Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku

Preddiplomski sveučilišni studij Matematika

Kristina Glavan

Simetrija

Završni rad

Rijeka, 2022.

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku

Preddiplomski sveučilišni studij Matematika

Kristina Glavan

Simetrija

Mentor: mr.sc. Ines Radošević Medvidović

Završni rad

Rijeka, 2022.

SADRŽAJ

1. UVOD

Simetrija je riječ koja se uvijek povezuje s ljepotom, savršenstvom i skladom. Može se uočiti svuda u okolini, primjerice na pahulji snijega, cvijeću, ljudskome tijelu, morskoj zvijezdi i na još mnogo primjera u prirodi. Sukladno tome može se zaključiti da se simetriju može povezati s raznim pojmovima u svakodnevnom životu, ali isto je tako ona primjenjiva i na matematičkim pojmovima. Ona simetrija koja je najprepoznatljivija od svih je osna tj. zrcalna simetrija. U ovom radu najprije će se promotriti kako se proučavanje simetrije razvijalo kroz povijest, zatim će se proučiti simetrija u matematičkoj interpretaciji, odnosno u teoriji grupa. Glavni predmet će biti osnovni uzorak ornamenta, gdje se promatra kako je definiran pojam grupe simetrija uzorka ornamenta te koliko tih grupa ima. Definirat će se neke od nužnih pojmova kako bi se shvatila podjela grupa ornamenta te će se na nekim primjerima pogledati na koji način su te grupe prepoznatljive. Osim simetrije na traci promatrat će se i simetrija u ravnini te simetrije u prostoru. Potom slijedi prikaz teorije vezane za kristalografiju i kristalnu rešetku te naposlijetku slijedi prikaz kako se simetrija pojavljuje u svakodnevnom životu kroz zlatni rez, u djelima čovjeka te u prirodi.

2. SIMETRIJA

2.1. Povijest

Simetrija je oduvijek bila ideja sklada, savršenstva i ljepote. Pojavljuje se već u doba drevne Mezopotamije u umjetnosti i u arhitekturi. Najizraženija simetrija uočljiva je kod Sumerana. Najistaknutija simetrija u umjetnosti Sumerana je osna simetrija, to jest zrcaljenje. Primjer zrcaljenja u Sumeranskoj umjetnosti vidljiv je na slici 1. Iz ove slike proizlazi jedan od najpoznatijih simbola, a to je dvoglavi orao. Ovaj simbol se pojavljuje u mnogim civilizacijama kao što je perzijanska, arapska, mongolska, bizantska i mnoge druge.

Slika 1: Umjetnost Sumerana (preuzeto iz [14])

Pitagorejci su smatrali da je cijeli svijet stvoren na temelju matematičkih pravila. Prema njima, svim svojstvima i stanjima svih bića upravljali su upravo brojevi te su također smatrani uzrocima postojanja u svim ostalim aspektima svemira. Svemir su nazvali kozmos, što je označavalo skladan poredak elemenata. Oni su bili prvi koji su uveli simetriju kao pojam te je poistovjetili s ljepotom. Određuju je brojevima te smatraju simetričnim sve što je imalo skladan odnos s cjelinom. Nebeska tijela također su smatrali simetričnima, a samim time i cijeli svemir. Po Pitagorejcima najsavršenije geometrijske figure bile su krug i sfera zbog svoje potpune rotacijske simetrije. Platon je, kao i Pitagorejci, smatrao da su matematički zakoni u prirodi izvor svega, pa tako i simetrije u prirodi. Njegov učenik Aristotel je nebeskim tijelima pripisao sferni oblik jer ih je smatrao toliko savršenima da bi bilo kakav drugi oblik umanjivao njihovo savršenstvo. Time je naglasio savršenstvo kozmosa o kojem su pričali i Pitagorejci prije njega.

Kroz vrijeme se pojam simetrije u matematici ipak definirao malo preciznije. Pojam simetrije objekta definiran je pomoću invarijantnih transformacija. Ovaj pojam simetrije i pojam simetrije u doba prije nove ere usko su povezani. Matematičkim pojmom nije nužno samo opisivati simetriju geometrijskih tijela, već i apstraktne objekte poput jezika, zvuka, ljudskog tijela, kristala, niza tonova ili čak apstraktnih struktura poput matematičkih jednadžbi.

Pojava simetrije u matematičkim jednadžbama proizlazi iz pokušaja rješavanja polinomnih jednadžbi viših stupnjeva. Rješenje nekih polinoma prvi su našli Babilonci, a to su bili polinomi drugog stupnja tj. kvadratne jednadžbe. Ta rješenja su, naravno, bila dva korijena. Potreba za rješavanjem tih jednadžbi nije bila sama matematika i njeno proučavanje, već pronalaženje površine kopna i sličnog. Tek u 18.stoljeću dobiveni su konkretni algebarski zapisi za rješenja kvadratnih jednadžbi. U tom vremenu su pronađeni i eksplicitni zapisi za korijene polinoma 3. i 4. stupnja. Zapisi, iako izgledom vrlo komplicirani, ustvari to nisu. Razlog tome je činjenica da su građeni od jednostavnijih blokova, a ti blokovi su zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i radikali. Radikalima se smatraju kvadratni korijeni, kubni korijeni i sl. Svi polinomi 4. ili manjeg stupnja su rješivi pomoću radikala. Polinomi viših stupnjeva, kao što je 5. stupanj, su ipak predstavljali problem u pronalaženju rješenja. Niels Henrik Abel[1] je 1823. godine, dokazao da nisu svi polinomi 5. stupnja rješivi pomoću radikala.

Francuski matematičar Evariste Galois[2] je 1832. dao odgovor što razlikuje polinome 5. stupnja koji su rješivi od onih koji nisu rješivi. No, prije nego što je našao taj odgovor „izumio“ je teoriju grupa. Kao što je poznato, teorija grupa danas ima veliku primjenu u svim područjima matematike. Službena matematička definicija grupe se odnosi na skup elemenata s binarnom operacijom koji zadovoljava određena svojstva. Vidljivo je da ova definicija eksplicitno ne spominje simetriju. No, matematički koncept grupe obuhvaća bit simetrije u apstraktnim terminima. Galois je imao fokus na operaciji koja je otkrivala simetriju. Skup simetrija bilo kojeg objekta je grupa, a svaka grupa je skup simetrija nekog oblika. Galoisova perspektiva je ustvari bila slična proučavanju različitih simetrija oblika. Na različite načine je preusmjeravao oblike tako da i dalje izgledaju isto. Galois je otkrio da se korijeni polinoma mogu izraziti kao jednostavne formule koje uključuju kvadratne korijene, kubne korijene i slično. Svaka algebarska jednadžba ima grupu simetrija koja se naziva Galoisova grupa s apstraktnom strukturom koja se određuje, kao što je prethodno navedeno, te korijena polinoma zapisanih u terminima radikala. Galoisova grupa zapravo može dati rješenje izraženo u radikalima, međutim neće se dobiti formula. Zavisnost između korijena polinoma daje određene odnose između njenih koeficijenata. Analizirajući ove relacije, moguće je odrediti zavisnost između korijena polinoma i na taj način izračunati Galoisovu grupu jednadžbi. Jednadžba se može sastojati od svih permutacija korijena tj. može biti simetrična grupa n-tog stupnja. Može se reći da je formalni matematički koncept simetrije došao iz Galoisove teorije grupa.

[1] Niels Henrik Abel (1802.-1829.) – norveški matematičar, istaknuo se radovima na polju teorije grupa, integralnog računa i teorije eliptičkih funkcija
[2] Evariste Galois (1811.-1832.) – francuski matematičar, osnivač teorije grupa

Simetriju je iskoristio i Sophus Lie[3] u svojim proučavanjima običnih diferencijalnih jednadžbi. Za ta proučavanje je uveo pojam Lieve grupe.

Početkom 20. stoljeća, točnije 1915. godine, njemačka matematičarka Emmy Noether[4] dokazuje da svi zakoni očuvanja proizlaze iz simetrije prirodnih zakona. Iz simetrije translacije u vremenu slijedi zakon očuvanja energije. Zakon očuvanja količine gibanja slijedi iz simetrije translacije u prostoru. Zakon očuvanja kutne količine gibanja slijedi iz simetrije rotacije, te postoji još mnogo takvih zakona. Ono što je uočljivo jest da svaka simetrija u prirodi upućuje na pripadajući zakon o očuvanju neke energije, naboja, impulsa ili sličnog.

Thus Stewart tvrdi da je simetrija sveprožimajuća i da veliki dio fizičke stvarnosti ima teoriju grupa kao temeljno objašnjenje[5].

2.2. Izometrije

Kao što je već prethodno navedeno, simetrija je definirana invarijantnim transformacijama tj. izometrijama. Stoga će se, najprije, objasniti što su izometrije. Prije svega je potrebno definirati pojam metrike u euklidskoj ravnini.

Aksiom 2.2.1. *Neka je M skup te neka za funkciju* $d : M \times M \rightarrow R$ *vrijedi:*

M1. $d(A, B) \geq 0,\ A, B \in M$

M2. $d(AB) = 0$ *ako i samo ako je* $A = B$

M3. $d(A, B) = d(B, A),\ A, B \in M$

M4. $d(A, B) \leq d(A,C) + d(C, B),\ A, B \in$

Tada se funkcija d zove metrika na M. Kaže se da je uređeni par (M, d) sa svojstvima M1.-M4. metrički prostor.

Definicija 2.2.2. *Izometrija ravnine M je bijektivno preslikavanje* $f\colon M \rightarrow M$ *sa svojstvom* $d(A,B) = d(f(A), f(B))$, *za svaki* $A, B \in M$. *Pojmovi izometrije koji će biti važni za daljnje proučavanje simetrije i grupa ornamenata su osna simetrija, centralna simetrija, translacija i rotacija.*

Definicija 2.2.3. *Kompozicija izometrija* f *i* g *je također izometrija.*

[3] Sophus Lie (1842.-1899.) – norveški matematičar, osnivač teorije grupa transformacija
[4] Emmy Noether (1882.-1935.) – njemačka matematičarka, po njoj nazvan Noetherin teorem koji pokazuje vezu između simetrije i zakona održanja
[5] Iz knjige *Why beauty is truth: a history of symmetry*

Definicija 2.2.4. *Neka je f izometrija. Tada je i njezin inverz f^{-1} također izometrija.*

Definicija 2.2.5. *Kažemo da je izometrija involutorna ako je $f \circ f = id$ i $f \neq id$.*

Definicija 2.2.6. *Involutorna izometrija kojoj su sve točke pravca a fiksne zove se osna simetrija s obzirom na pravac a, u oznaci s_a.*

Definicija 2.2.7. *Izometriju koja se može prikazati kao kompozicija $s_a \circ s_b$ dviju osnih simetrija s_a i s_b zovemo translacija ako su osi simetrije a i b paralelni pravci.*

Definicija 2.2.8. *Izometriju koja se može prikazati kao kompozicija $s_a \circ s_b$ dviju osnih simetrija s_a i s_b zovemo rotacija ako osi simetrije a i b nisu paralelni pravci.*

Definicija 2.2.9. *Centralna simetrija je rotacija $s_a \circ s_b$ za koju su osi simetrije a i b okomiti pravci.*

Definicija 2.2.10. *Izometrija koja se može prikazati u obliku kompozicije $s_g \circ s_b \circ s_a$, gdje je pravac g okomit na pravce a i b zove se klizna simetrija.*

Ove definicije izometrije korisne su kada se aksiomatski gradi geometrija.

