Matematika paralelnog parkiranja vozila

Sušanj, Ana

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Ana Sušanj

Matematika paralelnog parkiranja vozila

Završni rad

Rijeka, srpanj, 2023.

Sadržaj

Sažetak

U ovome radu bavimo se problemom paralelnog parkiranja vozila te obrađujemo matematičku pozadinu njegovog rješavanja. Osnovni cilj je pronaći krivulju koja predstavlja putanju kretnje vozila pri paralelnom parkiranju. U glavnom djelu rada uvodimo vektorska polja *Drive* i *Steer* pomoću kojih određujemo vektore baze Liejeve algebre. Dokazom teorema zaključujemo da se vozilo može uspješno paralelno parkirati korištenjem teorije Liejevih algebri.

Ključne riječi: diferencijabilna mnogostrukost, difeomorfizam, vektorsko polje, Liejeva algebra, komutator, protok vektorskog polja, Liejeva grupa, paralelno parkiranje

Uvod

Problem paralelnog parkiranja vozila primjer je problema upravljanja te se za njegovo rješavanje oslanjamo na područje matematike koje je utemeljio norveški matematičar Sophus Lie. Napravio je temelje teorije neprekidnih grupa transformacija proučavajući simetrije rješenja diferencijabilnih jednadžbi. Njegove istrage dovele su do jedne od najvažnijih grana matematike 20. stoljeća, teorije Liejevih grupa i Liejeve algebre. Također je za rješavanje problema paralelnog parkiranja cilj usvojiti pojmove diferencijabilne mnogostrukosti, vektorskog polja, protoka te komutatora vektorskih polja. U glavnom djelu ovoga rada pratimo literaturu Edwarda Nelsona: *Tensor Analysis* te njegov način rješavanja problema.

Liejeva algebra i komutator

U ovom poglavlju definirati ćemo osnovne matematičke pojmove koji čine temelj za shvaćanje problema kojim ćemo se baviti u sljedećem poglavlju. Za početak ćemo definirati pojam diferencijabilne mnogostrukosti te se podsjetiti osnovnih pojmova iz grane topologije potrebnih za njenu preciznu definiciju, a naknadno ćemo uvesti pojam Liejeve algebre i binarne operacije komutatora čija je primjena ključna za rješavanje našeg problema paralelnog parkiranja vozila.

3.1 Diferencijabilna mnogostrukost

Definicija 3.1.1. [7] ***Topološki prostor*** *$(X, \mathcal{T})$ je skup X zajedno s familijom $\mathcal{T}$ podskupova skupa X koja zadovoljava uvjete:*

1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$

2) unija članova bilo koje potfamilije elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$

3) presjek konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$.

Definicija 3.1.2. [7] ***Okolina točke*** *x u $(X, \mathcal{T})$ je svaki skup $N \subseteq X$ za koji postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da vrijedi $x \in U \subseteq N$.*

Definicija 3.1.3. [7] ***Hausdorffov topološki prostor*** *X je topološki prostor u kojem za svake dvije točke x, $y \in X$, $x \neq y$ postoje okoline M i N, $M \cap N = \emptyset$ sa svojstvom da je $x \in N$, $y \in M$.*

Definicija 3.1.4. [7] ***Baza topološkog prostora*** *je familija otvorenih skupova* $B \subseteq \mathcal{T}$ *sa svojstvom da se svaki otvoreni skup iz* $\mathcal{T}$ *može prikazati kao unija elemenata iz* B*.*

Definicija 3.1.5. [7] *Familiju podskupova* D *od* X *zovemo otvoreni pokrivač ako je unija elemenata iz* D *jednaka prostoru* X*. Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *je* ***kompaktan*** *ako otvoreni pokrivač* D *od* X *sadrži konačan potpokrivač.*

Definicija 3.1.6. [7] *Neka su* $(X, \mathcal{T}_X)$ *i* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *topološki prostori. Za preslikavanje* $f : X \longrightarrow Y$ *kažemo da je* ***homeomorfizam*** *ako je* f *neprekidna bijekcija za koju je* f^{-1} *neprekidna.* f *je neprekidno preslikavanje ako za svaki* $V \in \mathcal{T}_Y$ *vrijedi* $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$*.*

