Magični kvadrati

Mašović, Julijana

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Preddiplomski studij Matematika

Julijana Mašović

MAGIČNI KVADRATI

Završni rad

Rijeka, rujan 2022.

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku
Preddiplomski studij Matematika

Julijana Mašović

MAGIČNI KVADRATI

Mentor: dr. sc. Sara Ban

Završni rad

Rijeka, rujan 2022.

Sažetak

Tema ovog završnog rada su magični kvadrati. Prema kineskoj legendi, magični kvadrat je prvi put uočen 2800. g. pr. Kr. na leđima kornjače koja je izašla iz poplavljene rijeke Lo.
Magični kvadrat reda n je matrica $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ u kojoj je zbroj svih elemenata u svakom retku, svakom stupcu te na glavnoj i sporednoj dijagonali konstantan. Tu konstantu nazivamo magični zbroj od M. Za magični kvadrat M reda n kažemo da je normalan ako se svaki od brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ pojavljuje na točno jednoj poziciji u matrici M.
U radu navodimo nekoliko primjera magičnih kvadrata: kvadrat na bazilici Sagrada Familia, Lo Shu te kvadrat na Dürerovom djelu Melencolia I.
Nadalje, dokazujemo da je skup svih magičnih kvadrata reda n vektorski prostor te određujemo njegovu dimenziju.

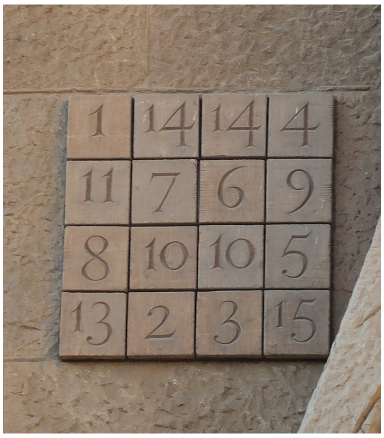
Ključne riječi: vektorski prostor, dimenzija vektorskog prostora, linearni operator, matrica, sustav linearnih jednadžbi, magični kvadrat, magični zbroj, normalan magični kvadrat

Sadržaj

1 UVOD

Tema ovog završnog rada su magični kvadrati. Magični kvadrati se javljaju u raznim područjima matematike: u linearnoj algebri, kombinatorici, teoriji grafova te geometriji. U linearnoj algebri magične kvadrate promatramo kao matrice te razmatramo njihov vektorski prostor. U kombinatorici se magični kvadrati koriste za rješavanje problema kao što su Španjolska tamnica, Sibirska tamnica i Osamnaest domina (više o tome može se pročitati u [2]). U teoriji grafova postoje bridno magična i po vrhovima magična označavanja grafova. U geometriji se javljaju generalizacije magičnih kvadrata: magični pravokutnici, magične kocke, magične hiperkocke, geometrijski magični kvadrati itd.

Magični kvadrati se često javljaju i kao ukras. Na primjer, na fasadi bazilike Sagrada Familia u Barceloni se nalazi kvadrat prikazan na sljedećoj slici:



Slika 1: Kvadrat na bazilici Sagrada Familia (preuzeto s `https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square`)

U poglavlju Osnovni pojmovi uvodimo osnovne pojmove i tvrdnje iz linearne algebre koje koristimo u nastavku rada.

U poglavlju Magični kvadrati opisujemo povijest, navodimo definiciju te određujemo dimenziju vektorskog prostora magičnih kvadrata reda n.

2 OSNOVNI POJMOVI

Definicija 2.1. *Neka je $\mathbb{F}$ skup na kojem su definirane binarne operacije zbrajanja $+ : \mathbb{F}\times\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ i množenja $\cdot : \mathbb{F}\times\mathbb{F}\to\mathbb{F}$. Kažemo da je uređena trojka $(\mathbb{F}, +, \cdot)$* ***polje*** *ako za sve $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ vrijede sljedeća svojstva:*

($\mathbb{F}$1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

($\mathbb{F}$2) $(\exists 0_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F})\ (\forall \delta \in \mathbb{F})\ (\delta + 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}} + \delta = \delta)$,

($\mathbb{F}$3) $(\forall \delta \in \mathbb{F})\ (\exists -\delta \in \mathbb{F})\ (\delta + (-\delta) = (-\delta) + \delta = 0_{\mathbb{F}})$,

($\mathbb{F}$4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

($\mathbb{F}$5) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,

($\mathbb{F}$6) $(\exists 1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\})\ (\forall \delta \in \mathbb{F})\ (\delta \cdot 1_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}} \cdot \delta = \delta)$,