2.3. Grupe simetrija

Ovo poglavlje predstavit će teoriju grupa te objasniti što je to grupa simetrija.

Teorija grupa je grana matematike, točnije moderne algebre, koja se bavi proučavanjem grupa i njihovih svojstava. Najprije će se, stoga, objasniti što je to grupa.

Definicija 2.3.1. *Neka je G neprazan skup i $\cdot : G \times G \to G$ binarna operacija. Uređen par $(G,\cdot)$ naziva se grupa ako su zadovoljena sljedeća svojstva: asocijativnost, neutralni element i inverzni element.*

Ono u čemu sada pomaže teorija grupa je to što, pokaže li se da je neki skup grupa, na njega se može primijeniti mnoštvo rezultata koje nije potrebno ponovno dokazivati. Ustvari, proučavanjem grupe proučavaju se simetrije skupova tj. grupe se u mnogo slučajeva pojavljuju kao simetrije nekih matematičkih objekata. Grupe su jedne od temeljnih pojmova suvremene matematike. Kao što je vidljivo, teorija grupa[6] ima veliku ulogu u matematici, ali osim toga ima i veliku primjenu i u fizici i kemiji. Koristi se pri klasifikaciji čestica, opisa kristalnih struktura, nalaženja simetrije u kristalnim rešetkama i sličnom.

Teorem 2.3.2. *Neka je $Iz(F) = \{f \in Iz(M) : f(F) = F\}$, gdje je F figura Euklidske ravnine M. Tada je $(Iz(F), \circ)$ grupa simetrija figure F.*

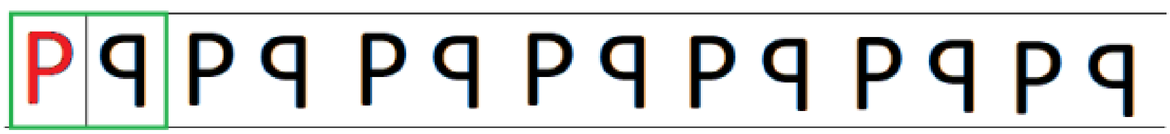
[6] Za ostale primjere iz teorije grupa vidi u [9.]

2.4. Ornament

Naredni dio posvetit će se proučavanju ornamenta. Ornament je ukras tj. dekoracija na traci ili u ravnini, koja ima motive životinja, biljaka, ljudi, geometrije te antropomorfne motive. Ovakvi ukrasi mogu se pronaći na skulpturama, slikama, građevinama, tepisima, tapetama i na mnogim drugim mjestima. Ovaj rad koncentrirat će se na ornament s ponavljajućim uzorkom. Takav ornament bit će zanimljiv za proučavanje jer će se moći klasificirati njegove simetrije. U ovom dijelu rada se proučava uzorak ornamenta.

Uzorak ornamenta je figura u ravnini koja se preslikava sama u sebe pomoću izometrija rotacije, translacije, osne i klizne simetrije. Naravno, postoji i osnovni uzorak tog ornamenta koji se preslikava na traci.

Slijedi prikaz jednog od najjednostavnih uzoraka ornamenta na traci.



Slika 2: Uzorak ornamenta (preuzeto iz [6])

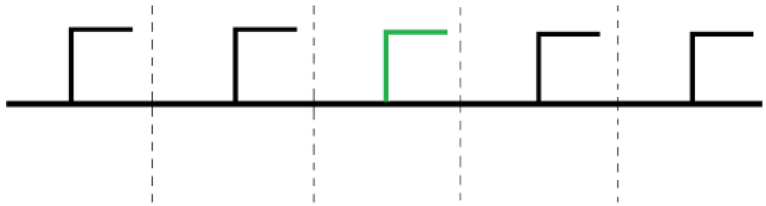
Osnovni uzorak koji se preslikava na prethodnoj slici je slovo P. Uočljivo je da se preslikava osnom simetrijom s obzirom na vertikalnu os koja je okomita na pravce koji određuje traku[7]. Nakon što je P preslikan, u zelenom kvadratu je određeno područje koje se translacijom beskonačno mnogo puta preslikava u smjeru pravaca koji određuju traku. Također, područje unutar zelenog kvadrata određuje minimalni translacijski period. Simetralu pravaca koji određuju traku nazivat će se horizontalna os.

Simetrije koje uzorci ornamenta posjeduju dobivaju se kombiniranjem izometrija. Pa tako ovisno o tome koje izometrije se kombiniraju, razlikovat će se grupe ornamenata. Kao što je već spomenuto, u svakom uzorku će se pojavljivati translacija koja preslikava osnovni uzorak duž horizontalne osi u beskonačnost.

Slijedi prikaz, na primjeru jednog uzorka, na koji način nastaju različiti ornamenti.

Najprije se kreće od translacije obzirom da se ona pojavljuje u svim kombinacijama izometrija.

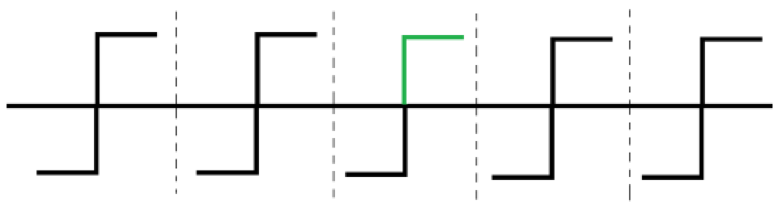
[7] Pravci koji određuju traku su pravci iznad i ispod slova P



Slika 3: Translatacija uzorka (preuzeto iz [6])

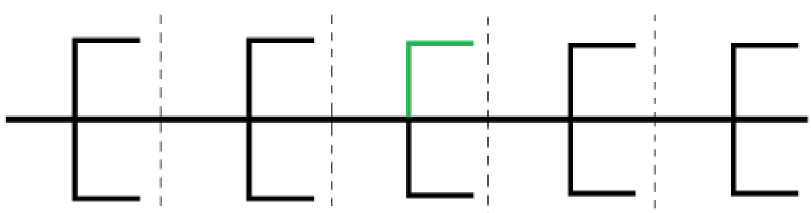
Na slici je vidljivo kako se osnovni uzorak, označen zelenom bojom, preslikava duž horizontalne osi. Uočljivo je da su isprekidanim linijama omeđeni osnovni uzorci koji se translatiraju.

Rotacija se inače promatra od 0° do 360°, no za uzorak ornamenta će biti dopuštena samo rotacija za 180°. Na slici 4 je primjer kako se osnovni uzorak rotira oko horizontalne osi[8] i zatim ga se translatira duž te osi.



Slika 4: Rotacija osnovnog uzorka (preuzeto iz [6])

Potom slijedi osna simetrija. Kao i kod rotacije, preslikava se obzirom na horizontalnu os te zatim translira duž te osi.

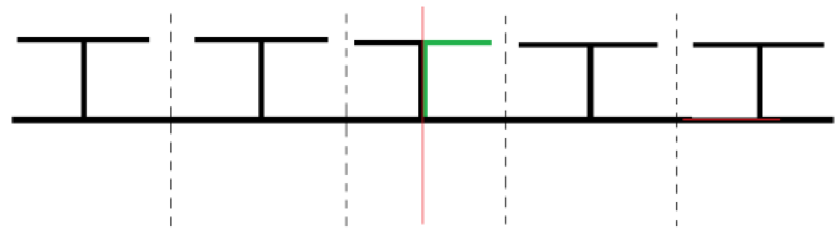


Slika 5: Osna simetrija s obzirom na horizontalnu os (preuzeto iz [6])

Osim što se preslikava s obzirom na horizontalnu os, tako se može preslikavati i s obzirom na vertikalnu osi. Na idućoj slici uočljivo je da vertikalnih osi ima beskonačno mnogo, to jest vertikalna os nije jedinstvena kao što je horizontalna os.

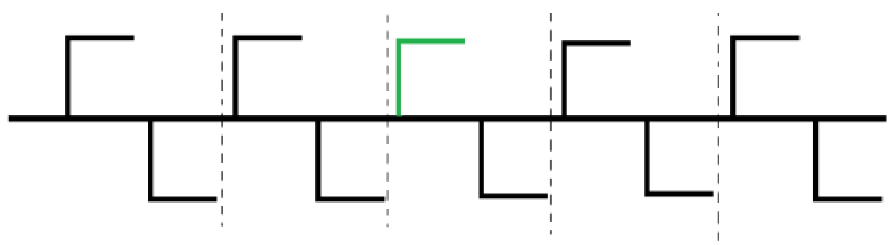
---

[8] Centar rotacije se nalazi na horizontalnoj osi, u točki koja je „sjecište“ zelenog i crnog dijela uzorka.



Slika 6: Osna simetrija s obzirom na vertikalnu os (preuzeto iz [6])

Za kliznu simetriju prethodno je definirano da je ona kompozicija translacije i osne simetrije. Upravo to može se uočiti i na idućoj slici. Naravno, kao i kod ostalih izometrija, nakon što se učini preslika, translira se taj uzorak duž horizontalne osi.



Slika 7: Klizna simetrija osnovnog uzorka (preuzeto iz [6])

Nakon što je prikazano kako sve izometrije djeluju, odnosno preslikavaju osnovni uzorak ornamenta, uvode se oznake tako da se može prepoznati kada se u ornamentu pojavljuje koja izometrija. Oznake su sljedeće:

- t - translacija
- r - rotacija
- h - osna simetrija s obzirom na horizontalnu os
- v - osna simetrija s obzirom na vertikalnu os
- g – klizna simetrija

U nastavku će se kombinirati ove izometrije i tim kombinacija dobit će se grupe ornamenata.

Potrebno je definirati pojam grupe ornamenta.

