Prirodna jednadžba ravninskih krivulja

Gašparini, Marina Celeste

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Preddiplomski sveučilišni studij

Marina Celeste Gašparini

Prirodna jednadžba ravninskih krivulja

Završni rad
Rijeka, 2022.

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Preddiplomski sveučilišni studij

Marina Celeste Gašparini

Prirodna jednadžba ravninskih krivulja

Mentor: doc. dr. sc. Milena Sošić
Kolegij: Uvod u diferencijalnu geometriju

Završni rad
Rijeka, 2022.

Sadržaj

Sažetak

U ovom radu se proučavaju krivulje u ravnini i njihove zakrivljenosti, pri čemu se definira pojam kongruentnih krivulja kao i pojam prirodne jednadžbe krivulje za koju se opisuju njezina svojstva. Iskazuje se osnovni teorem teorije krivulja jedan od važnijih teorema diferencijabilne geometrije krivulja. Uz prirodnu jednadžbu ravninske krivulje objašnjava se i pojam prirodne jednadžbe krivulje u trodimenzionalnom prostoru te se obrazlaže njihova povezanost. Nadalje, detaljno se razrađuju i rješavaju primjeri krivulja zadanih eksplicitnom jednadžbom i parametarskim jednadžbama za koje se izračunava odgovarajuća prirodna jednadžba. Također, argumentira se postupak dobivanja parametarskih jednadžbi, kao i odgovarajuće vektorske jednadžbe obzirom na zadanu prirodnu jednadžbu krivulje.

Ključne riječi

Parametrizacija krivulje, ravninska krivulja, prostorna krivulja, duljina luka krivulje, fleksija (prva zakrivljenost) i torzija (druga zakrivljenost) krivulje, kongruentnost krivulja, prirodna jednadžba krivulje, parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe krivulje

1 Uvod

U ovom radu se proučavaju krivulje u ravnini i njihove zakrivljenosti te se koristi svojstvo da se pri translaciji, rotaciji, simetriji neke krivulje ne mijenja njezina zakrivljenost. Pritom se uvodi pojam kongruentnih krivulja koje imaju svojstvo da se translacijom ili rotacijom ili simetrijom mogu dovesti u isti položaj, što ima za posljedicu da imaju istu prirodnu jednadžbu, iako su njihove jednadžbe (eksplicitne, implicitne, parametarske) međusobno različite, jer se nalaze na različitim položajima u koordinatnom sustavu. Uz detaljno obrazloženje dobivanja prirodne jednadžbe krivulje u ravnini, riješiti će se i primjeri kojima će se dodatno ilustrirati i objasniti postupak izračunavanja prirodne jednadžbe ravninske krivulje.
Navedimo da je krivulja osnovni pojam koji možemo definirati kao "liniju koja ne mora biti ravna". Prije nego li je krivulja postala predmet proučavanja u matematici, bila je korištena još u prapovijesti kao ukras na zidovima špilja i svakodnevnim predmetima, ali isto tako i kao putanja bačenog kamenčića ili strujanja vode, obrisa lišća ili krivudave staze, rijeka i mora, što svjedoči da su ljudi razlikovali pravac od krivulje i oblike pojedinih krivulja. Povijesni spomenici iz daleke prošlosti svjedoče nam da su svi narodi na određenom stupnju razvoja spoznali pojam prvca i kružnice te su upotrebljavali primitivne sprave za njihovu konstrukciju. Stari grčki geometričari proučavali su čunjosječnice, koje danas imaju veliki značaj i primjenu u tehnici, ali i niz krivulja kao što su Arhimedova spirala, Nikomedova konhoida, Dioklova cisoida, cikloida, Dinostratova kvadratrisa. Međutim u srednjem vijeku su ta velika dostignuća bila uglavnom zaboravljena sve do 17. stoljeća kada René Descartes započinje s izgradnjom analitičke geometrije i objavljuje svoju glasovitu knjigu "Geometrija" u kojoj je bila zasnovana metoda koordinata. Tom je metodom omogućen jedinstveni način zadavanja svake krivulje u obliku odgovarajuće jednadžbe. Descartes je prvi došao do spoznaje da se svaka ravninska krivulja može zapisati jednadžbom $f(x, y) = 0$ kojom su povezane dvije varijabilne veličine.
Razlikujemo ravninske od prostornih krivulja. Ravninsku krivulju definiramo kao skup povezanih točaka koje leže u nekoj ravnini, a prostornu krivulju kao skup povezanih točaka u prostoru koje ne leže u jednoj te istoj ravnini. U ovome radu proučavat ćemo ravninske krivulje i njihovu prirodnu jednadžbu. U ovisnosti o tipu jednadžbe (eksplicitnoj, implicitnoj, polarnoj ili parametarskim jednadžbama) ravninske krivulje navest ćemo formule za izračunavanje duljine luka (prirodnog parametra) i fleksije krivulje.

2 Prirodna jednadžba krivulje

U ovom poglavlju objasnit ćemo važnost i osobitost prirodne jednadžbe proizvoljne krivulje $\mathcal{C}$ u realnoj ravnini $\mathbb{R}^2$, a potom i u trodimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}^3$, gdje će se argumentirati uz koje uvjete će formula za izračunavanje prirodne jednadžbe ravninske krivulje proizlaziti iz formule za izračunavanje prirodne jednadžbe krivulje u trodimenzionalnom realnom prostoru.

2.1 Prirodna jednadžba krivulje u ravnini $\mathbb{R}^2$

Poznato je da krivulju $\mathcal{C}$ u realnoj ravnini $\mathbb{R}^2$ možemo zadati eksplicitnom jednadžbom ili implicitnom jednadžbom ili parametarskim jednadžbama ili pak polarnom jednadžbom ako se ona promatra u polarnom sustavu, pri čemu je njezina pozicija u ravnini jednoznačno određena zadanom jednadžbom. Drugim riječima, ako krivulju $\mathcal{C}$ translatiramo, rotiramo ili simetrično preslikamo (u odnosu na točku ili pravac), onda dobivamo krivulju $\mathcal{C}^*$ kojoj se jednadžba (eksplicitna, implicitna, parametarske, polarna) razlikuje od jednadžbe krivulje $\mathcal{C}$. Navedimo da se takve krivulje $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ nazivaju *kongruentne krivulje*.
Za dvije krivulje kažemo da su kongruentne ako se jedna od njih dobiva iz druge njezinom translacijom (za neki fiksni vektor) ili rotacijom (za neki fiksni kut) ili simetrijom u odnosu na točku (centar) ili pravac (os). Dakle, dvije krivulje $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ su kongruentne ako ih translacijom, rotacijom ili simetrijom možemo dovesti u položaj da se one međusobno preklapaju.
Obzirom na činjenicu da dvije ili više kongruentnih krivulja imaju različite jednadžbe (eksplicitne, implicitne, parametarske ili polarne), nameće se pitanje postoji li neka jednadžba kojom će se moći zadati cijela familija međusobno kongruentnih krivulja. Iz definicije kongruentnosti krivulja direktno proizlazi da one u svakoj odgovarajućoj točki imaju istu zakrivljenost, tj. fleksiju[1], jer se pri translaciji, rotaciji, simetriji neke krivulje ne mijenja njezina zakrivljenost, a time ni njezin oblik, stoga dolazimo do zaključka da se kongruentne krivulje mogu zadati nekom jednadžbom u kojoj je fleksija (zakrivljenost) realna funkcija realne varijable po duljini luka te krivulje. Takva se jednadžba naziva *prirodnom jednadžbom krivulje*.

Neka je u ravnini zadana krivulja $\mathcal{C}$ (eksplicitnom ili implicitnom ili polarnom jednadžbom ili parametarskim jednadžbama) i označimo sa s njenu duljinu

[1]fleksija je pozitivan realan broj kojim se brojčano određuje mjera odstupanja krivulje od pravca u bilo kojoj njezinoj točki - detalnije u odjeljku 2.2

luka i sa χ njenu fleksiju (zakrivljenost)[2]. Tada jednadžbu oblika

$$\chi = \chi(s) \tag{1}$$

nazivamo prirodnom jednadžbom krivulje $\mathcal{C}$. Pritom se fleksija χ izražava u obliku realne funkcije realne varijable po duljini luka s zadane krivulje. Uzimajući u obzir prethodno navedeno proizlazi da je jednadžba (1) ujedno i prirodna jednadžba familije svih krivulja kongruentnih s krivuljom $\mathcal{C}$.

2.2 Prirodna jednadžba krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$

U trodimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}^3$ krivulje najčešće zadajemo u parametarskom obliku parametarskim jednadžbama

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R} \tag{2}$$

ili odgovarajućom vektorskom jednadžbom

$$\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \tag{3}$$

gdje je $t \in \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan parametar, a $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$. Krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$ također ponekad zadajemo eksplicitnim $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ ili implicitnim $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ jednadžbama koje zapisujemo u obliku sustava dviju jednadžbi s tri nepoznanice x, y i z, gdje je svaka od navedenih dviju jednadžbi tog sustava jednadžbi[3] zapravo jednadžba plohe kojoj pripada krivulja $\mathcal{C}$. Time su navedenim sustavom jednadžbi zadane dvije plohe od kojih svaka sadrži krivulju $\mathcal{C}$, što se geometrijski interpretira da je krivulja $\mathcal{C}$ presjek tih dviju ploha.
Analogno kao i kod krivulja u ravnini, pozicija krivulje $\mathcal{C}$ u trodimenzionalnom realnom prostoru $\mathbb{R}^3$ jednoznačno je određena njezinom jednadžbom (neovisno o tipu te jednadžbe), a njezin oblik, odnosno zakrivljenost ne mijenja se pri njezinoj translaciji, rotaciji ili simetriji.
Podsjetimo se da za krivulje u $\mathbb{R}^3$ možemo izračunati dva tipa zakrivljenosti: fleksiju i torziju. Pritom se fleksija (prva zakrivljenost) krivulje $\mathcal{C}$ definira kao mjera odstupanja te krivulje od pravca u njezinoj proizvoljnoj točki (kao i kod krivulja u ravnini), dok se torzija (druga zakrivljenost) krivulje $\mathcal{C}$ definira kao mjera izvijanja te krivulje iz oskulacione ravnine u prostor $\mathbb{R}^3$ u njezinoj proizvoljnoj točki. Dakle, torzija može poprimiti bilo koju realnu vrijednost, dok se za fleksiju uvijek uzima pozitivna realana vrijednost[4].