Neka je M Hausdorffov topološki prostor. Homeomorfizam ρ otvorenog skupa $U \subseteq M$ na otvoreni podskup u $\mathbb{R}^d$ zovemo d-dimenzionalan koordinatni sustav (U, ρ) u M.
Skup U zovemo domena koordinatnog sustava (U, ρ). U koordinatnom sustavu koristiti ćemo oznake $(x_1, \ldots, x_d)$ za lokalne koordinate na U. To su koordinatne funkcije $x_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane s $x_i(p) = u_i(\rho(p))$, gdje su u_i projekcije $u_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, za svaki $i = 1, \ldots, d$.
Diferencijabilni atlas na M je skup A čiji su elementi d-dimenzionalni koordinatni sustavi za koje vrijedi:

1) domene koordinatnih sustava pokrivaju M to jest $\bigcup_{(U,\rho) \in A} U = M$
2) za (U, ρ), $(V, \psi) \in A$ vrijedi ili $U \cap V = \emptyset$ ili je $\rho \circ \psi^{-1}$: $\psi(U \cap V) \longrightarrow \rho(U \cap V)$ diferencijabilno preslikavanje.

Definicija 3.1.7. [4] ***Diferencijabilna mnogostrukost*** *je uređeni par (M,E) gdje je M Hausdorffov topološki prostor s prebrojivom bazom topologije, E je skup koordinatnih sustava koji zadovoljava svojstva 1) i 2) te je maksimalan s obzirom na ta svojstva.*

Primjer 3.1.1.

(1) *Euklidski prostor* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) *Opća linearna Liejeva grupa* $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, det(A) \neq 0\}$.

(3) *Kružnica* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.

(4) $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

Definicija 3.1.8. [4] *Neka je* (M, A) *diferencijabilna mnogostrukost i neka je* $V \subseteq M$ *otvoren skup. Tada je* $\{(U \cap V, \psi|_{U\cap V}); (U, \psi) \in A, U \cap V \neq \emptyset\}$ *diferencijabilni atlas na* V. V *se s pripadnom diferencijabilnom strukturom zove otvorena* ***podmnogostrukost*** *od* M.

Definicija 3.1.9. [4] *Neka su* (M, E_M) *i* (N, E_N) *diferencijabilne mnogostrukosti. Za funkciju* $f\colon M \longrightarrow N$ *kažemo da je diferencijabilno preslikavanje ako za svaki* $p \in M$ *postoje koordinatni sustavi* (U, ρ) *na* M *i* (V, ψ) *na* N *takvi da je* $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ *te je* $\psi \circ f \circ \rho^{-1} : \rho(U) \longrightarrow \psi(V)$ *diferencijabilno preslikavanje.*

Ako je f bijekcija i f^{-1} diferencijabilno preslikavanje tada f zovemo **difeomorfizam**. Sinonim za diferencijabilno preslikavanje je *preslikavanje klase* C^∞. Taj ćemo izraz često koristiti u ovome radu. Skup svih diferencijabilnih funkcija sa M u $\mathbb{R}$ označiti ćemo s $C^\infty(M)$.

3.2 Liejeva algebra

Definicija 3.2.1. [4] ***Tangencijalan vektor*** *na mnogostrukosti* M *u točki* p *je linearan funkcional* $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ *sa svojstvom:*

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g), \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih tangencijalnih vektora na M u točki p čini realan vektorski prostor kojeg zovemo **tangencijalni prostor** te ga označavamo sa T_pM.

Propozicija 3.2.1. [4] *Za svaku točku* $p \in M$ *n-torka parcijalnih derivacija* $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right)$ *čini bazu tangencijalnog prostora* T_pM *(*$x_1, \ldots, x_n$ *su koordinatne funkcije koordinatnog sustava* (U, ρ)*).*

Definicija 3.2.2. [4] ***Vektorsko polje*** *na mnogostrukosti* M *je linearan operator* $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ *sa svojstvom:*

$$X(fg) = X(f)g + fX(g), \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Skup svih vektorskih polja na $C^\infty(M)$ je realan vektorski prostor kojeg označavamo s $\chi(M)$.

Ako je $X \in \chi(M)$ i $f \in C^\infty(M)$ onda je za bilo koju točku $p \in M$ sa

$$X_p(f) := (X(f))(p)$$

definiran tangencijalni vektor $X_p \in T_pM$.