Definicija 2.4.1. *Grupa ornamenata je grupa simetrija beskonačne ravninske figure čija podgrupa translacija je beskonačna ciklička grupa.*

Kombiniraju li se izometrije koje su do sada definirane, dobija se 16 kombinacija grupa simetrija uzorka ornamenta. To se dobiva na način da se promatra koliko ima jednočlanih, dvočlanih, tročlanih i četveročlanih kombinacija.

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=1+4+6+4+1=16$$

No, ograničit će se na 7 grupa simetrija uzorka ornamenta jer, ako primjerice neka grupa sadrži izometrije *t*, *h* i *v*, onda će sadržavati i izometriju *r*. Stoga se neke kombinacije stapaju u jednu. Idući teorem potvrđuje to da postoji samo 7 grupa simetrija uzorka ornamenta, odnosno da su neke grupe izomorfne.

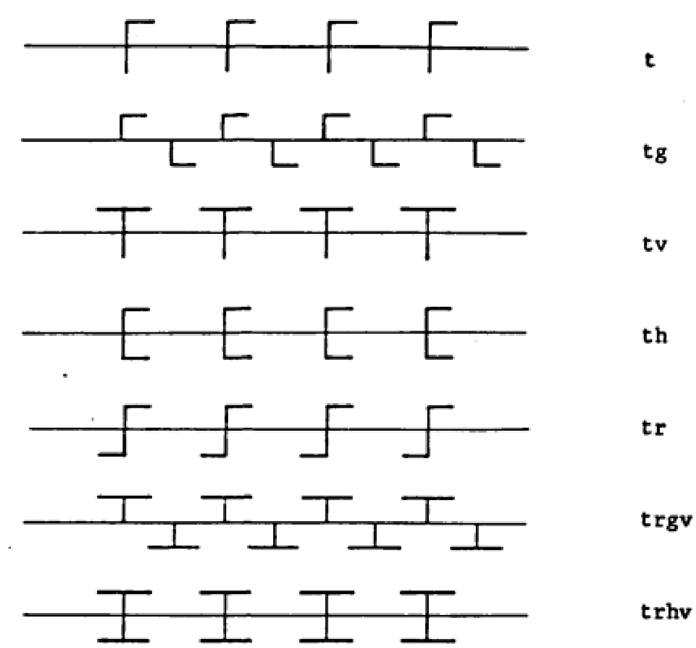
Teorem 2.4.2. *Neka su t, v, r, h i g izometrije i G grupa simetrija sastavljena od tih izometrija i operacije kompozicije. Tada postoji točno sedam različitih grupa ornamenata.*

Dokaz ovog teorema se može pronaći u [6].

Tih sedam grupa ornamenata će biti:

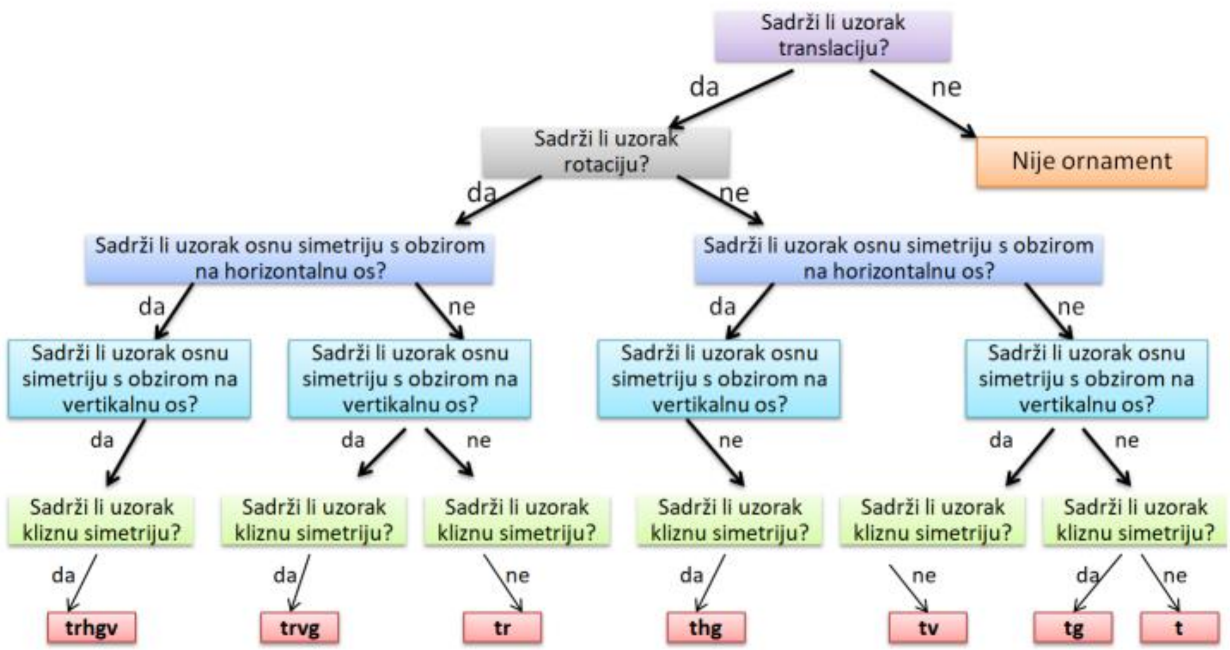
- *t*
- *tg*
- *tv*
- *thg*
- *tr*
- *trvg*
- *trhgv*

Slika 8 prikazuje kako svaka pojedina grupa preslikava osnovni uzorak ornamenta.



Slika 8: 7 grupa ornamenta (preuzeto iz [9])

1. Grupa **t** je grupa koja se sastoji samo od translacije, tj. uzorak se translatira duž horizontalne osi.
2. Grupa **tg** se sastoji od kompozicije translacije i klizne simetrije.
3. Grupa **tv** se sastoji od kompozicije translacije i osne simetrije s obzirom na vertikalnu os.
4. Grupa **thg** se sastoji od kompozicije translacije, osne simetrije s obzirom na horizontalnu os i klizne simetrije.
5. Grupa **tr** se sastoji od kompozicije translacije i rotacije.
6. Grupa **trvg** se sastoji od kompozicije translacije, rotacije, osne simetrije s obzirom na vertikalnu os i klizne simetrije.
7. Grupa **trhvg** se sastoji od svih izometrija, tj. sve se izometrije mogu naći u uzorku ornamenta.

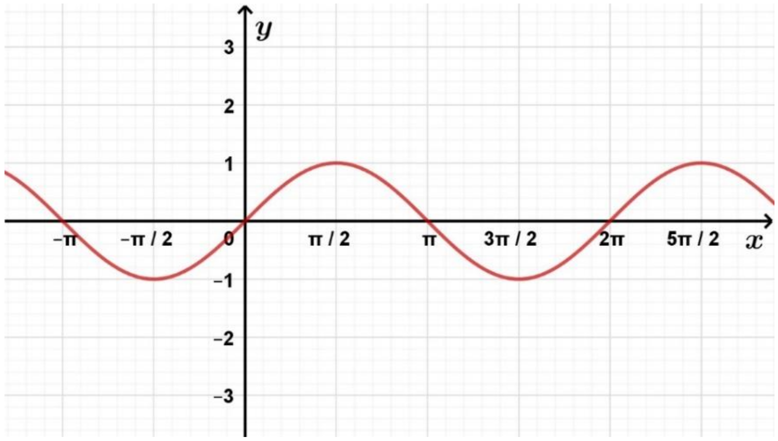


Slika 9: shema za prepoznavanje grupe ornamenta (preuzeto iz [6])

Shema sa prethodne slike pomaže u tome da se prepozna o kojoj se grupi ornamenta radi. Uzimajući neki uzorak i redom prateći što shema kaže, to jest provjeravajući sadrži li uzorak određenu izometriju, vidljivo je kojoj grupi će pripadati određeni ornament.

Primjer 2.4.3. Graf funkcije $f(x) = \sin(x)$

Pomoću Slike 11 na kojoj je prikazana shema za prepoznavanje grupa ornamenta pokušat će se zaključiti kojoj grupi simetrije ornamenata pripada graf funkcije $f(x) = \sin(x)$.



Slika 11: graf funkcije $f(x) = \sin(x)$ (preuzeto iz [20])

Prvo se može uočiti translacija duž x osi za minimalni translacijski period 2Π. Sad se provjerava sadrži li rotaciju. Može se vidjeti da sadrži, gleda li se dio grafa od $(n-1)\pi$ do $n\pi$, za svaki n cijeli broj. Tu se uočava rotacija za 180°. Promatra li se shema dalje, postavlja se pitanje sadrži li osnu simetriju s obzirom na horizontalnu os. Tu izometriju ne sadrži pa se za kraj provjerava sadrži li osnu simetriju s obzirom na neku vertikalnu os. Ovu izometriju sadrži. Može se uočiti ako se promatra dio grafa od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{3\pi}{2}$. Dio grafa na prije spomenutom intervalu se preslikava s obzirom na vertikalnu os koja se nalazi na $\frac{3\pi}{2}$ te se dalje translatira duž x osi. Također sadrži i kliznu simetriju koja se uočava na intervalu π do $2\,\pi$.

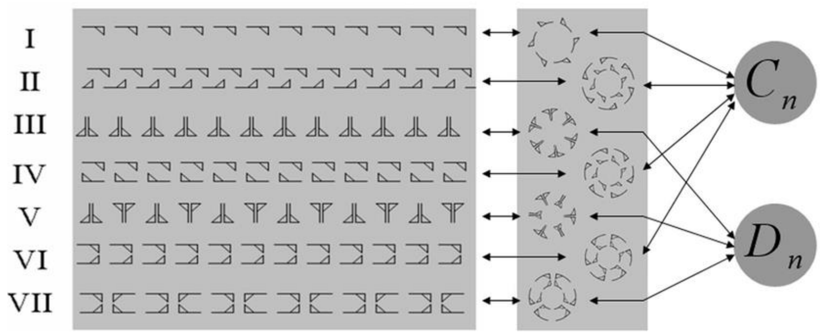
Prateći sliku 11 može se zaključiti da graf funkcije pripada grupi simetrija **trvg**.

2.5. Diedralne i cikličke grupe

Vrlo važna grupa simetrija je simetrija pravilnog poligona $P_n, n \geq 3$. Simetrija nekog poligona P_n čuva udaljenost između svakog para vrhova poligona. Grupe simetrija pravilnih poligona se nazivaju diedralne grupe D_n. Ove se grupe simetrija smatraju grupama ograničenih ravninskih figura. Kada se kaže da su neke figure ograničene i ravninske, misli se na to da su obuhvaćene krugom nekog konačnog radijusa. U radu s ovim grupama, izometrije koje se uzimaju u obzir su zrcaljenje i rotacija.