[2] duljinu luka s i fleksiju χ krivulje $\mathcal{C}$ izračunavamo primjenom odgovarajućih formula koje ovise o tipu jednadžbe krivulje $\mathcal{C}$, vidi poglavlje 3

[3] najčešće se z zadaje kao realna funkcija dviju realnih varijabli x i y i pišemo $z = f(x, y)$

[4] ako se pri izračunavanju fleksije dobije negativna realna vrijednost, onda se definira da je fleksija jednaka njezinoj apsolutnoj vrijednosti

Fleksija i torzija krivulje $\mathcal{C}$ zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. ako postoji točka na krivulji $\mathcal{C}$ takva da je u njoj torzija jednaka nuli, onda u toj točki krivulja $\mathcal{C}$ probada oskulacionu ravninu[5];

2. ako je u svim točkama krivulje $\mathcal{C}$ torzija jednaka nuli, onda cijela krivulja $\mathcal{C}$ leži u oskulacionoj ravnini i kažemo da je $\mathcal{C}$ ravninska krivulja;

3. ako u svim točkama krivulje $\mathcal{C}$ torzija poprima strogo pozitivne realne vrijednosti, onda se cijela krivulja $\mathcal{C}$ izvija iz oskulacione ravnine u prostor $\mathbb{R}^3$ u pozitivnom smjeru, odnosno u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu i kažemo da je krivulja $\mathcal{C}$ desno orijentirana;

4. ako u svim točkama krivulje $\mathcal{C}$ torzija poprima strogo negativne realne vrijednosti, onda se cijela krivulja $\mathcal{C}$ izvija iz oskulacione ravnine u prostor $\mathbb{R}^3$ u negativnom smjeru, odnosno u smjeru kretanja kazaljke na satu i kažemo da je krivulja $\mathcal{C}$ lijevo orijentirana;

5. ako postoji točka na krivulji $\mathcal{C}$ takva da je u njoj fleksija jednaka nuli, onda kažemo da je to točka izravnavanja krivulje $\mathcal{C}$;

6. ako je u svim točkama krivulje $\mathcal{C}$ fleksija jednaka nuli, onda su sve točke te krivulje ujedno njezine točke izravnavanja i kažemo da je $\mathcal{C}$ pravac[6];

7. fleksija χ je pozitivan realan broj u svim točkama krivulje $\mathcal{C}$, jer je po definiciji ona obrnuto proporcionalna polumjeru $R > 0$ kružnice zakrivljenosti[7] (koji je po definiciji strogo pozitivan realan broj). Drugim riječima:
   - ako polumjer R kružnice zakrivljenosti teži prema nuli, onda fleksija χ teži prema $+\infty$, što ima za posljedicu da kružnica zakrivljenosti teži prema svom središtu (točki) u kojoj fleksija prima beskonačno veliku realnu vrijednost[8];
   - ako polumjer R kružnice zakrivljenosti teži prema $+\infty$, onda fleksija χ teži prema nuli, što ima za posljedicu da se kružnica zakrivljenosti izravnava u okolini svake svoje točke[9].

[5] oskulaciona ravnina krivulje $\mathcal{C}$ je zapravo xy-ravnina

[6] pravac je jedina krivulja koja se izravnava u svim svojim točkama, jer je fleksija u svim točkama pravca jednaka nuli

[7] što ima za direktnu posljedicu da je kružnica manjeg polumjera više zakrivljena u odnosu na kružnicu većeg polumjera

[8] svaku točku u ravnini ili prostoru možemo promatrati kao kružnicu sa središtem u toj točki i polumjerom nula

[9] svaka se kružnica (plus) beskonačno velikog polumjera u svakoj svojoj točki izravnava, odnosno "poprima izgled pravca"

Budući da su za svaku krivulju $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ definirane dvije zakrivljenosti fleksija i torzija, proizlazi da se prirodna jednadžba bilo koje prostorne krivulje $\mathcal{C}$ (tj. familije svih krivulja kongruentnih s krivuljom $\mathcal{C}$) zadaje sljedećim jednadžbama

$$\chi = \chi(s), \quad \tau = \tau(s) \tag{4}$$

gdje su fleksija i torzija realne funkcije realne varijable po duljini luka zadane krivulje.
Jednadžbama (4) se podrazumijeva da je krivulja $\mathcal{C}$ parametrizirana po svom prirodnom parametru s (tj. po svojoj duljini luka), odnosno da je ona zadana parametarskim jednadžbama

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad s \in \langle 0, L\rangle \subseteq \mathbb{R} \tag{5}$$

ili odgovarajućom vektorskom jednadžbom

$$\vec{x}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k}, \quad s \in \langle 0, L\rangle \subseteq \mathbb{R}, \tag{6}$$

pri čemu se fleksija i torzija krivulje $\mathcal{C}$ izračunavaju primjenom formula:

$$\chi(s) = |\vec{x}\,''(s)|, \qquad \tau(s) = \frac{(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,''(s), \vec{x}\,'''(s))}{\chi^2(s)} \tag{7}$$

gdje je $\chi(s) \neq 0$ za svaki $s \in \langle 0, L\rangle \subseteq \mathbb{R}$, čime se podrazumijeva da krivulja $\mathcal{C}$ nema točaka izravnavanja. Formule u (7) zapisujemo i u obliku:

$$\chi(s) = \sqrt{\ddot{x}^2(s) + \ddot{y}^2(s) + \ddot{z}^2(s)}, \qquad \tau(s) = \frac{(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,''(s), \vec{x}\,'''(s))}{\ddot{x}^2(s) + \ddot{y}^2(s) + \ddot{z}^2(s)},$$

gdje se $(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,''(s), \vec{x}\,'''(s))$ mješoviti produkt derivacije prvog, drugog i trećeg reda vektorske funkcije $\vec{x} = \vec{x}(s)$ po definicije rješava pomoću sljedeće determinante trećeg reda:

$$(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,''(s), \vec{x}\,'''(s)) = \begin{vmatrix} \dot{x}(s) & \dot{y}(s) & \dot{z}(s) \\ \ddot{x}(s) & \ddot{y}(s) & \ddot{z}(s) \\ \dddot{x}(s) & \dddot{y}(s) & \dddot{z}(s) \end{vmatrix}.$$

Ako je krivulja $\mathcal{C}$ zadana parametarskim jednadžbama (2) ili ekvivalentno vektorskom jednadžbom (3) za svaki $t \in \langle a, b\rangle$ iz područja definicije vektorske funkcije $\vec{x} = \vec{x}(t)$, onda su fleksija i torzija krivulje $\mathcal{C}$ realne (skalarne) funkcije realne varijable po proizvoljnom parametru t i pišemo: $\chi = \chi(t)$, $\tau = \tau(t)$ te vrijedi:

$$\chi(t) = \frac{|\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)|}{|\vec{x}\,'(t)|^3}, \qquad \tau(t) = \frac{(\vec{x}\,'(t), \vec{x}\,''(t), \vec{x}\,'''(t))}{|\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)|^2}, \tag{8}$$

uz uvjete da je $|\vec{x}\,'(t)| \neq 0$ i $|\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)| \neq 0$ za svaki $t \in \langle a, b\rangle$, gdje je:

$$|\vec{x}\,'(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \tag{9}$$

$$|\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Pritom se uvjet $|\vec{x}\,'(t)| \neq 0$ za svaki $t \in \langle a, b\rangle$ geometrijski interpretira da je krivulja $\mathcal{C}$ regularna u svakoj svojoj točki[10], odnosno da u svakoj točki krivulje $\mathcal{C}$ postoji jedinstveni vektor tangente. Geometrijska interpretacija uvjeta $|\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)| \neq 0$ je da krivulje $\mathcal{C}$ nema točaka izravnavanja.
Analogno prethodno navedenom mješoviti produkt derivacije prvog, drugog i trećeg reda vektorske funkcije $\vec{x} = \vec{x}(t)$ izračunava se primjenom sljedeće determinante trećeg reda:

$$(\vec{x}\,'(t), \vec{x}\,''(t), \vec{x}\,'''(t)) = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \\ \dddot{x}(t) & \dddot{y}(t) & \dddot{z}(t) \end{vmatrix}.$$

Uočimo da u ovom slučaju treba izračunati i duljinu luka krivulje $\mathcal{C}$ koju izražavamo u obliku $s = s(t)$, realne (skalarne) funkcije realne varijable po proizvoljnom parametru t, primjenom formule:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{x}\,'(u)|\, du, \tag{11}$$

gdje se pretpostavlja da je $t_0 \in \langle a, b\rangle$ takav da je $T_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ fiksna početna točka na krivulji $\mathcal{C}$ od koje se izračunava duljina luka krivulje do njezine proizvoljne točke $T = (x(t), y(t), z(t))$ za svaki $a \leq t_0 < t \leq b$. Dakle, donja granica integrala u (11) je fiksni parametar t_0 (neka realna vrijednost) takav da primitivna funkcija funkcije $|\vec{x}\,'(t)|$ iščezava, a gornja granica tog integrala je varijabilni t za koji se dobiva varijabilna točka T na krivulji $\mathcal{C}$. Time se izraz (11) često zapisuje i u obliku

$$s(t) = \int |\vec{x}\,'(t)|\, dt, \tag{12}$$

koji ćemo primjenjivati u trećem poglavlju.

[10] Svaka krivulja parametrizirana po svom prirodnom parametru s je regularna krivulja, jer iz $|\vec{x}\,'(s)| = 1$ (uvjet da je krivulja parametrizirana po s) proizlazi da je $|\vec{x}\,'(s)| \neq 0$ za svaki $s \in \langle 0, L\rangle$; krivulja parametrizirana proizvoljnim parametrom t je regularna krivulja jedino ako vrijedi da je $|\vec{x}\,'(t)| \neq 0$ za svaki $t \in \langle a, b\rangle$.

