

# Djelovanja grupa na stablima

---

**Kovačić, Ivan Lovro**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:196:018398>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-31**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci  
Diplomski studij Diskretna matematika i primjene

# Djelovanja grupa na stablima

Ivan Lovro Kovačić

Diplomski rad

Rijeka, 2023.

Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci  
Diplomski studij Diskretna matematika i primjene

# Djelovanja grupa na stablima

Ivan Lovro Kovačić

**Mentor:** doc. dr. sc. Vera Tonić

Diplomski rad

Rijeka, 2023.

## Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su djelovanja grupa na stablima. Definirat ćemo Fareyev graf i Fareyev kompleks pomoću kojih ćemo uvesti Fareyevo stablo. Navest ćemo primjere djelovanja grupa na Fareyev graf i Fareyevo stablo. Definirat ćemo slobodno djelovanje grupe na stablo i dokazati teorem koji kaže da je grupa  $G$  izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako ona djeluje slobodno na neko stablo  $\mathcal{T}$ . Konstruirat ćemo beskonačno mnogo grupa koje djeluju slobodno na Fareyevo stablo.

## Ključne riječi

Graf, stablo, djelovanje grupe, Fareyev graf, Fareyev kompleks, Fareyevo stablo, slobodna grupa, slobodno djelovanje grupe na stablo.

# Sadržaj

Uvod	1
<b>1 Osnovni pojmovi</b>	<b>2</b>
1.1 Grafovi . . . . .	2
1.2 Djelovanje grupe . . . . .	3
<b>2 Fareyevo stablo</b>	<b>7</b>
2.1 Definicija Fareyevog grafa . . . . .	7
2.2 Konstrukcija Fareyevog grafa . . . . .	11
2.3 Fareyev kompleks . . . . .	15
2.4 John Farey, Sr. . . . .	20
<b>3 Slobodno djelovanje grupe na stablo</b>	<b>23</b>
3.1 Metrika najkraćeg puta . . . . .	23
3.2 Podgrupa generirana podskupom . . . . .	25
3.3 Slobodna grupa . . . . .	26
3.4 Slobodno djelovanje grupe na stablo . . . . .	30
<b>4 Kongruencijske podgrupe</b>	<b>37</b>
4.1 Osnovne definicije . . . . .	37
4.2 Slobodno djelovanje grupa na Fareyevo stablo . . . . .	41
<b>Zaključak</b>	<b>45</b>

# Uvod

Cilj rada je konstruirati Fareyevo stablo, pokazati kako specijalna linearna grupa djeluje na Fareyevo stablo i dokazati teorem koji pokazuje vezu između slobodnog djelovanja grupe na stablo i slobodne grupe. U prvom poglavlju ćemo definirati grafove i pokazati osnovna svojstva grafova koja će nam biti potrebna, te ćemo uvesti djelovanja grupa na skup i na graf. U drugom poglavlju ćemo konstruirati Fareyev graf, te navesti primjer djelovanja grupe na Fareyev graf. Zatim ćemo definirati Fareyev kompleks pomoću kojega ćemo uvesti Fareyevo stablo i navesti primjer djelovanja grupe na Fareyevo stablo. Na kraju drugog poglavlja ćemo pokazati vezu između Fareyevog grafa i Fareyevog niza. U trećem poglavlju ćemo dokazati teorem koji kaže da je grupa  $G$  izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako ona djeluje slobodno na neko stablo  $\mathcal{T}$ . Prije nego što dokažemo taj teorem, uvest ćemo pojmove metrike najkraćeg puta, podgrupe generirane podskupom i slobodne grupe. Na kraju ćemo pokazati vezu između slobodnog djelovanja grupe i Fareyevog stabla. Naime, navest ćemo beskonačno mnogo podgrupa specijalne linearne grupe koje djeluju slobodno na Fareyevo stablo.

# 1. Osnovni pojmovi

## 1.1. Grafovi

U ovom potpoglavlju navodimo osnovne pojmove vezane uz grafove koji će nam trebati [3].

**Definicija 1.1.1** *Graf  $\mathcal{G}$  je uređena trojka  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}(\mathcal{G}), \mathcal{E}(\mathcal{G}), \psi_{\mathcal{G}})$ , gdje je  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  neprazan skup čije elemente zovemo **vrhovi** grafa  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  skup disjunktan s  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  čije elemente zovemo **bridovi** grafa  $\mathcal{G}$  i  $\psi_{\mathcal{G}}$  **funkcija incidencije** koja svakom bridu grafa  $\mathcal{G}$  pridružuje ne uređeni par (ne nužno različitih) vrhova grafa  $\mathcal{G}$ .*

**Definicija 1.1.2** *Vrhovi  $u$  i  $v$  grafa  $\mathcal{G}$  su **susjedni** ako postoji brid  $e$  grafa  $\mathcal{G}$  takav da je  $\psi_{\mathcal{G}}(e) = (u, v)$ . Kažemo da su  $u$  i  $v$  **krajevi** brida  $e$ .*

**Definicija 1.1.3** *Graf  $\mathcal{H}$  je **podgraf** grafa  $\mathcal{G}$  ako je  $\mathcal{V}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G})$ ,  $\mathcal{E}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{G})$  i  $\psi_{\mathcal{H}}$  je restrikcija od  $\psi_{\mathcal{G}}$  na  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ .*

**Definicija 1.1.4** *Šetnja  $W$  u grafu  $\mathcal{G}$  od vrha  $v_0$  do vrha  $v_n$  je niz vrhova*

$$(v_0, v_1, \dots, v_n)$$

*takav da su vrhovi  $v_{i-1}$  i  $v_i$  susjedni, za sve  $i = 1, \dots, n$ . **Duljina** šetnje je broj  $n$ . Ako je  $v_i \neq v_j$ , za sve  $i \neq j$ , onda šetnju zovemo **put**. Šetnja duljine 0, koja se sastoji od samo jednog vrha i nema bridova, zove se **konstantni put**. **Inverzni** put puta  $P : (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$  je put  $P' : (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1, v_0)$ . Za proizvoljne puteve  $P_1 : (u_0, \dots, u_n)$  i  $P_2 : (v_0, \dots, v_n)$  grafa  $\mathcal{G}$ , put  $P_{12} : (u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n)$  zove su **konkatenacija** puteva  $P_1$  i  $P_2$ . Put u grafu  $\mathcal{G}$  od vrha  $u$  do vrha  $v$  kraće zovemo  $(u, v)$ -put u  $\mathcal{G}$ . **Ciklus** je šetnja pozitivne duljine u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti osim početnog i krajnjeg.*

**Definicija 1.1.5** *Vrhovi  $u$  i  $v$  grafa  $\mathcal{G}$  su **povezani** ako postoji  $(u, v)$ -put u  $\mathcal{G}$ .*



**Lema 1.1.6** *Relacija  $\sim$  definirana na skupu vrhova  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  grafa  $\mathcal{G}$  s*

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists(u, v) - \text{put u } \mathcal{G},$$

*je relacija ekvivalencije na  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ .*

**Definicija 1.1.7** *Klase ekvivalencije s obzirom na relaciju  $\sim$  iz leme 1.1.6 zovemo **komponente povezanosti** grafa  $\mathcal{G}$ . Graf  $\mathcal{G}$  je **povezan** ako ima točno jednu komponentu povezanosti.*

**Definicija 1.1.8** *Povezan graf bez ciklusa zove se **stablo**.*

Korisna će nam biti sljedeća karakterizacija stabla.

**Lema 1.1.9** *Graf  $\mathcal{T}$  je stablo ako i samo ako su svaka dva vrha grafa  $\mathcal{T}$  povezana jedinstvenim putem.*

## 1.2. Djelovanje grupe

Sada navodimo osnovne definicije i rezultate vezane za djelovanja grupa [1].

**Definicija 1.2.1** *Grupa  $G$  djeluje na skup  $\Omega$  ako postoji preslikavanje  $\cdot : G \times \Omega \rightarrow \Omega$ , u oznaci  $\cdot(g, \omega) = g \cdot \omega$ ,  $\forall g \in G, \forall \omega \in \Omega$ , takvo da vrijedi:*

$$(1) \quad e \cdot \omega = \omega, \quad \forall \omega \in \Omega, \text{ gdje je } e \in G \text{ neutralni element grupe } G,$$

$$(2) \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot \omega) = (g_1 g_2) \cdot \omega, \quad \forall \omega \in \Omega, \forall g_1, g_2 \in G.$$

*Preslikavanje  $\cdot : G \times \Omega \rightarrow \Omega$  koje zadovoljava svojstva (1) i (2) zovemo **djelovanje grupe  $G$  na skup  $\Omega$** .*

**Definicija 1.2.2** *Neka grupa  $G$  djeluje na skup  $\Omega$  i neka je  $\omega \in \Omega$  proizvoljan. Skup*

$$G \cdot \omega = \{g \cdot \omega | g \in G\}$$

*zove se **orbita** elementa  $\omega$  s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $G$  na skup  $\Omega$ . Za podskup  $S \subseteq \Omega$  i proizvoljan  $g \in G$ , definiramo skup*

$$g \cdot S = \{g \cdot s | s \in S\}$$

*i kraće označavamo s  $gS = g \cdot S$ .*

Navedimo sada jedan primjer djelovanja grupe na skup.

**Primjer 1.2.3** Neka je zadana grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$  (specijalna linearna grupa reda 2 nad  $\mathbb{Z}$ , odnosno grupa svih matrica iz  $M_2(\mathbb{Z})$  s determinantom jednakom 1, i operacijom množenja matrica) i skup  $\mathbb{Z}^2$ . Definirajmo preslikavanje  $\cdot : SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  s

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

(gdje vektor  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  zamjenjuje točku  $(x, y)$ ), za sve  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  i sve  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . Tvđimo da je ovako definirano preslikavanje djelovanje grupe. Naime, preslikavanje  $\cdot$  je dobro definirano, jer je  $(ax + by, cx + dy) \in \mathbb{Z}^2$ , za sve  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  i sve  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . Pokažimo sada da preslikavanje  $\cdot$  zadovoljava svojstva djelovanja grupe. Za neutralni element  $I \in SL(2, \mathbb{Z})$  je

$$I \cdot (x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x, y) = (x + 0, 0 + y) = (x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Za proizvoljne  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  je

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot (x, y)) &= A \cdot \left( \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \cdot (x, y) \right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot (b_1x + b_2y, b_3x + b_4y) = \\ &= (a_1b_1x + a_1b_2y + a_2b_3x + a_2b_4y, a_3b_1x + a_3b_2y + a_4b_3x + a_4b_4y). \end{aligned}$$

Obratno, imamo

$$\begin{aligned} (AB) \cdot (x, y) &= \left( \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right) \cdot (x, y) = \\ &= \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix} \cdot (x, y) = \\ &= (a_1b_1x + a_1b_2y + a_2b_3x + a_2b_4y, a_3b_1x + a_3b_2y + a_4b_3x + a_4b_4y). \end{aligned}$$

Dakle, preslikavanje  $\cdot$  je djelovanje grupe, odnosno grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na skup  $\mathbb{Z}^2$ .

**Definicija 1.2.4** Grupa  $G$  djeluje na graf  $\mathcal{G}$  ako postoji djelovanje  $\cdot : G \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{G})$  koje čuva susjednost vrhova grafa  $\mathcal{G}$ , odnosno za koje vrijedi:

(\*)  $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  su susjedni u  $\mathcal{G} \Leftrightarrow g.u, g.v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  su susjedni u  $\mathcal{G}$ ,  $\forall g \in G$ .

Preslikavanje  $\cdot : G \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{G})$  koje je djelovanje grupe  $G$  na skup  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  i za koje vrijedi svojstvo (\*), zovemo **djelovanje grupe  $G$  na graf  $\mathcal{G}$** .

Ako grupa  $G$  djeluje na graf  $\mathcal{G}$ , onda grupa  $G$  djeluje i na skup bridova  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  grafa  $\mathcal{G}$  (djelovanje grupe  $G$  na  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  i na  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  ćemo oboje označavati s  $\cdot$ ). Naime, definirajmo preslikavanje  $\cdot : G \times \mathcal{E}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{G})$  s

$$g.(u, v) = (g.u, g.v),$$

za sve  $g \in G$  i sve  $(u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ . Tvrdimo da je ovako definirano preslikavanje djelovanje grupe  $G$  na skup  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ . Pokažimo prvo da je preslikavanje  $\cdot$  dobro definirano. Za proizvoljan brid  $(u, v)$  grafa  $\mathcal{G}$  vrijedi da je

$$g.(u, v) = (g.u, g.v)$$

brid grafa  $\mathcal{G}$ , za sve  $g \in G$ , jer kako su  $u$  i  $v$  susjedni vrhovi i grupa  $G$  djeluje na graf  $\mathcal{G}$ , slijedi da su i vrhovi  $g.u$  i  $g.v$  susjedni. Pokažimo sada da su zadovoljena svojstva djelovanja. Za neutralni element  $e \in G$  je

$$e.(u, v) = (e.u, e.v) = (u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}).$$

Za proizvoljan  $(u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$  je

$$\begin{aligned} g_1.(g_2.(u, v)) &= g_1.(g_2.u, g_2.v) = \\ &= (g_1.(g_2.u), g_1.(g_2.v)) = \\ &= ((g_1g_2).u, (g_1g_2).v) = \\ &= (g_1g_2).(u, v), \end{aligned}$$

za sve  $g_1, g_2 \in G$ , jer je  $g_1g_2 \in G$ . Dakle,  $G$  djeluje na  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ .

Neka grupa  $G$  djeluje na graf  $\mathcal{G}$  i neka su  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{H}'$  dva podgrafa grafa  $\mathcal{G}$ . Za neki  $g \in G$ , s  $g\mathcal{H}$  označavamo podgraf grafa  $\mathcal{G}$  čiji je skup vrhova  $g\mathcal{V}(\mathcal{H})$  i skup bridova  $g\mathcal{E}(\mathcal{H})$ . Ako za neki  $g' \in G$  vrijedi  $g'\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(\mathcal{H}')$  i  $g'\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \mathcal{E}(\mathcal{H}')$ , onda ćemo to kraće označavati s  $g\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ .

**Definicija 1.2.5** Neka grupa  $G$  djeluje na graf  $\mathcal{G}$  i neka je  $e \in G$  neutralni element grupe  $G$ . Djelovanje  $\cdot$  grupe  $G$  na graf  $\mathcal{G}$  je **slobodno** ako vrijedi:

- (1)  $g.v \neq v$ ,  $\forall g \in G \setminus \{e\}, \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ ,
- (2)  $g.(u, v) \neq (v, u)$ ,  $\forall g \in G \setminus \{e\}, \forall (u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ .

*Kažemo da grupa  $G$  djeluje slobodno na graf  $\mathcal{G}$  ako postoji slobodno djelovanje grupe  $G$  na graf  $\mathcal{G}$ .*

Primjer djelovanja grupe na graf ćemo dati u idućem poglavlju. Navedimo još Bezoutovu lemu, koja će nam biti potrebna [4].

**Lema 1.2.6** *Neka su  $a, b \in \mathbb{Z}$  takvi da je  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Tada postoje  $x, y \in \mathbb{Z}$  takvi da je*

$$ax + by = \gcd(a, b),$$

*gdje je  $\gcd(a, b)$  najveća zajednička mjera brojeva  $a$  i  $b$ , odnosno najveći broj iz  $\mathbb{N}$  koji dijeli i  $a$  i  $b$ .*

## 2. Fareyevo stablo

Cilj ovog poglavlja je definirati Fareyevo stablo i navesti primjer djelovanja grupe na Fareyevo stablo [1]. Prije nego možemo definirati Fareyevo stablo, moramo definirati Fareyev graf i Fareyev kompleks. Prvo krećemo s potrebnim definicijama i lemapa.

### 2.1. Definicija Fareyevog grafa

**Definicija 2.1.1** *Kažemo da je uređeni par  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  primitivan ako je  $\gcd(m, n) = 1$ .*

Sljedeća karakterizacija će nam biti potrebna kod konstrukcije Fareyevog grafa.

**Lema 2.1.2** *Uređeni par  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  je primitivan ako i samo ako ne postoje  $k > 1$  i  $(m', n') \in \mathbb{Z}^2$  takvi da je  $(m, n) = k(m', n') = (km', kn')$ .*

Lako se pokaže da je relacija  $\sim$  definirana s

$$(m, n) \sim (k, l) \Leftrightarrow \exists x \in \{1, -1\} \text{ takav da je } (m, n) = x(k, l),$$

na skupu svih primitivnih elemenata iz  $\mathbb{Z}^2$ , relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije primitivnog elementa  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ , s obzirom na relaciju ekvivalencije  $\sim$ , je  $[(p, q)] = \{(p, q), -(p, q)\}$ . Zbog preglednosti, koristit ćemo oznaku  $\pm(p, q) = [(p, q)]$ .