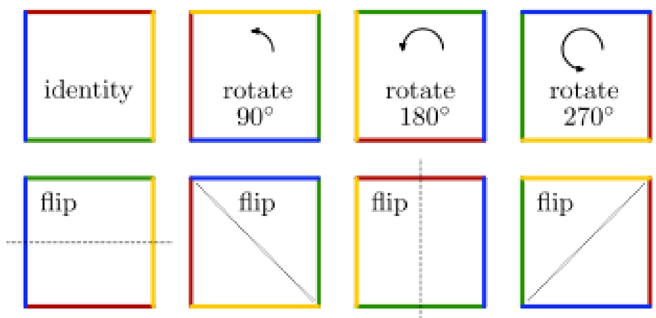
Izrazito zanimljiva podgrupa diedralne grupe D_n je ciklička grupa C_n. Ciklička grupa je grupa generirana jednim elementom. Ciklička grupa se dobiva uzastopnim kompozicijama rotacija koje imaju i diedralne grupe.

Sada će se promatrati poveznica između ornamenta na traci, u ravnini i u prostoru. To je zapravo poveznica ornamenta na traci te diedralne i cikličke grupe.



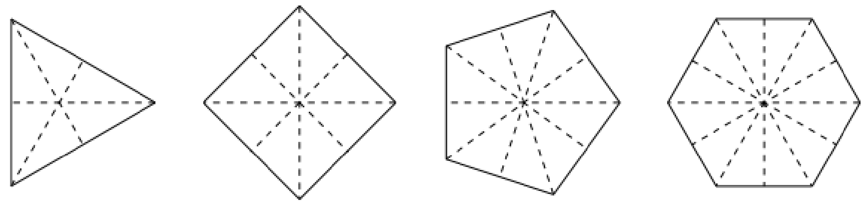
Slika 10: Grupe D_n i C_n (preuzeto iz [21])

Diedralna grupa D_n se sastoji od n rotacijskih i n zrcalnih simetrija.



Slika 11: rotacije i zrcaljenja kvadrata (preuzeto iz [17])

Ove simetrije kvadrata će pripadati diedralnoj grupi. Ipak, moglo bi se postaviti pitanje je li moguće da pripadaju i cikličkoj grupi, obzirom da je ona podgrupa diedralne. No, odgovor će biti ne. Kao što je poznato, ciklička grupa je grupa koja nastaje generiranjem jednog elementa. Postavlja se pitanje mogu li se sve ove simetrije sa slike 11 dobiti kombiniranjem samo jednog elementa. To neće biti moguće. Uzme li se za element bilo koja od rotacija, te rotira li se kvadrat koliko god puta je odabrano, nikada se neće moći dobiti uzorci koji se dobiju zrcaljenjem. Rotacijom se redoslijed boja (crvena, plava, žuta, zelena) uvijek održava, a zrcaljenjem se on mijenja. Rotacija nikad ne može proizvesti zrcalni odraz. Zbog toga kvadrat neće pripadati cikličkoj grupi.



Slika 12: pravilni poligoni (preuzeto iz [3])

Kao što je već spomenuto, diedralne grupe se sastoje od pravilnih poligona. Na slici 12 se vide ti pravilni poligoni. Isprekidane linije predstavljaju liniju refleksije, to jest ako se poligoni preslikaju preko tih linija, vratit će se sami u sebe. Zbog toga pripadaju redom grupama D_3, D_4, D_5 te D_6.

Sada će se promotriti cikličke grupe i njihove simetrije. Cikličke grupe se sastoje samo od rotacija. Grupa C_3 će se sastojati od rotacija od $120°$ i $240°$. Sve ove rotacije sadrži i jednakostranični trokut. Grupa C_4 se sastoji od rotacija od $90°, 180°$ i $270°$. Ono što se može uočiti kod ovih grupa jest to da se svi elementi mogu dobiti kombinacijom samo jednog elementa iz te grupe. Stoga se ove dvije grupe mogu zapisati na donekle drugačiji način. C_3 se sada može zapisati kao:

$$C_3 = \{s^0, s^1, s^2\}.$$

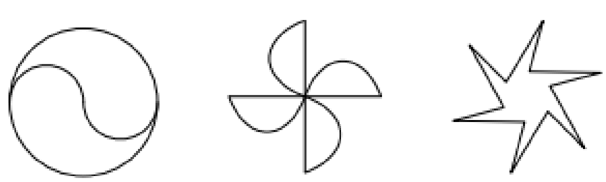
Pri čemu s prestavlja rotaciju od $120°$ te eksponent predstavlja koliko se puta ta rotacija od $120°$ pojavljuje da bi dobili određeni element skupa to jest rotacije od $120°$ i $240°$.

Sukladno tome moguće je i grupu C_4 prikazati kao:

$$C_4 = \{r^0, r^1, r^2, r^3\}.$$

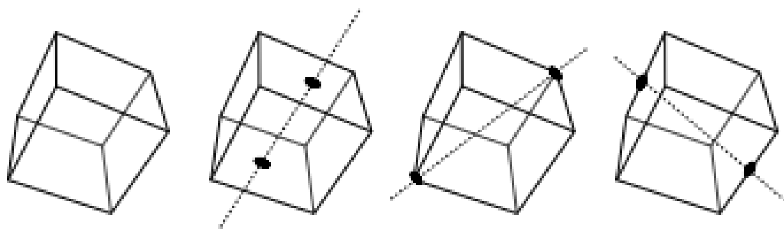
U ovom slučaju će r biti rotacija od $90°$.

Kod cikličkih grupa se pokazalo upravo ono što je bilo važno, a to je da se svi elementi grupe mogu dobiti generiranjem samo jednog elementa.



Slika 13: oblici koje se povezuje redom s grupama C_2, C_4 i C_6 (preuzeto iz [17])

Osim diedralnih i cikličkih grupa, postoje još mnogo kompliciranije, to su grupe simetrija geometrijskih tijela. Do sada je sve rotacije bilo moguće dobiti kombinacijom samo jedne rotacije. Kao što je vidljivo na primjeru cikličke grupe, jednu od rotacija možemo ponoviti jednom, dvaput, triput ili čak niti jednom, i dobit će se ostale rotacije koje pripadaju toj grupi. No, u trodimenzionalnom prostoru to je ipak kompliciranije, a može se uočiti promatrajući iduću sliku.



Slika 14: kocka i tri različite rotacijske osi (preuzeto iz [17])

Prva rotacija je takva da os prolazi kroz središte dvije nasuprotne strane i da se kocka rotira kroz tu os. Rotira se prvo za 90° pa za 180° pa 270° te tako dalje za višekratnike broja 90. Obzirom da ima tri para strana koje su nasuprotne, samim time ima i tri takve rotacijske osi.

Druga vrsta rotacijske osi prolazi kroz nasuprotne vrhove kocke te se kocka rotira za 120° i višekratnike tog broja. Četiri su para nasuprotnih vrhova, stoga ima i četiri rotacijske osi.

Treća vrsta rotacijske osi prolazi središtem nasuprotnih bridova te se kocka rotira za 180° i njegove višekratnike te se na taj način preslika sama u sebe. Šest je parova nasuprotnih bridova, pa tako i šest rotacijskih osi.

Može se uočiti da prvom vrstom rotacije ne možemo nikako dobiti ono što se dobije drugom ili trećom vrstom i obrnuto.

Same po sebi ove simetrije ne čine grupu, ali u kombinaciji čine. Računa li se da kocka ima 24 elementa i uključi li se zrcaljenje, ova grupa bi imala 48 elemenata.

2.6. Kristalografija i kristalne rešetke

Da bi se shvatilo što je kristalografija, prvo treba shvatiti što je mineralogija. Kao što se može naslutiti, to je znanost koja se bavi proučavanjem minerala te njihovih oblika i fizikalnih svojstava te proučavanjem njihovog kemijskog sastava. Također proučava i njihovu rasprostranjenost u litosferi. Veliki dio mineralogije čini proučavanje prirodnih supstanci koje se mogu pronaći u Zemljinoj kori. S vremenom je čovjek shvatio da može i u laboratoriju stvoriti, to jest kreirati, minerale koje nije moguće naći u prirodi te je potreba za njima izuzetno visoka. To se nazivaju sintetički minerali. Mineralogija predstavlja uvod u čitavo carstvo minerala. Kao što se može uočiti, ova znanost je vrlo opširna, stoga ju je potrebno podijeliti u zasebne dijelove i discipline. Pa se tako dijeli na opću mineralogiju, koja obuhvaća kristalografiju, mineralnu kemiju i fiziku, kristalokemiju i minerogeniju, i na sistematsku mineralogiju.

Nakon mineralogije, potrebno je pobliže objasniti pojam kristalografije. Još prije 18. stoljeća, znanstvenici su se bavili proučavanjem minerala te se to proučavanje osnivalo na makroskopskim promatranjima. S vremenom se uočavalo da cijela priroda teži simetriji, a pod prirodom se misli na čovjeka, životinje, biljke te minerale. Tako su dolazili do novih naslućivanja da svi oni vanjski oblici koji su prekrasni, poput pahulje snijega ili čak pravilni geometrijski oblici nekih minerala, zapravo imaju neko unutarnje uređenje koje se odražava tim vanjskim oblikom. Počeli su razmatrati mogućnosti da postoje unutarnje građevne jedinice tih minerala. Tako su minerale koje imaju simetrične oblike nazvali kristalima. Iz te simetrije su potekli i nazivi kristalnih struktura. No, unutarnje uređenje je i dalje ostala nepoznanica.

Robert Hook[9] pobliže se posvetio proučavanju unutrašnje građe. Naime, od strane Engleskog kraljevskog društva bio je zadužen za korištenje optičkog mikroskopa te prepričava svoja promatranja društvu. Tako je proučavao izgled kristala kremena kojeg je promatrao na površini prelomljenog komada još većeg kremena. Uočio je razne oblike na vanjskim plohama poput kvadrata, romba, pravokutnika i sličnih te je pokušao objasniti kako su ti oblici ustvari nastali slaganjem kuglica u male nakupine koje su na taj način stvarale osnovne građevne jedinice. No, prošlo je više od sto godina dok su se Hookove ideje ozbiljno shvatile.