Sustav triju jednadžbi

$$s = s(t), \quad \chi = \chi(t), \quad \tau = \tau(t) \qquad \text{za svaki } t \in \langle a, b \rangle\,, \tag{13}$$

gdje se skalarne funkcije $s = s(t)$, $\chi = \chi(t)$ i $\tau = \tau(t)$ izračunavaju primjenom formula u (11) i (8), nazivamo *parametarskim jednadžbama prirodne jednadžbe krivulje* $\mathcal{C}$ *u prostoru* $\mathbb{R}^3$ *parametrizirane proizvoljnim parametrom* $t \in \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$.
U suglasnosti s prethodno navedenim proizlazi da su jednadžbe u (13) ujedno i parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe familije svih krivulja kongruentnih s krivuljom $\mathcal{C}$ koje su parametrizirane proizvoljnim parametrom t.
Eliminacijom parametra[11] t iz sustava jednadžbi (13) proizlazi sustav jednadžbi (4). Time se iz parametarskih jednadžbi prirodne jednadžbe krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ dobiva njezina pripadna prirodna jednadžba.

Drugi način izračunavanja prirodne jednadžbe krivulje parametrizirane proizvoljnim parametrom t je da se njezina jednadžba reparametrizira po njezinom prirodnom parametru s. U ovom slučaju se primjenom formule (11) izračunava skalarna funkcija $s = s(t)$, a potom određuje njezina inverzna funkcija $t = t(s)$, čime se iz parametarskih jednadžbi oblika (2) ili ekvivalentno vektorske jednadžbe (3) za svaki $t \in \langle a, b \rangle$ dobivaju odgovarajuće parametarske jednadžbe oblika (5), odnosno vektorska jednadžba (6) za svaki $s \in \langle 0, L \rangle$. Pritom se fleksija i torzija računaju primjenom formula (7) te se dobiva sustav jednadžbi oblika (4) koji je zapravo tražena prirodna jednadžba krivulja $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$.

U specijalnom slučaju, obzirom na svojstvo 2. prema kojemu za sve krivulje u ravnini vrijedi da je torzija u svim njihovim točkama jednaka nuli, zaključujemo da iz formula za izračunavanje prirodne jednadžbe krivulje u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$ direktno proizlazi formula za izračunavanje prirodne jednadžbe krivulje u ravnini $\mathbb{R}^2$. Naime, iz sustava jednadžbi (4) uz uvjet da je $\tau(s) = 0$ za svaki $s \in \langle 0, L \rangle$ proizlazi jednadžba (1). Analogno, iz formula (13) za izračunavanje parametarskih jednadžbi prirodne jednadžbe krivulje u prostoru $\mathbb{R}^3$ uz uvjet da je $\tau(t) = 0$ za svaki $t \in \langle a, b \rangle$ proizlaze formule

$$s = s(t), \quad \chi = \chi(t) \qquad \text{za svaki } t \in \langle a, b \rangle \tag{14}$$

koje su zapravo parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe krivulje u ravnini $\mathbb{R}^2$ kada je krivulja parametrizirana proizvoljnim parametrom $t \in \langle a, b \rangle$.
Neka je krivulja u ravnini $\mathbb{R}^2$ parametrizirana proizvoljnim parametrom t, odnosno neka su $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ njene parametarske jednadžbe. Tada primjenom formule (11) i formule za izračunavanje fleksije u

[11] tako da se za funkciju $s = s(t)$ odredi njezina inverzna funkcija $t = t(s)$

(8) slijedi da se parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe krivulje u ravnini izračunavaju primjenom formula:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} (\dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(u))^{\frac{1}{2}}\, du, \qquad \chi(t) = \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}, \tag{15}$$

gdje se skalarna funkcija $s(t)$ ponekad računa i primjenom sljedeće formule: $s(t) = \int (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{1}{2}}\, dt$.

Ako je krivulja u ravnini parametrizirana po svom prirodnom parametru s, odnosno ako je ona zadana parametarskim jednadžbama

$$x = x(s), \quad y = y(s), \qquad s \in \langle 0, L \rangle\,,$$

onda je $\chi = \chi(s)$ njezina prirodna jednadžba, a fleksija se računa formulom:

$$\chi(s) = \sqrt{\ddot{x}^2(s) + \ddot{y}^2(s)}. \tag{16}$$

2.3 Izračunavanje prirodne jednadžbe krivulje u ravnini

U ovom odjeljku riješit ćemo dva primjera pomoću kojih ćemo objasniti izračunavanje prirodne jednadžbe krivulje u ravnini $\mathbb{R}^2$ obzirom na prethodno argumentirane formule.

Primjer 1.

Odredite prirodnu jednadžbu ravninske krivulje zadane parametarskim jednadžbama: $x(t) = a(\cos t + t \sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Zadana krivulja je parametrizirana proizvoljnim parametrom $t \in \mathbb{R}$, stoga se postupak određivanja njezine prirodne jednadžbe može provesti na dva načina koja ćemo u nastavku objasniti.

1. Izračunavanje parametarskih jednadžbi prirodne jednadžbe zadane krivulje primjenom formula u (15).

   Izračunajmo najprije parcijalne derivacije prvog i drugog reda. Tada je:

   $$\dot{x}(t) = a\,t\cos t, \quad \dot{y}(t) = a\,t\sin t,$$
   $$\ddot{x}(t) = a\,\cos t - a\,t\sin t, \quad \ddot{y}(t) = a\,\sin t + a\,t\cos t$$

   stoga je: $(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{1}{2}} = a\,t$ i $|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)| = a^2\,t^2$,

   pri čemu smo koristili trigonometrijski identitet: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u formule (15) slijedi da je:

$$s(t) = \int_{t_0=0}^{t} a\,u\,du = a\,\frac{t^2}{2}, \qquad \chi(t) = \frac{a^2\,t^2}{a^3\,t^3} = \frac{1}{a\,t},$$

stoga su parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe zadane krivulje dane sa:

$$s = a\,\frac{t^2}{2}, \qquad \chi = \frac{1}{a\,t}.$$

Prirodnu jednadžbu zadane krivulje dobit ćemo eliminacijom parametra t iz dobivenog sustava jednadžbi. Dakle, koristeći svojstvo da iz skalarne funkcije $s = a\,\frac{t^2}{2}$ slijedi da je $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ njezina inverzna funkcija, direktno proizlazi: $\chi = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{a}{2s}}$, odakle dodatnim sređivanjem dobivamo da je

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2as}}, \;\; s > 0, \;\; a \neq 0$$

prirodna jednadžba zadane krivulje.

2. Izračunavanje prirodne jednadžbe zadane krivulje reparametrizacijom njezinih parametarskih jednadžbi po njezinom prirodnom parametru s.

   Koristeći prethodno izračunato: $\quad s = a\,\frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$

   proizlazi da su reparametrizirane parametarske jednadžbe zadane krivulje oblika:

   $$x(s) = a\left(\cos\sqrt{\tfrac{2s}{a}} + \sqrt{\tfrac{2s}{a}}\sin\sqrt{\tfrac{2s}{a}}\right), y(s) = a\left(\sin\sqrt{\tfrac{2s}{a}} - \sqrt{\tfrac{2s}{a}}\cos\sqrt{\tfrac{2s}{a}}\right),$$

   gdje je $s > 0$, $a \neq 0$. Izračunavanjem odgovarajućih parcijalnih derivacije prvog i drugog reda, nakon dodatnog sređivanja, dobivamo:

   $$\dot{x}(s) = \cos\sqrt{\tfrac{2s}{a}}, \quad \dot{y}(s) = \sin\sqrt{\tfrac{2s}{a}},$$

   $$\ddot{x}(s) = -\tfrac{1}{\sqrt{2as}}\sin\sqrt{\tfrac{2s}{a}}, \quad \ddot{y}(s) = \tfrac{1}{\sqrt{2as}}\cos\sqrt{\tfrac{2s}{a}}.$$

   Nadalje, primjenom formule (16) za izračunavanje prirodne jednadžbe krivulje parametrizirana po svom prirodnom parametru s, direktno proizlazi da je: $\chi = \frac{1}{\sqrt{2as}}$, $s > 0$, $a \neq 0$ prirodna jednadžba zadane krivulje.

Primjer 2.

Odredite prirodnu jednadžbu krivulje (grafa prirodnog logaritma) zadane eksplicitnom jednadžbom: $y = \ln x,\; x > 0$.

Zadana eksplicitna jednadžba zapisuje se u parametarskom obliku uvođenjem supstitucije $x = t$, odakle slijedi da je $y = \ln t$. Time su $x = t$, $y = \ln t$, $t > 0$ parametarske jednadžbe zadane krivulje.

Uzimajući u obzir da je: $\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = \frac{1}{t}$, $\ddot{x}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = -\frac{1}{t^2}$
dobivamo: $(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}$ i $|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)| = \dfrac{1}{t^2}$,
stoga primjenom formule u (15) za izračunavanje duljine luka krivulje, slijedi da je: $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{\sqrt{u^2+1}}{u}\, du$. Koristeći formulu iz matematičkog priručnika[12] proizlazi:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \left(-\ln\left|\frac{1+\sqrt{u^2+1}}{u}\right| + \sqrt{u^2+1} \right)\Big|_{t_0}^{t} \\
&= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}\right| + \sqrt{t^2+1} + \ln\left|\frac{1+\sqrt{t_0^2+1}}{t_0}\right| - \sqrt{t_0^2+1}.
\end{aligned}
$$

Ako pretpostavimo da postoji $t_0 > 0$ takav da izraz $\ln\left|\frac{1+\sqrt{t_0^2+1}}{t_0}\right| - \sqrt{t_0^2+1}$ iščežava, onda je:

$$
s(t) = \ln\left|\frac{t}{1+\sqrt{t^2+1}}\right| + \sqrt{t^2+1}. \tag{17}
$$

Pritom smo koristili svojstvo logaritamske funkcije: $-\ln x = \ln\frac{1}{x}$.
Nadalje, primjeom formule u (15) za izračunavanje fleksije, dobivamo:

$$
\chi(t) = \frac{t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{18}
$$

Sustav jednadžbi u (17) i (18) su parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe grafa prirodnog logaritma zadanog parametarkim jednadžbama $x = t, y = \ln t$, $t > 0$. Koristeći prethodno uvedenu supstituciju $x = t$, slijedi da su:

$$
s = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + \sqrt{x^2+1}, \quad \chi = \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{19}
$$

parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe krivulje (grafa prirodnog logaritma) zadane eksplicitnom jednadžbom $y = \ln x$, $x > 0$. Pritom su s i χ realne funkcije realne varijable $x > 0$.
Primijetimo da smo jednadžbe (19) mogli direktno izračunati primjenom formula (26) i (27) koje se primjenjuju za krivulje zadane eksplicitnom jednadžbom.