($\mathbb{F}$7) $(\forall \delta \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\})\ (\exists \delta^{-1} \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\})\ (\delta \cdot \delta^{-1} = \delta^{-1} \cdot \delta = 1_{\mathbb{F}})$,

($\mathbb{F}$8) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,

($\mathbb{F}$9) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

Primjer 2.2. *Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je uz standardne operacije zbrajanja i množenja realnih brojeva polje.*

Definicija 2.3. *Neka je $\mathbb{F}$ polje i neka je V neprazan skup na kojem su definirane binarne operacije zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i vanjskog množenja $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$* ***vektorski prostor nad poljem*** *$\mathbb{F}$ ako za sve $a, b, c \in V$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ vrijede sljedeća svojstva:*

$(V1)$ $a + b = b + a$,

$(V2)$ $(a + b) + c = a + (b + c)$,

$(V3)$ $(\exists 0_V \in V)$ $(\forall v \in V)$ $(v + 0_V = 0_V + v = v)$,

$(V4)$ $(\forall v \in V)$ $(\exists -v \in V)$ $(v + (-v) = (-v) + v = 0_V)$,

$(V5)$ $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$,

$(V6)$ $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$,

$(V7)$ $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$,

$(V8)$ $1_{\mathbb{F}} \cdot a = a$.

Elemente skupa V nazivamo ***vektorima****, a elemente skupa $\mathbb{F}$* ***skalarima****.*

Primjer 2.4. *Polje $\mathbb{F}$ je vektorski prostor nad samim sobom.*

Primjer 2.5. *Skup $\mathbb{F}^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{F}, i = 1, \ldots, n\}$ je uz koordinatno zbrajanje $+ : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ definirano s*

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

za sve $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{F}^n$ i vanjsko množenje $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ definirano s

$$\alpha \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha \cdot \alpha_1, \ldots, \alpha \cdot \alpha_n),$$

za sve $\alpha \in \mathbb{F}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$, vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

Definicija 2.6. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $L \subseteq V$, $L \neq \emptyset$. Kažemo da je L* ***vektorski potprostor*** *od V ako je $(L, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada pišemo: $L \leq V$.*

Dokaz sljedeće propozicije može se pronaći u [1].

Propozicija 2.7. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $L \subseteq V$, $L \neq \emptyset$. Tada je $L \leq V$ ako i samo ako za sve $a, b \in L$ i za sve $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijede sljedeća svojstva:*

$(L1)$ $a + b \in L$,

$(L2)$ $\lambda \cdot a \in L$.

Definicija 2.8. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$, $a_1, \ldots, a_k \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, $k \in \mathbb{N}$. *Vektor* $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k \in V$ *naziva se* ***linearna kombinacija vektora*** $a_1, \ldots, a_k$ ***s koeficijentima*** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Definicija 2.9. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *te neka je* $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, *konačan skup vektora iz* V. *Za skup* S *kažemo da je* ***linearno nezavisan*** *ako vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0_V \Rightarrow \alpha_i = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

U suprotnom za skup S *kažemo da je* ***linearno zavisan***.

Definicija 2.10. *Za beskonačan skup vektora u vektorskom prostoru* V *kažemo da je* ***linearno nezavisan*** *ako je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan.*

Definicija 2.11. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i neka je* $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. ***Linearna ljuska skupa*** S, *u oznaci* $[S]$, *je skup svih linearnih kombinacija vektora iz* S, *tj.*

$$[S] = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k : a_1, \ldots, a_k \in S, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Definicija 2.12. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i neka je* $S \subseteq V$. *Kažemo da je* S ***skup izvodnica*** *za* V *ako vrijedi* $[S] = V$.

Definicija 2.13. *Za skup* B *kažemo da je* ***baza vektorskog prostora*** V *ako vrijedi:*

$(B1)$ B *je linearno nezavisan skup vektora,*

$(B2)$ B *je skup izvodnica za* V.

Dokaz sljedećeg teorema može se pronaći u [4].

Teorem 2.14. *U bilo kojem vektorskom prostoru sve baze imaju jednak broj elemenata.*

Definicija 2.15. ***Dimenzija vektorskog prostora*** *V je broj elemenata bilo koje baze tog prostora. Oznaka: $dim(V)$.*

Definicija 2.16. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Kažemo da je preslikavanje $f\colon V \to W$* ***linearni operator*** *ako za sve $a, b \in V$ i sve $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijede sljedeća svojstva:*

(O1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

(O2) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$.