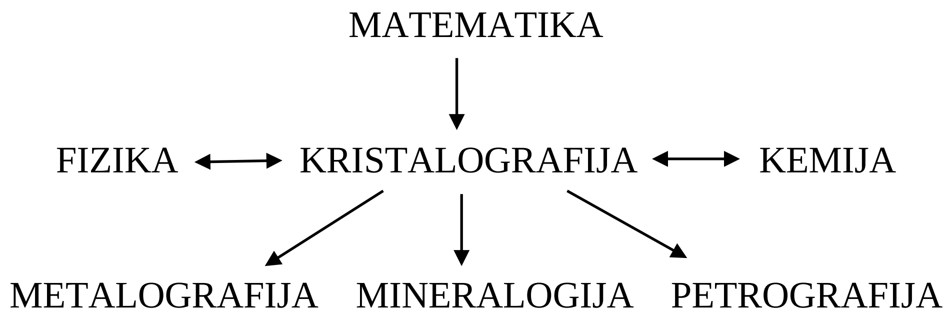
Rene-Just Hauy[10] je bio taj koji je Hookova istraživanja shvatio ozbiljno. Bavio se dubljim istraživanjem građevnih jedinica te ih je nazvao integralnim molekulama u obliku 6 osnovnih oblika. Za Hauya se kaže da je prvi stvarno utvrdio vezu između vanjskog i unutarnjeg oblika kristala.

Auguste Bravais[11] je na sličan način kao i Hauy shvatio kristale. On ih je gledao kao prostorne rešetke. Njegov zaključak je bio da postoji 14 mogućih prostornih rešetki te su onda i te rešetke dobile ime upravo po njemu tj. nazivaju se Bravaisove prostorne rešetke.

Naposlijetku se iz svega toga razvila znanost koja se bavi istraživanjem kristalne strukture te istraživanjem samih kristala, a ta se znanost naziva kristalografija.

[9] Robert Hooke (1635.-1703.) – britanski fizičar, matematičar i izumitelj
[10] Rene-Just Hauy (1743.-1822.) – francuski mineralog i kristalograf
[11] Auguste Bravais (1811.-1863.) – francuski fizičar i mineralog

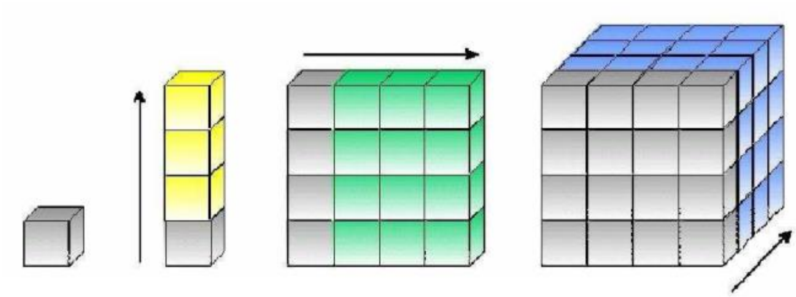
Matematika ima veliki utjecaj na razvoj kristalografije jer se proučavanje kristalnih (prostornih) rešetki ne može zamisliti bez shvaćanja simetrije. Idućom shemom moguće je vidjeti odnos matematike i kristalografije s ostalim znanostima.



Kristali su minerali koji su nastali kristalizacijom. Kristal raste tako da se čestice minerala pravilno poredaju u prostoru, to jest manje strukturne jedinice se pravilno rasporede u trodimenzionalnoj mreži koja se naziva kristalna rešetka. Kristal ipak ne raste jednakom brzinom sa svih strana. Naime, u jednom smjeru raste brže, dok u drugom sporije. No, ono što je bitno jest da u paralelnim smjerovima raste jednakom brzinom, i upravo se i ovdje može uočiti simetrija. Međutim, budući da ne raste svugdje jednako, kristal će se u konačnici razviti u poliedarsko tijelo koje će biti omeđeno ravnim plohama koje će se sječi u bridovima pod određenim kutovima. Kristal se onda shvaća kao homogeno poliedarsko tijelo pravilne unutarnje građe. Čestice unutar tih tijela su poredane u čvorove kristalnih rešetki.

Kod realnih kristala se može uočiti da uvijek sadrže određen broj strukturnih pogrešaka i defekata, dok se kod kristalnih rešetki može reći da se radi s idealnom konstrukcijom. Ta konstrukcija nastaje slaganjem osnovnih jediničnih ćelija tako da se prostor popuni i da se nigdje ne pojavi prazno mjesto. Na taj način dolazi se do definicije idealne tj. Bravaisove rešetke: „Bravaisova rešetka je beskonačni raspored diskretnih točaka s međusobnim rasporedom i orijentacijom takvom da okolina bilo koje točke uvijek izgleda potpuno jednako bez obzira iz koje se točke promatra“.[12]

[12] Iz članka *Osnovne kristalne strukture* [10.]



Slika 15: konstrukcija kristalne strukture iz jedinične ćelije uz ponavljanje po osima x, y i z (preuzeto iz [1])

Prostor kristala se može promatrati i na Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. To se radi na način da se točke Euklidskog prostora interpretiraju kao stvarne pozicije točaka u kristalu.

Promotrit će se sada prostor $\mathbb{R}^n$. Baza neka bude $B = \{a_i\}_{i=1,\dots,n}$ te neka je ishodište $O \in \mathbb{R}^n$.

Potom slijedi definiranje pojmova vektorske i točkovne rešetke, kako bi se shvatilo što je to kristalna rešetka.

Definicija 2.6.1. ***Vektorska rešetka*** *određena bazom B je skup*

$$L = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} m_i a_i : \ m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}\},$$

a ***točkovna rešetka*** *je skup*

$$L' = \{T \ \in \mathbb{R}^n : (\exists v \in L) \ v = \ \overrightarrow{OT}\}.$$

Potom slijedi definiranje jedinične ćelije.

Definicija 2.6.2. ***Jedinična ćelija*** *je skup*

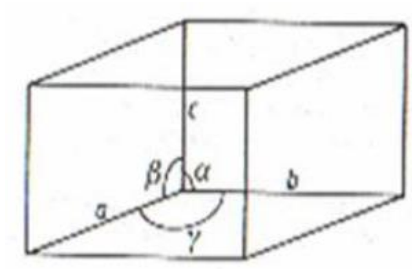
$$U = \{T \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OT} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i : x_1, \dots, x_n \in [0, 1\rangle\}$$

Bravaisova rešetka je zapravo vektorska rešetka.

Pomoću vektora, paralelepiped[13] se može shvatiti kao jedinična ćelija te se onda cijeli kristal može zamisliti kao skup svih translacija te jedinične ćelije za neke cjelobrojne linearne kombinacije vektore te baze.

[13] Paralelepiped je tijelo u n-dimenzionalnom afinom prostoru koje generalizira pojam paralelograma na više dimenzija.

Svakoj ćeliji pripada jedan čvor[14] kristalne rešetke. Kristalna ćelija se definira tako da čvor bude u njezinu središtu. Zatim se iz jednog čvor povlače spojnice prema najbližim susjednim čvorovima. Spojnice se raspolavljaju okomitim ravninama. Strukturna jedinica kristala to jest elementarna ćelija, može biti primitivna[15], ali može sadržavati i veći broj osnovnih čestica.



Slika 16: elementarna ćelija(preuzeto iz [25])

Kako se čvorovi nalaze u pravilnom rasporedu, kristali će se moći transformirati pomoću translacije, refleksije, rotacije i inverzije tako da se vrate u početni položaj.

1. Translacija – rešetka je invarijantna s obzirom na vektorsku rešetku
2. Refleksija – ravnina dijeli kristal na dva dijela, naziva se ravninom simetrije kristala
3. Rotacija – promatraju se zakreti za $360°/p$ oko osi rotacije za koje će kristal biti invarijantan te se tada ta os naziva os p-tog reda, u kristalu mogu postojati samo osi prvog, drugog, trećeg, četvrtog i šestog reda
4. Inverzija – sastavljena je od refleksije i rotacije za $180°$ u ravnini koja je okomita na os rotacije

Elementi simetrije kristala se sijeku u jednoj točki, u središtu kristala.

Kristalne strukture pripadaju jednoj od sedam kristalografskih sustava.

KRISTALOGRAFSKI SUSTAVI	OSI I KUTOVI ELEMENTARNE ĆELIJE	OZNAKE REŠETKI
Kubni	$a = b = c, \quad \alpha = \beta = \gamma = 90°$	P, I, F
Tetragonski	$a = b \neq c, \quad \alpha = \beta = \gamma = 90°$	P, I
Ortorompski	$a \neq b \neq c, \quad \alpha = \beta = \gamma = 90°$	P, C, I, F
Trigonski	$a = b = c, \quad \alpha = \beta = \gamma \neq 90°$	R
Heksagonski	$a = b \neq c, \quad \alpha = \beta = 90°, \gamma = 120°$	P
Monoklinski	$a \neq b \neq c, \quad \alpha = \gamma = 90° \neq \beta$	P, C
Triklinski	$a \neq b \neq c, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$	P

Tablica 1: sedam kristalografskih sustava (preuzeto iz [25])

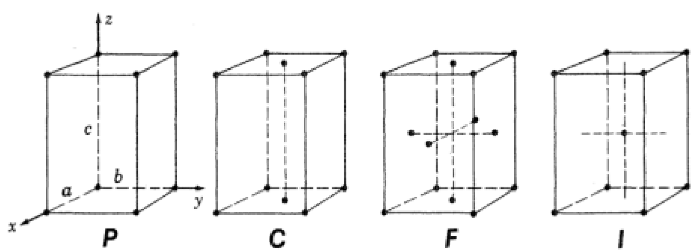
---

[14] Čvorovi kristalne rešetke su atomi ili atomske grupe koji su smješteni u vrhovima ćelije.
[15] Primitivna kristalna rešetka je strukturna jedinica s minimalnim volumenom od koje je izgrađena Bravaisova rešetka.

Kubni sustav odgovara visoko simetričnim kristalima. Oblik tih kristala nalikuje kocki te kako je vidljivo u prethodnom poglavlju kocka sadrži operacije simetrije. Kristal koji je u skladu sa simetrijom kocke pripada ovom kristalnom sustavu. Strukture koje pripadaju tetragonalnom sustavu nalikuju na razvučenu ili stisnutu kocku. Ortorompskom sustavu pripadaju strukture koje imaju romboedričnu osnovu to jest sve tri osi su različitih duljina. Strukture trigonalnog sustava nalikuju na prizme ili piramide s tri strane. Struktura čija baza nalikuje na bazu šesterokuta, pripada heksagonalnom sustavu. U monoklinskom sustavu baza je paralelogram. Zadnji sustav, triklinski, se često miješa sa ortorompskim ili heksagonalnim. Ono što karakterizira ovaj sustav je to što su mu sve osi različitih duljina i svi kutovi su nagnuti.