**Definicija 2.1.3** *Fareyev graf  $\mathcal{G}$  je graf čiji je skup vrhova*

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \{\pm(m, n) \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ je primitivan}\},$$

*odnosno kvocijentni skup s obzirom na relaciju ekvivalencije  $\sim$  na skupu svih primitivnih elemenata od  $\mathbb{Z}^2$ . Skup bridova  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  dobijemo ovako: Vrhovi  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  su susjedni ako je*

$$\det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \{1, -1\}.$$

Sada navodimo bitan primjer djelovanja grupe na graf koji će nam biti koristan u konstrukciji Fareyevog grafa.

**Primjer 2.1.4** Neka je zadana grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$  i Fareyev graf  $\mathcal{G}$ . Tvrdimo da grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na Fareyev graf  $\mathcal{G}$ .

Pokažimo prvo da  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na skup vrhova  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Definirajmo preslikavanje  $\cdot : SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{G})$  s

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q)) = \pm(ap + bq, cp + dq),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q)) = \pm \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix},$$

za sve  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  i sve  $\pm(p, q) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ . Tvrdimo da je preslikavanje  $\cdot$  djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ . Pokažimo da je preslikavanje  $\cdot$  dobro definirano. Neka je  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  proizvoljna matrica i  $\pm(p, q) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  proizvoljan vrh. Želimo pokazati da je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q)) = \pm(ap + bq, cp + dq) \in \mathcal{V}(\mathcal{G}),$$

a to će vrijediti ako je  $(ap + bq, cp + dq) \in \mathbb{Z}^2$  primitivan element. Pretpostavimo da  $(ap + bq, cp + dq)$  nije primitivan element. Onda postoje cijeli broj  $k > 1$  i element  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  takvi da je  $(ap + bq, cp + dq) = k(m, n)$ . Odatle dobivamo sljedeće dvije jednačbe:

$$ap + bq = km, \tag{2.1}$$

$$cp + dq = kn. \tag{2.2}$$

Množeći jednačbu (2.1) s  $d$  i jednačbu (2.2) s  $-b$  dobijemo

$$apd + bqd = kmd, \tag{2.3}$$

$$-cpb - dqb = -knb. \tag{2.4}$$

Zbrajanjem jednačbi (2.3) i (2.4) dobijemo

$$p(ad - bc) = k(md - nb).$$

Kako je  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  slijedi da je  $ad - bc = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1$ , pa je  $p = k(md - nb)$ . Sada, množeći jednadžbu (2.1) s  $-c$  i jednadžbu (2.2) s  $a$  dobijemo

$$-apc - bqc = -kmc, \quad (2.5)$$

$$cpa + dqa = kna. \quad (2.6)$$

Zbrajanjem jednadžbi (2.5) i (2.6) dobijemo

$$q(ad - bc) = k(na - mc),$$

iz čega slijedi  $q = k(na - mc)$ . Dobili smo

$$(p, q) = k(md - nb, na - mc), k > 1, (md - nb, na - mc) \in \mathbb{Z},$$

a to je u kontradikciji s činjenicom da je  $(p, q)$  primitivan element. Dakle,  $(ap + bq, cp + dq)$  je primitivan element, pa je  $\pm(ap + bq, cp + dq)$  vrh Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ .

Pokažimo sada da preslikavanje  $\cdot$  zadovoljava svojstva djelovanja. Za

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \text{ je}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q)) = \pm(p + 0, 0 + q) = \pm(p, q),$$

za proizvoljan  $\pm(p, q) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ . Neka je  $\pm(p, q) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  proizvoljan vrh i

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \text{ proizvoljne matrice. Tada je}$$

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot (\pm(p, q))) &= A \cdot \left( \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q)) \right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot (\pm(b_1p + b_2q, b_3p + b_4q)) = \\ &= \pm(a_1b_1p + a_1b_2q + a_2b_3p + a_2b_4q, a_3b_1p + a_3b_2q + a_4b_3p + a_4b_4q). \end{aligned}$$

Obratno, imamo

$$\begin{aligned} (AB) \cdot (\pm(p, q)) &= \left( \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right) \cdot (\pm(p, q)) = \\ &= \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q)) = \\ &= \pm(a_1b_1p + a_1b_2q + a_2b_3p + a_2b_4q, a_3b_1p + a_3b_2q + a_4b_3p + a_4b_4q). \end{aligned}$$

Dakle,  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na vrhove  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ .

Pokažimo sada da djelovanje  $\cdot$  čuva susjednost vrhova Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Neka su  $\pm(p, q), \pm(r, s) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  susjedni vrhovi i  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  proizvoljna matrica. Želimo pokazati da su

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q)) = \pm(ap + bq, cp + dq)$$

i

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(r, s)) = \pm(ar + bs, cr + ds)$$

susjedni vrhovi, odnosno da je  $\det \begin{pmatrix} ap + bq & ar + bs \\ cp + dq & cr + ds \end{pmatrix} \in \{1, -1\}$ . Kako su  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  susjedni, vrijedi  $ps - qr = \det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \{1, -1\}$ , pa je

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} ap + bq & ar + bs \\ cp + dq & cr + ds \end{pmatrix} &= (ap + bq)(cr + ds) - (cp + dq)(ar + bs) = \\ &= apcr + apds + bqcr + bqds - cpar - cpbs - dqar - dqbs = \\ &= ps(ad - bc) + qr(cb - ad) = ps - qr \in \{1, -1\}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi da su  $\pm(ap + bq, cp + dq)$  i  $\pm(ar + bs, cr + ds)$  susjedni vrhovi.

Neka su sada  $\pm(p, q), \pm(r, s) \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  vrhovi koji nisu susjedni i

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  proizvoljna matrica. Pretpostavimo da su  $\pm(ap + bq, cp + dq)$  i  $\pm(ar + bs, cr + ds)$  susjedni. Tada je

$$\begin{aligned} \{1, -1\} \ni \det \begin{pmatrix} ap + bq & ar + bs \\ cp + dq & cr + ds \end{pmatrix} &= (ap + bq)(cr + ds) - (cp + dq)(ar + bs) = \\ &= apcr + apds + bqcr + bqds \\ &\quad - cpar - cpbs - dqar - dqbs = \\ &= ps(ad - bc) + qr(cb - ad) = ps - qr = \\ &= \det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi da su  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  susjedni, a to je u kontradikciji s pretpostavkom da  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  nisu susjedni, pa slijedi da  $\pm(ap + bq, cp + dq)$  i  $\pm(ar + bs, cr + ds)$  nisu susjedni. Dakle,  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na Fareyev graf  $\mathcal{G}$ .



## 2.2. Konstrukcija Fareyevog grafa

Sada želimo konstruirati Fareyev graf  $\mathcal{G}$ . Krećemo od vrhova  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(0, 1)$ . Kako je  $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ , vrhovi  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(0, 1)$  su susjedni. Postoje li vrhovi koji su susjedni s  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(0, 1)$ ? Pretpostavimo da je  $\pm(p, q)$  vrh susjedan s  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(0, 1)$ . Tada iz

$$\{1, -1\} \ni \det\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{pmatrix} = q \text{ i } \{1, -1\} \ni \det\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} = p,$$

dobijemo da su vrhovi  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(0, 1)$  susjedni s vrhovima  $\pm(1, 1), \pm(1, -1), \pm(-1, 1)$  i  $\pm(-1, -1)$ , ali kako je  $(1, 1) \sim (-1, -1)$  i  $(-1, 1) \sim (1, -1)$ , slijedi da je  $\pm(1, 1) = \pm(-1, -1)$  i  $\pm(-1, 1) = \pm(1, -1)$ . Dakle, vrhovi  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(0, 1)$  su susjedni s vrhovima  $\pm(1, 1)$  i  $\pm(-1, 1)$ . Na ovaj način smo dobili 4 nova brida Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Pogledajmo brid koji spaja vrhove  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(1, 1)$ . Postoje li vrhovi susjedni s  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(1, 1)$  osim vrha  $\pm(0, 1)$ ? Iz

$$\{1, -1\} \ni \det\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{pmatrix} = q \text{ i } \{1, -1\} \ni \det\begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} = q - p$$

dobijemo da su vrhovi  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(1, 1)$  susjedni s vrhovima  $\pm(0, 1), \pm(2, 1), \pm(-2, -1)$  i  $\pm(0, -1)$ , ali kako je  $(0, 1) \sim (0, -1)$  i  $(2, 1) \sim (-2, -1)$ , slijedi da je  $\pm(0, 1) = \pm(0, -1)$  i  $\pm(2, 1) = \pm(-2, -1)$ . Kako smo već znali da je vrh  $\pm(0, 1)$  susjedan s vrhovima  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(1, 1)$ , dobili smo jedan novi vrh,  $\pm(2, 1)$ , koji je susjedan s vrhovima  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(1, 1)$ . Primjetimo da smo vrh  $\pm(2, 1)$  mogli dobiti zbrajanjem odgovarajućih reprezentanata vrhova  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(1, 1)$ . Naime, za  $(1, 0) \in \pm(1, 0)$  i  $(1, 1) \in \pm(1, 1)$ , dobijemo  $(1, 0) + (1, 1) = (2, 1)$ . Općenito, vrijedi sljedeća lema.

**Lema 2.2.1** *Neka su  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  susjedni vrhovi Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Tada je  $\pm(p+r, q+s)$  vrh Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , susjedan s vrhovima  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$ .*

*Dokaz:* Pokažimo prvo da je  $\pm(p+r, q+s)$  vrh Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Pretpostavimo da  $\pm(p+r, q+s)$  nije vrh Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , odnosno da  $(p+r, q+s) \in \mathbb{Z}^2$  nije primitivan element. Tada postoje cijeli broj  $k > 1$  i  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  takvi da je  $(p+r, q+s) = k(m, n)$ . Odavde dobivamo sljedeće dvije jednačbe:

$$p+r = km, \tag{2.7}$$

$$q+s = kn. \tag{2.8}$$

Množenjem jednadžbe (2.7) sa  $s$  i jednadžbe (2.8) s  $-r$  dobijemo

$$ps + rs = kms, \quad (2.9)$$

$$-qr - sr = -knr. \quad (2.10)$$

Zbrajanjem jednadžbi (2.9) i (2.10) dobijemo

$$k(ms - nr) = ps - qr \in \{1, -1\},$$

jer su  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  susjedni vrhovi. Kako je  $k(ms - nr) \in \{1, -1\}$  i  $k > 1$ , slijedi da je  $(ms - nr) \in \{\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\}$ , ali to je kontradikcija jer je  $(ms - nr) \in \mathbb{Z}$ , a  $\frac{1}{k}$  i  $-\frac{1}{k}$  nisu cijeli brojevi. Dakle,  $(p + r, q + s) \in \mathbb{Z}^2$  je primitivan element, pa je  $\pm(p + r, q + s)$  vrh Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ .

Pokažimo sada da je vrh  $\pm(p + r, q + s)$  susjedan s vrhovima  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$ . Kako se vrijednost determinante ne mijenja zbrajanjem nekog stupca pomnoženog s konstantom nekom drugom stupcu, zbrajanjem prvog stupca determinante  $\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right)$  drugom stupcu, dobijemo

$$\{1, -1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} p & p+r \\ q & q+s \end{bmatrix}\right),$$

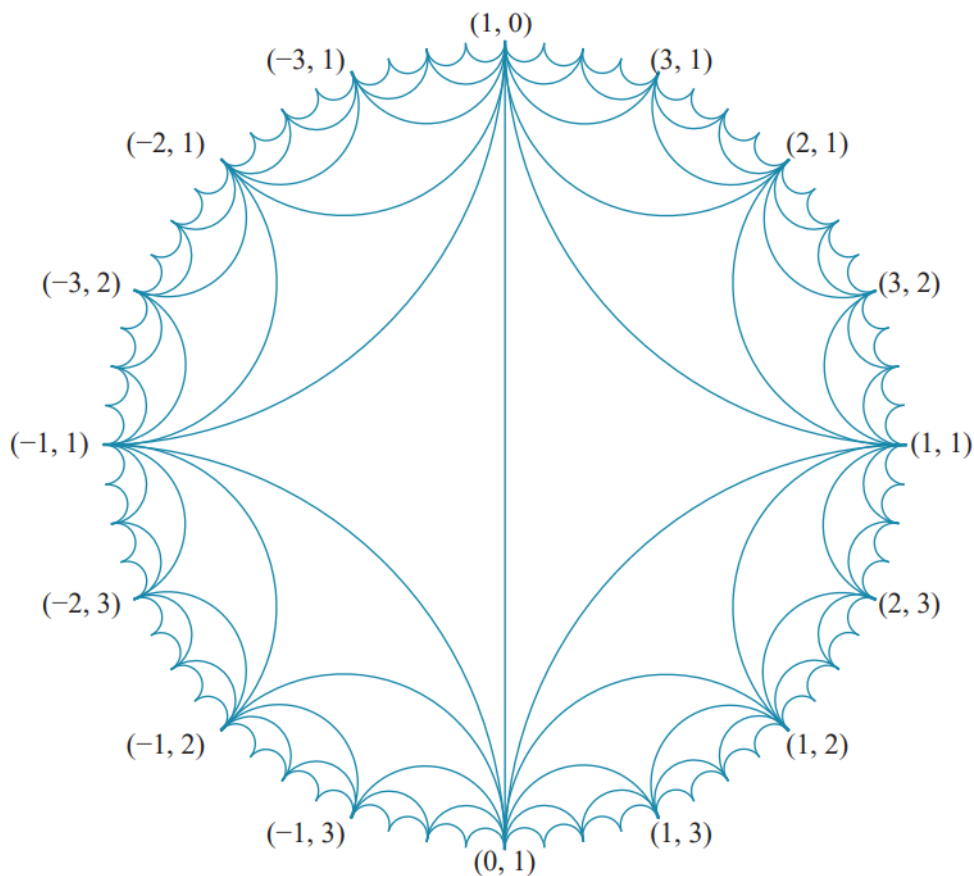
iz čega slijedi da su  $\pm(p, q)$  i  $\pm(p+r, q+s)$  susjedni vrhovi. Zbrajanjem drugog stupca determinante  $\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right)$  prvom stupcu, dobijemo

$$\{1, -1\} \ni \det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} p+r & r \\ q+s & s \end{bmatrix}\right),$$

iz čega slijedi da su  $\pm(r, s)$  i  $\pm(p+r, q+s)$  susjedni vrhovi. ■

Dakle, ako su  $\pm(p, q) = \pm(-p, -q)$  i  $\pm(r, s) = \pm(-r, -s)$  susjedni vrhovi Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , prema prethodnoj lemi slijedi da su  $\pm(p+r, q+s)$ ,  $\pm(p-r, q-s)$ ,  $\pm(-p+r, -q+s)$  i  $\pm(-p-r, -q-s)$  vrhovi susjedni s vrhovima  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$ , ali kako je  $(p+r, q+s) \sim (-p-r, -q-s)$  i  $(-p+r, -q+s) \sim (p-r, q-s)$ , slijedi da je  $\pm(p+r, q+s) = \pm(-p-r, -q-s)$  i  $\pm(-p+r, -q+s) = \pm(p-r, q-s)$ . Odavde slijedi da za svaki novi brid Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , koristeći lemu 2.2.1, dobijemo jedan novi vrh Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , susjedan s krajevima tog brida, tako da zbrojimo odgovarajuće reprezentante krajeva tog brida.

Sada možemo nastaviti s konstrukcijom Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Kao što smo vrh  $\pm(2,1)$  dobili zbrajanjem odgovarajućih reprezentanata vrhova  $\pm(1,0)$  i  $\pm(1,1)$ , na isti način koristeći lemu 2.2.1 dobijemo vrh  $\pm(-2,1)$  susjedan s vrhovima  $\pm(1,0)$  i  $\pm(-1,1)$ , vrh  $\pm(-1,2)$  susjedan s vrhovima  $\pm(-1,1)$  i  $\pm(0,1)$  te vrh  $\pm(1,2)$  susjedan s vrhovima  $\pm(0,1)$  i  $\pm(1,1)$ . Dakle, dobili smo 8 novih bridova Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Sada, koristeći lemu 2.2.1, za svaki od tih 8 bridova dobijemo 8 novih vrhova Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$  i tako dalje nastavimo konstrukciju. Na sljedećoj slici je prikazan peti korak konstrukcije Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ .



Slika 2.1: Fareyev graf  $\mathcal{G}$ .

