću integrala -primjenjuje integrale u rješavanju problema iz matematike i fizike
gimnazija	192	MAT SŠ B.4.10 MAT SŠ B.4.11.	
gimnazija	224	MAT SŠ B.4.10. MAT SŠ B.4.11.	

Uočimo kako se u usporedbi s tablicom 1, nastavna cjelina Integralni račun ne obrađuje unutar godišnjeg fonda od 96 sati, dok je u godišnjem fondu od 128 sati izborni ishod. Obzirom na to nastavnik može svojevoljno odlučiti hoće li obrađivati nastavnu cjelinu Integralni račun ili ne. Iz razgovora s kolegama nastavnicima i prema rezultatima ankete uočeno je da vrlo često nastavnici ne ostvaruju navedene izborne ishode, odnosno nastavna cjelina Integralni račun se unutar ovoga fonda sati najčešće ne obrađuje. Budući da se prema planu i programu Integralni račun nalazi na samom kraju nastavnog gradiva za srednju školu, često biva izostavljen. Mišljenja sam da bi učenici koji godišnje imaju fond od 128 sati matematike (najčešće učenici općih gimnazija), po završetku srednje škole, trebali moći primjenjivati integral u jednostavnijim zadacima te povezivati geometrijsko značenje integrala s primjenom istog u računanju površine likova u ravnini. Također možemo primijetiti da se u srednjim strukovnim školama sa godišnjim fondom od 160 sati i gimnazijama sa godišnjim fondom od 160, 192 i 224 sata obrađuje obujam rotacijskih tijela pomoću integrala. No, prisjetimo se da smo u poglavlju 2.3.2. istaknuli kako se nakon donošenja novog kurikuluma 2019. godine u udžbeniku [2] tiskanom 2021. godine ne nalazi nastavna cjelina Primjena integrala na računanje obujma. Samim time postavlja se pitanje prate li sadržaji udžbenika svih nakladnika navedeni GIK?

Usporedbom s prethodnim kurikulumom iz 2006. godine [6] uočena je samo jedna razlika unutar odgojno-obrazovnih ishoda za godišnji fond od 96 sati matematike. Osim toga u prethodnom kurikulumu za fond od 128 sati ishodi nisu izborni već obvezni. U preostalim segmentima nisu uočene nikakve promjene u razradi ishoda. Također istaknimo da su navedeni ishodi jednaki prije i poslije donošenja novog kurikuluma 2019. godine usprkos promjenama unutar udžbenika.

Kao što je prethodno istaknuto MZO nakon donošenja novog kurikuluma 2019. godine u svakoj nastavnoj godini donosi se okvirni godišnji izvedbeni kurikulum kojim se određuje skup odgojno-obrazovnih ishoda i nastavnih sadržaja koje učenici na nacionalnoj razini u predmetu matematika trebaju ostvariti. U ovoj nastavnoj školskoj godini 2021./2022. doneseni su samo GIK-ovi za 4.razred srednje škole s godišnjim fondom od 64 i 96 sati. Prema prethodno provedenoj analizi i prikazu u tablici 1 te usporedbom kurikuluma [5] možemo zaključiti kako se Integralni račun ne obrađuje prema donesenim kurikulumima u nastavnoj godini 2021./2022. za 4. razred srednjih škola. Iz provedene ankete zaključujemo da su nastavnici podvojena mišljenja po tom pitanju. Neki nastavnici smatraju da je Integralni račun prezahtjevno gradivo koje ujedno nije u sadržaju državne mature, te da ga stoga ne treba obrađivati u srednjim školama, već da je to sadržaj za obradu na fakultetima. Oprečno tome, nekolicina nastavnika uz moje osobno mišljenje smatraju da učenike treba upoznati s temeljima integralnog računa (određivanje i izračun integrala pomoću tabličnih integrala, primjena metode supstitucije u rješavanju integrala i geometrijskoj interpretaciji određenog integrala) što je važno za daljnji nastavak njihovog školovanja. Učenici koji završavaju matematičke gimnazije trebali bi detaljno obrađivati i uspješno svladati Integralni račun kao nastavni sadržaj.

4. Istraživanje putem ankete

Kao i za mnoge životne situacije, tako i za nastavnu cjelinu Integralni račun, mišljenja o njegovoj primjeni u srednjoškolskoj nastavi matematike kao i obrada te nastavne cjeline kroz srednju školu, se razlikuju. Upravo iz tog razloga, kako bi se istražila zastupljenost obrade integralnog računa kroz srednje škole napravljena je anketa koju ćemo u ovom poglavlju analizirati i prikazati njezine rezultate te ukratko povezati s prethodno napisanim poglavljima.