U zadnjem stupcu je vidljivo da se ti sustavi mogu granati na najviše četiri Bravaisove rešetke. Rešetke se razlikuju po rasporedu čvorova. Prva je jednostavna rešetka (P) koja sadrži čvorove samo u vrhovima paralelepipeda. Točke u kojima se čvorovi nalaze mogu biti središte svih ploha, središte gornje i donje baze te središte paralelepipeda. Ovisno o tome gdje se čvorovi nalaze razlikuju se plošno centrirana (F), bazno centrirana (C) te prostorno centrirana (I) rešetka. Prema tablici 1 je vidljivo da ukupno postoji četrnaest Bravaisovih rešetki.

Na slici 17 je prikazano kako se rešetke razlikuju po rasporedu čvorova.



Slika 17: rompska rešetka (preuzeto iz [10])

Na idućih slikama su vidljivi kristali pojedinih kristalografskih struktura.

Slika 18: halit, kubni sustav (preuzeto iz [27])

Slika 19: azurit monoklinski sustav (preuzeto iz [28])

Slika 20:smaragd heksagonalni sustav (preuzeto iz [29])

2.7. Ravninske kristalografske grupe

U ovom će se poglavlju promatrati ravninske grupe simetrija pomoću kojih kristalografi sistematiziraju kristale. Zato se ove grupe i nazivaju ravninske kristalografske grupe. Osnovnim uzorkom ili figurom se pod djelovanjem elemenata određene grupe izometrija postiže prekrivanje cijele ravnine. U umjetnosti i arhitekturi koriste se keramičke ili staklene pločice s određenim uzorcima, bilo biljnim, animalnim ili apstraktinim, kojim se prekriva cijela ravnina, te se iz tog razloga koristi i izraz popločavanje[16] ravnine. Isto kao kod friz grupa, ili grupa na traci, elementi ravninskih kristalografskih grupa su izometrije ravnine, translacija, rotacija, osna simetrija, te klizna simetrija. No, ovim grupama može se prekriti cijela ravnina. Prekrivanje ravnine sukladnim poligonima koji se ne preklapaju nigdje osim u rubovima dovodi do pojma rešetke. Samo n-terokuti s vrijednostima $n \epsilon \{3, 4, 6\}$ potpuno prekrivaju ravninu. Dakle, rešetka je razapeta vektorima a i b, odnosno cijela ravnina je mreža koja se sastoji od svih linearnih kombinacija $ma + nb$, gdje su $m, n \in \mathbb{Z}$. Ovdje se koristi pet tipova rešetki, a to su: kosa rešetka ili paralelogram, pravokutna rešetka, pravokutna rešetka s centrom, kvadratna i šesterokutna rešetka. Ravninske kristalografske grupe možemo klasificirati prema tipu rešetke i pripadnim izometrijama ravnine, te nam sljedeći teorem daje rezultat klasifikacije grupa do na izomorfizam.

Teorem 2.7.1. *Postoji samo 17 mogućih ravninskih grupa simetrija.*

Dokaz teorema može se pronaći u [13].

Slijedi nekoliko primjera ravninskih kristalografskih grupa iz Escherovih[17] grafika.

Grupa koja sadrži samo translaciju i pripada skupini grupa s kosom rešetkom ili paralelogramom naziva se *p1* grupa. Dakle, osnovni uzorak je paralelogram koji se translatira te se time postiže prekrivanje cijele ravnine.

Slika 21: Escherova grafika, vizualna reprezentacija grupe *p1* (preuzeto iz [4])

[16] Popločavanje ravnine je particija ravnine na disjunktne skupove čija unija daje cijelu ravninu.
[17] M. C. Escher je bio nizozemski grafičar koji je izrađivao matematički nadahnute drvoreze, litografije i mecotinte.

Grupa *p2* sadrži translaciju i rotaciju za 180° (os rotacije je 2. reda). Pripadna rešetka je paralelogram.

Slika 22: Escherova grafika, vizualna reprezentacija grupe *p2* (preuzeto iz [4])

Značajke ostalih grupa će se prikazati sljedećom tablicom.

Naziv	**Osnovni uzorak**	**Stupanj rotacije**	**Klizna simetrija**	**Generirajuće područje uzorka**	**Značajke**
p1	paralelogram	1	/	cijela površina	translacija
p2	paralelogram	2	/	1/2 površine	4 rotacije za 180°
pm	četverokut	1	/	1/2	2 osne simetrije
pmm	četverokut	2	/	1/4	2 osne simetrije
pg	četverokut	1	da	1/2	
pgg	četverokut	2	da	1/4	
pmg	četverokut	2	da	1/4	osi simetrije su paralelne
cm	romb	1	da	1/2	
cmm	romb	2	da	1/4	osi simetrije su okomite
p4	kvadrat	4	/	1/4	
p4m	kvadrat	4	da	1/8	centar rotacije je na osi simetrije
p4g	kvadrat	4	da	1/8	centar rotacije nije na osi simetrije
p3	šesterokut	3	/	1/3	
p3m1	šesterokut	3	da	1/6	centar rotacije je na osi simetrije
p31m	šesterokut	3	da	1/6	
p6	šesterokut	6	/	1/6	
p6m	šesterokut	6	da	1/2	

Tablica 2: klasifikacija ravninskih kristalografskih grupa (preuzeto iz [4])

Nazivi grupa nastaju prema tipu rešetke i elementu grupe. Slova p i c su oznake za jednostavnu rešetku i rešetku čija polja sadrže točku u svojoj nutrini, redom. Slova m i g oznake su za refleksiju i kliznu simetriju, redom. Brojke od 1 do 6 oznake su za red rotacije.

Više o pojedinom grupi u [12].

2.8. Simetrija u prirodi i zlatni rez

S harmonijom i ljepotom se uvijek povezivala simetrija, ona je na neki način bila neophodna za ljepotu. Promatrajući svijet oko sebe, oko će uvijek tražiti simetrične oblike. Promotri li se prirodu izbliza, može se pronaći mnoštvo simetrije te mnogo onoga što teži simetriji. Jedan od jednostavnijih primjera bio bi list drveta - promatrajući njegov oblik može se uočiti da je pravilan. Ima dvije gotovo identične polovice, jedna polovica je zrcaljenje u odnosu na drugu. Osim na listu, simetrija se može uočiti i u drugim dijelovima prirode kao što je gusjenica, leptir ili neki drugi kukac. Simetrija koja se može uočiti kod ovih oblika prirode je zrcalna simetrija. Iako se sada promotrio primjer lista koji je zrcalno simetričan, kod biljaka je jedna druga simetrija karakterističnija. Naime, promotri li se stablo, uočit će se da vrh i dno tog stabla imaju drugačiju ulogu, ali i drugačiji izgled. Stoga, pravci u ravnini koji su okomiti na vertikalu stabla će se vrlo malo razlikovati i kao rezultat će se dobiti vertikalna rotirajuća os. Naravno, biljka ne mora imati specifično samo jedan oblik simetrije. Promatrajući cvijeće uočava se pojava zrcalne simetrije u kombinaciji s rotacijskom simetrijom. Kao i kod stabla, uzme li se za os rotacije vertikala na stabljiku cvijeta te se zatim zarotira taj cvijet, on će se vratiti u samoga sebe, dok se s druge strane mogu proučiti i latice cvijeta koje su kao i list simetrične u odnosu na sebe same. Zanimljivo je to što se u cvjetnom svijetu često, to jest najviše od svih, pojavljuje rotacijska simetrija 5. reda[18]. S druge strane, to se smatra gotovo nemogućim u strukturi nežive prirode. Iako ti organizmi nemaju kristalnu strukturu, u smislu da čak ni pojedinačni organi nemaju kristalnu rešetku, uređene strukture su u njima uvelike zastupljene.

Sagledavajući elemente simetrije kod životinja, promatra se podudaranost njihove veličine, oblika i općenito dijelova tijela. U jednom od najmanjih organizama se može uočiti sferna simetrija koja se smatra i najsavršenijom. Taj organizam je radiolarija[19]. Može se reći da su njegovi dijelovi raspoređeni oko nekog centra sfere te se udaljavaju od njega. Bit je u tome da, ako se provuče bilo koji pravac kroz centar, ova životinja će se prepoloviti na dva identična dijela. Kod morskih zvijezda se može uočiti rotacijska simetrija. Ipak se, kod riba, ptica, sisavaca i općenito drugih većih životinja, uočava jedna od najprisutnijih simetrija, a to je zrcalna, odnosno osna simetrija.

Tajna ljepote, simetrije leži u proporciji zlatnog reza. Pronađe li se nešto iznimno lijepo i skladno, vjerojatno će se otkriti i prisutnost zlatnoga reza. Upravo zato što se zlatni rez može uočiti svugdje, u svim aspektima života, dolazi se do toga da matematika postaje univerzalna znanost. Za neke dvije veličine se kaže da su u zlatnom rezu ako se manji dio odnosi prema većem kao što se veći odnosi prema ukupnom. Na idućoj formuli će se promotriti taj odnos.

[18] Oko osi simetrije se zakreće za $360°/5 = 72°$

[19] Radiolarija je jednostanični eukarikotski organizmi koji čine razred u infracarstvu Rhizaria, koji po nekim a pripadsaju u protoze ili po drugima u kromiste, a ime su dobili po radijalnoj simetriji koja ih obilježava.

$$\frac{m}{M} = \frac{M}{m+M} = \lambda$$

Sada će se uvrstiti $m = M\lambda$:

$$\frac{M\lambda}{M} = \frac{M}{M\lambda + M}$$

$$\frac{M\lambda}{M} = \frac{M}{M(\lambda + 1)}$$

$$\lambda = \frac{1}{\lambda + 1}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

Iz ove se kvadratne jednadžbe dobiva pozitivno rješenje: $\lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339887$

Ovaj će se broj označiti malim grčkim slovom fi, $\varphi = 0.6180339887$.

Zapiše li se sada jednadžba u ovakvom obliku:

$$\frac{M}{m} = \frac{m+M}{M} = \lambda$$

Dobit će se kvadratna jednadžba:

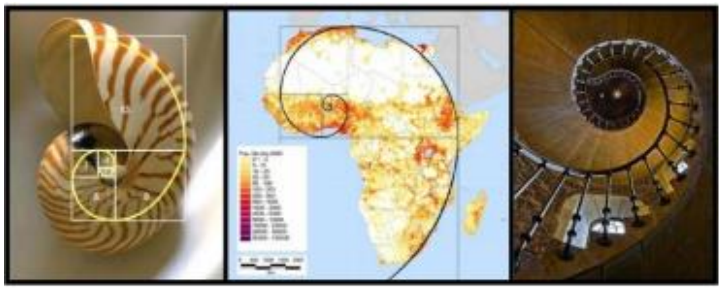
$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \ .$$

Pozitivno rješenje će iznositi:

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$$

Ovaj će se broj označiti velikim grčkim slovom fi, $\Phi = 1.6180339887$ te on predstavlja zlatni rez.