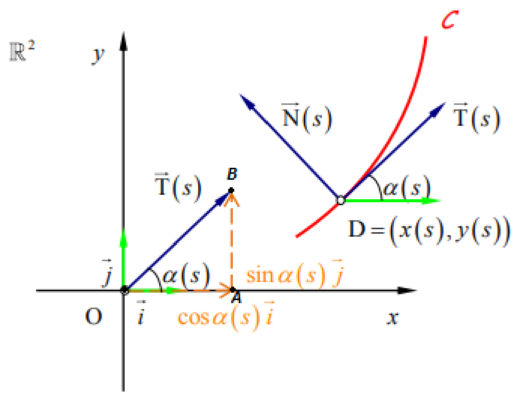
[12] $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}$, Bronštejn, str.419, 189

2.4 Prijelaz iz prirodne jednadžbe na vektorsku i parametarske jednadžbe ravninske krivulje

U ovom odjeljku objasnit ćemo kako se dobivaju parametarske jednadžbe ravninske krivulje $\mathcal{C}$ (tj. krivulje u ravnini $\mathbb{R}^2$) koja je zadana svojom prirodnom jednadžbom $\chi = \chi(s)$ za svaki $s \geq 0$.
Podsjetimo se da parametarskim jednadžbama $x = x(s),\ y = y(s),\ s > 0$ krivulje $\mathcal{C}$ jednoznačno korenspondira odgovarajuća vektorska jednadžba

$$\vec{x}(s) = x(s)\ \vec{i} + y(s)\ \vec{j},\ s \geq 0.$$

Dakle, obzirom na zadanu prirodnu jednadžbu ravninske krivulje $\mathcal{C}$ treba izvesti formule za izračunavanje vrijednosti skalarnih funkcija $x = x(s)$ i $y = y(s)$, gdje je s prirodni parametar (duljina luka) krivulje $\mathcal{C}$.
Skicirajmo krivulju $\mathcal{C}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu ravnine i odaberimo na njoj neku proizvoljnu točku (diralište) $D = (x(s), y(s))$ u kojoj ćemo postaviti jedinični vektor tangente $\overrightarrow{T}(s)$ i jedinični vektor normale $\overrightarrow{N}(s)$ koji je po definiciji okomit na $\overrightarrow{T}(s)$. Označimo sa $\alpha(s)$ mjeru kuta koji tangenta (pravac nosioc vektora $\overrightarrow{T}(s)$) zatvara s pozitivnim dijelom x-osi.



Slika 1: Konstrukcija tangente i normale na krivulju $\mathcal{C}$

Koristeći svojstvo jednakosti vektora, translatirajmo vektor $\overrightarrow{T}(s)$ tako da diralište $D = (x(s), y(s))$ postavimo u ishodište pravokutnog koordinatnog sustava ravnine i označimo sa B njegovu završnu točka, a sa A ortogonalnu projekciju točke B na x-os, kako je prikazano na slici 1. Tada u pravokutnom trokutu $\triangle OAB$ je mjera kuta $\angle BOA$ jednaka $\alpha(s)$ te je duljina hipotenuze jednaka $|\overrightarrow{T}(s)| = 1$. Primjenom definicije trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta, obzirom na kut $\alpha(s)$ proizlazi da je duljina nasuprotne katete pravokutnog trokuta $\triangle OAB$ jednaka $\sin\alpha(s)$ i da je duljina priležeće kateta jednaka $\cos\alpha(s)$. Time je $\overrightarrow{T}(s) = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = \cos\alpha(s)\ \vec{i}$, $\overrightarrow{AB} = \sin\alpha(s)\ \vec{j}$. Nadalje, koristeći svojstvo zbrajanja vektora slijedi da je $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, stoga je:

$$\overrightarrow{T}(s) = \cos\alpha(s)\ \vec{i} + \sin\alpha(s)\ \vec{j}. \tag{20}$$

Iz činjenice da su jedinični vektori normale $\overrightarrow{N}(s)$ i tangente $\overrightarrow{T}(s)$ međusobno ortogonalni, proizlazi da $\overrightarrow{N}(s)$ možemo konstruirati tako da $\overrightarrow{T}(s)$ zarotiramo za 90° u pozitivnom smjeru, što zapisujemo u obliku:

$$\overrightarrow{N}(s) = \cos\left(\alpha(s) + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\alpha(s) + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j},$$

odnosno

$$\overrightarrow{N}(s) = -\sin\alpha(s)\ \vec{i} + \cos\alpha(s)\ \vec{j}, \tag{21}$$

pri čemu smo primijenili trigonometrijske identitete: $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ i $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$. Izračunamo li derivacije prvog reda jediničnih vektora tangente i normale danih u (20) i (21), dobivamo da je:

$$\overrightarrow{T}'(s) = -\sin\alpha(s)\cdot\alpha'(s)\ \vec{i} + \cos\alpha(s)\cdot\alpha'(s)\ \vec{j},$$

$$\overrightarrow{N}'(s) = -\cos\alpha(s)\cdot\alpha'(s)\ \vec{i} - \sin\alpha(s)\cdot\alpha'(s)\ \vec{j},$$

odnosno:

$$\overrightarrow{T}'(s) = \alpha'(s)\cdot\overrightarrow{N}(s), \quad \overrightarrow{N}'(s) = -\alpha'(s)\cdot\overrightarrow{T}(s).$$

Uspoređivanjem dobivenih identiteta s poznatim Frenet-Serret-ovim formulama za ravninske krivulje:

$$\overrightarrow{T}'(s) = \chi(s)\cdot\overrightarrow{N}(s), \quad \overrightarrow{N}'(s) = -\chi(s)\cdot\overrightarrow{T}(s),$$

slijedi da je: $\alpha'(s) = \chi(s)$, odakle se dobiva da je:

$$\alpha(s) = \int \chi(s)\, ds, \tag{22}$$

pri čemu se koristilo svojstvo: $\alpha'(s) = \dfrac{d\,\alpha(s)}{ds}$.

Podsjetimo se definicije jediničnog vektora tangente na krivulju parametriziranom prirodnim parametrom:

$$\overrightarrow{T}(s) = \vec{x}'(s). \tag{23}$$

Tada koristeći svojstvo da je $\vec{x}\,'(s) = \dfrac{d\vec{x}(s)}{ds}$, identitet (23) možemo pisati u obliku:

$$d\vec{x}(s) = \overrightarrow{T}(s)\ ds,$$

odakle proizlazi da je $\vec{x}(s) = \int \overrightarrow{T}(s)\,ds$ pa primjenom identiteta (20) dobivamo da je vektorska jednadžba krivulje $\mathcal{C}$ parametrizirane prirodnim parametrom oblika:

$$\vec{x}(s) = \int \Big(\cos\alpha(s)\ \vec{i} + \sin\alpha(s)\ \vec{j}\Big)\,ds,$$

odnosno:

$$\vec{x}(s) = \vec{i}\int \cos\alpha(s)\,ds + \vec{j}\int \sin\alpha(s)\,ds, \tag{24}$$

gdje se primijenilo svojstavo linearnosti i zbroja integrala. Time su

$$x(s) = \int \cos\alpha(s)\,ds, \quad y(s) = \int \sin\alpha(s)\,ds. \tag{25}$$

parametarske jednadžbe krivulje $\mathcal{C}$ parametrizirane prirodnim parametrom.

Zaključujemo, ako je regularna ravninska krivulja zadana prirodnom jednadžbom $\chi = \chi(s)$, gdje je s prirodni parametar te krivulje, onda se njezine parametarske jednadžbe $x = x(s)$, $y = y(s)$ dobivaju rješavanjem danih integrala u identitetima (25). Pritom se $\alpha(s)$ izračunava primjenom formule (22).

Primjer

Odredite parametarske jednadžbe krivulje kojoj je

$$s^2\,\chi^2(s) + 1 = 25\,a^2\,\chi^2(s), \quad a = konst.$$

prirodna jednadžba.

Rješenje:

Primijetimo da je prirodna jednadžba krivulje zadana implicitnom jednadžbom $s^2\,\chi^2(s) + 1 = 25\,a^2\,\chi^2(s)$ iz koje se dobiva da je pripadna eksplicitna jednadžba oblika:

$$\chi(s) = \frac{1}{\sqrt{25a^2 - s^2}}.$$

Parametarske jednadžbe zadane krivulje određuju se primjenom identiteta (25), pri čemu treba najprije izračunati $\alpha(s)$. Koristeći formulu (22) dobivamo da je:

$$\alpha(s) = \int \frac{1}{\sqrt{25a^2 - s^2}}\,ds = \arcsin\frac{s}{5a}.$$

Primijetimo da iz $\alpha(s) = \arcsin\dfrac{s}{5a}$ slijedi $\sin\alpha(s) = \dfrac{s}{5a}$.
Primjenom trigonometrijskog identiteta: $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ proizlazi:

$$\cos\alpha(s) = \sqrt{1-\sin^2\alpha(s)} = \sqrt{1-\frac{s^2}{25a^2}} = \frac{\sqrt{25a^2-s^2}}{5a}.$$

Uvrstimo li dobivene vrijednosti za $\sin\alpha(s)$ i $\cos\alpha(s)$ u formulu (25), tada je:

$$\begin{aligned} x(s) &= \int \cos\alpha(s)\,ds = \frac{1}{5s}\int\sqrt{25a^2-s^2}\,ds \\ &= \frac{1}{10a}\left(s\sqrt{25a^2-s^2} + 25a^2 \arcsin\frac{s}{5a}\right) \end{aligned}$$

$$y(s) = \int \sin\alpha(s)\,ds = \frac{1}{5a}\int s\,ds = \frac{s^2}{10a}.$$

Pritom smo primijenili formule:

$$\int\sqrt{\lambda^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{\lambda^2-x^2} + \lambda^2\arcsin\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{za} \;\; n=1$$

i pravilo za integriranje funkcije pomnožene skalarom:
$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda\int f(x)\,dx,\;\; \lambda = konst.$

Zaključujemo da su

$$x(s) = \frac{1}{10a}\left(s\sqrt{25a^2-s^2} + 25a^2\arcsin\frac{s}{5a}\right), \quad y(s) = \frac{s^2}{10a}, \quad s \geq 0$$

tražene parametarske jednadžbe krivulje zadane prirodnom (eksplicitnom) jednadžbom $\chi(s) = \dfrac{1}{\sqrt{25a^2-s^2}}$ čija se implicitna jednadžba zapisuje u obliku: $s^2\,\chi^2(s) + 1 - 25\,a^2\,\chi^2(s) = 0$.