4.1. Metodologija

Istraživanje je provedeno kroz mjesec travanj 2022. godine te je tijekom istraživanja korištena anketa u elektroničkom obliku. Anketa je distribuirana putem elektroničke pošte svim srednjim školama, odnosno nastavnicima matematike u Republici Hrvatskoj. Anketi su pristupili nastavnici iz onih škola koje u svojim programima imaju smjerove od 96 ili više sati matematike godišnje. Anketa se sastoji od 10 pitanja, od kojih je sedmo pitanje bilo neobavezno, te su neka od pitanja povezana obzirom na prethodno dane odgovore, kako je i prikazano u tablici 3.

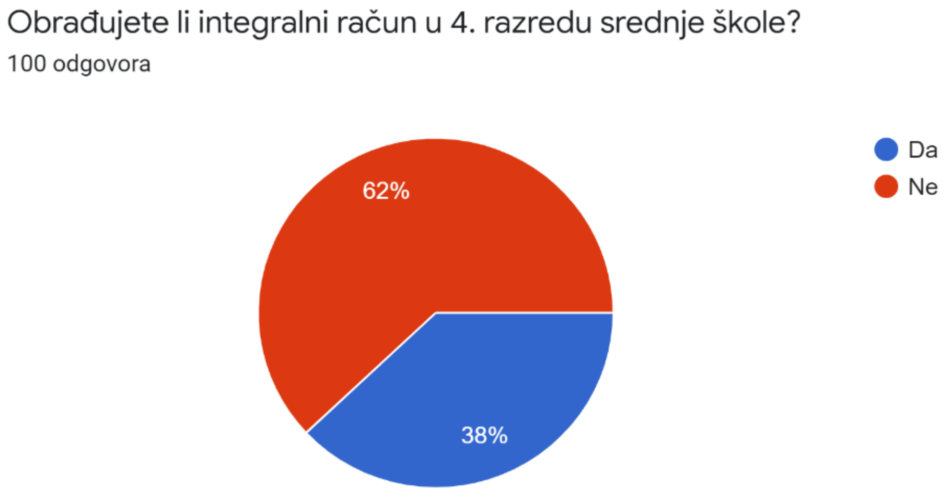
Tablica 3: Pitanja korištena u anketi

1. Obrađujete li Integralni račun u 4. razredu srednje škole?
1.1. Ukoliko je vaš prethodni odgovor ne, ukratko obrazložite zašto.
2. Koji udžbenik koristite u nastavi matematike?
3. Prilikom obrade nastavne cjeline Integralni račun, slijedite li redoslijed iz vašeg odabranog udžbenik?
3.1. Ukoliko je vaš prethodni odgovor ne, ukratko opišite redoslijed koji koristite.
4. Koristite li GeoGebru prilikom obrade nastavnog gradiva Integralni račun?
5. Smatrate li da su donošenjem novog kurikuluma 2019. godine donesene promjene u obradi i načinu izvođenja nastave integralnog računa?
5.1. Ukratko obrazložite vaš odgovor.
6. Ukratko opišite vaše mišljenje o pristupačnosti nastavne cjeline Integralni račun u 4. razredu srednje škole.
7. Dodatne sugestije i komentari na temu.

Za ispunjavanje ankete je bilo je potrebno oko 5 minuta, a anketi je pristupilo 100 ispitanika. Cilj provedbe istraživanja bio je ispitati koliko je zastupljena nastavna cjelina Integralni račun u obradi gradiva kroz četvrti razred srednje škole, te istražiti koriste li nastavnici prilikom obrade gradiva digitalni alat GeoGebra. Također se kroz anketu htjelo ispitati slijede li, nastavnici koji obrađuju integralni račun, redoslijed dan kroz izabrani udžbenik. Obzirom na novi kurikulum donesen 2019. godine, htjelo se ispitati mišljenje nastavnika o istom u vezi obrade nastavne cjeline Integralni račun.

4.2. Rezultati

Među nastavnicima matematike čak 62% ispitanika ne obrađuje nastavnu cjelinu Integralni račun, dok njih 38% obrađuje.