Tvrdimo da ovom konstrukcijom dobijemo cijeli Fareyev graf  $\mathcal{G}$ . Pokažimo prvo da ovom konstrukcijom dobijemo sve bridove iz vrha  $\pm(1,0)$ . Neka je  $\pm(p,q)$  vrh susjedan s vrhom  $\pm(1,0)$ . Tada je

$$\{1, -1\} \ni \det \left( \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{bmatrix} \right) = q.$$

Dakle, vrhovi susjedni s  $\pm(1,0)$  su oblika  $\pm(p,q)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \{1, -1\}$ . Kako je  $(-p,1) \sim (p,-1)$ , za svaki  $p \in \mathbb{Z}$ , vrhovi susjedni s vrhom  $\pm(1,0)$  su oblika  $\pm(p,1)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Neka je  $\pm(p,1)$ ,  $p > 0$  proizvoljan vrh susjedan s vrhom  $\pm(1,0)$ . Možemo li našom konstrukcijom doći do brida koji spaja vrhove  $\pm(p,1)$  i  $\pm(1,0)$ ? Krećemo od susjednih vrhova  $\pm(1,0)$  i  $\pm(1,1)$ . Koristeći lemu 2.2.1, zbrajanjem reprezentanata  $(1,0) \in \pm(1,0)$  i  $(1,1) \in \pm(1,1)$  dobijemo vrh  $\pm(2,1)$  susjedan s  $\pm(1,0)$ . Ponovno, koristeći lemu 2.2.1, zbrajanjem reprezentanata  $(2,1) \in \pm(2,1)$  i  $(1,0) \in \pm(1,0)$  dobijemo vrh  $\pm(3,1)$  susjedan s  $\pm(1,0)$ . Nastavljajući ovaj postupak, u konačno mnogo koraka ćemo doći do vrha  $\pm(p,1)$  susjednog s vrhom  $\pm(1,0)$ . Neka je sada  $\pm(p,1)$ ,  $p < 0$  proizvoljan vrh susjedan s vrhom  $\pm(1,0)$ . Krećemo od susjednih vrhova  $\pm(1,0)$  i  $\pm(-1,1)$ . Koristeći lemu 2.2.1, zbrajanjem reprezentanata  $(-1,0) \in \pm(1,0)$  i  $(-1,1) \in \pm(-1,1)$  dobijemo vrh  $\pm(-2,1)$  susjedan s  $\pm(1,0)$ . Ponovno, koristeći lemu 2.2.1, zbrajanjem reprezentanata  $(-2,1) \in \pm(-2,1)$  i  $(-1,0) \in \pm(1,0)$  dobijemo vrh  $\pm(-3,1)$  susjedan s  $\pm(1,0)$ . Nastavljajući ovaj postupak, u konačno mnogo koraka ćemo doći do vrha  $\pm(p,1)$  susjednog s vrhom  $\pm(1,0)$ . Dakle, ovom konstrukcijom dobijemo sve bridove iz vrha  $\pm(1,0)$ .

Pokažimo sada da za svaki vrh  $\pm(p,q)$  postoji matrica  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  takva da je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(p,q)) = \pm(1,0).$$

Neka je  $\pm(p,q)$  proizvoljan vrh Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$  i  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  proizvoljna matrica. Iz

$$\pm(1,0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(p,q)) = \pm(ap + bq, cp + dq)$$

dobivamo sljedeće jednačbe

$$ap + bq = 1 \tag{2.11}$$

$$cp + dq = 0 \tag{2.12}$$

Množenjem jednađbe (2.11) s  $-c$  i jednađbe (2.12) s  $a$ , dobijemo

$$-apc - bqc = -c, \quad (2.13)$$

$$cpa + dqa = 0. \quad (2.14)$$

Zbrajanjem jednađbi (2.13) i (2.14) dobijemo

$$q(ad - bc) = -c,$$

iz čega slijedi  $c = -q$ , jer je  $ad - bc = 1$ . Sada, množenjem jednađbe (2.11) s  $d$  i jednađbe (2.12) s  $-b$ , dobijemo

$$apd + bqd = d, \quad (2.15)$$

$$-cpb - dqb = 0. \quad (2.16)$$

Zbrajanjem jednađbi (2.15) i (2.16) dobijemo

$$p(ad - bc) = d,$$

iz čega slijedi da je  $p = d$ . Pronašli smo  $c, d \in \mathbb{Z}$  koji zadovoljavaju jednađbu (2.12). Još moramo pronaći  $a, b \in \mathbb{Z}$  koji zadovoljavaju jednađbu (2.11). Kako je  $(p, q)$  primitivan element, onda je  $\gcd(p, q) = 1$ , pa prema lemi 1.2.6, postoje  $a, b \in \mathbb{Z}$  takvi da je  $ap + bq = 1$ , odnosno zadovoljili smo jednađbu (2.11). Dakle, našom konstrukcijom dobijemo cijeli Fareyev graf  $\mathcal{G}$ .

## 2.3. Fareyev kompleks

Sljedeća definicija je dobivena iz [1].

**Definicija 2.3.1** *Fareyev kompleks  $\mathcal{G}_T$  je Fareyev graf  $\mathcal{G}$  zajedno sa skupom*

$$T = \{\{v_1, v_2, v_3\} | v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}(\mathcal{G}), (v_i, v_j) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}), \forall i \neq j\}.$$

*Skup  $T$  zovemo **skup trokuta** Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ , a elemente  $\{v_1, v_2, v_3\}$  skupa  $T$  **trokutima** Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ . Neka je  $t \in T$  proizvoljan trokut. Za svaki par  $u, v \in t$ ,  $u \neq v$ , brid  $(u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$  zove se **rub** trokuta  $t$ .*

**Lema 2.3.2** *Grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na skup trokuta  $T$  Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ .*

Dokaz: Definirajmo preslikavanje  $\cdot : SL(2, \mathbb{Z}) \times T \rightarrow T$  s

$$A \cdot \{v_1, v_2, v_3\} = \{A \cdot v_1, A \cdot v_2, A \cdot v_3\},$$

za sve  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$  i sve  $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$  (djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ , na  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  i na  $T$  ćemo oboje označavati s  $\cdot$ ). Pokažimo prvo da je preslikavanje  $\cdot$  dobro definirano. Neka su  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$  i  $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$  proizvoljni. Kako su  $v_i, v_j \in \{v_1, v_2, v_3\}$  susjedni vrhovi, za sve  $i \neq j$ , slijedi da su  $A \cdot v_i$  i  $A \cdot v_j$  susjedni vrhovi, za sve  $i \neq j$ , jer  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na Fareyev graf  $\mathcal{G}$ , odnosno čuva susjednost vrhova. Dakle,  $\{A \cdot v_1, A \cdot v_2, A \cdot v_3\}$  je trokut, pa je preslikavanje  $\cdot$  dobro definirano. Pokažimo sada da vrijede svojstva djelovanja. Za  $I \in SL(2, \mathbb{Z})$  imamo da je

$$I \cdot \{v_1, v_2, v_3\} = \{I \cdot v_1, I \cdot v_2, I \cdot v_3\} = \{v_1, v_2, v_3\},$$

za sve  $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$ , jer  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ . Za  $A, B \in SL(2, \mathbb{Z})$  imamo da je

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot \{v_1, v_2, v_3\}) &= A \cdot \{B \cdot v_1, B \cdot v_2, B \cdot v_3\} = \\ &= \{A \cdot (B \cdot v_1), A \cdot (B \cdot v_2), A \cdot (B \cdot v_3)\} = \\ &= \{(AB) \cdot v_1, (AB) \cdot v_2, (AB) \cdot v_3\} = \\ &= (AB) \cdot \{v_1, v_2, v_3\}, \end{aligned}$$

za sve  $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$ . Dakle, preslikavanje  $\cdot$  je djelovanje, odnosno  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na skup  $T$ . ■

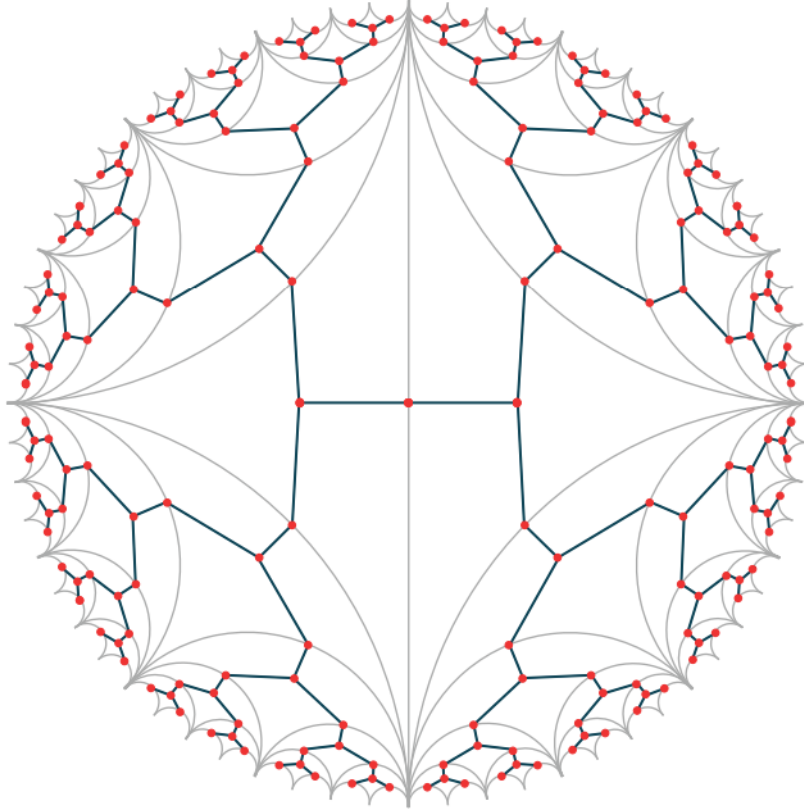
**Definicija 2.3.3** *Neka je  $\mathcal{G}$  Fareyev graf i  $\mathcal{G}_T$  Fareyev kompleks. **Fareyevo stablo**  $\mathcal{T}$  je graf sa skupom vrhova*

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup T$$

*i skupom bridova*

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}) = \{((u, v), t) \mid (u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}), t \in T, u, v \in t\}.$$

Na sljedećoj slici je prikazano Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  dobiveno iz Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ , nacrtano direktno na Fareyevom kompleksu  $\mathcal{G}_T$ .



Slika 2.2: Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ .

**Propozicija 2.3.4** *Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  je zaista stablo.*

*Dokaz:* Za početak, pokazat ćemo da postoji jedinstveni put od vrha  $e = (\pm(1,0), \pm(0,1)) \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$  do proizvoljnog vrha  $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$  u Fareyevom stablu  $\mathcal{T}$ . Neka je  $v$  proizvoljan vrh Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  sadržan u gornjem desnom kvadrantu od  $\mathcal{T}$  i pretpostavimo da je vrh  $v$  dobiven  $n$ -tim korakom konstrukcije Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Pokažimo sada da postoji jedinstveni  $(e, v)$ -put u  $\mathcal{T}$ . Prvim korakom konstrukcije Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , dobijemo vrhove  $e, (\pm(1,0), \pm(1,1)), (\pm(1,1), \pm(0,1)), (\pm(0,1), \pm(-1,1)), (\pm(-1,1), \pm(1,0)) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$  i  $\{\pm(1,0), \pm(-1,1), \pm(0,1)\}, \{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\} \in \mathcal{T}$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ . Kako se vrh  $v$  nalazi u gornjem desnom kvadrantu Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ , krećemo se iz vrha  $e$  u vrh  $\{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\}$ , pa zatim iz vrha  $\{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\}$  u vrh  $(\pm(1,1), \pm(0,1))$ . Drugim korakom konstrukcije Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , dobijemo vrhove  $(\pm(1,0), \pm(2,1)), (\pm(2,1), \pm(1,1)) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$  i  $\{\pm(1,0), \pm(2,1), \pm(1,1)\} \in \mathcal{T}$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ , sadržane u gornjem desnom kvadrantu od  $\mathcal{T}$ . Sada se pomaknemo iz vrha  $(\pm(1,1), \pm(0,1))$

u vrh  $\{\pm(1, 0), \pm(2, 1), \pm(1, 1)\}$  i ako je  $v = \{\pm(1, 0), \pm(2, 1), \pm(1, 1)\}$ , onda smo gotovi. Ako je  $v = (\pm(1, 0), \pm(2, 1))$  ili  $v = (\pm(2, 1), \pm(1, 1))$ , onda se iz vrha  $\{\pm(1, 0), \pm(2, 1), \pm(1, 1)\}$  pomaknemo u vrh  $(\pm(1, 0), \pm(2, 1))$  ili u vrh  $(\pm(2, 1), \pm(1, 1))$  i gotovi smo. Ako  $v$  nije jednak niti jednom od ta dva vrha, onda ako se  $v$  nalazi u djelu Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  između vrhova  $\pm(1, 0)$  i  $\pm(2, 1)$  Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , pomaknemo se iz vrha  $\{\pm(1, 0), \pm(2, 1), \pm(1, 1)\}$  u vrh  $(\pm(1, 0), \pm(2, 1))$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ , a ako se vrh  $v$  nalazi u djelu Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  između vrhova  $\pm(2, 1)$  i  $\pm(1, 1)$  Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , pomaknemo se iz vrha  $\{\pm(1, 0), \pm(2, 1), \pm(1, 1)\}$  u vrh  $(\pm(2, 1), \pm(1, 1))$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ . Na ovaj način nastavimo konstrukciju puta od vrha  $e$  do vrha  $v$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  i nakon  $n$ -tog koraka konstrukcije Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$  ćemo doći do vrha  $v$ . Analogan postupak vrijedi za proizvoljan vrh Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji se nalazi u gornjem lijevom, donjem lijevom ili donjem desnom kvadrantu.

Dakle, pokazali smo da za proizvoljni vrh  $v$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  postoji jedinstveni  $(e, v)$ -put u  $\mathcal{T}$ . Pokažimo sada da za proizvoljne vrhove  $u$  i  $v$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  postoji jedinstveni  $(u, v)$ -put u  $\mathcal{T}$ . Pretpostavimo da su  $u$  i  $v$  proizvoljni vrhovi Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji se ne nalaze u istom kvadrantu od  $\mathcal{T}$ . Tada znamo da postoje jedinstveni  $(u, e)$ -put u  $\mathcal{T}$  i jedinstveni  $(e, v)$ -put u  $\mathcal{T}$ . Konkatencijom ta dva puta dobijemo jedinstveni  $(u, v)$ -put u  $\mathcal{T}$ . Pretpostavimo sada da se vrhovi  $u$  i  $v$  nalaze u istom kvadrantu Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ . Pretpostavimo da je vrh  $u$  dobiven u  $k$ -tom koraku konstrukcije Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , a vrh  $v$  u  $l$ -tom koraku konstrukcije Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$  i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $k \leq l$ . Kako se vrhovi  $u$  i  $v$  nalaze u istom kvadrantu od  $\mathcal{T}$ , onda se jedinstveni  $(e, u)$ -put i jedinstveni  $(e, v)$ -put preklapaju početnim djelom. Ako vrh  $u$  leži na jedinstvenom  $(e, v)$ -putu, onda dio jedinstvenog  $(e, v)$ -puta od vrha  $u$  do vrha  $v$  je jedinstveni  $(u, v)$ -put u  $\mathcal{T}$ . Ako vrh  $u$  ne leži na jedinstvenom  $(e, v)$ -putu, onda postoji vrh  $w$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ , koji je zadnji zajednički vrh jedinstvenog  $(e, u)$ -puta i jedinstvenog  $(e, v)$ -puta. Dio jedinstvenog  $(e, u)$  puta od vrha  $w$  do vrha  $u$  je jedinstveni  $(w, u)$ -put u  $\mathcal{T}$ , jer inače  $(e, u)$ -put nebi bio jedinstven. Isto tako, dio jedinstvenog  $(e, v)$ -puta od vrha  $w$  do vrha  $v$  je jedinstveni  $(w, v)$ -put u  $\mathcal{T}$ . Sada, konkatencijom jedinstvenog  $(u, w)$ -puta i jedinstvenog  $(w, v)$ -puta dobijemo jedinstveni  $(u, v)$ -put u  $\mathcal{T}$ . Dakle, pokazali smo da za proizvoljne vrhove  $u$  i  $v$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  postoji jedinstveni  $(u, v)$ -put u  $\mathcal{T}$ . Sada, koristeći lemu 1.1.9, slijedi da je  $\mathcal{T}$  stablo. ■

Sada navodimo primjer djelovanja grupe na stablo i primjer djelovanja koje nije slobodno.