Obzirom na dobivene parametarske jednadžbe zadane krivulje, proizlazi da je vektorska jednadžba te krivulje oblika:

$$\vec{x}(s) = \frac{1}{10a}\left(s\sqrt{25a^2-s^2} + 25a^2\arcsin\frac{s}{5a}\right)\vec{i} + \frac{s^2}{10a}\,\vec{j}, \quad s \geq 0.$$

3 Izvodi prirodnih jednadžbi krivulja ovisno o njihovom obliku jednadžbe

U ovom poglavlju razmatrat ćemo neke primjere krivulja u ravnini $\mathbb{R}^2$ parametriziranih po svojoj duljini luka s za koje se prirodna jednadžba[13] izražava eksplicitnom jednadžbom $\chi = \chi(s)$, gdje je fleksija χ skalarna funkcija po varijabli s. Ponovimo, krivulje u ravnini su specijalan slučaj krivulja u trodimenzionalnom prostoru takvih da im je u svakoj točki torzija jednaka nuli. U nastavku ćemo zadati po nekoliko krivulja u ravnini u ovisnosti o tipu njihovih jednadžbi.

3.1 Prirodna jednadžba krivulje zadane eksplicitnom jednadžbom

Za krivulje zadane eksplicitnom jednadžbom $y = y(x)$, gdje je y skalarna funkcija po paramteru x, koriste se sljedeće formule za izračunavanje duljine luka s i fleksije χ krivulje $\mathcal{C}$:

$$s = \int (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\, dx, \tag{26}$$

$$\chi = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{27}$$

Pritom su duljina luka s i fleksija χ u formulama (26) i (27) izražene u obliku $s = s(x)$ i $\chi = \chi(x)$, što se interpretira da su s i χ zapravo skalarne funkcije po varijabli (parametru) x.

3.1.1 Pravac

Eksplicitna jednadžba pravca je $y = ax + b,\ a \neq 0$, gdja je a koeficijent smjera pravca, a b odsječak na y-osi. Izračunavanjem derivacije prvog reda dobivamo $y' = a\ (a \neq 0)$, odakle slijedi $1 + y'^2 = 1 + a^2$, stoga je:

$$(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + a^2}.$$

Uvrštavanjem dobivenog identiteta u formulu (26) proizlazi $s = \int \sqrt{1 + a^2}\, dx$, odnosno:

$$s = \sqrt{1 + a^2}\ x.$$

[13]Ponekad se prirodna jednadžba krivulje izražava eksplicitnom jednadžbom $s = s(\chi)$, gdje je duljina luka krivulje skalarna funkcija po varijabli χ (fleksija).

Izračunavanjem derivacije drugog reda dobivamo $y'' = 0$, stoga iz formule (27) slijedi da je $\chi = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što je ujedno i prirodna jednadžba pravca. Dakle, pravac je krivulja u ravnini za koju vrijedi da joj je fleksija jednaka nuli u svakoj njezinoj točki. Drugim riječima, svaka točka pravca je točka izravnavanja.

3.1.2 Parabola

Eksplicitna jednadžba parabole je $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ koju ćemo pisati u obliku:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0, \quad a \neq 0. \tag{28}$$

Pritom su $x_0 = -\frac{b}{2a}$ i $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ koordinate tjemena parabole. Nadalje, ako je kvadratni koeficijent a strogo pozitivan realan broj, onda je parabola okrenuta otvorom prema pozitivnom dijelu osi y, a u protivnom prema negativnom dijelu osi y. Nadalje,

- za $0 < |a| < 1$ krakovi parabole se približavaju osi y i kažemo da se parabola sužava,
- za $|a| > 1$ krakovi parabole se udaljavaju od osi y i kažemo da se parabola širi.

Računajući derivaciju prvoga reda jednadžbe (28) dobivamo $y' = 2a(x - x_0)$, stoga je $1 + y'^2 = 4a^2\ [(x - x_0)^2 + k^2]$, gdje je $k = \frac{1}{2a}$. Time je:

$$(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = 2a\sqrt{(x - x_0)^2 + k^2} \tag{29}$$

pa uvrštavanjem identiteta (29) u formulu (26) proizlazi:

$$s = 2a \int \sqrt{(x - x_0)^2 + k^2}\ dx. \tag{30}$$

Uvođenjem supstitucije $t = x - x_0$, odakle je $dt = dx$, identitet (30) zapisujemo u obliku:

$$s = 2a \int \sqrt{t^2 + k^2}\ dt.$$

Rješavanjem navedenog integrala[14] obzirom na uvedenu supstitucije dobivamo da je duljina luka parabole dana izrazom:

$$s = a\ [(x - x_0)\ \sqrt{(x - x_0)^2 + k^2} + k^2 \ln|x - x_0 + \sqrt{(x - x_0)^2 + k^2}\,|\ ], \tag{31}$$

[14]primjenom formule: $\int \sqrt{x^2 + a^2}\ dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\ \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|\right]$, Bronštejn str. 418, 185

gdje je $k^2 = \frac{1}{4a^2}$, $a \neq 0$. Izračunavanjem derivacije drugog reda jednadžbe (28) dobivamo $y'' = 2a$ što zajedno s identitetom (29) iz formule (27) proizlazi da je fleksija parabole dana izrazom:

$$\chi = \frac{k^2}{\sqrt{((x - x_0)^2 + k^2)^3}} \tag{32}$$

za $k^2 = \frac{1}{4a^2}$, $a \neq 0$. Formulama (31) i (32) dane su parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe parabole, gdje su s i χ skalarne funkcije po parametru x. Eliminacijom parametra x iz parametarskih jednadžbi dobiva se prirodna jednadžba parabole. Konkretno, iz jednadžbe (32) proizlazi da je $\sqrt{(x - x_0)^2 + k^2} = \sqrt[3]{\frac{k^2}{\chi}}$, odnosno $x - x_0 = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{k^4}{\chi^2}} - k^2}$, što uvrštavanjem u jednadžbu (31) povlači da je prirodna jednadžba parabole:

$$s = a\left[\sqrt{\sqrt[3]{\frac{k^4}{\chi^2}} - k^2}\ \sqrt[3]{\frac{k^2}{\chi}} + k^2\ \ln\left|\sqrt{\sqrt[3]{\frac{k^4}{\chi^2}} - k^2} + \sqrt[3]{\frac{k^2}{\chi}}\right|\right] \tag{33}$$

gdje je $k = \frac{1}{2a}$, $a \neq 0$.
Promotrimo sada kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, koju zapisujemo u obliku:

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0, \tag{34}$$

gdje je $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Uzimajući u obzir da je njezin graf parabola s tjemenom u točki $T = (x_0, y_0)$, razlikujemo sljedeća dva slučaja.

1. Ako je $a > 0$, onda će funkcija (34) biti bijekcija jedino ako je njezina domena jednaka intervalu $\langle -\infty, x_0]$ ili intervalu $[x_0, +\infty\rangle$ i ako je kodomena jednaka intervalu $[y_0, +\infty\rangle$.

   Dakle, funkcije $g_1\colon \langle -\infty, x_0] \to [y_0, +\infty\rangle$, $g_1(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ i $g_2\colon [x_0, +\infty\rangle \to [y_0, +\infty\rangle$, $g_2(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ su bijekcije, stoga postoje inverze funkcije:

   $$g_1{}^{-1}\colon [y_0, +\infty\rangle \to \langle -\infty, x_0], \quad g_1{}^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x - y_0}{a}} + x_0,\ a > 0,$$

   $$g_2{}^{-1}\colon [y_0, +\infty\rangle \to [x_0, +\infty\rangle, \quad g_2{}^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x - y_0}{a}} + x_0,\ a > 0.$$

2. Ako je $a < 0$, onda će funkcija (34) biti bijekcija ako je njezina domena jednaka intervalu $\langle -\infty, x_0]$ ili intervalu $[x_0, +\infty\rangle$ i ako je kodomena jednaka intervalu $\langle -\infty, y_0]$.

Time su funkcije $h_1\colon \langle -\infty, x_0] \to \langle -\infty, y_0]$, $h_1(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$ i $h_2\colon [x_0, +\infty\rangle \to \langle -\infty, y_0]$, $h_2(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$ bijekcije pa postoje inverzne funkcije:

$$h_1^{-1}\colon \langle -\infty, y_0] \to \langle -\infty, x_0], \quad h_1^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x_0 - y_0}{a}} + x_0,\ a < 0,$$

$$h_2^{-1}\colon \langle -\infty, y_0] \to [x_0, +\infty\rangle, \quad h_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x_0 - y_0}{a}} + x_0,\ a < 0.$$

Pririodne jednadžbe grafova navedenih funkcija proizlazit će iz jednadžbe (33). Dakle, prirodna jednadžba bilo koje parabole dobiva se iz prirodne jednadžbe (33).

3.1.3 Graf logaritamske i eksponencijalne funkcije

Neka je zadana logaritamska funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eksplicitnom jednadžbom: $y = \log_a x$, gdje je $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ baza logaritamske funkcije i $x \in \mathbb{R}^+$. Razlikujemo dva slučaja:

1. ako je $0 < a < 1$, onda je logaritamska funkcija padajuća,
2. ako je $a > 1$, onda je logaritamska funkcija rastuća.

Derivacija prvog reda logaritamske funkcije je: $y' = \frac{1}{x \ln a}$, odnosno $y' = \frac{k}{x}$, gdje je $k = \frac{1}{\ln a}$. Tada je $(1 + y'^2) = \frac{x^2 + k^2}{x^2}$ iz čega slijedi da je:

$$(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{x^2 + k^2}}{x}. \tag{35}$$

Uvrštavanjem identiteta (35) u formulu (26) dobivamo: $s = \int \frac{\sqrt{x^2+k^2}}{x}\, dx$, odnosno[15]:

$$s = \sqrt{x^2 + k^2} - k \ln \left| \frac{k + \sqrt{x^2 + k^2}}{x} \right|. \tag{36}$$

Derivacija drugog reda logaritamske funkcije je: $y'' = -\frac{k}{x^2}$ koju zajedno s identitetom (35) uvrštavamo u formulu (27) i dobivamo da je fleksija logaritamske funkcije:

$$\chi = \frac{kx}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}}. \tag{37}$$

[15]primjenom formule: $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a\ \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2+a^2}}{x} \right|$, Bronštejn str. 419, 189

Primjetimo da je izraz $x^2 + k^2$ različit od nule za svaki $x \in \mathbb{R}^+$ iz domene logaritamske funkcije. Sustav jednadžbi (36) i (37) su parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe logaritamske funkcije[16].