Dokaz sljedeće leme može se pronaći u [1].

Lema 2.17. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $f\colon V \to W$ je linearni operator ako i samo ako za sve $a, b \in V$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ vrijedi: $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$.*

Definicija 2.18. ***Jezgra linearnog operatora*** *$f\colon V \to W$ je skup*

$$Kerf = \{v \in V : f(v) = 0_W\}.$$

Jezgra Ker$f$ linearnog operatora $f\colon V \to W$ je vektorski potprostor od V.
Dimenzija prostora Ker$f$ se naziva **defekt linearnog operatora** f i označava se s $d(f)$.

Definicija 2.19. ***Slika linearnog operatora*** *$f\colon V \to W$ je skup*

$$Imf = \{f(v) : v \in V\}.$$

Slika Imf linearnog operatora $f\colon V \to W$ je vektorski potprostor od W.
Dimenzija prostora Imf se naziva **rang linearnog operatora** f i označava se s $r(f)$.

Dokaz sljedećeg teorema može se pronaći u [3].

Teorem 2.20. ***(Teorem o rangu i defektu)*** *Neka je* $f : V \to W$ *linearni operator. Tada je* $r(f) + d(f) = dim(V)$.

Definicija 2.21. *Neka su* $m, n \in \mathbb{N}$. ***Matrica reda*** $m \times n$ ***nad poljem*** $\mathbb{F}$ *je svako preslikavanje* $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$.

S $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$ označavamo skup svih matrica reda $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$. Ako je $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$ pišemo:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

gdje je $A(i, j) = a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.
Ukoliko je $m = n$, skup $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$ označavamo s $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, a matrice iz skupa $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zovemo **kvadratnim matricama reda** n.

Definicija 2.22. *Neka je* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$.
Neka je $i \in \{1, \ldots, m\}$. i***-ti redak matrice*** A *je matrica*

$$R_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{F}).$$

Neka je $j \in \{1, \ldots, n\}$. j***-ti stupac matrice*** A *je matrica*

$$S_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{F}).$$

Definicija 2.23. *Neka su* $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$ *te neka je* $\lambda \in \mathbb{F}$.
Zbroj matrica A *i* B *je matrica* $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$, *gdje je* $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$, *za sve* $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.
Umnožak skalara λ ***i matrice*** A *je matrica* $D = [d_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$, *gdje je* $d_{ij} := \lambda a_{ij}$, *za sve* $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Sljedeća tvrdnja može se pronaći u [1].

Teorem 2.24. *Skup $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$ je uz binarne operacije zbrajanja matrica i množenja matrice skalarom vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Vrijedi: $dim(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})) = m \cdot n$.*

Definicija 2.25. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$ i $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{F})$. **Umnožak matrica** A i B je matrica $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{F})$, gdje je*

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, r$.

Definicija 2.26. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Uređenu n-torku $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ nazivamo **glavnom dijagonalom**, a uređenu n-torku $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1})$ **sporednom dijagonalom matrice** A.*

Definicija 2.27. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Preslikavanje $tr\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ definirano s:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

*naziva se **trag matrice** A.*

Trag matrice je linearni operator.

Definicija 2.28. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$. **Rang matrice** A je maksimalan broj linearno nezavisnih redaka u toj matrici. Oznaka: $r(A)$.*

Definicija 2.29. ***Linearna jednadžba s n nepoznanica** $x_1, \ldots, x_n$ je izraz oblika*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

*gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{F}$. Skalare a_i, $i = 1, \ldots, n$ nazivamo **koeficijentima** te jednadžbe, a b **slobodnim članom** jednadžbe.*

Definicija 2.30. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$.* ***Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica*** *$x_1, \ldots, x_n$ je skup jednadžbi:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

gdje su $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Rješenje sustava (1) je svaka uređena n-torka $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ koja zadovoljava sve jednadžbe tog sustava.
Sustav (1) možemo pisati u matričnom obliku:

$$AX = B,$$

gdje je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Matricu A nazivamo **matricom sustava** (1).

Definicija 2.31. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$.* ***Homogeni sustav od*** *m* ***linearnih jednadžbi s*** *n* ***nepoznanica*** *$x_1, \ldots, x_n$ je skup jednadžbi:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

gdje su $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Dokaz sljedeće propozicije može se pronaći u [1].