**Primjer 2.3.5** Neka je zadana grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$ , Fareyev graf  $\mathcal{G}$ , Fareyev kompleks  $\mathcal{G}_T$  i Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ . Tvrđimo da  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ .

Pokažimo prvo da  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na  $\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup T$ . Tvrđimo da je preslikavanje  $\cdot : SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathcal{V}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{T})$  definirano s

$$A \cdot (u, v) = (A \cdot u, A \cdot v), \quad \forall A \in SL(2, \mathbb{Z}), \forall (u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$$

i

$$A \cdot \{v_1, v_2, v_3\} = \{A \cdot v_1, A \cdot v_2, A \cdot v_3\}, \quad \forall A \in SL(2, \mathbb{Z}), \forall \{v_1, v_2, v_3\} \in T,$$

djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na skup  $\mathcal{V}(\mathcal{T})$  (djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  označavamo isto kao i djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyev graf  $\mathcal{G}$  i na skup  $T$ ). Pokažimo da je preslikavanje  $\cdot$  dobro definirano. Za proizvoljan vrh  $(u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ , slijedi da je  $A \cdot (u, v)$  vrh Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ , za sve  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ , jer znamo da  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na Fareyev graf  $\mathcal{G}$ , pa posebno djeluje na bridove  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , odnosno svaki brid se preslikava u brid. Za proizvoljan vrh  $t \in T$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ , slijedi da je  $A \cdot t$  vrh Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ , jer znamo da  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na skup trokuta  $T$  Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ , odnosno svaki trokut se preslikava u trokut. Dakle, preslikavanje  $\cdot$  je dobro definirano. Također, svojstva djelovanja su zadovoljena jer znamo da  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na Fareyev graf  $\mathcal{G}$  i na skup trokuta  $T$  Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ .

Preostaje pokazati da preslikavanje  $\cdot$  čuva susjednost vrhova Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ . Neka su  $(u, w) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$  i  $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$  susjedni vrhovi Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ . Odatle slijedi da je  $(u, w)$  rub trokuta  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , odnosno  $u, w \in \{v_1, v_2, v_3\}$ . Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je  $v_1 = u$  i  $v_2 = w$ . Sada, za proizvoljnu matricu  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ , imamo da je

$$A \cdot \{u, w, v_3\} = \{A \cdot u, A \cdot w, A \cdot v_3\} \ni A \cdot u, A \cdot w,$$

odnosno  $A \cdot (u, w) = (A \cdot u, A \cdot w)$  je rub trokuta  $A \cdot \{u, w, v_3\}$ , iz čega slijedi da su  $A \cdot (u, w)$  i  $A \cdot \{v_1, v_2, v_3\}$  susjedni vrhovi Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ . Neka su sada  $(u, w) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$  i  $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$  vrhovi Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji nisu susjedni i neka je  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$  proizvoljna matrica. Pretpostavimo da su vrhovi  $A \cdot (u, w)$  i  $A \cdot \{v_1, v_2, v_3\}$  susjedni. Onda su

$$(A^{-1} \cdot (A \cdot u), A^{-1} \cdot (A \cdot w)) = ((A^{-1}A) \cdot u, (A^{-1}A) \cdot w) = (u, w)$$

i

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \{v_1, v_2, v_3\}) = (A^{-1}A) \cdot \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

susjedni, ali to je kontradikcija s pretpostavkom da oni nisu susjedni. Dakle,  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ .

**Primjer 2.3.6** Neka je zadana grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$ , Fareyev graf  $\mathcal{G}$ , Fareyev kompleks  $\mathcal{G}_T$ , Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  i djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  definirano kao u primjeru 2.3.5. Turdimo da djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  nije slobodno.

Naime, za proizvoljan vrh  $(\pm(p, q), \pm(r, s)) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  i matricu  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ , imamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q), \pm(r, s)) &= \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q)), \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot (\pm(r, s)) \right) = \\ &= (\pm(-p, -q), \pm(-r, -s)) = \\ &= (\pm(p, q), \pm(r, s)), \end{aligned}$$

jer je  $(-p, -q) \sim (p, q)$  i  $(-r, -s) \sim (r, s)$ . Također, za proizvoljan vrh  $t = \{\pm(p, q), \pm(r, s), \pm(m, n)\} \in T$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  i matricu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \text{ imamo}$$

$$\begin{aligned} A \cdot t &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \{\pm(p, q), \pm(r, s), \pm(m, n)\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot (\pm(p, q)), \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot (\pm(r, s)), \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot (\pm(m, n)) \right\} = \\ &= \{\pm(-p, -q), \pm(-r, -s), \pm(-m, -n)\} = \\ &= \{\pm(p, q), \pm(r, s), \pm(m, n)\}, \end{aligned}$$

jer je  $(-p, -q) \sim (p, q)$ ,  $(-r, -s) \sim (r, s)$  i  $(-m, -n) \sim (m, n)$ . Dakle, matrica  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  fiksira cijelo Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ , odnosno djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  nije slobodno.

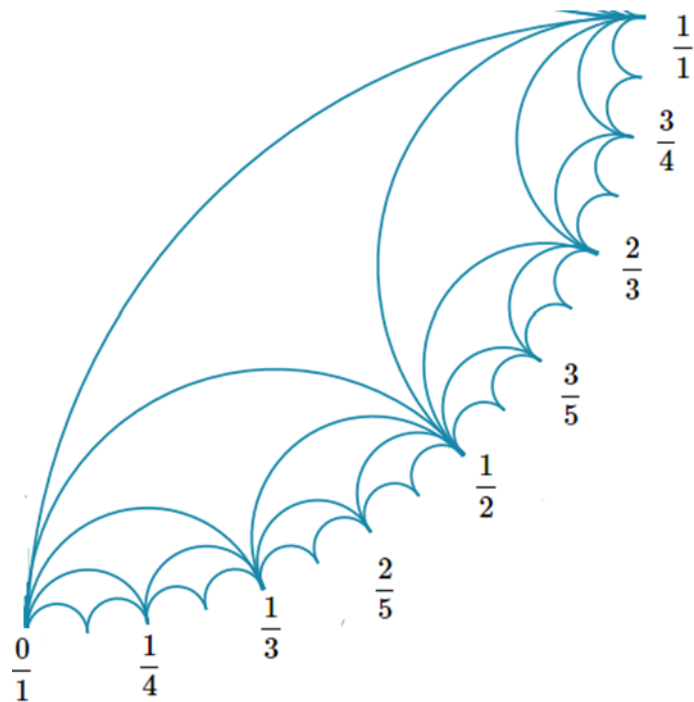
## 2.4. John Farey, Sr.

U ovom potpoglavlju ćemo napisati bilješku o Johnu Fareyu, Sr. i pokazati vezu između primitivnih elemenata iz  $\mathbb{Z}^2$  i razlomaka [1].

Fareyev graf je kroz godine postao bitan primjer grafa koji se koristi u mnogim područjima matematike, uključujući teoriju grupa, teoriju grafova, teoriju brojeva i geometriju, a svoje ime je dobio po Johnu Fareyu, Sr. (24.9.1766.-6.1.1826.). Farey je prvotno bio geolog, ali je napisao preko 250 radova o različitim temama poput geologije, meteorologije, muzike, matematike, pacifizma i raznih drugih. Najpoznatiji doprinos mu je bila bilješka koju je napisao za znanstveni časopis *Philosophical Magazine* u 1816. godini pod nazivom "O čudnom svojstvu vulgarnih razlomaka" ("vulgarni razlomak" je staromodna riječ za razlomak). U toj bilješci je primijetio sljedeće svojstvo razlomaka.

Neka je  $F_n$ , za  $n \in \mathbb{N}$ , skup svih potpuno skraćenih razlomaka s vrijednostima između 0 i 1 čiji nazivnik je manji ili jednak od  $n$ , poredanih po veličini od najmanjeg do najvećeg. Taj  $F_n$  se zove **Fareyev niz stupnja  $n$**  [5]. Neka su  $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}, \frac{c}{d} \in F_n$  takvi da je  $\frac{a}{b}$  prvi lijevi susjed od  $\frac{p}{q}$ , a  $\frac{c}{d}$  prvi desni susjed od  $\frac{p}{q}$ . Tada je  $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$ . Prethodno svojstvo Fareyevog niza zove se **Fareyev zbrajanje** i dokazao ga je Cauchy te pripisao Fareyu. Pokažimo sada vezu između Fareyevog niza i Fareyevog grafa. Pogledajmo donji desni kvadrant Fareyevog grafa i zamjenimo sve vrhove  $\pm(m, n)$  tog kvadranta s razlomcima  $\frac{m}{n}$ . Svi razlomci  $\frac{m}{n}$  dobiveni ovom zamjenom su potpuno skraćeni, jer su svi  $(m, n)$  primitivni elementi iz  $\mathbb{Z}^2$ . Prvim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo vrhove  $\frac{0}{1}$  i  $\frac{1}{1}$  u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa, odnosno dobijemo Fareyev niz  $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$  u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa. Fareyevim zbrajanjem vrhova  $\frac{0}{1}$  i  $\frac{1}{1}$  dobijemo razlomak  $\frac{1}{2}$  koji odgovara vrhu  $\pm(1, 2)$  dobivenom zbrajanjem odgovarajućih predstavnika klasa  $\pm(0, 1)$  i  $\pm(1, 1)$ , odnosno drugim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo Fareyev niz  $F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$ , u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa. Fareyevim zbrajanjem vrhova  $\frac{0}{1}$  i  $\frac{1}{2}$ , te vrhova  $\frac{1}{2}$  i  $\frac{1}{1}$ , dobijemo razlomke  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{2}{3}$  koji odgovaraju vrhovima  $\pm(1, 3)$  i  $\pm(2, 3)$  dobivenim zbrajanjem odgovarajućih predstavnika klasa  $\pm(0, 1)$  i  $\pm(1, 2)$ , te  $\pm(1, 2)$  i  $\pm(1, 1)$ , odnosno trećim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo Fareyev niz  $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$ , u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa. Fareyevim zbrajanjem vrhova  $\frac{0}{1}$  i  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  i  $\frac{2}{3}$ , te  $\frac{2}{3}$  i  $\frac{1}{1}$  dobijemo razlomke  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$  i  $\frac{3}{4}$  koji odgovaraju vrhovima  $\pm(1, 4)$ ,  $\pm(2, 5)$ ,  $\pm(3, 5)$  i  $\pm(3, 4)$  dobivenim zbrajanjem odgovarajućih predstavnika klasa  $\pm(0, 1)$  i  $\pm(1, 3)$ ,  $\pm(1, 3)$  i  $\pm(1, 2)$ ,  $\pm(1, 2)$  i  $\pm(2, 3)$ , te  $\pm(2, 3)$  i  $\pm(1, 1)$ , odnosno četvrtim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka  $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ , u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa, koji sadrži cijeli Fareyev niz  $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ . Isto tako, petim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka  $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$ , u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa, koji sadrži cijeli Fareyev niz  $F_5 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$ .

Nastavljajući ovako dalje, imamo da  $n$ -tim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka koji sadrži cijeli Fareyev niz  $F_n$  u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa. Sljedeća slika prikazuje izdvojen donji desni kvadrant Fareyevog grafa nakon petog koraka konstrukcije, gdje su svi vrhovi  $\pm(m, n)$  zamijenjeni razlomcima  $\frac{m}{n}$ .



Slika 2.3: Donji desni kvadrant Fareyevog grafa.

Na prethodnoj slici vidimo da četvrtim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka  $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ , u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa, koji sadrži cijeli Fareyev niz  $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ .

## 3. Slobodno djelovanje grupe na stablo

Cilj ovog poglavlja je dokazati teorem koji kaže da je grupa  $G$  izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako ona djeluje slobodno na neko stablo  $\mathcal{T}$  [1]. Prije nego što dokažemo taj teorem, uvest ćemo pojmove metrike najkraćeg puta [1], podgrupe generirane podskupom [6] i slobodne grupe [2].

### 3.1. Metrika najkraćeg puta

**Definicija 3.1.1** *Metrički prostor* je uređeni par  $(X, d)$ , gdje je  $X$  skup i  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:

- (1)  $d(x, y) \geq 0$ ,
- (2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- (3)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (4)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,

za sve  $x, y, z \in X$ . Funkcija  $d$  koja zadovoljava svojstva (1)-(4) zove se **metrika** na  $X$ . Svojstvo (4) se zove **nejednakost trokuta**.

**Lema 3.1.2** *Neka je  $\mathcal{G}$  povezan graf. Funkcija  $d: \mathcal{V}(\mathcal{G}) \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}$  takva da je  $d(u, v)$  duljina najkraćeg  $(u, v)$ -puta u  $\mathcal{G}$ , za sve  $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ , je metrika na  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ , odnosno  $(\mathcal{V}(\mathcal{G}), d)$  je metrički prostor.*

Dokaz: Duljina puta između svaka dva vrha  $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  je, po definiciji 1.1.4, veća ili jednaka od nule, odnosno  $d(u, v) \geq 0$ , za sve  $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ . Ako je  $d(u, v) = 0$ , za neke vrhove  $u$  i  $v$ , onda postoji konstantni put između vrhova  $u$  i  $v$ , pa je  $u = v$ . Ako je  $u = v$ , onda je  $d(u, v) = 0$ , jer najkraći put od vrha  $u$  do samog sebe je konstantni put koji sadrži samo vrh  $u$ . Kako je najkraći put od vrha  $u$  do vrha  $v$  put  $P$  čija je duljina  $d(u, v)$  i kako za put  $P$  postoji jedinstveni inverzni put  $P'$  koji je  $(v, u)$ -put i čija duljina je jednaka duljini puta  $P$ , onda najkraći put od  $v$  do  $u$  mora biti duljine  $d(u, v)$ ,

odnosno  $d(u, v) = d(v, u)$ . Još moramo pokazati nejednakost trokuta. Neka su  $u, v, w \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  proizvoljni. Neka je  $P_1$  najkraći put od  $u$  do  $v$  i  $P_2$  najkraći put od  $v$  do  $w$ . Onda je  $P_1P_2$  šetnja od  $u$  do  $w$  duljine  $d(u, v) + d(v, w)$ . Kako je duljina najkraćeg puta od  $u$  do  $w$  jednaka  $d(u, w)$ , onda mora biti  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ . ■

Metrika  $d$  iz prethodne leme zove se metrika **najkraćeg puta** na  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ .

**Definicija 3.1.3** Neka je  $X$  podskup skupa vrhova  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  grafa  $\mathcal{G}$  i  $v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  proizvoljan vrh. Tada je

$$d(v, X) = \min\{d(v, x) | x \in X\},$$

**udaljenost vrha  $v$  do skupa  $X$ .**

Na kraju ovog potpoglavlja navodimo dvije leme koje će nam trebati.

**Lema 3.1.4** Neka grupa  $G$  djeluje na povezani graf  $\mathcal{G}$  i neka je  $d$  metrika najkraćeg puta na  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ . Tada je

$$d(u, v) = d(g.u, g.v), \quad \forall g \in G.$$

*Dokaz:* Tvrdnju ćemo pokazati indukcijom po duljini najkraćeg puta između dva vrha grafa  $\mathcal{G}$ . Neka su  $u$  i  $v$  vrhovi grafa  $\mathcal{G}$  takvi da je  $d(u, v) = 1$ . Onda su  $u$  i  $v$  susjedni vrhovi. Oдавde slijedi da su  $g.u$  i  $g.v$  susjedni, za sve  $g \in G$ , po definiciji 1.2.4 djelovanja grupe na graf, pa je  $d(g.u, g.v) = 1$ ,  $\forall g \in G$ . Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve vrhove  $u$  i  $v$  grafa  $\mathcal{G}$  za koje je  $d(u, v) < n$ . Neka su sada  $u$  i  $v$  vrhovi grafa  $\mathcal{G}$  takvi da je  $d(u, v) = n$  i neka je  $g \in G$  proizvoljan. Nadalje, neka je  $P$  najkraći  $(u, v)$ -put, odnosno put duljine  $n$  od vrha  $u$  do vrha  $v$ . Neka je  $w$  prvi vrh nakon vrha  $u$  koji se nalazi u putu  $P$ . Onda je  $d(w, v) = n - 1$ , pa je prema pretpostavci indukcije  $d(g.w, g.v) = n - 1$ . Kako su  $u$  i  $w$  susjedni, onda je i  $g.u$  susjedan s  $g.w$ , pa je  $d(g.u, g.w) = 1$ . Oдавde slijedi da je  $d(g.u, g.v) = n$ . ■

Svojstvo metrike iz leme 3.1.4 naziva se **lijeva invarijantnost** metrike, ili **invarijantnost na djelovanje s lijeva**.