Pogledajmo sada inverznu funkciju $y = a^x$ logaritamske funkcije $y = \log_a x$. Tada je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ y = a^x$ eksponencijalna funkcija, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\},\ x \in \mathbb{R}$, koja je padajuća ako je $0 < a < 1$, odnosno rastuća ako je $a > 1$. Uzimajući u obzir da je $y' = a^x \ln a$ derivacija prvog reda eksponencijalne funkcije $y = a^x$ i prethodno uvedenu supstituciju $k = \frac{1}{\ln a}$, odakle je $\ln a = \frac{1}{k}$, dobivamo:

$$y' = \frac{a^x}{k}, \quad y'' = \frac{a^x}{k^2}. \tag{38}$$

Time je: $1 + y'^2 = \frac{1}{k^2}(a^{2x} + k^2)$, odnosno:

$$(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}\sqrt{a^{2x} + k^2} \tag{39}$$

pa je u ovom slučaju formula (26) dana sa:

$$s = \frac{1}{k} \int \sqrt{a^{2x} + k^2}\; dx. \tag{40}$$

Uvođenjem supstitucije $t = a^x$, odakle je $dt = a^x \ln a\; dx$, odnosno $dx = k\ \dfrac{dt}{t}$, dobivamo da se izraz (40) zapisuje u obliku:

$$s = \int \frac{\sqrt{t^2 + k^2}}{t}\; dt,$$

pri čemu se navedeni integral rješava primjenom formule navedene u fusnoti 3. Time dobivamo:

$$s = \sqrt{t^2 + k^2} - k \ln \left| \frac{k + \sqrt{t^2 + k^2}}{t} \right|,$$

odakle za $t = a^x$ proizlazi da je duljina luka eksponencijalne funkcije:

$$s = \sqrt{a^{2x} + k^2} - k \ln \left| \frac{k + \sqrt{a^{2x} + k^2}}{a^x} \right|. \tag{41}$$

[16]U ovom slučaju nije jednostavno eliminirati parametar x iz sustava jednadžbi $s = s(x)$ i $\chi = \chi(x)$, stoga se za prirodnu jednadžbu logaritamske funkcije uzimaju parametarske jednadžbe (36) i (37).

Primjenom identiteta: $y'' = \frac{a^x}{k^2}$ i identiteta (39) na formulu (27) dobiva se fleksija eksponencijalne funkcije:

$$\chi = \frac{k\ a^x}{\sqrt{(a^{2x}+k^2)^3}}, \quad \text{gdje je } k = \frac{1}{\ln a},\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}. \tag{42}$$

Sustav jednadžbi (41) i (42) su parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe eksponencijalne funkcije.
Iz svojstva da je $y = a^x$ inverzna funkcija logaritamske funkcije $y = \log_a x$ proizlazi da vrijedi:

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x,$$

što ima za posljedicu da je:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{i analogno} \quad \log_a a^x = x.$$

Uspoređivanjem parametarskih jednadžbi prirodne jednadžbe eksponencijalne funkcije s parametarskim jednadžbama prirodne jednadžbe logaritamske funkcije možemo primjetiti da primjenom identiteta $x := a^x$ jednadžbe (41) i (42) proizlaze iz jednadžbi (36) i (37) i obratno, što nas dovodi do zaključka da logaritamska i eksponencijalna funkcija imaju jednake prirodne jednadžbe. S druge strane, iz činjenice da su logaritamska funkcija $y = \log_a x$ i eksponencijalna funkcija $y = a^x$ međusobno inverzne funkcije, proizlazi da su njihovi grafovi simetrični s obzirom na pravac $y = x$, što povlači jednakost njihovih prirodnih jednadžbi.

3.2 Prirodna jednadžba krivulje zadane implicitnom jednadžbom

Krivulje u ravnini osim eksplicitnom jednadžbom koja je najučestalija, mogu se zadati i implicitnom jednadžbom: $F(x,y) = 0$.
Izračunavanjem derivacije prvog reda implicitne jednadžbe $F(x,y) = 0$ krivulje $\mathcal{C}$ slijedi da je $F_x + F_y\ y' = 0$, odakle je:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y},\ F_y \neq 0, \quad y'' = \frac{d(y')}{dx}. \tag{43}$$

Pritom se duljina luka krivulje $\mathcal{C}$ (zadane implicitnom jednadžbom) izračunava primjenom formule (26), a njezina fleksija primjenom formule (27) uz primjenu identiteta (43).

3.2.1 Kružnica

Neka je kružnica zadana implicitnom jednadžbom:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \tag{44}$$

gdje je $S = (x_0, y_0)$ središte zadane kružnice, a $r > 0$ njezin polumjer.
Da bismo odredili prirodnu jednadžbu kružnice, treba najprije odrediti njezinu duljinu luka primjenom formule (26), stoga koristeći svojstva parcijalnih derivacija implicitno zadane funkcije, dobivamo da je $F_x = 2(x - x_0)$ i $F_y = 2(y - y_0)$, pa iz identiteta (43) proizlazi:

$$y' = -\frac{x - x_0}{y - y_0}, \quad y'' = -\frac{1 + y'^2}{y - y_0},$$

odnosno:

$$y'' = -\frac{r^2}{(r^2 - (x - x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Koristeći gore navedeni identitet dobivamo:

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{(x - x_0)^2}{(y - y_0)^2}. \tag{45}$$

Napišemo li jednadžbu (44) u obliku: $y - y_0 = \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$ i uvrstimo u identitet (45), tada sređivanjem izraza dobivamo:

$$(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}} \ . \tag{46}$$

Uvrštavanjem izraza (46) u formulu (26) slijedi:

$$s = \int \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}\, dx \tag{47}$$

te supstitucijom $t = x - x_0$ i $dt = dx$ navedeni izraz možemo pisati:

$$s = r \int \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}\, dx,$$

odakle je[17] $s = r \arcsin \frac{t}{r}$ pa je duljina luka kružnice:

$$s = r \arcsin \frac{x - x_0}{r} \ . \tag{48}$$

[17]primjena formule: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

Uzimajući u obzir dobiveni izraz za y'' i identitet (46) proizlazi da se iz formule (27) dobiva fleksija kružnice:

$$\chi = \frac{1}{r}, \quad r > 0. \tag{49}$$

Dobiveni izraz (49) zovemo prirodnom jednadžbom kružnice, a interpretira se da je kružnica krivulja u ravnini za koju vrijedi da je u svakoj njezinoj točki zakrivljenost (fleksija) obrnuto proporcijonalna njezinom polumjeru.

3.2.2 Semikubna parabola

Neka je zadana semikubna parabola implicitnom jednadžbom: $a^2x^3 - y^2 = 0$. Tada je $F_x = 3a^2x^2$ i $F_y = -2y$, stoga iz identiteta (43) slijedi: $y' = -\frac{3a^2x^2}{2y}$. Zapišemo li danu implicitnu jednadžbu u obliku eksplicitne jednadžbe: $y = a\sqrt{x^3},\ x > 0,\ a > 0,$ tada dobivamo:

$$y' = \frac{3}{2}a\sqrt{x},$$

odakle slijedi da je: $1 + y'^2 = \frac{4+9a^2x}{4}$, odnosno

$$(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{4 + 9a^2x}}{2} \tag{50}$$

što uvrštavanjem u formulu (26) proizlazi da je:

$$s = \int \frac{\sqrt{4 + 9a^2x}}{2}\, dx.$$

Ako uvedemo supstituciju $t = 4 + 9a^2x$, onda je $dx = \dfrac{dt}{9a^2}$, stoga je: $s = \frac{1}{18a^2}\int \sqrt{t}\, dt$, odakle proizlazi[18] $s = \dfrac{\sqrt{t^3}}{27a^2}$ pa obzirom na uvedenu supstituciju dobivamo da je duljina luka semikubne parabole:

$$s = \frac{1}{27a^2}\sqrt{(4 + 9a^2x)^3}. \tag{51}$$

Iz identiteta (51) slijedi da je: $4 + 9a^2x = \sqrt[3]{(27a^2s)^2}$, odnosno:

$$4 + 9a^2x = 9a\sqrt[3]{as^2} \tag{52}$$

[18]primjenom tablične formule: $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)}, n \neq -1$

odakle slijedi:

$$x = \frac{9a\sqrt[3]{as^2} - 4}{9a^2}. \tag{53}$$

Ako deriviramo izraz od y', onda dobivamo $y'' = \frac{3a}{4\sqrt{x}}$, što se uvrštavanjem u formulu (27) zajedno s identitetom (50) dobiva da je fleksija semikubne parabole dana izrazom:

$$\chi = \frac{6a}{\sqrt{x}\ \sqrt{(4+9a^2x)^3}}. \tag{54}$$

Sustav jednadžbi (51) i (54) su parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe zadane semikubne parabole. Kvadriranjem izraza (54) i primjenom identiteta (52) i (53) slijedi: $\chi^2 = \dfrac{4}{9s^2\ (9a\sqrt[3]{as^2} - 4)}$, odakle proizlazi da je:

$$\chi = \frac{2}{3s\ \sqrt{9a\ \sqrt[3]{as^2} - 4}}$$

prirodna jednadžba semikubne parabole.

3.3 Prirodna jednadžba krivulje zadane parametarskim jednadžbama

Neka je zadana krivulja $\mathcal{C}$ u ravnini parametarskim jednadžbama

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

za svaki $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ i označimo sa $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}, \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$ derivacije prvog reda i sa $\ddot{x} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \ddot{y} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$ derivacije drugog reda parametarskih jednadžbi krivulje $\mathcal{C}$.