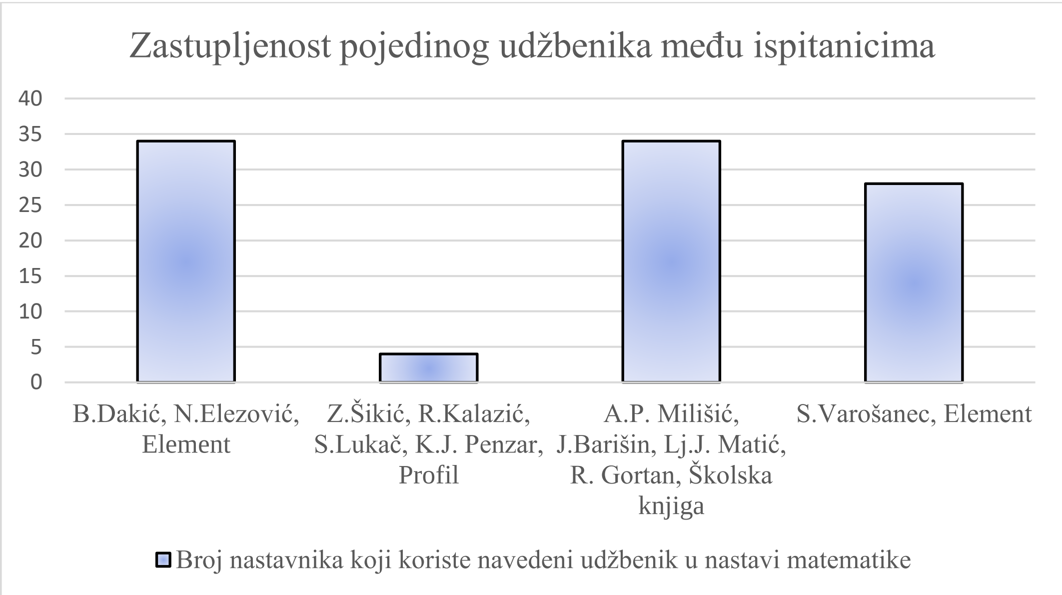


Slika 19: Postotak ispitanika koji obrađuju ili ne obrađuju integralni račun u 4. razredu srednje škole

Istaknimo da su anketirani nastavnici onih srednjih škola koje imaju godišnji fond od 96 i više sati čime bi nastavna cjelina Integralni račun, prema prikazanom u poglavlju 3.2., trebala biti obrađivana u većini srednjih škola. Povezano s pitanjem prikazanim na slici 19, nastavnici su trebali argumentirati razlog zbog kojeg ne obrađuju nastavnu cjelinu Integralni račun. Većina je istaknula kako nastavna cjelina Integralni račun nije u kurikulumu donesenom 2019. godine pa se prema tim smjernicama niti ne obrađuje. Osim navedenog nekolicina također ističe kako Integralni račun nije jedno od područja koje se ispituje na maturi pa se obzirom na to niti ne posvećuje vrijeme za njegovu obradu. Nastavnici kojima na kraju školske godine preostane višak sati, radije ih koriste za ponavljanje nastavnog sadržaja koji se ispituje na državnoj maturi.

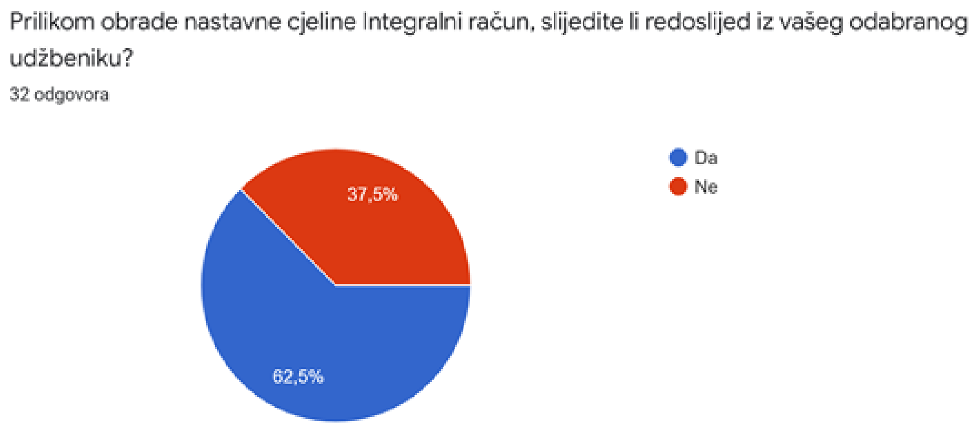
U prethodnim poglavljima argumentirala sam važnost primjene Integralnog računa u mnogim znanostima, stoga smatram da učenike treba upoznati s osnovama navedenog gradiva. S druge strane, kako je prikazano u poglavlju 3.2. nastavna cjelina Integralni račun prema donesem kurikulumu ne obrađuje se u općim gimnazijama i strukovnim školama jer je nastavni plan i program dovoljno opterećen, stoga nastavnicima ne preostaje mnogo vremena za obradu izbornih ishoda, kao što je Integralni račun.