Propozicija 2.32. *Homogeni sustav je uvijek rješiv. Skup svih rješenja homogenog sustava je vektorski prostor, potprostor vektorskog prostora $\mathbb{F}^n$.*

Trivijalno rješenje sustava (2) je uređena n-torka $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^n$.

Dokaz sljedećeg korolara može se pronaći u [4].

Korolar 2.33. *Homogeni sustav u kojem je broj jednadžbi manji od broja nepoznanica uvijek ima i netrivijalna rješenja.*

S Ω označimo **prostor rješenja homogenog sustava** (2).
Vrijedi (vidi [4]):

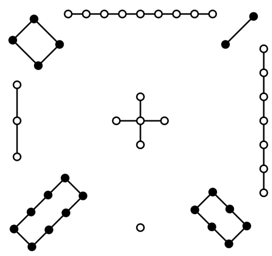
$$dim(\Omega) = n - r(A), \tag{3}$$

gdje je A matrica sustava (2).

3 MAGIČNI KVADRATI

3.1 Povijest

Prema legendi, u Kini je 2800. g. pr. Kr. došlo do velike poplave rijeke Lo. Ljudi su, kako bi zaustavili poplavu, ponudili žrtvu bogu rijeke. Tada je iz rijeke Lo izašla kornjača koja je hodala oko žrtve te se zatim vratila natrag u rijeku. To se ponavljalo tijekom svakog žrtvovanja. Fuh-Hi, osnivač kineske civilizacije, je shvatio da je bog rijeke nezadovoljan. No, i dalje nitko nije znao kako mu udovoljiti sve dok dijete na kornjačinoj ljusci nije primijetilo uzorak sa sljedeće slike:



Slika 2: Uzorak na kornjači (preuzeto s `https://en.wikipedia.org/wiki/Lo_Shu_Square`)

Uzorak se sastojao od skupova točaka koji formiraju 3×3 kvadrat u kojem je zbroj broja točaka u svakom retku, stupcu i na dijagonalama jednak 15. Ovaj uzorak se zove Lo Shu ili riječni svitak, a brojevi točaka su prikazani na slici 3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

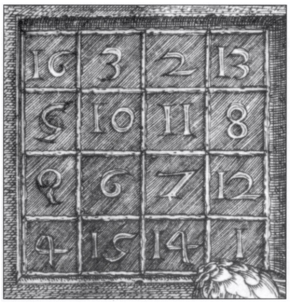
Slika 3: Lo Shu - brojevi točaka (preuzeto s `https://en.wikipedia.org/wiki/Lo_Shu_Square`)

Ljudi su shvatili da trebaju ponuditi 15 žrtava, što odgovara broju dana u svakom od 24 ciklusa kineske solarne godine. Nakon što su ponudili točan broj žrtava, rijeka se smirila.

Slika 4 prikazuje djelo Melencolia I Albrechta Dürera.

Slika 4: Dürerovo djelo Melencolia I (preuzeto s `https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square`)

Melencolia I je bakrorez koji predstavlja depresivno stanje genija. Naime, okružen je raznim fascinantnim predmetima poput pješčanog sata, poliedra na kojem je obris ljudske lubanje, šestara, vage i drugih, no on je nezainteresiran za njih. U gornjem desnom kutu bakroreza nalazi se 4×4 kvadrat prikazan na sljedećoj slici:



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Slika 5: Kvadrat na Dürerovom djelu Melencolia I (preuzeto s `https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square`)

Uočimo da je zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i na dijagonalama kvadrata jednak 34. Ćelije u sredini zadnjeg retka predstavljaju godinu izrade bakroreza, 1514.

3.2 Definicija

Definicija 3.1. *Kažemo da je matrica* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ***magični kvadrat reda*** n *ako je zbroj svih elemenata u svakom retku, svakom stupcu te na glavnoj i sporednoj dijagonali matrice* M *konstantan. Tu konstantu nazivamo* ***magični zbroj*** *od* M*.*

Definicija 3.2. *Za magični kvadrat* M *reda* n *kažemo da je* ***normalan*** *ako se svaki od brojeva iz skupa* $\{1, 2, \dots, n^2\}$ *pojavljuje na točno jednoj poziciji u matrici* M*.*

Jedini normalan magični kvadrat reda 1 je $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$.
Pokažimo da ne postoji normalan magični kvadrat reda 2.
Neka je

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

proizvoljan magični kvadrat reda 2 s magičnim zbrojem m.