Duljinu luka krivulje $\mathcal{C}$ računamo po formuli:

$$s = \int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}\ dt, \tag{55}$$

a fleksiju prema formuli:

$$\chi = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{56}$$

gdje je $\dot{x} = \dot{x}(t),\ \dot{y} = \dot{y}(t),\ \ddot{x} = \ddot{x}(t),\ \ddot{y} = \ddot{y}(t)$.

3.3.1 Astroida

Parametarske jednadžbe astroide su:

$$x = r\cos^3 t, \quad y = r\sin^3 t,$$

gdje je $t \in [0, 2\pi\rangle$, a $r > 0$ je polumjer opisane kružnice astroide. Da bismo odredili prirodnu jednadžbu astroide, treba odrediti njezinu duljinu luka i fleksiju primjenom formula (55) i (56). Pritom su derivacije prvog reda astroide:

$$\dot{x} = -3r\sin t\cos^2 t, \quad \dot{y} = 3r\sin^2 t\cos^2 t$$

pa kvadriranjem i zbrajanjem navedenih jednadžbi dobivamo da je:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9r^2\sin^2 t\cos^2 t$$

odakle slijedi:

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = 3r\sin t\cos t. \tag{57}$$

Primjenom identiteta (57) iz formule (55) proizlazi:

$$s = 3r\int \sin t\cos t\ dt. \tag{58}$$

Uvođenjem supstitucije da je $v = \sin t$, slijedi da je $dv = \cos t\ dt$, stoga dobivamo:

$$s = 3r\int v\ dv = 3r\ \frac{v^2}{2},$$

odakle proizlazi da je duljina luka astroide:

$$s = \frac{3}{2}r\sin^2 t. \tag{59}$$

Primjenom trigonometrijskog identiteta:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

izraz (59) zapisujemo u obliku:

$$s = \frac{3}{4}\,r\,(1-\cos 2t). \tag{60}$$

Odredimo sada derivacije drugoga reda astroide:

$$\ddot{x} = -3r\cos t(\cos^2 t - 2\sin^2 t), \quad \ddot{y} = 3r\sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t). \tag{61}$$

Time dobivamo:

$$|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = 9r^2 \sin^2 t \cos^2 t, \tag{62}$$

pri čemu smo koristili trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Uzimajući u obzir identitete (57) i (61) iz formule (56) slijedi da je fleksija astroide dana izrazom:

$$\chi = \frac{9r^2 \sin^2 t \cos^2 t}{(3r \sin t \cos t)^3}$$

odnosno: $\chi = \frac{1}{3r\ \sin t \cos t}$, koji se može zapisati u obliku:

$$\chi = \frac{2}{3r\ \sin 2t}, \tag{63}$$

gdje se primjenio trigonometrijski identitet: $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$. Sustav jednadžbi (60) i (63) su parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe astroide. Eliminacijom parametra t iz tog sustava jednadžbi (60) i (63) dobit ćemo prirodnu jednadžbu astroide. Dakle, ako jednadžbe (60) i (63) zapišemo u obliku:

$$3r \cos 2t = 3r - 4s, \quad 3r \sin 2t = \frac{2}{\chi}$$

i kvadriramo, a zatim zbrojimo, onda dobivamo:

$$9r^2 = \frac{4}{\chi^2} + (3r - 4s)^2,$$

pri čemu smo koristili identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Sređivanjem dobivenog izraza proizlazi: $\chi^2 = \frac{4}{9r^2 - (3r-4s)^2}$, odnosno:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6rs - 4s^2}}. \tag{64}$$

Jednadžba (64) je prirodna jednadžba astroide i dobro je definirana ako vrijedi uvjet: $6rs - 4s^2 > 0$, odnosno $2s(3r - 2s) > 0$. Iz pretpostavke da je $r > 0$ i $s > 0$, slijedi da je $2s(3r - 2s) > 0$ ako i samo ako je $3r - 2s > 0$, odnosno $s < \frac{3}{2}r$. Time zaključujemo da je prirodna jednadžba astroide definirana za svaki $s \in \left\langle 0, \frac{3}{2}r \right\rangle$ i pišemo:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6rs - 4s^2}}, \quad s \in \left\langle 0, \frac{3}{2}r \right\rangle, \quad r > 0.$$

3.3.2 Steineova krivulja

Steineova krivulja zadaje se sljedećim parametarskim jednadžbama:

$$x = 2r\cos t + r\cos 2t, \quad y = 2r\sin t - r\sin 2t$$

gdje je $t \in [0, 2\pi\rangle$, $r > 0$ polumjer opisane kružnice Steineove krivulje. Odredimo li derivacije prvoga reda:

$$\dot{x} = -2r(\sin t + \sin 2t), \quad \dot{y} = 2r(\cos t - \cos 2t),$$

tada dobivamo:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 8r^2(1 - (\cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t)),$$

odnosno:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 8r^2(1 - \cos 3t).$$

Pritom smo koristili formulu za izračunavanje kosinusa zbroja: $\cos(x{+}2x) = \cos x\cos 2x{-}\sin x\sin 2x$. Nadalje, primjenom trigonometrijskog identiteta: $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ slijedi:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 16r^2\sin^2\frac{3t}{2},$$

iz čega proizlazi:

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = 4r\sin\frac{3t}{2} \tag{65}$$

što uvrštavanjem u formulu (55) povlači:

$$s = 4r\int \sin\frac{3t}{2}\,dt$$

pa uvođenjem supstitucije $v = \dfrac{3t}{2}$, slijedi da je $dv = \dfrac{3}{2}dt$, odnosno $dt = \frac{2}{3}dv$ stoga je:

$$s = \frac{8}{3}r\int \sin v\,dv,$$

odakle slijedi da je duljina luka Steineove krivulje jednaka[19]:

$$s = \frac{8}{3}r\cos\frac{3t}{2}. \tag{66}$$

[19] Budući da je duljina luka uvijek pozitivan broj ili 0, uzima se apsolutna vrijednost primitivne funkcije.

Odredimo sada derivacije drugog reda Steineove krivulje:

$$\ddot{x} = -2r(\cos t + 2\cos 2t), \quad \ddot{y} = 2r(2\sin 2t - \sin t). \tag{67}$$

Tada dobivamo: $|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = 4r^2(1 - \cos 3t)$, odnosno:

$$|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = 8r^2 \sin^2 \frac{3t}{2}. \tag{68}$$

Pritom smo u izračunu koristili prethodno navedenu formulu za kosinus zbroja i identitet $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Uvrštavanjem identiteta (65) i (68) u formulu (56) i sređivanjem izraza dobiva se da je fleksija Steineove krivulje:

$$\chi = \frac{1}{8r\sin\frac{3t}{2}}. \tag{69}$$

Parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe Steineove krivulje dane su sustavom jednadžbi (66) i (69). Eliminacijom parametra t iz tog sustava jednadžbi dobit ćemo prirodnu jednadžbu Steineove krivulje. Zapišemo li sustav jednadžbi u obliku:

$$8r\cos\frac{3t}{2} = 3s, \quad 8r\sin\frac{3t}{2} = \frac{1}{\chi},$$

tada kvadriranjem i zbrajanjem navedenih jednadžbi i primjenom identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dobivamo:

$$64r^2 = 9s^2 + \frac{1}{\chi^2},$$

odakle dodatnim sređivanjem proizlazi:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{64r^2 - 9s^2}} \tag{70}$$

uz uvjet da je $64r^2 - 9s^2 > 0$. Primjetimo da iz nejednadžbe $64r^2 - 9s^2 > 0$ slijedi $s^2 < \frac{64}{9}r^2$, odnosno $|s| < \frac{8}{3}r$. Nadalje, obzirom na $s > 0$ i $r > 0$ proizlazi da je $s < \frac{8}{3}r$, stoga je prirodna jednadžba Steineove krivulje definirana za svaki $s \in \langle 0, \frac{8}{3}r\rangle$, gdje je $r > 0$ i pišemo:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{64r^2 - 9s^2}}, \quad s \in \left\langle 0, \frac{8}{3}r \right\rangle, \quad r > 0.$$

3.4 Prirodna jednadžba krivulje zadane polarnom jednadžbom

Krivulje u polarnom sustavu zadajemo (eksplicitnom) polarnom jednadžbom $r = r(\phi)$, gdje je r realna skalarna funkcija realne varijable ϕ, pri čemu se ϕ naziva polarni kut. Navedimo da se u ovisnosti o mjeri kuta ϕ u polarnom sustavu prikazuje zraka q (polupravac s početkom u polu) koja s polarnom osi zatvara kut ϕ. Time je svakoj mjeri kuta $\phi \in I \subseteq \mathbb{R}$ pridružena točka $(\phi, r(\phi))$ na zraci q koja je udaljena od pola za $r(\phi) \geq 0$. Ako postoji neki $\phi_j \in I$ takav da je $r(\phi_j) < 0$, onda je mjeri kuta ϕ_j pridružena točka $(\phi_j, r(\phi_j))$ na zraci q_j koja s polarnom osi zatvara kut $\phi_j + \pi$. Pritom je točka $(\phi_j, r(\phi_j))$ udaljena od pola za $|r(\phi_j)|$. Dakle, krivulja $\mathcal{C}$ u polarnom sustavu je graf funkcije $r : I \to \mathbb{R}^2$ zadane eksplicitnom jednadžbom $r = r(\phi)$ za svaki $\phi \in I \subseteq \mathbb{R}$, stoga je krivulja $\mathcal{C}$ skup svih točaka $(\phi, r(\phi))$ na odgovarajućim zrakama q koje su udaljene od pola za $|r(\phi)|$ i pišemo $\mathcal{C} = \{(\phi, r(\phi)) \mid \phi \in I\}$. Duljinu luka krivulje $\mathcal{C}$ u polarnom sustavu izračunava se pomoću fomule:

$$s = \int (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}\, d\phi, \tag{71}$$

a fleksija primjenom formule:

$$\chi = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{72}$$

3.4.1 Bernoullijava lemniskata

Neka je zadana Bernoullijeva lemniskata implicitnom jednadžbom:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0, \tag{73}$$

koju ćemo zapisati u obliku pripadne polarne jednadžbe $r = r(\phi)$ primjenom formula:

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi. \tag{74}$$

Zbrajanjem kvadrata identiteta (74) dobivamo[20]:

$$x^2 + y^2 = r^2\,, \tag{75}$$

a njihovim oduzimanjem dobivamo[21]:

$$x^2 - y^2 = r^2\cos 2\phi. \tag{76}$$

[20] gdje se koristi trigonometrijski identitet: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