Ispitani nastavnici u nastavi matematike koriste različite udžbenike, kako je i prikazano na slici 20.



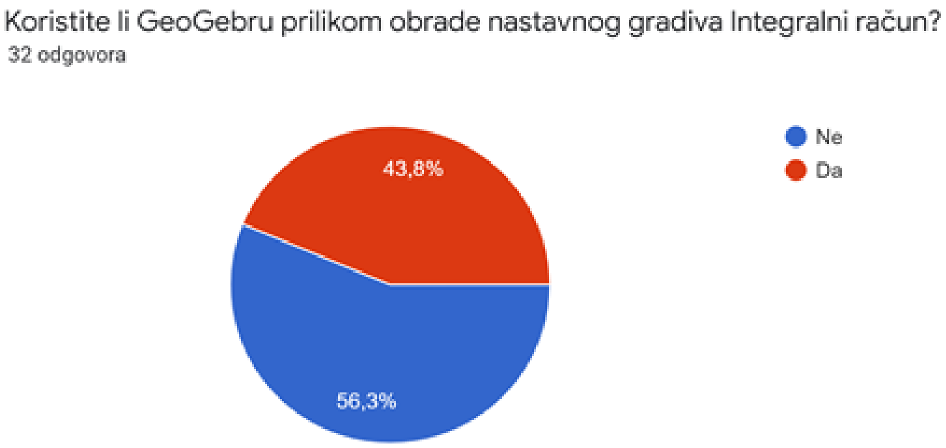
Slika 20: Zastupljenost pojedinog udžbenika među ispitanicima

Budući da se u drugome poglavlju dao kritički osvrt na dijelom neprimjeren i neadekvatan način obrade nastavne cjeline Integralni račun, ispitanicima u anketi bilo je postavljeno pitanje slijede li redoslijed iz odabranog udžbenika. 62.5% ispitanika je odgovorilo da slijedi redoslijed odabranog udžbenika na način da se na početku obrađuje problem površine i određeni integral, primitivna funkcija i Newton-Leibnizova formula te neodređeni integral i metoda supstitucije, a na kraju primjena integrala na računanje površine. S druge strane, 37.5% ispitanika odgovorilo je kako prilikom obrade nastavnog gradiva ne slijede navedeni redoslijed, te su u sljedećem pitanju ukratko opisali redoslijed obrade nastavne cjeline Integralni račun.



Slika 21:Postotak ispitanika koji prilikom obrade nastavne cjeline Integralni račun slijede ili ne slijede redoslijed iz odabranog udžbenika