Tada je:

$$\left.\begin{aligned} a+b&=m\\ c+d&=m\\ a+c&=m\\ b+d&=m\\ a+d&=m\\ b+c&=m \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Riješimo sustav (4) koji se sastoji od šest linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice a, b, c i d.
Označimo jednadžbe sustava (4) redom s $J_1, J_2, \ldots, J_6$.
Iz J_2 i J_3 dobivamo: $c + d = a + c$. Slijedi:

$$d = a.$$

Iz J_4 i J_5 dobivamo: $b + d = a + d$. Slijedi:

$$b = a.$$

Iz J_6 i J_1 dobivamo: $b + c = a + b$. Slijedi:

$$c = a.$$

Nadalje, iz J_1 dobivamo: $2a = m$ pa je

$$a = \frac{m}{2}.$$

Stoga, sustav (4) ima jedinstveno rješenje $(a, b, c, d) = (\frac{m}{2}, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}, \frac{m}{2})$.
Slijedi da je

$$M = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2} \end{bmatrix}.$$

Dakle, ne postoji normalan magični kvadrat reda 2.
Postoje normalni magični kvadrati reda n, za svaki $n \geq 3$ (vidi [6]).
Broj normalnih magičnih kvadrata reda n je neriješen problem (vidi [5]).

Dokaz sljedeće propozicije može se pronaći u [6].

Propozicija 3.3. *Ako je $n \neq 2$, magični zbroj normalnog magičnog kvadrata reda n je*

$$s_n = \frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2}.$$

Primjer 3.4. *Zapišimo kvadrate iz uvoda i prethodnog potpoglavlja u matričnom obliku:*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 15 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}.$$

S je magični kvadrat reda 4 s magičnim zbrojem 33, L je normalan magični kvadrat reda 3, a D normalan magični kvadrat reda 4.

3.3 Vektorski prostor magičnih kvadrata

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Označimo s $\mathcal{MS}_n$ skup svih magičnih kvadrata reda n.

Teorem 3.5. *$\mathcal{MS}_n$ je vektorski potprostor vektorskog prostora $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Dokaz: Ispitajmo svojstva (L1) i (L2) iz propozicije 2.7.
Neka su $A, B \in \mathcal{MS}_n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Nadalje, neka je s_A magični zbroj od A te s_B magični zbroj od B.

(L1) Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$ proizvoljan.
Izračunajmo zbroj elemenata u i-tom retku matrice $A + B$:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = s_A + s_B.$$

Na analogan način dobivamo da je zbroj elemenata u svakom stupcu te na dijagonalama matrice $A + B$ jednak $s_A + s_B$ pa je $A + B \in \mathcal{MS}_n$.

(L2) Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$ proizvoljan.
Izračunajmo zbroj elemenata u i-tom retku matrice λA:

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{ij}) = \lambda \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \lambda \cdot s_A.$$

Na analogan način dobivamo da je zbroj elemenata u svakom stupcu te na dijagonalama matrice λA jednak $\lambda \cdot s_A$ pa je $\lambda A \in \mathcal{MS}_n$.

Dakle, $\mathcal{MS}_n \leq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\blacksquare$

U nastavku određujemo dimenziju vektorskog prostora $\mathcal{MS}_n$.
Odredimo najprije dimenziju prostora $\mathcal{MS}_1$.
$\mathcal{MS}_1$ je skup svih magičnih kvadrata reda 1, tj. skup svih kvadratnih matrica reda 1 za koje trivijalno vrijedi da je zbroj elemenata u svakom retku, stupcu te na glavnoj i sporednoj dijagonali jednak.
Dakle, skup $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \right\}$ je baza od $\mathcal{MS}_1$ pa je $dim(\mathcal{MS}_1) = 1$.
Odredimo sada dimenziju prostora $\mathcal{MS}_2$.
Neka je

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{MS}_2$$

proizvoljan magični kvadrat reda 2 s magičnim zbrojem m.
U prethodnom potpoglavlju smo pokazali da je

$$M = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2} \end{bmatrix} = \frac{m}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, skup $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ je baza od $\mathcal{MS}_2$ pa je $dim(\mathcal{MS}_2) = 1$.
Odredimo dimenziju prostora $\mathcal{MS}_3$.
S $\mathcal{MS}_{3,0}$ označimo skup svih magičnih kvadrata reda 3 s magičnim zbrojem 0. Ovaj skup je vektorski potprostor prostora $\mathcal{MS}_3$.
Promotrimo linearni operator $tr : \mathcal{MS}_3 \to \mathbb{R}$. Vrijedi: $\mathrm{Ker}(tr) = \{M \in \mathcal{MS}_3 : tr(M) = 0\} = \{M \in \mathcal{MS}_3 : \text{magični zbroj od } M \text{ je } 0\} = \mathcal{MS}_{3,0}$. Nadalje, uočimo da za svaki $r \in \mathbb{R}$ postoji