Svugdje se u prirodi i ljudskom životu mogu naći primjera zlatnog reza. Ono što se uočava u prirodi jest zlatna, odnosno logaritamska spirala, koja je utemeljena na zlatnom rezu. Naime, promotri li se spirala i izračuna odnos svakog promjera, dobit će se broj Φ.

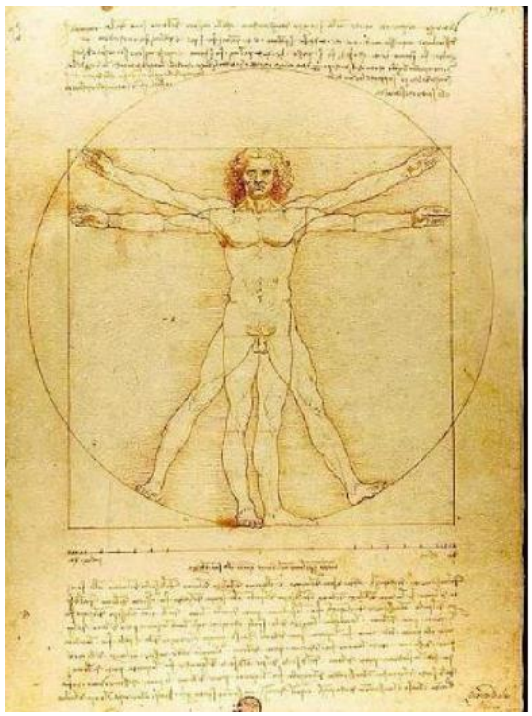


Slika 23: zlatna spirala (preuzeto iz [14])

Zlatni rez se ne pojavljuje samo u obliku spirale. Uzme li se jabuka i prereže na pola, sjemenke će se nalaziti u obliku pentagrama čiji će odsječci biti u odnosu Φ. U pčelinjoj košnici će uvijek biti veći broj ženki. Podijeli li se broj ženki s brojem mužjaka, ponovno će se dobiti broj Φ. Osim toga, u košnici se krije još simetrije. Krije se u proporcionalnim domovima koje pčele grade, a to su saće. Građa tijela životinja je većinom u omjeru zlatnog reza. To je vidljivo na primjeru leptira, puževa, dupina, ptica i još mnogih drugih.

Slika 24: zlatni rez u prirodi (preuzeto iz [14])

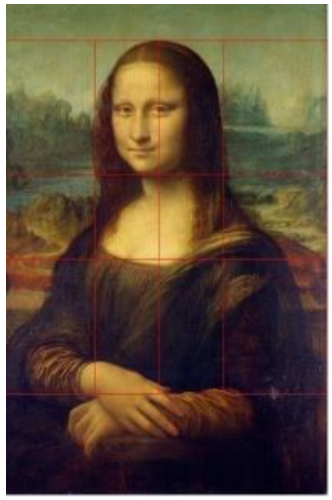
U ljudskom tijelu se također može uočiti proporcija zlatnog reza. Može se uočiti u ljudskom uhu, u otisku prsta, u pramenu kose, u stisnutoj šaci pa i u strukturi ljudskog DNK. Sada će se promotriti dlan. Izmjeri li se duljina jagodice to jest duljina prsta do prvog zgloba i pomnoži li se ta duljina sa Φ, dobit će se točno duljina druga dva dijela tog prsta. Pomnoži li se duljina tog prsta opet sa Φ, dobit će se točno duljina dlana u produžetku prsta. Ako se sada duljina prsta i dlana pomnoži sa Φ, dobit će se duljina podlaktice. Niz se nastavlja te na čudesan način odražava simetriju zlatnog reza. Smatra se da je savršeno ljudsko tijelo u omjeru 1:1.68. Od antičkih vremena se ljepota pokušavala objasniti uz pomoć matematičkih odnosa. Starorimski inženjer Vitruvije je u tome prenjačio, proučavao je proporcije ljudskog tijela te je opsežno pisao o njima. Proporcije tijela koje je uočio su bile iduće: dlan je širine 4 prsta, stopalo je širine 4 dlana, lakat je širine 6 dlanova, visina muškarca je 4 lakta, korak je 4 dlana, duljina raširenih muških ruku jednaka je njegovoj visini, udaljenost od linije kose do brade je 1/10 visine muškarca, udaljenost od vrha glave do brade je 1/8 visine muškarca, maksimalna širina ramena je 1/4 visine muškarca, udaljenost od lakta do vrška ruke je 1/5 visine muškarca, udaljenost od lakta do pazušja je 1/8 visine muškarca, duljina ruke je 1/10 visine muškarca, udaljenost od brade do nosa je 1/3 duljine glave, udaljenost od linije kose do obrva je 1/3 duljine lica, duljina uha je 1/3 duljine lica. U doba renesanse su njegova djela bila izrazito cijenjena te ih je proučavao i Leonardo da Vinci[20]. Iz Leonardovih proučavanja je nastao crtež *Vitruvijevog čovjeka.* Na slici je prikazan lik golog muškarca s ispruženim rukama u dvije pozicije te je upisan u krug i kvadrat. Uz crtež se mogu uočiti i bilješke. Ovaj crtež i bilješke se također nazivaju i zakon proporcija. Ovim crtežom je Leonardo povezao čovjeka i svemir. Također, crtež je imao umjetnički značaj u smislu pravilne reprezentacije ljudskog tijela te stvaranje arhitekture na temelju proporcija tijela.



Slika 25: Vitruvijev čovjek (preuzeto iz [2])

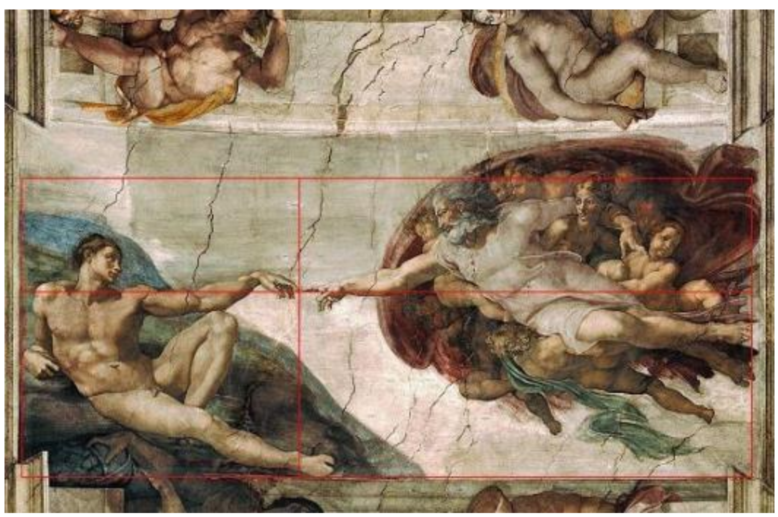
Kako bi postigao ravnotežu i ljepotu, Leonardo se često služio zlatnim rezom. Korištenje zlatnog reza se može uočiti u njegovim djelima *Mona Lisa* i *Posljednja večera*. Leonardo je koristio zlatni rez ili u to vrijeme poznat kao božanski omjer, da bi odredio osnovne proporcije svojih djela. Slika *Mona Lise* se može interpretirati na više načina, no pretpostavlja se da su proporcije izvedene kao na slici 26, iz centra platna.

[20] Leonardo da Vinci (1452.-1519.) – talijanski slikar, arhitekt, izumitelj, glazbenik, kipar, mislilac, matematičar i inženjer



Slika 26: Mona Lisa (preuzeto iz [2])

Michelangelo[21], uzor mnogih generacija umjetnika, također je koristio proporcije simetrije. Smatrali su ga genijem, čovjekom nadljudske moći te božanskog nadahnuća. Jedna od najprepoznatljivijih slika na svijetu, *Stvaranje Adama*, djelo je Michelangela. Ovu sliku čine dva suprotna dijela, a to su desni božanski oval te lijevi zemaljski trokut s Adamom. Božji i Adamov prst se dodiruju u točki zlatnog reza. Između ovih likova postoji simetrija i povezanost.



Slika 27: Stvaranje Adama (preuzeto iz [2])

Osim Leonadra i Michelangela, proporcije zlatnog reza su u svojim djelima koristili i drugi umjetnici poput Raphaela, Botticellia, Seurata, Edwarda te Salvadora Dalija.

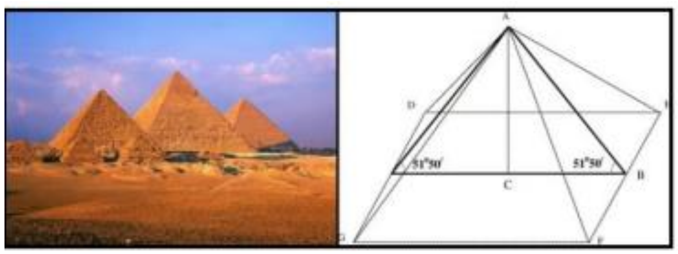
[21] Michelangelo di Lodovico Bounarroti Simoni (1475.-1564.) – renesansni slikar, kipar, arhitekt i pjesnik

U glazbi se za ljepotu zvuka violine smatra da dolazi iz njenog samog dizajna koji je u omjeru zlatnog reza. Kaže se da je središte zakrivljenosti luka u zlatnoj poziciji u odnosu na ukupnu duljinu i veličinu violine. Glazba se može povezati i sa Fibonaccijevim nizom. Naime, tipke klavira su podijeljene u 13 oktava od kojih svaka ima 8 bijelih i 5 crnih tipki.

U sljedećem dijelu će se promotriti jedan primjer zlatnoga reza u graditeljstvu.