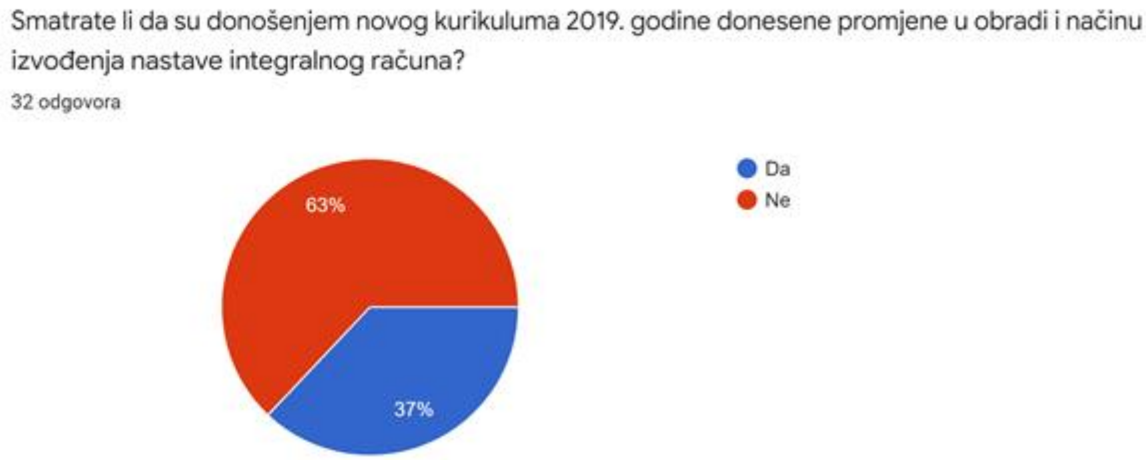
Većina nastavnika koji ne slijede redoslijed odabranog udžbenika naveli su kako na početku nastavne cjeline obrađuju problem površine, neodređeni integral i metodu supstitucije, nakon toga prelaze na određeni integral i Newton-Leibnizovu formulu, a zatim obrađuju primjenu integrala na računanje površine. Neki nastavnici su u svojim odgovorima istaknuli da obrađuju i primjenu integrala na računanju obujma kao i primjenu integrala u preostalim znanostima. Navedeni odgovori ankete u suglasnosti su s predloženim redoslijedom u poglavlju 2, gdje je istaknut pogodniji redoslijed obrade nastavnog gradiva Integralni račun. Time je potkrijepljeno da kroz praksu nastavnici mijenjaju redoslijed obrade gradiva kako bi učenicima isti bio pristupačniji i jasniji. Nadalje u navedenom poglavlju istaknuto je da prilikom obrade nastavnog gradiva Integralni račun, za ostvarivanje načela zornosti i motivacije, bi bilo korisno korištenje digitalnog alata GeoGebra. No rezultati ankete ukazuju da se nastavnici navedenim alatom ne koriste prilikom obrade nastavnog gradiva Integralni račun, vidi sliku 22.



Slika 22: Postotak ispitanika koji u obradi nastavnog gradiva Integralni račun koriste ili ne koriste GeoGebru

Digitalni alati općenito mogu uvelike povećati motivaciju učenika za rad, doprinose ostvarivanju načela zornosti te su zbog toga korisni i preporučljivi za korištenje, posebno kroz nastavnu cjelinu Integralni račun, kako smo i argumentirali u poglavlju 2.

Cilj posljednjeg pitanja bio je ispitati mišljenje nastavnika o promjenama donesenim novim kurikulumom 2019. godine. Rezultat ankete je da 63% ispitanika smatra da novim kurikulumom nisu donesene promjene u obradi i načinu izvođenja nastave, dok 37% ispitanika smatra da su donesene promjene novim kurikulumom. U nastavku ispitanici su trebali ukratko obrazložiti svoj odgovor. Većina ispitanika slaže se kako navedenim kurikulumom nisu donesene značajne promjene u planu i programu, odnosno obradi i načinu izvođenja nastave. Mnogi ističu kako nastavna cjelina Integralni račun nije u odgojno-obrazovnim ishodima za opće gimnazije i strukovne škole te se obzirom na to niti ne obrađuje i smatraju da je ona pristupačnija za učenike matematičkih gimnazija koji su više zainteresirani i vještiji u povezivanju nastavnog gradiva. Budući da se nastavna cjelina Integralni račun nalazi na kraju srednjoškolskog obrazovanja, učenici je uglavnom ne usvoje na kvalitetan način, a obzirom se ne nalazi na popisu obaveznog sadržaja državne mature motivacija za isti je manja. Nastavnici koji smatraju da su kurikulumom donesene promjene dodali su da se donesene promjene očituju u načinu obrade nastavnih sadržaja, gdje se više potiče učenike na logičko razmišljanje i povezivanje gradiva.



Slika 23: Postotak ispitanika koji smatraju ili ne smatraju da su donošenjem novog kurikuluma donesene promjene u obradi i načinu izvođenja nastave integralnog računa

Mišljenja sam kako je potrebno učenike srednjih škola upoznati s Integralnim računom, upravo iz razloga jer je to obavezni sadržaj gotovo svih fakulteta i ima široku primjenu u raznim znanostima. Pritom nije potrebno učenike opterećivati detaljnom analizom gradiva, ali bi bilo poželjno da oni u četvrtom razredu srednje škole usvoje osnovne pojmove integralnog računa i njihovu primjenu u rješavanju jednostavnijih zadataka.