$$B = \begin{bmatrix} \frac{r}{3} & \frac{r}{3} & \frac{r}{3} \\ \frac{r}{3} & \frac{r}{3} & \frac{r}{3} \\ \frac{r}{3} & \frac{r}{3} & \frac{r}{3} \end{bmatrix} \in \mathcal{MS}_3$$

tako da je $tr(B) = r$. Dakle, operator tr je surjektivan pa je $\mathrm{Im}(tr) = \mathbb{R}$. Prema teoremu o rangu i defektu vrijedi:

$$dim(\mathcal{MS}_3) = dim(\mathcal{MS}_{3,0}) + 1. \tag{5}$$

Odredimo dimenziju prostora $\mathcal{MS}_{3,0}$.
Neka je

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{MS}_{3,0}$$

proizvoljan magični kvadrat reda 3 s magičnim zbrojem 0.
Tada je:

$$\left.\begin{aligned} a+b+c&=0\\ d+e+f&=0\\ g+h+i&=0\\ a+d+g&=0\\ b+e+h&=0\\ c+f+i&=0\\ a+e+i&=0\\ c+e+g&=0 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

(6) je homogeni sustav od osam linearnih jednadžbi s devet nepoznanica a, b, c, d, e, f, g, h, i. Sustav (6) ima sljedeću matricu sustava:

$$A=\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&0 \end{bmatrix}.$$

Odredimo dimenziju prostora rješenja Ω sustava (6). Prema (3),

$$dim(\Omega)=9-r(A).$$

Izračunajmo rang matrice A. Označimo retke matrice A redom s $R_1, R_2, \ldots, R_8$. Uočimo:

$$R_1+R_2+R_3=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}=R_4+R_5+R_6$$

pa je $r(A)<8$. Ispitajmo je li skup $\{R_2, R_3, \ldots, R_8\}$ linearno nezavisan.
Neka je

$$\alpha_2R_2+\alpha_3R_3+\cdots+\alpha_8R_8=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Označimo stupce matrice A redom sa $S_1, S_2, \ldots, S_9$. U nastavku, za stupac S_j, razmatramo pozicije (i,j), $i>1$, u matrici A na kojima

se nalazi jedinica.
Najprije promotrimo skup stupaca $\{S_1, S_2, S_3\}$.
Uočimo da se jedinica nalazi na pozicijama $(4,1)$ i $(7,1)$. Stoga je

$$\alpha_7 = -\alpha_4. \tag{7}$$

Nadalje, jedinica se nalazi na pozicijama $(6,3)$ i $(8,3)$ pa je

$$\alpha_8 = -\alpha_6. \tag{8}$$

Zatim, jedinica se nalazi na poziciji $(5,2)$ pa je

$$\alpha_5 = 0. \tag{9}$$

Promotrimo sada skup stupaca $\{S_4, S_5, S_6\}$.
Jedinica se nalazi na pozicijama $(2,4)$ i $(4,4)$ pa je

$$\alpha_2 = -\alpha_4.$$

Iz (7) i prethodne jednakosti dobivamo:

$$\alpha_2 = \alpha_7. \tag{10}$$

Nadalje, jedinica se nalazi na pozicijama $(2,6)$ i $(6,6)$ pa je

$$\alpha_2 = -\alpha_6.$$

Iz (8) i prethodne jednakosti dobivamo:

$$\alpha_2 = \alpha_8. \tag{11}$$

Potom se jedinica nalazi na pozicijama $(2,5)$, $(5,5)$, $(7,5)$ i $(8,5)$.
Budući da vrijedi (9), dobivamo:

$$\alpha_2 = -(\alpha_7 + \alpha_8).$$

Prema (10) i (11),

$$\alpha_2 = 0.$$

Slijedi da je

$$\alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0. \tag{12}$$

Nadalje, promatrajući stupac S_7, zaključujemo da je

$$\alpha_3 = -(\alpha_4 + \alpha_8).$$

Prema (12),

$$\alpha_3 = 0.$$

Dobivamo:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_8 = 0$$

pa je skup $\{R_2, R_3, \ldots, R_8\}$ linearno nezavisan.
Slijedi da je $r(A) = 7$ te $dim(\Omega) = dim(\mathcal{MS}_{3,0}) = 9 - 7 = 2$.
Prema (5), $dim(\mathcal{MS}_3) = 2 + 1 = 3$.