[21] pri čemu se koristi trigonometrijska formula: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Uvrštavanjem dobivenih identiteta (75) i (76) u jednadžbu (73) proizlazi:

$$r^4 - 2a^2r^2\cos 2\phi = 0$$

pa izlučivanjem varijable r^2 slijedi da se dobivena jednadžba može pisati u obliku $r^2 - 2a^2\cos 2\phi = 0$ (jer je po pretpostavci polumjer kružnice $r \neq 0$), odakle slijedi da je:

$$r = a\sqrt{2}\ \sqrt{\cos 2\phi} \tag{77}$$

polarna jednadžba Bernoullijeve lemniskate. Izračunavanjem derivacije prvog reda Bernoullijeve lemniskate[22] i njezinog kvadrata te dodatnim sređivanjem proizlazi:

$$(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\phi}}, \tag{78}$$

što uvrštavanjem u formulu (71) povlači da je: $s = a\sqrt{2}\int \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\ 2\phi}}$, odnosno:

$$s = a\sqrt{2}\int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\phi}}. \tag{79}$$

Pritom smo koristili trigonometrijski identitet $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Dobiveni integral u (79) naziva se eliptični integral prve vrste čije se vrijednosti iščitavaju iz tablica eliptičnih integrala oblika:

$$\int_0^{\phi} \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varrho}} = F(k, \varrho),\ \ k < 1.$$

Izračunavanjem derivacije drugog reda Bernoullijeve lemniskate dobivamo:

$$r'' = -a\sqrt{2}\ \ \frac{2\cos^2 2\phi + \sin^2 2\phi}{\cos 2\phi\ \sqrt{\cos 2\phi}}$$

te koristeći prethodno izračunatu derivaciju prvoga reda uz dodatno sređivanje izraza proizlazi da je:

$$|r^2 + 2r'^2 - rr''| = \frac{6a^2}{\cos 2\phi}. \tag{80}$$

Uvrštavanjem identiteta (78) i (80) u formulu (72) proizlazi da je fleksija Bernoullijeve lemniskate:

$$\chi = \frac{3\sqrt{\cos 2\phi}}{a\sqrt{2}}. \tag{81}$$

[22] gdje je $r' = -\frac{a\sqrt{2}\sin 2\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$

Sustav jednadžbi (79) i (81) su parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe Bernoullijeve lemniskate.
Ako jednadžbu (81) zapišemo u obliku $\sqrt{\cos 2\phi} = \frac{a\sqrt{2}}{3}\chi$, onda izračunavanjem odgovarajućih diferencijala dobivamo: $d\phi = -\frac{a\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{\cos 2\phi}}{\sin 2\phi}\,d\chi$. Nadalje, primjenom supstitucije $\sin 2\phi = \sqrt{1-\cos^2 2\phi}$ za $\cos 2\phi = \frac{2a^2}{9}\chi^2$ uz dodatno sređivanje izraza dobivamo:

$$d\phi = -\frac{2a^2\chi}{\sqrt{81-4a^4\chi^4}}\,d\chi,$$

stoga se jednadžba (79) uz primjenu identiteta $\sqrt{1-2\sin^2\phi} = \sqrt{\cos 2\phi}$, gdje je $\cos 2\phi = \frac{a\sqrt{2}}{3}\chi$, može pisati u obliku:

$$s = 6a^2\int \frac{d\chi}{\sqrt{81-4a^4\chi^4}}, \tag{82}$$

pri čemu se uzima apsolutna vrijednost integrala zbog činjenice da je $s \geq 0$.
Primjetimo da je diferencijalna jednadžba (82) oblika[23] $s = s(\chi)$ što znači da je duljina luka s zapravo skalarna funkcija po varijabli zakrivljenosti χ. Time je u ovom slučaju jednadžba (82) ujedno prirodna jednadžba Bernoullijeve lemniskate.

3.4.2 Kardioida

Neka je zadana kardioida polarnom jednadžbom:

$$r = a(1+\cos\phi), \quad a > 0. \tag{83}$$

Obzirom na derivaciju prvog reda $r' = -a\sin\phi$, dobivamo da je:
$r^2 + r'^2 = 2a^2(1+\cos\phi)$ pa korištenjem trigonometrijskog identiteta:
$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ proizlazi da je $r^2 + r'^2 = 4a^2\cos^2\frac{\phi}{2}$, odakle slijedi:

$$(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} = 2a\cos\frac{\phi}{2}. \tag{84}$$

Uvrštavanjem identiteta (84) u formulu (71) proizlazi:

$$s = 2a\int \cos\frac{\phi}{2}\,d\phi, \tag{85}$$

[23] gdje je $s(\chi)$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{6a^2}{\sqrt{81-4a^4\chi^4}}$

gdje se dobiveni integral rješava uvođenjem supstitucije $t = \frac{\phi}{2}$, odakle je $d\phi = 2dt$, stoga je duljina luka kardioide:

$$s = 4a \sin\frac{\phi}{2}. \tag{86}$$

Uzimajući u obzir da je $r'' = -a\cos\phi$ derivacija drugog reda kardioide, dobiva se: $|r^2 + 2r'^2 - rr''| = 3a^2(1 + \cos\phi)$, što se zapisuje u obliku:

$$|r^2 + 2r'^2 - rr''| = 6a^2\cos^2\frac{\phi}{2}. \tag{87}$$

Pritom se u izračunu primjenio trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$. Primjenom identiteta (84) i (87) iz formule (72) proizlazi da je fleksija kardioide:

$$\chi = \frac{3}{4a\cos\frac{\phi}{2}}. \tag{88}$$

Sustav jednadžbi (86) i (88) su parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe kardioide. Eliminacijom parametra ϕ iz tog sustava jednadžbi dobiva se prirodna jednadžba kardioide. Konkretno, kvadriranjem pa zbrajanjem navedenih jednadžbi proizlazi[24]:

$$1 = \frac{s^2}{16a^2} + \frac{9}{16a^2\chi^2},$$

odakle sređivanjem izraza slijedi da je:

$$\chi = \frac{3}{\sqrt{16a^2 - s^2}},$$

pri čemu je $16a^2 - s^2 \geq 0$, odakle slijedi $|s| \leq 4a$.
Iz uvjeta $s > 0$ i $a > 0$ dobivamo $0 < s \leq 4a$, stoga je prirodna jednadžba kardioide definirana za svaki $s \in \langle 0, 4a]$, gdje je $a > 0$ i pišemo:

$$\chi = \frac{3}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \quad s \in \langle 0,\ 4a], \quad a > 0.$$

[24]gdje smo koristili trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

4 Zaključak

Motivacija ovog rada je argumentiranje odgovora na pitanje: "Postoji li neka jednadžba krivulje takva da položaj krivulje u ravnini ili trodimenzionalnom prostoru ne ovisi o zadanoj jednadžbi?"
Dakle, želi se odrediti jednadžba krivulje $\mathcal{C}$ tako da ona bude ujedno i jednadžba svih onih krivulja u ravnini (ili prostoru $\mathbb{R}^3$) koje se dobivaju translacijom ili rotacijom ili simetrijom krivulje $\mathcal{C}$. Drugim riječima, želi se odrediti jednadžba familije krivulja kongruentnih s krivuljom $\mathcal{C}$.
Odgovor na postavljeno pitanje direktno proizlazi iz osnovnog teorema teorije krivulja kojim se zakrivljenosti (fleksija i torzija) krivulje $\mathcal{C}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$ izražavaju kao realne funkcije realne varijable po prirodnom parametru krivulje $\mathcal{C}$ i analogno se fleksija krivulje u ravnini izražava kao realna funkcija realne varijable po prirodnom parametru te krivulje. Naime, pokazuje se da za sve krivulje u ravnini vrijedi da je u svakoj njihovoj točki torzija jednaka nuli, što povlači da formula za izračunavanje prirodne jednadžbe krivulje u ravnini proizlazi iz formule za izračunavanje prirodne jednadžbe krivulje u trodimenzionalnom prostoru.
Naime, ako za svaku regularnu krivulju u prostoru $\mathbb{R}^3$ u svakoj njezinoj točki znamo koliko iznose njezine zakrivljenosti fleksija i torzija, onda je krivulja do kongruentnosti jednoznačno određena svojom prirodnom jednadžbom, odnosno skalarnim funkcijama: $\chi = \chi(s),\ \tau = \tau(s)$, gdje je s prirodni parametar krivulje. Jasno, pritom položaj te krivulje u prostoru nije jednoznačno određen, ali su jednoznačno određene njezine zakrivljenosti. U specijalnom slučaju, ako je u svakoj točki bilo koje regularne krivulje u ravnini poznata vrijednost fleksije, onda je krivulja do kongruentnosti jednoznačno određena svojom prirodnom jednadžbom, odnosno realnom funkcijom $\chi = \chi(s)$ realne varijable (prirodnog parametra) $s \geq 0$.
Zaključujemo, ako krivulje pripadaju istoj familiji međusobno kongruentnih krivulja, onda one imaju različite jednadžbe (eksplicitnu, implicitnu, parametarske) u zadanom koordinatnom sustavu, ali imaju istu zakrivljenost, odnosno istu prirodnu jednadžbu.
Također, pokazuje se da se iz prirodne jednadžbe krivulje u ravnini može jednostavnim postupkom izračunati odgovarajuća vektorska jednadžba ili ekvivalentno parametarske jednadžbe, od kojih se eliminacijom prirodnog parametra s dobiva pripadna eksplicitna ili implicitna jednadžba krivulje. Međutim, za krivulje u trodimenzionalnom prostoru postupak određivanja jednadžbe krivulje iz njezine prirodne jednadžbe nije jednostavno egzaktno riješiti te se on rješava primjenom računalnih programa.

Literatura

[1] Bronštejn, I. N.; *Matematicki Prirucnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1964.

[2] Kamenarović, I.; *Diferencijalna geometrija*, Sveučilište u Rijeci, Pedagoški fakultet, Rijeka, 1990.

[3] Žarinac-Frančula, B.; *Diferencijalna geometrija, Zbirka zadataka i repetitorij*, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski faskultet, Zagreb, 1980.

[4] Saveov, A. A.; *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.