Obratno, za familiju tangencijalnih vektora $(X_p)_{p\in M}$, $X_p \in T_pM$ i $f \in C^\infty$ možemo definirati linearan operator

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}^M,\ (X(f))(p) = X_p(f).$$

Definicija 3.2.3. [4] *Neka su M i N diferencijabilne mnogostrukosti i $\phi : M \longrightarrow N$ diferencijabilno preslikavanje. Za $p \in M$ definiramo $T_p(\phi) : T_pM \longrightarrow T_{\phi(p)}N$ sa*

$$[T_p(\phi)X](f) = X(f \circ \phi),\ f \in C^\infty(N),\ X \in T_pM.$$

Tada je $T_p(\phi)$ linearan operator i zove se diferencijal (ili tangencijalno preslikavanje) od ϕ u točki p.

Definicija 3.2.4. [4] *Algebra A je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ zajedno s binarnom operacijm $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ kojeg zovemo množenje i koje zadovoljava svojstvo bilinearnosti:*

1. $(\alpha x + \beta y)z = \alpha xz + \beta yz$
2. $x(\alpha y + \beta z) = \alpha xy + \beta xz$

   $\forall x, y, z \in A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Asocijativna algebra A je algebra za koju vrijedi svojstvo asocijativnosti množenja: $(xy)z = x(yz)$, $\forall x, y, z \in A$. Primjer asocijativne algebre je $C^\infty(M)$.

Definicija 3.2.5. [4] ***Liejeva algebra*** $\mathfrak{g}$ *je algebra s množenjem $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, kojeg zovemo komutator, takvim da vrijedi:*

L1) $[x, x] = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$,

L2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *za sve* $x, y, z \in \mathfrak{g}$ *(**Jacobijev identitet**).*

Iz svojstva L1) slijedi

Propozicija 3.2.2. [4] $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

*Dokaz. Iz svojstva L*1) *za sve* $x, y \in \mathfrak{g}$ *imamo* $[x + y, x + y] = 0$,

$[x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$, *odnosno* $[x, y] = -[y, x]$.

□

Primjer 3.2.1.

(1) Neka je A *asocijativna algebra. Definiramo li komutator* $[\cdot, \cdot] : A \times A \longrightarrow A$ *s* $[x, y] = xy - yx, \forall x, y \in A$ *, tada* A *postaje Liejeva algebra.*

(2) Vektorski prostor vektorskih polja $\chi(M)$ *postaje Liejeva algebra uz komutator* $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \forall X, Y \in \chi(M)$.

3.3 Protoci vektorskih polja i komutatori

U ovom potpoglavlju detaljnije ćemo objasniti identifikaciju vektorskih polja sa derivacijama funkcija klase C^∞ definiranih na mnogostrukosti M.

Integralna krivulja vektorskog polja X s početkom u točki $p \in M$ je diferencijabilno preslikavanje $\gamma_p : I \longrightarrow M$, I je otvoreni interval, $0 \in I$ tako da vrijedi $\gamma_p(0) = p$ i

$$\gamma_p'(t) = X(\gamma(t)), \forall t \in I. \tag{3.1}$$

Dakle, $X_\gamma \in T_pM$. Za kartu $(U, (x_1, \ldots, x_d))$ integralna krivulja je zadana svojim komponentama $\gamma^i(t) = x_i(\gamma(t))$, a derivacije s

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Slijedi da su integralne krivulje vektorskog polja X, sa komponentama x^i u $(x_1, \ldots, x_d)$, rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = x^i(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^d(t)),\ i = 1, \ldots, d.$$

Također, može se pokazati da postoje realni brojevi a i b i integralna krivulja

$$\gamma : \langle a, b\rangle \longrightarrow M$$

takva da je $0 \in \langle a, b\rangle$, $\gamma(0) = p$ i ako postoji integralna krivulja $\eta : \langle c, d\rangle \longrightarrow M$ za koju vrijedi $\eta(0) = p$ slijediti će $\langle c, d\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ i $\gamma|_{\langle c,d\rangle} = \eta$.

Označimo s $D_t(p) = \{p \in M : t \in \langle a, b\rangle\}$.