Promatrat će se velika piramida u Gizi tj. Keopsova piramida. Ona je najstarija od sedam svjetskih čuda te se njena ljepota krije u zlatnom rezu. Ova piramida je sastavljena od četiri jednakostranična trokuta koji su smješteni na kvadratnu bazu. Stranice kvadrata iznose 230.40m, duljina pola stranice je onda 115.20m (što je duljina katete trokuta sa slike 18), a visina piramide je 146.60m. Na slici 28 se može uočiti pravokutni trokut ABC. Prema Pitagorinom poučku može se izračunati duljina hipotenuze koja će iznositi 186,45m. Podijeli li se sada duljina hipotenuze s duljinom manje katete, dobit će se broj

$\Phi = 1.618.$



Slika 28: piramida u Gizi ili Keopsova piramida (preuzeto iz [14])

Sada će se promotriti ornament u arhitekturi. U klasičnoj arhitekturi antičke Grčke i Rima, ornament je dugačka i uska skulpturalna traka koja se proteže duž skulpture te se koristi u dekorativne svrhe. Nalazi se na vrhu stupova. Na zgradama se koristi dorski arhitektonski red, gdje se ornament sastoji od naizmjeničnih triglifa[22] i metopa[23]. Triglifi se pojavljuju pravilno raspoređeni na ornamentu. Metope su bile korišene kao površine za reljefne ukrase. Triglif se obično isklesao iz istog bloka kao i metopa ili su kamene ploče triglifa imale utore u koje su se umetale metope. Uređujući hram ornamentom, građevina je djelovala simetričnije. U jonskom redu, ornament se protezao oko cijelog hrama te je bio ispunjen reljefima. Uskoro se bogatstvo počinje iskazivati raskošnom dekoracijom. Stoga se počinje koristiti korintski red. On je vrlo sličan jonskom, samo što je još ukrašeniji. Ukrašeniji je na način da stupovi imaju ukrašeniju bazu, a kapiteli su ukrašeni bogatim volutama[24] koji imitiraju lišće akanta[25] (vidljivo na slici 31). Također, Grci strogo koriste pravila rasporeda stupovlja. Rimljani u svojoj arhitekturi preferiraju korištenje korintskog reda, stoga se na

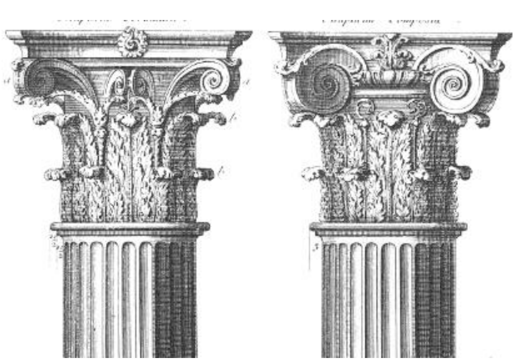
[22] Triglif je kamena ploča izbočenih pravokutnih blokova s tri okomita kanala.
[23] Metopa je prostor između triglifa.
[24] Volute su ukrasi spiralnog oblika na kapitelima korintskih stupova.
[25] Akanta je biljka iz porodice Acanthaceae.

rimskim građevinama najčešće primjećuju biljni motivi. Kasnorimske i renesanse strukture imaju ornament kojem je profil obično konveksna krivulja.

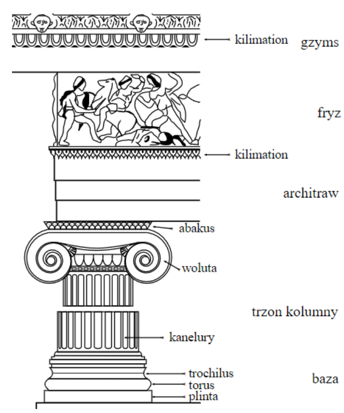
Slika 29: dorski ornament s triglifima iz hrama u Segesti (preuzeto iz [32])

Najpoznatiji primjer ornamenta je onaj na vanjskom zidu hrama Partenona u Ateni koji prikazuje festival, vidljiv na slici 30.

Slika 30: ornament na vrhu grčkog Partenona (preuzeto iz [32])



Slika 31: volute na stupovima korintskog reda (preuzeto iz [35])



Slika 32: detalji volute jonskog stupa (preuzeto iz [36])

3. ZAKLJUČAK

Ono što je ovaj rad nastojao predstaviti jest činjenica da se simetrija pojavljuje svugdje oko čovjeka, u svim pogledima, od matematičkih jednadžbi, preko glazbe, pa sve do ljudskoga tijela. Prikazani su sami počeci koji sežu još od drevnih civilizacija, kada su se pronašla rješenja kvadratnih jednadžbi te kako je iz potrebe da se riješe polinomi 5. stupnja osnovana teorija grupa koja je danas najvažnija grana matematike. Konkretnije, Galois je osnovao teoriju koja se danas naziva Galoisova teorija grupa, a razvoj teorije grupe je krenuo odatle. Može se reći da je Galois pronašao jezik simetrije, a to je teorija grupa. Promatrala se simetrija na traci (ornament), u ravnini (diedralne i cikličke grupe) te naposlijetku i u prostoru, na primjeru kocke te kristalne rešetke. Dokazalo se koliko je zapravo kristalografija bliska matematici, kako i ne može postojati bez nje. Na kraju, kroz zlatni rez ponovno se pokazalo prožimanje simetrije kroz ljudski život i prirodu. Ono što se može zaključiti jest to da se simetrija zaista nalazi svugdje oko čovjeka i prirode te da je sveprožimajuća. Sa sve dubljim proučavanjem simetrije i gdje se ona sve može pronaći, mogla bi se potvrditi shvaćanja Pitagorejaca, a to je da cijeli svijet uistinu jest stvoren po matematičkim pravilima.

LITERATURA

1. Antunović, Anita: *Teorija grupa i kristalografija*, diplomski rad, 2011., URL: http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/ANT17.pdf
2. Bošnjak, Matea: *Zlatni rez u umjetnosti i modi*, završni rad, 2017., URL: https://zir.nsk.hr/islandora/object/ttf%3A367/datastream/PDF/view
3. Conrad, Keith: *Dihedral groups*, URL: https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/dihedral.pdf
4. Čuljak, Maria: *Izometrije u Escherovim radovima*, stručni rad, 2013., URL: https://hrcak.srce.hr/file/169140
5. Demmel, J.W.: *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
6. Dolčić, Martina: *Grupe ornamenata i njihova primjena u nastavi geometrije,* University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2020., URL: https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A9104/datastream/PDF/view
7. Farmer, D.W., *The Power of Symmetry*, URL: https://www.americanscientist.org/article/the-power-of-symmetry
8. Galant, Ana: *Amalie Emmy Noether – Nepoznata matematička genijalka,* URL: https://voxfeminae.net/strasne-zene/amalie-emmy-noether-nepoznata-matematicka-genijalka/
9. Jensen -D.W., Harvey-R.G: *Plane symmetry groups*, DEAN OF THE FACULTY UNITED STATES AIR FORCE ACADEMY COLORADO SPRINGS, 1988.
10. Lisjak, Ivan: *Određivanje kristalne structure*, završni rad,, 2020., URL: https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A9081/datastream/PDF/view
11. Milne, J.S., *Group Theory*, 2021., a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International licence (CC BY-NC-SA 4.0), URL: https://jmilne.org/math/CourseNotes/GT.pdf
12. Nelson A., Newman H., Shipley M. : *17 PLANE SYMMETRY GROUPS*, URL: https://caicedoteaching.files.wordpress.com/2012/05/nelson-newman-shipley.pdf
13. Schwarzenberger, R.L.E. : *The 17 plane symmetry groups*, Mathematical Gazette, 1974.
14. Zlatić, Ana: *Zlatni rez*, stručni članak, 2013., URL: https://hrcak.srce.hr/file/149155
15. Weyl, Herman: *Symmetry*, Princeton university press, 1952.
16. Whitten, Allison: *Galois Groups and the Symmetries of Polynomials*, 2021., URL: https://www.quantamagazine.org/how-galois-groups-used-polynomial-symmetries-to-reshape-math-20210803/
17. *Symmetry and Group Theory*, 2016., URL: https://www2.math.upenn.edu/~mlazar/math170/notes07.pdf

18. *Osnovne kristalne strukture*, URL: http://www.phy.pmf.unizg.hr/~atonejc/2%20NNOsnove%20kristalne%20strukture.pdf
19. *Primjeri definicije simetrije u prirodi*, 2022., URL: https://tigerdoor.ru/bs/instrument/simmetriya-opredelenie-primery-v-prirode-osevaya-simmetriya-v-zhivoi-i/
20. *5.1. Graf i svojstva funkcije sinus*, URL: https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/1e40c8b9-6d5d-45ae-8776-fe29974fbdfc/html/304_graf_i_svojstva_funkcije_sinus.html
21. URL: https://www.researchgate.net/figure/There-is-a-unique-correspondence-between-the-seven-frieze-groups-in-the-frieze-expansion_fig2_45200129
22. *Emmy Noether: Mathematical genius and origintor of Nother's theorem*, URL: https://www.newscientist.com/people/emmy-noether/
23. *Simetrija Lie pointa*, URL: https://bahasa.wiki/bs/Lie_point_symmetry
24. *Amalie Emmy Noether – Nepoznata matematička genijalka,* URL: https://voxfeminae.net/strasne-zene/amalie-emmy-noether-nepoznata-matematicka-genijalka/
25. *Kristalna struktura – PMF*, URL: https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/Kristalni_sustavi.pdf
26. *Kristalni sistemi: pojam i karakterizacija, tipovi, primjeri*, URL: https://bs.warbletoncouncil.org/sistemas-cristalinos-14161
27. *Halit*, URL: https://www.minerals.cz/halit22.html
28. *Tanzanite*, URL: https://www.himsale.com/?product_id=156688386_38
29. *Smaragd*, URL: https://www.mineralienatlas.de/lexikon/index.php/MineralData?mineral=Smaragd
30. *Zlatni rez – čudesna tajna svemira*, 2015., URL: https://sensa.story.hr/Duhovnost-i-emocije/Duhovne-poruke/a5759/Zlatni-rez-cudesna-tajna-svemira.html?page=1
31. *Frieze*, 2021., URL: https://www.designingbuildings.co.uk/wiki/Frieze
32. *Dorski ornament s triglifima iz hrama u Segesti*, URL: https://hr.wikipedia.org/wiki/Triglif#/media/Datoteka:Segesta-bjs-4.jpg
33. *Triglif*, URL: https://hr.wikipedia.org/wiki/Triglif
34. *West pediment of Parthenon in Athens*, URL: https://www.decorarconarte.com/en/p/friso-del-partenon-de-atenas-77x13-cm/
35. *Pregled stupova svih stilova, volute se mogu vidjeti na jonskom i korintskom redu*, URL: https://hr.wikipedia.org/wiki/Voluta#/media/Datoteka:Classical_orders_from_the_Encyclopedie.png
36. *Voluta*, URL: https://hr.wikipedia.org/wiki/Voluta
37. *Grčki hram,* URL: https://hr.wikipedia.org/wiki/Gr%C4%8Dki_hram