**Lema 3.1.5** Neka je  $G$  grupa i  $g \in G$  proizvoljan. Funkcija  $\phi_g : G \rightarrow G$  definirana s

$$\phi_g(h) = gh, \quad \forall h \in G,$$

je bijekcija.

Dokaz: Tvrdimo da je funkcija  $\phi_{g^{-1}} : G \rightarrow G$  inverz funkcije  $\phi_g$ . Naime, vrijedi

$$\phi_{g^{-1}}(\phi_g(h)) = \phi_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}gh = h, \quad \forall h \in G,$$

i

$$\phi_g(\phi_{g^{-1}}(h)) = \phi_g(g^{-1}h) = gg^{-1}h = h, \quad \forall h \in G.$$

Dakle,  $\phi_g$  je bijekcija. ■

### 3.2. Podgrupa generirana podskupom

**Lema 3.2.1** *Neka je  $G$  grupa i neka je  $H_j, j \in J$  familija podgrupa od  $G$  gdje je  $J$  neki skup indeksa. Tada je  $\bigcap_{j \in J} H_j \leq G$ .*

Dokaz: Neka su  $h_1, h_2 \in \bigcap_{j \in J} H_j$  proizvoljni. Tada je  $h_1, h_2 \in H_j$ , za sve  $j \in J$ . Kako je  $H_j \leq G$ , za sve  $j \in J$ , vrijedi da je  $h_1 h_2^{-1} \in H_j$ , za sve  $j \in J$ , prema kriteriju za podgrupe. Odavde slijedi da je  $h_1 h_2 \in \bigcap_{j \in J} H_j$ , pa je  $\bigcap_{j \in J} H_j \leq G$ , prema kriteriju za podgrupe. ■

**Definicija 3.2.2** *Neka je  $G$  grupa i  $S$  neprazan podskup od  $G$ . Podgrupa*

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \leq G, S \subseteq H} H$$

*zove se **podgrupa od  $G$  generirana skupom  $S$** .*

Prema lemi 3.2.1,  $\langle S \rangle$  je zaista podgrupa grupe  $G$ , za svaki neprazan  $S \subseteq G$ .

**Definicija 3.2.3** *Neprazan podskup  $S$  grupe  $G$  za koji je  $G = \langle S \rangle$  zove se **skup generatora grupe  $G$** . Skup generatora  $S$  grupe  $G$  je **simetričan** ako je  $s^{-1} \in S$ , za svaki  $s \in S$ .*

**Lema 3.2.4** *Neka je  $(G, \cdot)$  grupa i  $S$  neprazan podskup od  $G$ . Tada je*

$$\langle S \rangle = \{s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in S \text{ ili } s_i^{-1} \in S, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Dokaz: Neka je

$$K = \{s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in S \text{ ili } s_i^{-1} \in S, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Za  $n = 1$  dobijemo da su svi elementi skupa  $S$  u  $K$ , odnosno  $S \subseteq K$ . Pokažimo sada da je  $K \subseteq \langle S \rangle$ . Po definiciji je  $\langle S \rangle = \bigcap_{H \leq G, S \subseteq H} H$ . Svaka podgrupa  $H$  koja sadrži skup  $S$  sadrži i inverze elemenata iz  $S$ , pa onda i konačne produkte elemenata iz  $S$  i njihovih inverza. Dakle, svaka podgrupa  $H$  koja sadrži skup  $S$  sadrži i skup  $K$ , pa onda i presjek svih podgrupa koje sadrže  $S$  sadrži  $K$ , odnosno  $\langle S \rangle$  sadrži  $K$ . Ako pokažemo da je  $K$  podgrupa od  $G$ , onda smo gotovi, jer je  $K \leq \langle S \rangle$ , a kako  $K$  sadrži  $S$ , on sudjeluje u presjeku  $\bigcap_{H \leq G, S \subseteq H} H$ , pa je  $\langle S \rangle \leq K$ , iz čega slijedi da je  $\langle S \rangle = K$ . Pokažimo da je  $K \leq G$ . Neka su  $s_1 \cdots s_n, s'_1 \cdots s'_m \in S$  proizvoljni. Onda je  $s_i \in S$  ili  $s_i^{-1} \in S$ , za sve  $i = 1, \dots, n$ , te  $s'_j \in S$  ili  $s'_j{}^{-1} \in S$ , za sve  $j = 1, \dots, m$ . Tada je

$$(s_1 \cdots s_n) \cdot (s'_1 \cdots s'_m)^{-1} = s_1 \cdots s_n \cdot s_m^{-1} \cdots s_1^{-1},$$

pri čemu su  $s_i \in S$  ili  $s_i^{-1} \in S$ , za sve  $i = 1, \dots, n$ , te  $s'_j{}^{-1} \in S$  ili  $s'_j = (s'_j{}^{-1})^{-1} \in S$ , za sve  $j = 1, \dots, m$ , pa je produkt s desne strane jednakosti sadržan u  $K$ . Dakle, prema kriteriju za podgrupe,  $K$  je podgrupa od  $G$ . ■

### 3.3. Slobodna grupa

Neka je  $X$  neprazan skup i  $X^{-1}$  skup disjunktan s  $X$  takav da je  $|X| = |X^{-1}|$ . Odaberimo bijekciju sa  $f : X \rightarrow X^{-1}$  i za svaki  $x \in X$ , element  $f(x) \in X^{-1}$  označimo s  $x^{-1}$ . Neka je  $\{1\}$  skup disjunktan s  $X \cup X^{-1}$ .

**Definicija 3.3.1** *Riječ na  $X$  je niz  $(a_1, a_2, \dots)$ , gdje su  $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ , za sve  $i \in \mathbb{N}$ , takav da postoji  $n \in \mathbb{N}$  za koji je  $a_k = 1$ , za sve  $k \geq n$ . Niz  $(1, 1, \dots)$  zove se **prazna riječ na  $X$**  i kraće ju označavamo s  $1$ .*

**Definicija 3.3.2** *Riječ  $(a_1, a_2, \dots)$  nad  $X$  je **reducirana** ako vrijedi:*

- 1) *Ako je  $a_i = x$ , onda je  $a_{i+1} \neq x^{-1}$ , za sve  $i \in \mathbb{N}$  i sve  $x \in X$ ,*
- 2) *ako je  $a_i = x^{-1}$ , onda je  $a_{i+1} \neq x$ , za sve  $i \in \mathbb{N}$  i sve  $x \in X$ ,*
- 3) *ako je  $a_k = 1$ , za neki  $k \in \mathbb{N}$ , onda je  $a_i = 1$ , za sve  $i \geq k$ .*

*Skup svih reduciranih riječi nad  $X$  označavamo s  $F(X)$ .*

Svaka neprazna reducirana riječ nad  $X$  je oblika  $(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \dots, x_n^{\lambda_n}, 1, 1, \dots)$ , gdje su  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in X$  i  $\lambda_i \in \{1, -1\}$ , za sve  $i = 1, \dots, n$ , pri čemu je  $x^1 = x$ ,  $\forall x \in X$ . Zbog toga ćemo proizvoljnu nepraznu reduciranu riječ  $(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \dots, x_n^{\lambda_n}, 1, 1, \dots) \in F(X)$  kraće označavati s  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ . Prema



definiciji jednakosti dva niza, dvije neprazne reducirane riječi  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$  i  $y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$  su jednake ako i samo ako je  $m = n$ ,  $x_i = y_i$ ,  $\lambda_i = \delta_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Odavde slijedi da je preslikavanje  $i : X \rightarrow F(X)$  definirano s  $i(x) = x^1 = x$  injektivno, pa identificiramo  $X$  sa slikom  $i(X) \subseteq F(X)$  i smatramo da je  $X$  podskup od  $F(X)$ .

**Propozicija 3.3.3** *Neka su  $x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}$  i  $y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n}$  neprazne reducirane riječi nad  $X$ . Definiramo preslikavanje  $\cdot$ , za  $m \leq n$ , s*

$$(x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}) \cdot (y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n}) = \begin{cases} x_1^{\lambda_1} \dots x_{m-k}^{\lambda_{m-k}} y_{k+1}^{\delta_{k+1}} \dots y_n^{\delta_n} & , k < m \\ y_{m+1}^{\delta_{m+1}} \dots y_n^{\delta_n} & , k = m < n, \\ 1 & , k = m = n \end{cases}$$

gdje je  $k \in \{0, \dots, m\}$  najveći cijeli broj takav da je  $x_{m-j}^{\lambda_{m-j}} = y_{j+1}^{-\delta_{j+1}}$ , za sve  $j = 0, \dots, k-1$ . Za  $m > n$ , preslikavanje  $\cdot$  definiramo s

$$(x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}) \cdot (y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n}) = \begin{cases} x_1^{\lambda_1} \dots x_{m-k}^{\lambda_{m-k}} y_{k+1}^{\delta_{k+1}} \dots y_n^{\delta_n} & , k < n \\ x_{m-n}^{\lambda_{m-n}} \dots x_m^{\lambda_m} & , k = n < m, \end{cases}$$

gdje je  $k \in \{0, \dots, n\}$  najveći cijeli broj takav da je  $x_{m-j}^{\lambda_{m-j}} = y_{j+1}^{-\delta_{j+1}}$ , za sve  $j = 0, \dots, k-1$ . Za praznu riječ 1, preslikavanje  $\cdot$  definiramo s

$$1 \cdot w = w \cdot 1 = w,$$

za sve  $w \in F(X)$ . Onda je  $(F(X), \cdot)$  grupa i  $F(X) = \langle X \rangle$ .

Dokaz: Neka su  $x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}$  i  $y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n}$  neprazne reducirane riječi nad  $X$ .  $F(X)$  je zatvoren s obzirom na operaciju  $\cdot$ , jer je preslikavanje  $\cdot$  definirano tako da se  $x$  i  $x^{-1}$  pokrate ako su oni susjedni u riječi  $(x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}) \cdot (y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n})$ , pa je rezultat reducirana riječ. Prazna riječ 1 je neutralni element, jer je  $1 \cdot w = w \cdot 1 = w$ , za sve  $w \in F(X)$ . Za svaku nepraznu reduciranu riječ  $x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}$  postoji neprazna reducirana riječ  $x_m^{-\lambda_m} \dots x_1^{-\lambda_1}$  takva da je

$$(x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}) \cdot (x_m^{-\lambda_m} \dots x_1^{-\lambda_1}) = (x_m^{-\lambda_m} \dots x_1^{-\lambda_1}) \cdot (x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}) = 1,$$

odnosno za svaki element iz  $F(X)$  postoji njegov inverzni element u  $F(X)$ . Preostaje pokazati asocijativnost. To će biti kompliciranije od prethodnih svojstava, a za početak, trebat ćemo uvesti dodatna preslikavanja. Za svaki  $x \in X$  i  $\lambda \in \{1, -1\}$  definirajmo preslikavanje  $|x^\lambda| : F(X) \rightarrow F(X)$  tako da je  $|x^\lambda|(1) = x^\lambda$  i

$$|x^\lambda|(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) = \begin{cases} x^\lambda x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} & , x^\lambda \neq x_1^{-\lambda_1}, \forall x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \in F(X). \\ x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} & , x^\lambda = x_1^{-\lambda_1}, \end{cases}$$

Preslikavanje  $|x^\lambda|$  je dobro definirano, za sve  $x \in X$  i sve  $\lambda \in \{1, -1\}$ , jer je  $|x^\lambda|(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n})$  reducirana riječ, za svaku reduciranu riječ  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \in F(X)$ . Tvrđimo da je  $|x^\lambda|$  permutacija skupa  $F(X)$ , za sve  $x \in X$  i sve  $\lambda \in \{1, -1\}$ . Naime, za proizvoljan  $x \in X$  i  $\lambda \in \{1, -1\}$ , imamo da je

$$|x^\lambda|(|x^{-\lambda}|(1)) = |x^\lambda|(x^{-\lambda}) = 1,$$

jer je  $x^\lambda = x^{-(-\lambda)}$  i

$$|x^{-\lambda}|(|x^\lambda|(1)) = |x^{-\lambda}|(x^\lambda) = 1,$$

jer je  $x^{-\lambda} = x^{-(\lambda)}$ . Nadalje, neka je  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$  proizvoljna neprazna reducirana riječ. Ako je  $x^{-\lambda} \neq x_1^{-\lambda_1}$ , onda je

$$|x^\lambda|(|x^{-\lambda}|(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n})) = |x^\lambda|(x^{-\lambda} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n},$$

jer je  $x^\lambda = x^{-(-\lambda)}$ . Ako je  $x^{-\lambda} = x_1^{-\lambda_1}$ , onda je

$$|x^\lambda|(|x^{-\lambda}|(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n})) = |x^\lambda|(x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}) = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n},$$

jer je  $x^\lambda = x_1^{\lambda_1}$  i  $x_1^{\lambda_1} \neq x_2^{-\lambda_2}$ , zbog toga što je  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$  reducirana riječ. Isto tako, ako je  $x^\lambda \neq x_1^{-\lambda_1}$ , onda je

$$|x^{-\lambda}|(|x^\lambda|(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n})) = |x^{-\lambda}|(x^\lambda x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n},$$

jer je  $x^{-\lambda} = x^{-(\lambda)}$ . Ako je  $x^\lambda = x_1^{-\lambda_1}$ , onda je

$$|x^{-\lambda}|(|x^\lambda|(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n})) = |x^{-\lambda}|(x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}) = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n},$$

jer je  $x^{-\lambda} = x_1^{\lambda_1}$  i  $x_1^{\lambda_1} \neq x_2^{-\lambda_2}$ , zbog toga što je  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$  reducirana riječ. Dakle,  $|x^{-\lambda}|$  je inverz od  $|x^\lambda|$ , pa je  $|x^\lambda|$  bijekcija sa  $F(X)$  u  $F(X)$ , odnosno  $|x^\lambda|$  je permutacija skupa  $F(X)$ . Promotrimo podgrupu

$$F_0 = \langle \{|x| : x \in X\} \rangle$$

grupe svih permutacija skupa  $F(X)$ . Definirajmo funkciju  $\varphi : F(X) \rightarrow F_0$  tako da je  $\varphi(1) = id_{F(X)}$  i

$$\varphi(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) = |x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}|, \quad \forall x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \in F(X).$$

Pokažimo prvo da je  $\varphi$  injektivna funkcija. Neka su  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$  i  $y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$  različite neprazne reducirane riječi nad  $X$ . Tada je

$$\begin{aligned} \varphi(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n})(1) &= (|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}|)(1) = (|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}|)(|x_n^{\lambda_n}|(1)) = \\ &= (|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_{n-2}^{\lambda_{n-2}}|)(|x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}|(x_n^{\lambda_n})) = \dots = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}, \end{aligned}$$

jer je  $x_{i-1}^{\lambda_{i-1}} \neq x_i^{-\lambda_i}$ , za sve  $i = 2, \dots, n$ , zbog toga što je  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$  reducirana riječ. Također je

$$\begin{aligned} \varphi(y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m})(1) &= (|y_1^{\delta_1}| \circ \dots \circ |y_m^{\delta_m}|)(1) = (|y_1^{\delta_1}| \circ \dots \circ |y_{m-1}^{\delta_{m-1}}|)(|y_m^{\delta_m}|(1)) = \\ &= (|y_1^{\delta_1}| \circ \dots \circ |y_{m-2}^{\delta_{m-2}}|)(|y_{m-1}^{\delta_{m-1}}|(y_m^{\delta_m})) = \dots = y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}, \end{aligned}$$

jer je  $y_{i-1}^{\delta_{i-1}} \neq y_i^{-\delta_i}$ , za sve  $i = 2, \dots, m$ , zbog toga što je  $y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$  reducirana riječ. Dakle, kako iz različitih argumenata dobijemo različite slike, slijedi da je  $\varphi$  injektivna. Pokažimo sada da je  $\varphi$  surjektivna funkcija. Neka je  $|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}| \in F_0$  proizvoljna permutacija. Tada postoji reducirana riječ  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$  takva da je  $\varphi(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) = |x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}|$ , odnosno  $\varphi$  je surjektivna. Dakle,  $\varphi$  je bijekcija. Tvrdimo da je  $\varphi(w_1 \cdot w_2) = \varphi(w_1) \circ \varphi(w_2)$ , za sve reducirane riječi  $w_1$  i  $w_2$ . Neka su  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$  i  $y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$  proizvoljne reducirane riječi i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$  reducirana riječ. Tada je

$$\begin{aligned} \varphi((x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) \cdot (y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m})) &= \varphi(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}) = \\ &= |x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}| \circ |y_1^{\delta_1}| \circ \dots \circ |y_m^{\delta_m}| = \\ &= (|x_1^{\lambda_1}| \circ \dots \circ |x_n^{\lambda_n}|) \circ (|y_1^{\delta_1}| \circ \dots \circ |y_m^{\delta_m}|) = \\ &= \varphi(x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}) \circ \varphi(y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}). \end{aligned}$$

Neka su sada  $w_1, w_2$  i  $w_3$  proizvoljne reducirane riječi. Tada je

$$\begin{aligned} \varphi((w_1 \cdot w_2) \cdot w_3) &= \varphi(w_1 \cdot w_2) \circ \varphi(w_3) = (\varphi(w_1) \circ \varphi(w_2)) \circ \varphi(w_3) = \\ &= \varphi(w_1) \circ (\varphi(w_2) \circ \varphi(w_3)) = \varphi(w_1) \circ \varphi(w_2 \cdot w_3) = \\ &= \varphi(w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3)), \end{aligned}$$

jer je  $F_0$  grupa, pa vrijedi asocijativnost u  $F_0$ . Sada, kako je  $\varphi$  bijekcija, postoji  $\varphi^{-1}$  i djelovanjem s  $\varphi^{-1}$  na prethodnu jednadžbu dobijemo

$$(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3 = w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3),$$

odnosno vrijedi asocijativnost u  $F(X)$ . Dakle,  $(F(X), \cdot)$  je grupa.