Definicija 3.3.1. [4] ***Protok vektorskog polja*** *$X \in \chi(M)$ je preslikavanje $\Phi_X^t : D_t \longrightarrow M$ definirano s $\Phi_X^t = \gamma_p(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ tako da je $\Phi_X^t : D_t \longrightarrow D_{-t}$ difeomorfizam i vrijedi*

$$\Phi_X^{t+s} = \Phi_X^t \circ \Phi_X^s,\ \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Kažemo da je vektorsko polje potpuno ako je $D_f(x) = M$, $\forall t \in \mathbb{R}$, odnosno maksimalna integralna krivulja je definirana $\forall t \in \mathbb{R}$. U tom slučaju protok vektorskog polja X je preslikavanje $\mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, $(t, p) \mapsto \Phi_X^t(p)$. Ova jednadžba pokazuje da to preslikavanje definira djelovanje grupe $(\mathbb{R}, +)$ na M. Drugim rječima preslikavanje

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow Diff(M) \\ t &\mapsto \Phi_X^t \end{aligned}$$

je homomorfizam grupa $(\mathbb{R}, +)$ i $(Diff(M), \circ)$. Φ_X^t zovemo **jednoparametarska grupa** preslikavanja na M.

Lokalni protok možemo definirati i kao familiju difeomorfizama $(\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ definiranu običnim diferencijabilnim jednadžbama:

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = X(\varphi^t(x)),\ \varphi^0(x) = x,\ x \in M.$$

Grupa difeormorfizama djeluje na prsten $C^\infty(M)$ kompozicijom zdesna: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Deriviramo li funkciju $f \in C^\infty(M)$ u smjeru vektorskog polja X dobivamo derivaciju:

$$(D_X f)(p) = \frac{d}{dt} f(p) X(p) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{(f \circ \phi_t)(p) - f(\phi_t(0))}{t},\ \forall p \in M.$$

Ova jednadžba definira bijekciju između vektorskog prostora $\chi(M)$ vektorskih polja na mnogostrukosti M i prostora derivacija funkcija prstena $C^\infty(M)$.

Napomena 3.3.1. *Djelovanje vektorskog polja* $X \in \chi(M)$ *na* $f \in C^\infty(M)$ *definirano s:* $(Xf)(p) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{(f \circ \phi_t)(p) - f(p)}{t}$ *je derivacija budući da vrijedi:* $X(fg)(p) = (Xf)(g(p)) + f((Xg)(p)),\ \forall f, g \in C^\infty(M), p \in M.$

Definicija 3.3.2. [4] ***Liejeva grupa*** *je skup* G *sa svojstvima*

(a) G *je grupa*

(b) G *je diferencijabilna mnogostrukost*

(c) $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ *je diferencijabilno preslikavanje sa* $G \times G$ *u* G.

Neutral u grupi G označavati ćemo sa e.

Primjer 3.3.1.

(1) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) Opća linearna Liejeva grupa $GL_n(\mathbb{R})$.

U nastavku ćemo pokazati identifikaciju Liejeve algebre s tangencijalnim vektorskim prostorom u neutralu Liejeve grupe.

Za $x \in G$ definiramo diferencijabilna preslikavanja $\lambda_x : G \longrightarrow G$ i $\psi_x : G \longrightarrow G$ sa $\lambda_x(g) = xg$ i $\psi_x(g) = xgx^{-1},\ g \in G$.
Budući da vrijedi $\psi_x(e) = xex^{-1} = e$ slijedi $T_e(\psi_x) : T_e(G) \longrightarrow T_e(G)$. Diferencijal $T_e(\psi_x)$ se često označava s Ad_x te se preslikavanje $Ad : G \longrightarrow GL(T_e(G))$ definirano s $Ad(x) = Ad_x$ zove *adjungirana reprezentacija.*
λ_x je difeomorfizam sa G u G. Vektorsko polje $X \in \chi(G)$ zove se lijevoinvarijantno ako vrijedi $T_g(\lambda_x)X_g = X_{xg}, \forall x, g \in G$. Neka je $\mathfrak{g}$ potprostor od $\chi(G)$ svih lijevoinvarijantnih vektorskih polja na G. Vrijedi teorem:

Teorem 3.3.1. [4]

(a) $X \mapsto X_e$ *je izomorfizam vektorskih prostora sa* $\mathfrak{g}$ *na* $T_e(G)$.

(b) $\mathfrak{g}$ *je Liejeva algebra, tj.* $X, Y \in \mathfrak{g} \Longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$.

Zbog tvrdnje (a) teorema 2.2.1. obično se Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G identificira s tangencijalnim prostorom $T_e(G)$.