Dimenzija prostora $\mathcal{MS}_n$, za $n \geq 3$, može se izračunati po formuli iz sljedećeg teorema.

Teorem 3.6. *Neka je $n \geq 3$. Tada je $dim(\mathcal{MS}_n) = n^2 - 2n$.*

Dokaz: Pokazali smo da tvrdnja teorema vrijedi za $n = 3$. Neka je $n > 3$.
S $\mathcal{MS}_{n,0}$ označimo skup svih magičnih kvadrata reda n s magičnim zbrojem 0. Ovaj skup je vektorski potprostor prostora $\mathcal{MS}_n$.
Promotrimo linearni operator $tr : \mathcal{MS}_n \to \mathbb{R}$. Vrijedi: $\mathrm{Ker}(tr) = \mathcal{MS}_{n,0}$.
Nadalje, uočimo da za svaki $r \in \mathbb{R}$ postoji

$$B = \begin{bmatrix} \frac{r}{n} & \frac{r}{n} & \cdots & \frac{r}{n} \\ \frac{r}{n} & \frac{r}{n} & \cdots & \frac{r}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{r}{n} & \frac{r}{n} & \cdots & \frac{r}{n} \end{bmatrix} \in \mathcal{MS}_n$$

tako da je $tr(B) = r$. Dakle, operator tr je surjektivan pa je $\mathrm{Im}(tr) = \mathbb{R}$. Prema teoremu o rangu i defektu vrijedi:

$$dim(\mathcal{MS}_n) = dim(\mathcal{MS}_{n,0}) + 1. \tag{13}$$

Odredimo dimenziju prostora $\mathcal{MS}_{n,0}$.
Neka je

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{MS}_{n,0}$$

proizvoljan magični kvadrat reda n s magičnim zbrojem 0.
Tada je:

$$\left.\begin{aligned}
m_{11}+m_{12}+\cdots+m_{1n}&=0\\
m_{21}+m_{22}+\cdots+m_{2n}&=0\\
&\vdots\\
m_{n1}+m_{n2}+\cdots+m_{nn}&=0\\
m_{11}+m_{21}+\cdots+m_{n1}&=0\\
m_{12}+m_{22}+\cdots+m_{n2}&=0\\
&\vdots\\
m_{1n}+m_{2n}+\cdots+m_{nn}&=0\\
m_{11}+m_{22}+\cdots+m_{nn}&=0\\
m_{1n}+m_{2,n-1}\cdots+m_{n1}&=0
\end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

(14) je homogeni sustav od $2n+2$ linearnih jednadžbi s n^2 nepoznanica.
Odredimo dimenziju prostora rješenja Ω sustava (14). Prema (3),

$$dim(\Omega)=n^2-r(A),$$

gdje je A matrica sustava (14).
Za $n=4$,

$$A=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0
\end{bmatrix}.$$

Izračunajmo rang matrice A za $n>3$. Označimo retke matrice A redom s $R_1,R_2,\ldots,R_{2n+2}$. Uočimo:

$$R_1+R_2+\cdots+R_n=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\end{bmatrix}=R_{n+1}+R_{n+2}+\cdots+R_{2n}$$

pa je $r(A)<2n+2$. Ispitajmo je li skup $\{R_2,R_3,\ldots,R_{2n+2}\}$ linearno nezavisan.

Neka je

$$\alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 + \cdots + \alpha_{2n+2} R_{2n+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Označimo stupce matrice A redom sa $S_1, S_2, \ldots, S_{n^2}$. U nastavku, za stupac S_j, razmatramo pozicije (i, j), $i > 1$, u matrici A na kojima se nalazi jedinica.
Najprije promotrimo skup stupaca $\{S_1, \ldots, S_n\}$.
Uočimo da se jedinica nalazi na pozicijama $(n+1, 1)$ i $(2n+1, 1)$. Stoga je

$$\alpha_{2n+1} = -\alpha_{n+1}. \tag{15}$$

Nadalje, jedinica se nalazi na pozicijama $(2n, n)$ i $(2n+2, n)$ pa je

$$\alpha_{2n+2} = -\alpha_{2n}. \tag{16}$$

Zatim, jedinica se nalazi na pozicijama $(n+j, j)$ za sve $j = 2, \ldots, n-1$ pa je