Za kraj, pokažimo da je  $F(X) = \langle X \rangle$ . Neka je  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$  proizvoljna reducirana riječ iz  $F(X)$ . Tada je

$$x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

gdje je  $x_i^{\lambda_i} \in X$  ili  $x_i^{-\lambda_i} \in X$ , za svaki  $i = 1, \dots, n$ , pa je  $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \in \langle X \rangle$ , prema lemi 3.2.4. Dakle,  $F(X) = \langle X \rangle$ . ■

Grupu  $F(X)$  zovemo **slobodna** grupa nad skupom  $X$ .

### 3.4. Slobodno djelovanje grupe na stablo

Definicija 3.4.1 je dobivena iz [7]. Sve ostale definicije, propozicije i teoremi ovog potpoglavlja mogu se pronaći u [1].

**Definicija 3.4.1** *Neka je  $(u, v)$  brid grafa  $\mathcal{G}$  i  $w \notin \mathcal{V}(\mathcal{G})$ . Kažemo da je brid  $(u, v)$  **podijeljen** kada je zamijenjen s bridovima  $(u, w)$  i  $(w, v)$ .*

**Definicija 3.4.2** *Baricentrička subdivizija grafa  $\mathcal{G}$  je graf  $\mathcal{G}'$  dobiven podjelom svakog brida grafa  $\mathcal{G}$ .*

**Lema 3.4.3** *Baricentrička subdivizija  $\mathcal{T}'$  stabla  $\mathcal{T}$  je stablo.*

*Dokaz:* Graf dobiven podjelom proizvoljnog brida  $(u, v)$  stabla  $\mathcal{T}$  je povezan, jer smo brid  $(u, v)$  stabla  $\mathcal{T}$  zamijenili novim vrhom  $w$  i povezali ga s vrhovima  $u$  i  $v$ . Pretpostavimo da graf dobiven podjelom proizvoljnog brida  $(u, v)$  stabla  $\mathcal{T}$  sadrži ciklus  $(u_0, u_1, \dots, u_m, u, w, v, v_1, \dots, v_n, u_0)$ . Ako sada vrh  $w$  zamijenimo bridom  $(u, v)$ , dobijemo stablo  $\mathcal{T}$  zajedno s ciklusom  $(u_0, u_1, \dots, u_m, u, v, v_1, \dots, v_n, u_0)$ , a to je kontradikcija s definicijom stabla. ■

**Definicija 3.4.4** *Pločica stabla  $\mathcal{T}$  je podstablo  $T$  baricentričke subdivizije  $\mathcal{T}'$  stabla  $\mathcal{T}$ .*

**Definicija 3.4.5** *Neka je  $\mathcal{T}'$  baricentrička subdivizija stabla  $\mathcal{T}$  i  $J$  neki skup indeksa. **Popločavanje** stabla  $\mathcal{T}$  je skup pločica  $\{T_j | j \in J\}$  stabla  $\mathcal{T}$  takav da vrijedi:*

- (1)  $\mathcal{E}(T_i) \cap \mathcal{E}(T_j) = \emptyset, \forall i \neq j,$
- (2)  $\bigcup_{j \in J} \mathcal{E}(T_j) = \mathcal{E}(\mathcal{T}')$ .

Iz svojstva (1) slijedi da se skupovi vrhova svake dvije različite pločice stabla  $\mathcal{T}$ , iz zadanog popločavanja  $\{T_j | j \in J\}$  stabla  $\mathcal{T}$ , sijeku u najviše jednom vrhu stabla  $\mathcal{T}'$ , jer je svaka pločica podstablo stabla  $\mathcal{T}'$ .

**Definicija 3.4.6** *Neka grupa  $G$  djeluje na stablo  $\mathcal{T}$  i neka je  $J$  neki skup indeksa. Popločavanje  $\{T_j | j \in J\}$  stabla  $\mathcal{T}$  je  **$G$ -popločavanje** stabla  $\mathcal{T}$  ako postoji pločica  $T_0 \in \{T_j | j \in J\}$  takva da je  $\{T_j | j \in J\} = \{gT_0 | g \in G\}$ .*

Sada želimo uvesti  $G$ -popločavanje koje ćemo koristiti u dokazu teorema koji kaže da je grupa  $G$  izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako postoji stablo  $\mathcal{T}$  na koje ona djeluje slobodno. Neka grupa  $G$  djeluje slobodno na stablo  $\mathcal{T}$  i odaberimo vrh  $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ . Promotrimo orbitu  $G.v = \{g.v | g \in G\}$ . Tvrdimo da je funkcija  $f : G \rightarrow G.v$  definirana s  $f(g) = g.v, \forall g \in G$ , bijekcija. Naime, za svaki  $g.v \in G.v$  postoji  $g \in G$  takav da je  $f(g) = g.v$ , odnosno  $f$  je surjekcija. Nadalje, neka su  $g_1, g_2 \in G$  takvi da je  $g_1 \neq g_2$ . Pretpostavimo da je  $f(g_1) = f(g_2)$ , odnosno da je  $g_1.v = g_2.v$ . Odavde slijedi da je  $(g_2^{-1}g_1).v = v$ , odnosno element  $g_2^{-1}g_1 \in G$  fiksira vrh  $v$  stabla  $\mathcal{T}$ , ali to je u kontradikciji s pretpostavkom da  $G$  djeluje slobodno na stablo  $\mathcal{T}$ . Dakle,  $f(g_1) \neq f(g_2)$ , pa je  $f$  injekcija, odnosno  $f$  je bijekcija. Kako je  $f$  bijekcija, slijedi da skupovi  $G.v$  i  $G$  imaju isti kardinalni broj.

Intuitivno, svaka će pločica  $G$ -popločavanja biti skup točaka iz baricentričke subdivizije  $\mathcal{T}'$  koje su najbliže nekom vrhu  $g.v$ . Preciznije, sročimo sljedeću propoziciju.

**Propozicija 3.4.7** *Neka grupa  $G$  djeluje slobodno na stablo  $\mathcal{T}$  i odaberimo  $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ . Za svaki  $g \in G$ , neka je  $T_g$  podgraf baricentričke subdivizije  $\mathcal{T}'$  stabla  $\mathcal{T}$ , sa skupom vrhova*

$$\mathcal{V}(T_g) = \{w \in \mathcal{V}(\mathcal{T}') | d(w, g.v) \leq d(w, g'.v), \forall g' \in G\},$$

pri čemu je  $d$  metrika najkraćeg puta na stablu  $\mathcal{T}'$ , i skupom bridova

$$\mathcal{E}(T_g) = \{(u, w) \in \mathcal{E}(\mathcal{T}') | u, w \in \mathcal{V}(T_g)\}.$$

Tada je  $\{T_g | g \in G\}$   $G$ -popločavanje stabla  $\mathcal{T}$ .

*Dokaz:* Pokažimo prvo da je  $T_g$  pločica stabla  $\mathcal{T}$ , za sve  $g \in G$ . Dovoljno je pokazati da je  $T_g$  povezan podgraf od  $\mathcal{T}'$ , jer je  $\mathcal{T}'$  stablo, a podgraf stabla ne može sadržavati ciklus. Neka je  $w \in \mathcal{V}(T_g)$  proizvoljan. Dovoljno je pokazati sljedeću tvrdnju:

(\*) Svaki vrh jedinstvenog  $(w, g.v)$ -puta  $P$  u  $\mathcal{T}'$  se nalazi u  $\mathcal{V}(T_g)$ .

Naime, pretpostavimo da  $T_g$  ima barem dvije komponente povezanosti  $\mathcal{T}_1$  i  $\mathcal{T}_2$ , te pretpostavimo da se vrh  $g.v$  nalazi u komponenti  $\mathcal{T}_1$ . Neka je  $w'$  proizvoljan vrh iz komponente  $\mathcal{T}_2$ . Onda postoji brid  $e = (v_1, v_2)$  jedinstvenog  $(w', g.v)$ -puta  $P'$  u  $\mathcal{T}'$ , koji se ne nalazi u  $T_g$ , odnosno vrhovi  $v_1$  i  $v_2$  nisu spojeni bridom u  $T_g$ . Uz pretpostavku da vrijedi tvrdnja (\*), svi vrhovi puta  $P'$  nalaze se u  $T_g$ , pa se posebno i vrhovi  $v_1$  i  $v_2$  nalaze u  $T_g$ . Kako su vrhovi  $v_1$  i  $v_2$  susjedni u  $\mathcal{T}'$  i nalaze se u  $T_g$ , onda su oni susjedni i u  $T_g$ , zbog

definicije skupa bridova  $\mathcal{E}(T_g)$ , a to je kontradikcija s činjenicom da oni nisu susjedni u  $T_g$ . Dakle, ako vrijedi tvrdnja  $(*)$ , onda je  $T_g$  povezan.

Pokažimo sada tvrdnju  $(*)$ . Neka je  $d(w, g.v) = n$ , za neki  $n \in \mathbb{N}$ , i neka je  $u$  prvi vrh nakon vrha  $w$  u putu  $P$ . Tada je  $d(u, g.v) = n - 1$ , jer je put između dva vrha u stablu jedinstven, odnosno ne postoji kraći put između vrhova  $u$  i  $g.v$  u  $\mathcal{T}'$ . Pretpostavimo da se vrh  $u$  ne nalazi u  $T_g$ . Onda postoji  $g' \in G$  takav da je  $d(u, g'.v) < d(u, g.v)$ . Iz nejednakosti trokuta dobijemo da je

$$d(w, g'.v) \leq d(w, u) + d(u, g'.v) = 1 + d(u, g'.v),$$

jer su  $u$  i  $w$  susjedni. Sada, kako je  $w$  vrh grafa  $T_g$ , imamo

$$n = d(w, g.v) \leq d(w, g'.v) \leq d(u, g'.v) + 1 < d(u, g.v) + 1 = n - 1 + 1 = n,$$

a to je kontradikcija. Dakle,  $T_g$  je pločica stabla  $\mathcal{T}$ , za sve  $g \in G$ .

Pokažimo sada da je  $\bigcup_{g \in G} \mathcal{E}(T_g) = \mathcal{E}(\mathcal{T}')$ . Pokazat ćemo da za svaki brid  $e$  stabla  $\mathcal{T}'$  postoji  $g \in G$  takav da se brid  $e$  nalazi u stablu  $T_g$ . Prvo, primijetimo da se svaki vrh stabla  $\mathcal{T}'$  nalazi u nekom  $T_g$ , jer za svaki vrh  $u \in \mathcal{V}(\mathcal{T}')$  postoji  $g \in G$  takav da je  $d(u, g.v) \leq d(u, g'.v)$ , za svaki  $g' \in G$ , odnosno svaki vrh  $u \in \mathcal{V}(\mathcal{T}')$  mora imati neki sebi najbliži vrh  $g.v$ . Neka je  $e = (u, w)$  proizvoljan brid stabla  $\mathcal{T}'$ . Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je  $u$  vrh stabla  $\mathcal{T}$ , a  $w$  da nije vrh stabla  $\mathcal{T}$ . Kako je  $g.v$  vrh stabla  $\mathcal{T}$ , za svaki  $g \in G$ , onda je udaljenost vrha  $u$  od orbite  $G.v$  parna, a udaljenost vrha  $w$  od orbite  $G.v$  je neparna, odnosno te udaljenosti su različite. Pretpostavimo da je  $d(u, G.v) < d(w, G.v)$ , odnosno

$$\min\{d(u, g.v) | g \in G\} < \min\{d(w, g.v) | g \in G\}.$$

Nadalje, neka je  $g \in G$  takav da se vrh  $u$  nalazi u stablu  $T_g$ , odnosno

$$d(u, g.v) \leq d(u, g'.v), \quad \forall g' \in G.$$

Iz prethodne dvije nejednakosti slijedi da je

$$d(u, g.v) < \min\{d(w, g'.v) | g' \in G\}.$$

Iz nejednakosti trokuta dobivamo da je

$$d(w, g.v) \leq d(w, u) + d(u, g.v) = 1 + d(u, g.v),$$

jer su vrhovi  $u$  i  $w$  susjedni. Sada imamo

$$d(u, g.v) < \min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} \leq d(w, g.v) \leq 1 + d(u, g.v),$$

odnosno

$$0 < \min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} - d(u, g.v) \leq d(w, g.v) - d(u, g.v) \leq 1.$$

Kako je  $d(w, g'.v)$  cijeli broj, za sve  $g' \in G$  i kako je  $d(u, g.v)$  cijeli broj, iz prethodne nejednakosti slijedi da je  $\min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} - d(u, g.v) = 1$  i  $d(w, g.v) - d(u, g.v) = 1$ , odnosno

$$\min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} - d(u, g.v) = d(w, g.v) - d(u, g.v),$$

pa je

$$d(w, g.v) = \min\{d(w, g'.v) | g' \in G\} \leq d(w, g'.v), \quad \forall g' \in G,$$

iz čega slijedi da se vrh  $w$  nalazi u  $T_g$ . Kako su vrhovi  $u$  i  $w$  susjedni u  $\mathcal{T}'$  i nalaze se u  $T_g$ , onda se i brid  $e = (u, w)$  nalazi u  $T_g$ , zbog definicije skupa bridova stabla  $T_g$ .

Za kraj, pokažimo da je  $gT_h = T_{gh}$ , za sve  $g, h \in G$ , odnosno  $g\mathcal{V}(T_h) = \mathcal{V}(T_{gh})$  i  $g\mathcal{E}(T_h) = \mathcal{E}(T_{gh})$ , za sve  $g, h \in G$ . Ako pokažemo tu tvrdnju, onda za  $h = e$  dobijemo  $gT_e = T_g$ , za sve  $g \in G$ , odnosno  $T_e$  je  $T_0$  iz definicije 3.4.6  $G$ -popločavanja stabla  $\mathcal{T}$ , pa je  $\{T_g | g \in G\}$   $G$ -popločavanje stabla  $\mathcal{T}$ .

Neka su  $g, h \in G$  proizvoljni. Kako su  $T_h$  i  $T_{gh}$  određeni svojim skupom vrhova, dovoljno je pokazati da je  $g\mathcal{V}(T_h) = \mathcal{V}(T_{gh})$ . Neka je  $u \in \mathcal{V}(T_h)$  proizvoljan. Onda je

$$d(u, h.v) \leq d(u, g'.v), \quad \forall g' \in G.$$

Želimo pokazati da je  $g.u$  vrh stabla  $T_{gh}$ , odnosno da je

$$d(g.u, (gh).v) \leq d(g.u, g'.v), \quad \forall g' \in G.$$

Kako je  $\mathcal{T}'$  stablo, prema lemi 3.1.4 za  $g^{-1} \in G$  imamo da je

$$\begin{aligned} d(g.u, (gh).v) &= d(g^{-1}.(g.u), g^{-1}.((gh).v)) = \\ &= d((g^{-1}g).u, (g^{-1}gh).v) = \\ &= d(u, h.v), \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} d(g.u, g'.v) &= d(g^{-1}.(g.u), g^{-1}.(g'.v)) = \\ &= d((g^{-1}g).u, (g^{-1}g').v) = \\ &= d(u, (g^{-1}g').v). \end{aligned}$$

Dakle, želimo pokazati da je

$$d(u, h.v) \leq d(u, (g^{-1}g').v), \quad \forall g' \in G.$$

Iz leme 3.1.5 znamo da je funkcija  $\phi_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ ,  $\phi_{g^{-1}}(g') = g^{-1}g'$ ,  $\forall g' \in G$ , bijekcija sa  $G$  u  $G$ , pa kako prolazimo elementima  $g' \in G$ , funkcijom  $\phi_{g^{-1}}$  ćemo dobiti sve elemente grupe  $G$ , odnosno prethodnu nejednakost možemo napisati kao

$$d(u, h.v) \leq d(u, g'.v), \quad \forall g' \in G,$$

a to vrijedi jer je  $u$  vrh stabla  $T_h$ . Dakle,  $gT_h = T_{gh}$ , za sve  $g, h \in G$ , odnosno  $\{T_g | g \in G\}$  je  $G$ -popločavanje stabla  $\mathcal{T}$ . ■

**Napomena 3.4.8** U dokazu prethodne propozicije smo pokazali da je  $gT_h = T_{gh}$ , za sve  $g, h \in G$ , odnosno da je  $g\mathcal{V}(T_h) = \mathcal{V}(T_{gh})$  i  $g\mathcal{E}(T_h) = \mathcal{E}(T_{gh})$ , za sve  $g, h \in G$ .