5. Zaključak

Integralni račun je sastavni dio srednjoškolskog obrazovanja, stoga je važno da bude izložen na ispravan i sistematičan način kako bi učenici biti sposobni povezati važne pojmove vezane uz njega te primijeniti ključne sadržaje i koncepte ovoga gradiva na konkretne probleme u matematici. Nakon provedene analize udžbenika za četvrti razred srednje škole izdanog prije i poslije donošenja novog kurikuluma može se primijetiti kako su prilikom donošenja kurikuluma uvedene minimalne promjene u načinu iznošenja i obradi gradiva čime se narušava načelo sistematičnosti i postupnosti. Također, može se primijetiti kako neki od sadržaja nisu izneseni na posve ispravan i precizan način, narušavajući načelo znanstvenosti. U skladu s time izneseni su pogodniji načini obrade gradiva te su prezentirane aktivnosti izrađene u digitalnom alatu GeoGebra kojima je cilj zornije predočiti povezanost između korištenih pojmova u nastavnim sadržajima. Aktivnosti omogućuju učenicima promatranje i ispitivanje određivanja površine lika ispod grafa parabole nad proizvoljnim segmentom u svrhu kvalitetnije predodžbe pojmova donje i gornje integralne sume i izračuna površine krivocrtnog trapeza. Teorijski dio koji prati ovu nastavnu cjelinu prezahtjevan je za učenike na ovom stupnju obrazovanje, stoga se uz prilagođeniji način obrade gradiva htjelo povezati i sistematičnije iznijeti gradivo na način da se koristi više grafičkih prikaza, primjera uz koje učenici mogu samostalno doći do zaključaka te povezivanje prethodno obrađenog gradiva diferencijalnog računa s integralnim računom. Sve navedeno služi poboljšanju kvalitete nastavnog procesa, povećanju motivacije učenika za svladavanje gradiva te jednostavniju i sistematičniju obradu istog. Osim toga kroz prikazani primjer može se uočiti kako je primjena integralnog računa zastupljena u mnogim znanostima, no kroz analizu udžbenika prikazano je kako se novim kurikulumom to ne ističe dovoljno. Kroz provedenu anketu i usporedbu nastavnog plana i programa zaključujemo kako je nastavna cjelina Integralni račun nedovoljno zastupljena kroz srednjoškolsko obrazovanje bilo iz razloga što neki smatraju da je to gradivo prezahtjevno ili što nije obavezni sadržaj mature, no usprkos mišljenjima nastavnika matematike, uvidjeli smo kako se i nastavnim planom i program isti ne obrađuje kroz srednjoškolsku nastavu. Integralni račun kao nastavna cjelina u predmetu matematika za srednje škole treba biti iznesen na jednostavan način, povezujuću nastavna gradiva i ističući njegovu sveobuhvatnu primjenu kako u matematici tako i u mnogim drugim znanostima, samim time se učenicima može ukazati na primjenu gradiva u životnim situacijama i potaknuti njihovu motivaciju i zanimanje za ovo područje.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović: Matematika 4: udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred tehničkih škola, 2. dio, Element, Zagreb, 2015.

[2] B. Dakić, N. Elezović: Matematika 4: udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazija i strukovnih škola, 2. dio, Element, Zagreb, 2021.

[3] Narodne novine- službeni list republike Hrvatske, Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2. u Republici Hrvatskoj (Preuzeto s https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_209.html , 8.1.2022.)

[4] Narodne novine- službeni list republike Hrvatske, Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (Preuzeto s https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html , 8.1.2022.)

[5] Narodne novine- okvirni godišnji izvedbeni kurikulum za nastavnu godinu 2021./2022. (Preuzeto s https://mzo.gov.hr/vijesti/okvirni-godisnji-izvedbeni-kurikulumi-za-nastavnu-godinu-2021-2022/4522, 8.1.2022.)

[6] Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta Matematika, veljača 2006. godine (Preuzeto s http://mzos.hr/datoteke/6-Predmetni_kurikulum-Matematika.pdf, 8.1.2022.)

[7] NCVVO – Nastavni plan i program za gimnazije i strukovne škole- Matematika . (Preuzeto s https://www.ncvvo.hr/nastavni-planovi-i-programi-za-gimnazije-i-strukovne-skole/, 8.1.2022.)

[8] Z.Šikić, Newton i Leibniz otkrivači infinitezimalnog računa, Zagreb, 1989. (Preuzeto s https://www.fsb.unizg.hr/matematika/download/ZS_Newton_i_Leibniz.pdf, 9.1.2022.)

Popis slika