$$\alpha_{n+j} = 0, \ \forall j \in \{2, \ldots, n-1\}. \tag{17}$$

Promotrimo sada skup stupaca $\{S_{n+1}, \ldots, S_{2n}\}$.
Jedinica se nalazi na pozicijama $(2, n+1)$ i $(n+1, n+1)$ pa je

$$\alpha_2 = -\alpha_{n+1}.$$

Iz (15) i prethodne jednakosti dobivamo:

$$\alpha_2 = \alpha_{2n+1}. \tag{18}$$

Nadalje, jedinica se nalazi na pozicijama $(2, 2n)$ i $(2n, 2n)$ pa je

$$\alpha_2 = -\alpha_{2n}.$$

Iz (16) i prethodne jednakosti dobivamo:

$$\alpha_2 = \alpha_{2n+2}.$$

Potom se jedinica nalazi na pozicijama $(2, n+2)$, $(n+2, n+2)$ i $(2n+1, n+2)$. Prema (17), $\alpha_{n+2} = 0$. Dobivamo:

$$\alpha_2 = -\alpha_{2n+1}.$$

Iz (18) i prethodne jednakosti dobivamo:

$$\alpha_2 = 0.$$

Slijedi da je

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{2n} = \alpha_{2n+1} = \alpha_{2n+2} = 0. \tag{19}$$

Promotrimo sada stupce $S_{j \cdot n+1}$ za sve $j = 2, \ldots, n-2$.
Zaključujemo da je

$$\alpha_{j+1} = -\alpha_{n+1}, \ \ \forall j \in \{2, \ldots, n-2\}.$$

Prema (19),

$$\alpha_{j+1} = 0, \ \ \forall j \in \{2, \ldots, n-2\}.$$

Nadalje, promatrajući stupac $S_{(n-1) \cdot n+1}$, zaključujemo da je

$$\alpha_n = -(\alpha_{n+1} + \alpha_{2n+2}).$$

Prema (19),

$$\alpha_n = 0.$$

Dobivamo:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{2n+2} = 0$$

pa je skup $\{R_2, R_3, \ldots, R_{2n+2}\}$ linearno nezavisan.
Slijedi da je $r(A) = 2n + 1$ te

$$dim(\Omega) = dim(\mathcal{MS}_{n,0}) = n^2 - (2n+1) = n^2 - 2n - 1.$$

Prema (13), $dim(\mathcal{MS}_n) = n^2 - 2n - 1 + 1 = n^2 - 2n$, $\forall n > 3$.
Dakle, $dim(\mathcal{MS}_n) = n^2 - 2n$, $\forall n \geq 3$.

■

4 ZAKLJUČAK

Tema ovog završnog rada su magični kvadrati. U radu smo opisali povijest magičnih kvadrata. Definirali smo magične kvadrate reda n i normalne magične kvadrate.
Naveli smo primjer magičnog kvadrata reda 3 - Lo Shu te dva primjera magičnih kvadrata reda 4 - magični kvadrat na bazilici Sagrada Familia i magični kvadrat na Dürerovom djelu Melencolia I.
Dokazali smo da je skup svih magičnih kvadrata reda n, $\mathcal{MS}_n$, vektorski prostor te da vrijedi: $dim(\mathcal{MS}_1) = dim(\mathcal{MS}_2) = 1$ i $dim(\mathcal{MS}_n) = n^2 - 2n$, $\forall n \geq 3$.

Literatura

[1] Bakić, Damir: *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
URL:https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/la/linearna_algebra_sk_7.pdf (30.08.2022.)

[2] Dudeney, Henry: *Amusement in Mathematics*, 1917.
URL:http://www.bookrags.com/ebooks/16713/152.html?fbclid=IwAR0RcgG1x8misTZ7Iey-EgiDltSUWPDUlTrycbcVkMP8arBeRkKcCoYrJWw#gsc.tab=0 (30.08.2022.)

[3] Hefferon, Jim: *Linear Algebra*, 2009.
URL:https://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/book.pdf (30.08.2022.)

[4] Horvatić, Krešimir: *Linearna algebra*, Golden marketing, Zagreb, 2004.
URL:https://www2.irb.hr/korisnici/zskoda/horvaticla.pdf (30.08.2022.)

[5] Sloane, N. J. A.: *The on-line Encyclopedia of integer sequences*, 1996.
URL:http://oeis.org/A006052 (30.08.2022.)

[6] Wikipedia: *Magic Square*,
URL:https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square (30.08.2022.)

Popis slika