**Propozicija 3.4.9** Neka grupa  $G$  djeluje slobodno na stablo  $\mathcal{T}$  i neka je  $\{T_g | g \in G\}$   $G$ -popločavanje stabla  $\mathcal{T}$  iz propozicije 3.4.7. Tada je skup

$$S = \{g \in G | g\mathcal{V}(T_e) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \emptyset\}$$

simetričan skup generatora grupe  $G$ .

**Napomena 3.4.10** Ako je  $g\mathcal{V}(T_e) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \emptyset$ , za neki  $g \in G$ , onda presjek  $g\mathcal{V}(T_e) \cap \mathcal{V}(T_e)$  sadrži točno jedan vrh stabla  $\mathcal{T}'$ , jer svake dvije različite pločice stabla  $\mathcal{T}$  mogu imati najviše jedan zajednički vrh.

Dokaz: Pokažimo prvo da je  $S$  simetričan. Za proizvoljan  $s \in S$  je

$$(s\mathcal{V}(T_e)) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \emptyset,$$

pa prema napomeni 3.4.10, postoji vrh  $w$  stabla  $\mathcal{T}'$  takav da je

$$(s\mathcal{V}(T_e)) \cap \mathcal{V}(T_e) = \{w\}.$$

Dakle, imamo da je  $w = s.u$  za neki  $u \in \mathcal{V}(T_e)$  i  $w$  je vrh stabla  $T_e$ . Djelovanjem na prethodnu jednadžbu sa  $s^{-1} \in G$  dobijemo

$$s^{-1}.w = s^{-1}.(s.u) = (s^{-1}s).u = u,$$

odnosno  $s^{-1}.w$  je vrh stabla  $T_e$  i kako je  $w$  vrh stabla  $T_e$ , slijedi da je  $s^{-1}.w$  vrh stabla  $s^{-1}T_e$ , odnosno  $(s^{-1}\mathcal{V}(T_e)) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \emptyset$ , pa je  $s^{-1} \in S$ , iz čega slijedi



da je  $S$  simetričan.

Pokažimo sada da  $S$  generira grupu  $G$ . Neka je  $g \in G$  proizvoljan. Želimo pokazati da se  $g$  može zapisati kao produkt elemenata is  $S$ . Označimo redom pločice stabla  $\mathcal{T}$  kojima prolazimo jedinstvenim  $(g.v, v)$ -putom:

$$T_{g_n}, T_{g_{n-1}}, \dots, T_{g_1}, T_{g_0}.$$

Kako krećemo iz vrha  $g.v$ , prva pločica kojom prolazimo je  $T_{g_n} = T_g$ , jer je

$$d(g.v, g.v) = 0 \leq d(g.v, g'.v), \quad \forall g' \in G,$$

pa se vrh  $g.v$  nalazi u  $T_g$ . Kada dođemo do vrha  $v$ , nalazimo se u pločici  $T_{g_0} = T_e$ , jer je

$$d(v, e.v) = d(v, v) = 0 \leq d(v, g'.v), \quad \forall g' \in G,$$

pa se vrh  $v$  nalazi u  $T_e$ . Tvrdimo da je svaki  $g_{i-1}^{-1}g_i$ , za  $i = 1, \dots, n$ , jednak nekom elementu  $s_i \in S$ . Naime, ako prolazimo redom pločicama  $T_{g_i}$  i  $T_{g_{i-1}}$ , za neki  $i \in \{1, \dots, n\}$ , onda je

$$\mathcal{V}(T_{g_i}) \cap \mathcal{V}(T_{g_{i-1}}) = \{w\},$$

za neki vrh  $w$  stabla  $\mathcal{T}'$ . Dakle, imamo da je  $w$  vrh stabla  $T_{g_i}$  i vrh stabla  $T_{g_{i-1}}$ . Odavde slijedi da je  $g_{i-1}^{-1}.w$  vrh stabla  $g_{i-1}^{-1}T_{g_i}$  i vrh stabla  $g_{i-1}^{-1}T_{g_{i-1}}$ , odnosno

$$\emptyset \neq (g_{i-1}^{-1}\mathcal{V}(T_{g_i})) \cap (g_{i-1}^{-1}\mathcal{V}(T_{g_{i-1}})) = (g_{i-1}^{-1}g_i\mathcal{V}(T_e)) \cap \mathcal{V}(T_e),$$

prema napomeni 3.4.8, pa je  $g_{i-1}^{-1}g_i = s_i \in S$ , za sve  $i = 1, \dots, n$ . Sada, kako je

$$g = g_n = g_0^{-1}g_1g_1^{-1}g_2 \dots g_{n-1}^{-1}g_n = s_1 \dots s_n,$$

slijedi da  $S$  generira grupu  $G$ . ■

**Teorem 3.4.11** *Neka grupa  $G$  djeluje slobodno na stablo  $\mathcal{T}$ . Tada je grupa  $G$  izomorfna nekoj slobodnoj grupi.*

*Dokaz:* Neka je  $\{T_g | g \in G\}$   $G$ -popločavanje stabla  $\mathcal{T}$  iz propozicije 3.4.7 i neka je  $S = \{g \in G | g\mathcal{V}(T_e) \cap \mathcal{V}(T_e) \neq \emptyset\}$  simetričan skup generatora grupe  $G$  iz propozicije 3.4.9. Pokazat ćemo da svaki element grupe  $G$  možemo na jedinstveni način zapisati kao reducirani produkt elemenata skupa  $S$ . Kako  $S$  generira  $G$ , proizvoljan  $g \in G$  možemo zapisati kao

$$g = s_1 \dots s_n,$$

za neke  $s_1, \dots, s_n$  iz  $S$ . Pretpostavimo da je  $s_1 \dots s_n$  reducirana riječ u  $S$ , odnosno da je  $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$ , za sve  $i = 1, \dots, n-1$ . Konstruirat ćemo  $(g.v, v)$ -put  $P_1$  u  $\mathcal{T}$  koji prolazi redom pločicama:

$$T_{s_1 \dots s_n}, T_{s_1 \dots s_{n-1}}, \dots, T_{s_1}, T_e.$$

Ako konstruiramo takav put  $P_1$ , slijedi da je  $s_1 \dots s_n$  jedinstveni prikaz elementa  $g$  kao reduciranog produkta elemenata iz  $S$ . Naime, pretpostavimo da  $g$  možemo zapisati kao reducirani produkt  $s'_1 \dots s'_m$  elemenata  $s'_1, \dots, s'_m \in S$ , koji se razlikuje od reduciranog produkta  $s_1 \dots s_n$ . Tada možemo konstruirati  $(g.v, v)$ -put  $P_2$  u  $\mathcal{T}$  koji prolazi redom pločicama:

$$T_{s'_1 \dots s'_m}, T_{s'_1 \dots s'_{m-1}}, \dots, T_{s'_1}, T_e,$$

ali put  $P_2$  se razlikuje od puta  $P_1$ , jer prolaze različitim pločicama, a to je kontradikcija s činjenicom da je put između vrhova  $g.v$  i  $v$  jedinstven. Konstruirajmo sada put  $P_1$ . Prvo tražimo put od  $v$  do  $s_1.v$ . Vrh  $v$  je vrh pločice  $T_e$ , a vrh  $s_1.v$  je vrh pločice  $s_1 T_e = T_{s_1}$ , prema napomeni 3.4.8. Kako je  $s_1 \in S$ , slijedi da pločice  $T_e$  i  $T_{s_1}$  imaju jedan zajednički vrh, iz čega slijedi da je  $T_e \cup T_{s_1}$  stablo, pa je jedinstveni  $(v, s_1.v)$ -put sadržan u stablu  $T_e \cup T_{s_1}$ , odnosno prolazi redom pločicama  $T_e$  i  $T_{s_1}$ . Nadalje, tražimo put od  $s_1.v$  do  $(s_1 s_2).v$ . Vrh  $s_1.v$  je vrh pločice  $s_1 T_e = T_{s_1}$ , prema napomeni 3.4.8, a vrh  $(s_1 s_2).v$  je vrh pločice  $s_2 T_{s_1} = T_{s_1 s_2}$ , prema napomeni 3.4.8. Kako je  $s_2 \in S$ , slijedi da pločice  $T_{s_1}$  i  $T_{s_1 s_2}$  imaju zajednički vrh, pa djelovanjem sa  $s_1$ , slijedi da pločice  $T_e$  i  $T_{s_1 s_2}$  imaju zajednički vrh, pa djelovanjem sa  $s_1$ , slijedi da pločice  $T_{s_1}$  i  $T_{s_1 s_2}$  imaju zajednički vrh. Odavde slijedi da je  $T_{s_1} \cup T_{s_1 s_2}$  stablo, pa je jedinstveni  $(s_1.v, (s_1 s_2).v)$ -put sadržan u stablu  $T_{s_1} \cup T_{s_1 s_2}$ , odnosno prolazi redom pločicama  $T_{s_1}$  i  $T_{s_1 s_2}$ . Nakon  $n$  koraka ovog postupka dobijemo jedinstveni  $(v, g.v)$ -put  $P_1$  koji prolazi traženim pločicama. Dakle, proizvoljan  $g \in G$  možemo na jedinstven način zapisati kao reducirani produkt elemenata iz  $S$ , odnosno grupa  $G$  je izomorfna nekoj slobodnoj grupi. ■

Vrijedi i obrat prethodnog teorema, odnosno vrijedi sljedeći teorem [1].

**Teorem 3.4.12** *Ako je grupa  $G$  izomorfna nekoj slobodnoj grupi, onda postoji stablo  $\mathcal{T}$  na koje grupa  $G$  djeluje slobodno.*

Kako se u teoriji grupa dvije izomorfne grupe mogu smatrati jednakima, onda teoremi 3.4.11 i 3.4.12 daju sljedeću ekvivalenciju: grupa  $G$  je slobodna grupa ako i samo ako postoji stablo na koje grupa  $G$  djeluje slobodno.

## 4. Kongruencijske podgrupe

Cilj ovog poglavlja je pokazati vezu između Fareyevog stabla i slobodnog djelovanja grupe na stablo. Naime, navest ćemo beskonačno mnogo podgrupa grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  koje djeluju slobodno na Fareyovo stablo [1].

Definicija 4.1.1, definicija 4.1.3 i lema 4.1.7 se mogu pronaći u [8]. Definicija 4.1.6 se može pronaći u [6]. Napomena 4.1.9 se može pronaći u [9]. Sve ostale definicije, primjeri i teoremi se mogu pronaći u [1].

### 4.1. Osnovne definicije

**Definicija 4.1.1** *Neka grupa  $G$  djeluje na skup  $\Omega$ . Skup*

$$G_\omega = \{g \in G \mid g.\omega = \omega\}$$

*zove se **stabilizator** elementa  $\omega \in \Omega$  s obzirom na djelovanje  $.$  grupe  $G$  na skup  $\Omega$ .*

**Napomena 4.1.2** *Neka grupa  $G$  djeluje na skup  $\Omega$  i neka je  $\omega \in \Omega$  proizvoljan. Tada vrijedi:*

- (1) *Stabilizator  $G_\omega$  elementa  $\omega$  je podgrupa grupe  $G$ .*
- (2) *Niti jedan netrivialan element grupe  $G$  ne fiksira  $\omega$  ako i samo ako je  $G_\omega$  trivijalna grupa.*

**Definicija 4.1.3** *Neka grupa  $G$  djeluje na skup  $\Omega$ . Djelovanje  $.$  :  $G \times \Omega \rightarrow \Omega$  grupe  $G$  na skup  $\Omega$  je **tranzitivno** ako postoji element  $\omega \in \Omega$  takav da je  $G.\omega = \Omega$ . Kažemo da grupa  $G$  djeluje **tranzitivno** na skup  $\Omega$  ako postoji tranzitivno djelovanje grupe  $G$  na skup  $\Omega$ .*

**Napomena 4.1.4** *Neka grupa  $G$  djeluje tranzitivno na skup  $\Omega$ . Tada je  $G.\omega = \Omega$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ , odnosno svi elementi skupa  $\Omega$  se nalaze u istoj orbiti i ta orbita je jednaka cijelom skupu  $\Omega$ .*

Sada ćemo navesti primjer tranzitivnog djelovanja grupe na skup koje će nam biti korisno kasnije.

**Primjer 4.1.5** *Neka je zadana grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$ , Fareyev graf  $\mathcal{G}$ , Fareyev kompleks  $\mathcal{G}_T$  i Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ . Tvrdimo da grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje tranzitivno na skup vrhova Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovara skupu bridova  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$  i na skup vrhova Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovara skupu trokuta  $T$  Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ .*

*Pokažimo prvo da  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje tranzitivno na skup bridova  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Neka je  $\cdot$  djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na skup  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  definirano kao u primjeru 2.1.4. Tada znamo da je preslikavanje  $\cdot : SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathcal{E}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{G})$  definirano s*

$$A \cdot (u, v) = (A \cdot u, A \cdot v), \quad \forall A \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad \forall (u, v) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$$

*djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na skup  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  (djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na skup  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  i na skup  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  oboje označavamo s  $\cdot$ ). Tvrdimo da je to djelovanje tranzitivno. Pokazat ćemo da se svi elementi skupa  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  nalaze u orbiti elementa  $(\pm(1, 0), \pm(0, 1)) \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ . Neka je  $(\pm(p, q), \pm(r, s))$  proizvoljan brid Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Želimo pronaći matricu  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$  takvu da je*

$$A \cdot (\pm(1, 0), \pm(0, 1)) = (\pm(p, q), \pm(r, s)). \quad \text{Promotrimo matricu } A = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}.$$

*Kako je  $(\pm(p, q), \pm(r, s))$  brid Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , odnosno kako su  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  susjedni vrhovi Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , slijedi da je  $\det \left( \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \right) \in \{1, -1\}$ .*

*Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $\det \left( \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \right) = 1$ , jer u suprotnom možemo odabrati  $(-r, -s)$  za predstavnika klase  $\pm(r, s)$ , pa dobijemo da je  $\det \left( \begin{bmatrix} p & -r \\ q & -s \end{bmatrix} \right) = 1$ . Dakle, matrica  $A$  se nalazi u  $SL(2, \mathbb{Z})$ .*

*Nadalje, kako je*

$$\begin{aligned} A \cdot (\pm(1, 0), \pm(0, 1)) &= \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \cdot (\pm(1, 0), \pm(0, 1)) = \\ &= \left( \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \cdot (\pm(1, 0)), \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \cdot (\pm(0, 1)) \right) = \\ &= (\pm(p, q), \pm(r, s)), \end{aligned}$$

*slijedi da se brid  $(\pm(p, q), \pm(r, s))$  nalazi u orbiti brida  $(\pm(1, 0), \pm(0, 1))$ , pa kako je  $(\pm(p, q), \pm(r, s))$  bio proizvoljan brid Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , slijedi da*

se svi elementi skupa  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  nalaze u istoj orbiti, odnosno djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na skup bridova  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$  je tranzitivno.

Pokažimo sada da  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje tranzitivno na skup trokuta  $T$  Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ . Neka je  $\cdot$  djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na skup trokuta  $T$  Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$  definirano kao u lemi 2.3.2. Tvrdimo da je to djelovanje tranzitivno. Pokazat ćemo da se svi elementi skupa  $T$  nalaze u orbiti elementa  $\{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\} \in T$ . Neka su  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  proizvoljni susjedni vrhovi Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Prema lemi 2.2.1, vrhovi  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  su sadržani u trokutima  $\{\pm(p, q), \pm(r, s), \pm(p+r, q+s)\}$  i  $\{\pm(p, q), \pm(r, s), \pm(p-r, q-s)\}$ . Pokažimo da se ti trokuti nalaze u orbiti trokuta  $\{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\}$ .

Promotrimo prvo matricu  $A = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$ . Kako su vrhovi  $\pm(p, q)$  i  $\pm(r, s)$  susjedni u Fareyevom grafu  $\mathcal{G}$ , slijedi da je  $\det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \{1, -1\}$ . Kao i prije, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $\det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = 1$ , jer u suprotnom možemo odabrati  $(-r, -s)$  za predstavnika klase  $\pm(r, s)$ , pa dobijemo da je  $\det \begin{pmatrix} p & -r \\ q & -s \end{pmatrix} = 1$ . Dakle, matrica  $A$  se nalazi u  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Nadalje, kako je

$$\begin{aligned} A \cdot \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\} &= \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \cdot \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \cdot (\pm(1, 0)), \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \cdot (\pm(0, 1)), \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \cdot (\pm(1, 1)) \right\} = \\ &= \{\pm(p, q), \pm(r, s), \pm(p+r, q+s)\}, \end{aligned}$$

slijedi da se trokut  $\{\pm(p, q), \pm(r, s), \pm(p+r, q+s)\}$  nalazi u orbiti trokuta  $\{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\}$ . Promotrimo sada matricu  $B = \begin{bmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{bmatrix}$ . Kako matricu  $B$  možemo dobiti iz matrice  $A$  dodavanjem drugog stupca matrice  $A$  pomnoženog s  $-1$  prvom stupcu matrice  $A$ , slijedi da je  $\det \begin{pmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{pmatrix} = 1$ ,

pa je  $B \in SL(2, \mathbb{Z})$ . Nadalje, kako je

$$\begin{aligned} B \cdot \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\} &= \begin{bmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{bmatrix} \cdot \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{bmatrix} \cdot (\pm(1, 0)), \begin{bmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{bmatrix} \cdot (\pm(0, 1)), \begin{bmatrix} p-r & r \\ q-s & s \end{bmatrix} \cdot (\pm(1, 1)) \right\} = \\ &= \{\pm(p-r, q-s), \pm(r, s), \pm(p, q)\}, \end{aligned}$$

slijedi da se trokut  $\{\pm(p, q), \pm(r, s), \pm(p-r, q-s)\}$  nalazi u orbiti trokuta  $\{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\}$ . Dakle, djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na skup trokuta  $T$  Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$  je tranzitivno.

**Definicija 4.1.6** Neka je  $G$  grupa te neka su  $H$  i  $K$  podgrupe grupe  $G$ . Za  $g \in G$  definiramo skup  $gH = \{gh | h \in H\}$ . Nadalje, za  $g, g' \in G$ , definiramo skup  $gHg' = \{ghg' | h \in H\}$ . Ako postoji  $g \in G$  takav da je  $K = gHg^{-1}$ , onda kažemo da su  $K$  i  $H$  **konjugirane** podgrupe grupe  $G$  i kraće pišemo  $K = H^g$ .

**Lema 4.1.7** Neka grupa  $G$  djeluje na skup  $\Omega$  i neka je  $G_\omega$  stabilizator elementa  $\omega \in \Omega$  za djelovanje  $\cdot$  grupe  $G$  na skup  $\Omega$ . Tada je  $G_{g \cdot \omega} = G_\omega^g, \forall g \in G$ . Posebno, ako  $G$  djeluje tranzitivno na skup  $\Omega$ , onda su svi stabilizatori međusobno konjugirane podgrupe grupe  $G$ .

Dokaz: Odaberimo proizvoljan  $g \in G$  i zatim uzmimo neki  $g' \in G_{g \cdot \omega}$ . Tada je  $g' \cdot (g \cdot \omega) = g \cdot \omega$ , iz čega slijedi da je  $(g^{-1}g'g) \cdot \omega = \omega$ , pa je  $g^{-1}g'g \in G_\omega$ . Odavde slijedi da postoji  $h \in G_\omega$  takav da je  $g^{-1}g'g = h$ , iz čega dobivamo da je  $g' = ghg^{-1} \in G_\omega^g$ . Dakle,  $G_{g \cdot \omega} \subseteq G_\omega^g$ . Obratno, neka je  $g' \in G_\omega^g$  proizvoljan. Tada postoji  $h \in G_\omega$  takav da je  $g' = ghg^{-1}$ , iz čega slijedi da je  $g^{-1}g'g = h \in G_\omega$ , odnosno  $(g^{-1}g'g) \cdot \omega = \omega$ , pa je  $g' \cdot (g \cdot \omega) = g \cdot \omega$ . Dakle,  $g' \in G_{g \cdot \omega}$ , pa je  $G_\omega^g \subseteq G_{g \cdot \omega}$ , odnosno  $G_{g \cdot \omega} = G_\omega^g$ . Posebno, ako  $G$  djeluje tranzitivno na skup  $\Omega$ , onda prema napomeni 4.1.4 slijedi da se svi elementi skupa  $\Omega$  nalaze u istoj orbiti, pa su svi stabilizatori međusobno konjugirane podgrupe grupe  $G$ . ■

**Definicija 4.1.8** Za neki prirodan broj  $m$ , sa  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  označimo jezgru homomorfizma

$$f : SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}_m),$$

definiranog s

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a(\text{mod } m) & b(\text{mod } m) \\ c(\text{mod } m) & d(\text{mod } m) \end{bmatrix}, \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

odnosno

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{Z})[m] &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) : f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) : a, d \equiv 1 \pmod{m}, b, c \equiv 0 \pmod{m} \right\}. \end{aligned}$$

Grupa  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  zove se **glavna kongruencijska podgrupa nivoa  $m$**  (Za svaki prirodan broj  $m$ ,  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  je grupa, jer je jezgra homomorfizma normalna podgrupa domene tog homomorfizma, odnosno  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  je normalna podgrupa grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$ ).

**Napomena 4.1.9** Neka je  $G$  grupa,  $H$  podgrupa grupe  $G$ ,  $\Omega$  neki skup i  $\mathcal{G}$  neki graf. Tada vrijedi:

- (1) Ako je  $\cdot : G \times \Omega \rightarrow \Omega$  djelovanje grupe  $G$  na skup  $\Omega$ , onda je restrikcija preslikavanja  $\cdot$  na  $H \times \Omega$  djelovanje grupe  $H$  na skup  $\Omega$ .
- (2) Ako je  $\cdot : G \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{G})$  djelovanje grupe  $G$  na skup vrhova grafa  $\mathcal{G}$  koje čuva susjednost vrhova grafa  $\mathcal{G}$ , onda je restrikcija preslikavanja  $\cdot$  na  $H \times \mathcal{V}(\mathcal{G})$  djelovanje grupe  $H$  na skup vrhova  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$  grafa  $\mathcal{G}$  koje čuva susjednost vrhova grafa  $\mathcal{G}$ .

## 4.2. Slobodno djelovanje grupa na Fareyevo stablo

Sljedeći teorem nam daje beskonačno mnogo podgrupa grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  koje djeluju slobodno na Fareyevo stablo.

**Teorem 4.2.1** Za svaki prirodan broj  $m \geq 3$ , grupa  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  je izomorfna nekoj slobodnoj grupi.

*Dokaz:* Neka je  $m \geq 3$  neki prirodan broj te neka su zadani Fareyev graf  $\mathcal{G}$ , Fareyev kompleks  $\mathcal{G}_T$  i Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ . Prema (2) iz napomene 4.1.9, restrikcija djelovanja  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  iz primjera 2.3.5 na  $SL(2, \mathbb{Z})[m] \times \mathcal{V}(\mathcal{T})$  je djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  (koje ćemo isto označavati s  $\cdot$ ). Dovoljno je pokazati da je djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  slobodno, jer onda prema teoremu 3.4.11 slijedi da je  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  izomorfna nekoj slobodnoj grupi.

Pokažimo prvo da niti jedan netrivialni element grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  ne fiksira niti jedan vrh Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ . Prema (2) iz napomene 4.1.2, dovoljno je pokazati da je stabilizator svakog vrha Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  trivialna grupa.

Promotrimo prvo vrhove Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovaraju bridovima Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Neka je  $v$  vrh Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovara bridu  $(\pm(1,0), \pm(0,1))$  Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , odnosno  $v = (\pm(1,0), \pm(0,1))$ . Odredimo stabilizator vrha  $v$  s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevu stablo  $\mathcal{T}$ . Proizvoljna matrica  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  će preslikati vrh  $v$  u samoga sebe ako mu preslika svaki kraj u samoga sebe ili ako mu preslika svaki kraj jedan u drugoga. Ako matrica  $A$  preslika svaki kraj vrha  $v$  u samoga sebe, onda je  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(1,0)) = \pm(1,0)$  i  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(0,1)) = \pm(0,1)$ , iz čega slijedi da je  $\pm(a,c) = \pm(1,0)$  i  $\pm(b,d) = \pm(0,1)$ , odnosno  $a, d \in \{1, -1\}$  i  $c = b = 0$ . Dakle, matrice koje stabiliziraju vrh  $v$  za ovaj slučaj su  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , ali  $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = -1 \neq 1$  i  $\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 \neq 1$ , pa nam ostanu matrice  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . S druge strane, ako matrica  $A$  preslika svaki kraj vrha  $v$  jedan u drugoga, onda je  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(1,0)) = \pm(0,1)$  i  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (\pm(0,1)) = \pm(1,0)$ , iz čega slijedi da je  $\pm(a,c) = \pm(0,1)$  i  $\pm(b,d) = \pm(1,0)$ , odnosno  $b, c \in \{1, -1\}$  i  $a = d = 0$ . Dakle, matrice koje stabiliziraju vrh  $v$  za ovaj slučaj su  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , ali  $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1 \neq 1$  i  $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1 \neq 1$ , pa nam ostanu matrice  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Dobili smo da je stabilizator vrha  $v$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevu stablo  $\mathcal{T}$  jednak  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ . Sada, kako  $-1 \not\equiv 1 \pmod{m}$  i  $1 \not\equiv 0 \pmod{m}$ , slijedi da jedina matrica iz tog skupa koja se nalazi u  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  je  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , odnosno stabilizator ovog vrha  $v$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevu stablo  $\mathcal{T}$  je trivijalna grupa.

Pokažimo sada da su stabilizatori svih ostalih vrhova Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovaraju bridovima Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevu stablo  $\mathcal{T}$ , trivijalne grupe. Neka je  $w$  proizvoljan vrh Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovara bridu Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ . Prema



primjeru 4.1.5, grupa  $SL(2, \mathbb{Z})$  djeluje tranzitivno na skup svih vrhova Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovaraju bridovima Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , pa postoji matrica  $M \in SL(2, \mathbb{Z})$  takva da je  $M.v = w$ , gdje je  $v = (\pm(1, 0), \pm(0, 1))$  i  $\cdot$  je djelovanje grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ . Sada, prema lemi 4.1.7, imamo da je

$$G_{M.v} = MG_vM^{-1}, \quad (4.1)$$

gdje su  $G_{M.v}$  i  $G_v$  stabilizatori elemenata  $M.v$  i  $v$  s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ . Pretpostavimo da stabilizator elementa  $w$  s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  nije trivijalna grupa, odnosno pretpostavimo da postoji  $N \in SL(2, \mathbb{Z})[m]_w$ . Tada se taj  $N$  nalazi i u  $G_{M.v}$ , pa iz relacije (4.1) slijedi da se element  $M^{-1}NM$  nalazi u  $G_v$ . Nadalje, kako je  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  normalna podgrupa grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$ , slijedi da se element  $M^{-1}NM$  nalazi i u stabilizatoru  $SL(2, \mathbb{Z})[m]_v$  elementa  $v$  s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ , a to je kontradikcija s činjenicom da je  $SL(2, \mathbb{Z})[m]_v$  trivijalna grupa. Dakle,  $SL(2, \mathbb{Z})[m]_w$  je trivijalna grupa, za proizvoljni vrh  $w$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovara bridu Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ .

Promotrimo sada vrhove Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovaraju trokutima Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ . Neka je  $v$  vrh Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovara trokutu  $\{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\}$  Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ , odnosno  $v = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1)\}$ . Slično kao prije, dobije se da je stabilizator vrha  $v$  s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  jednak

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sada, kako je  $-1 \not\equiv 1 \pmod{m}$  i  $\pm 1 \not\equiv 0 \pmod{m}$ , slijedi da jedina matrica iz tog skupa koja se nalazi u  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  je matrica  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , odnosno stabilizator ovog vrha  $v$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  s obzirom na djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  je trivijalna grupa. Sada, slično kao prije, koristeći primjer 4.1.5 i lemu 4.1.7, dobije se da su stabilizatori svih vrhova Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  koji odgovaraju trokutima Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$  trivijalne grupe.

Za kraj, pokažimo da djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  ne fiksira niti jedan brid Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$ . Djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  fiksira neki brid  $e$  Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  ako mu preslika

svaki kraj u samoga sebe ili ako mu preslika svaki kraj jedan u drugoga. Djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  ne može preslikati kraj brida  $e$  u samoga sebe jer smo pokazali da su stabilizatori vrhova Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  trivijalne grupe. Nadalje, kako je djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  definirano tako da preslikava brid Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$  u brid Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$  i trokut Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$  u trokut Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ , te kako je jedan kraj svakog brida Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  brid Fareyevog grafa  $\mathcal{G}$ , a drugi kraj trokut Fareyevog kompleksa  $\mathcal{G}_T$ , slijedi da djelovanje  $\cdot$  grupe  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$  ne može preslikati jedan kraj nekog brida Fareyevog stabla  $\mathcal{T}$  u drugi kraj tog brida. Dakle, grupa  $SL(2, \mathbb{Z})[m]$  djeluje slobodno na Fareyevo stablo  $\mathcal{T}$ . ■

## Zaključak

Započeli smo s definicijom grafa i osnovnim svojstvima grafova i grupa. Uveli smo Fareyev graf pomoću relacije ekvivalencije definirane na skupu svih primitivnih elemenata od  $\mathbb{Z}^2$ . Pokazali smo da specijalna linearna grupa djeluje na Fareyev graf i opisali smo konstrukciju Fareyevog grafa. Zatim smo definirali Fareyev kompleks i pokazali da specijalna linearna grupa djeluje na skup trokuta Fareyevog kompleksa. Nadalje, definirali smo Fareyevo stablo i pokazali da je Fareyevo stablo zaista stablo, te smo dokazali da specijalna linearna grupa djeluje na Fareyevo stablo, ali to djelovanje nije slobodno. Na kraju drugog poglavlja smo napisali bilješku o Johnu Fareyu Sr. i pokazali vezu između Fareyevog stabla i Fareyevog niza. Treće poglavlje smo započeli s pojmovima metrike najkraćeg puta i podgrupom generiranom podskupom. Zatim smo definirali slobodnu grupu i dokazali da je ona zaista grupa. Pokazali smo teorem koji kaže da je grupa  $G$  izomorfna nekoj slobodnoj grupi ako ona djeluje slobodno na neko stablo  $\mathcal{T}$ , koristeći određeno  $G$ -popločavanje stabla  $\mathcal{T}$  i specifični simetričan skup generatora grupe  $G$ . Na kraju smo definirali beskonačno mnogo podgrupa specijalne linearne grupe i dokazali teorem koji kaže da je svaka ta podgrupa izomorfna nekoj slobodnoj grupi, jer svaka od tih podgrupa djeluje slobodno na Fareyevo stablo.

# Popis slika

2.1	Fareyev graf $\mathcal{G}$ . . . . .	13
2.2	Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ . . . . .	17
2.3	Donji desni kvadrant Fareyevog grafa. . . . .	22

# Literatura

- [1] Clay, Matt; Margalit, Dan: *Office Hours with a Geometric Group Theorist*, New Jersey, 2017.
- [2] Hungerford, Thomas: *Algebra*, New York, 1974.
- [3] Crnković, Dean: Diskretna matematika. Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci. 2017./2018.
- [4] [https://proofwiki.org/wiki/B%C3%A9zout%27s\\_Identity](https://proofwiki.org/wiki/B%C3%A9zout%27s_Identity)
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Farey\\_sequence](https://en.wikipedia.org/wiki/Farey_sequence)
- [6] Grbac, Neven; Mikulić Crnković, Vedrana: *Algebarske strukture*, skripta, 2010.
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism\\_\(graph\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism_(graph_theory))
- [8] Mikulić Crnković, Vedrana: Permutacijske grupe. Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci. Diskretna matematika i primjene. 2022./2023.
- [9] [https://proofwiki.org/wiki/Definition:Group\\_Action\\_Induced\\_on\\_Subgroup](https://proofwiki.org/wiki/Definition:Group_Action_Induced_on_Subgroup)