Slijedi da su vektorska polja iz $\mathfrak{g}$ vektori tangente u e Liejeve grupe G.
Uz tu identifikaciju komutator $[X,Y]$ elemenata $X,Y \in T_e(G)$ izračunava se tako da najprije odredimo lijevoinvarijantna vektorska polja $X',Y' \in \mathfrak{g}$ takva da je $X'_e = X$ i $Y'_e = Y$, a onda je $[X,Y] = [X',Y']_e$.

U bilo kojoj grupi komutator dva elementa je definiran kao element: $\varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}$, a u nekomutatiovnoj algebri komutator dva elementa definiramo kao:

$$[X,Y] := XY - YX.$$

Neka vektorska polja X i Y generiraju familije difeomorfizama redom $(\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ i $(\psi^t)_{t\in\mathbb{R}}$. Tada je komutator vektorskih polja infinitesimalan komutator

$$[X,Y](p) = \frac{d}{dt}\varphi^{\sqrt{t}} \circ \psi^{\sqrt{t}} \circ \varphi^{-\sqrt{t}} \circ \psi^{-\sqrt{t}}(p)\bigg|_{t=0}.$$

Zaključujemo da je vektorski prostor derivacija funkcija prstena $C^\infty(M)$ zatvoren s obzirom na komutator. Međutim preslikavanje $X \mapsto D_X$ je anti-homomorfizam:

$$D_{[X,Y]} = -[D_X, D_Y]$$

a to vrijedi jer je preslikavanje $\varphi \mapsto \varphi^*$ anti-homomorfizam grupa:
$(\varphi \circ \psi)^* f = f \circ \varphi \circ \psi = \psi^*(f \circ \varphi) = \varphi \circ \psi \circ f$.

Teorem 3.3.2. [6] *Neka je M analitička mnogostrukost. X je vektorsko polje na M.*

(a) Za bilo koji točku $p_0 \in M$ diferencijabilna jednadžba: $p'(t) = X(p(t))$ sa početnim uvjetom $p(0) = p_0$, ima jedinstveno rješenje $p(t)$ definirano na nekom intervalu oko $t = 0$. Zapišimo to rješenje $p(t) = e^{tX}p_0$.

(b) Preslikavanje $\mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, $(t,p) \mapsto exp(tX)p$ je definirano i diferencijabilno u okolini od $0 \times M$. Zadovoljava sljedeće jednadžbe :

$$e^{(\sigma+t)X}p = (e^{\sigma X} \cdot e^{tX})p,$$

$$(e^{-tX} \cdot e^{tX})p = e^0 p = p.$$

(c) Za svaku diferencijabilnu funkciju $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definiranu u okolini točke p na M vrijedi: $\varphi(e^{tX}p) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}\varphi(p)$.
Ovo svojstvo jedinstveno karakterizira $e^{tX}p$.

Propozicija 3.3.1. [4] *Neka je* $X \in \mathfrak{g}$. *Jednoparametarska podgrupa* γ_X *od* G *čiji je tangencijalni vektor u jedinici jednak* X *dana je sa:*

$$\gamma_X(t) = e^{tX} = e + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \frac{t^3}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}x^n, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Dokaz. *Očito je* γ_X *jednoparametarska podgrupa od* G. *Tangencijalni vektor* X *u jedinici koji ona definira dan je sa*

$$X(f) = \frac{d}{dt} f\left(e + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots\right)\bigg|_{t=0}, \ f \in C^\infty(G)$$

Pomoću Taylorove formule pokazuje se da je to jednako

$$\frac{d}{dt} f(e + tx + \cdots)\bigg|_{t=0}$$

dakle, upravo tangencijalni vektor određen vektorom X.

$\square$

Eksponencijalno preslikavanje Liejeve grupe je diferencijabilno preslikavanje

$$exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G,$$
$$X \mapsto \gamma_X(1),$$

$X \in \mathfrak{g}$ tako da vrijedi $\dfrac{d}{dt}\gamma_X(0) = X$.
Protok lijevoinvarijantnog vektorskog polja $X \in \mathfrak{g}$ u terminu preslikavanja exp možemo definirati sa $(t, g) \mapsto g\, exp(tX)$.

Zaključujemo da je e^{tX} jednoparametarska grupa lokalnih transformacija mnogostrukosti M generiranih od vektorskog polja X.

Primjer 3.3.2. *Kvadratna matrica* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *određuje protok* $\varphi^t(x) = e^{tA}x$, $e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$. *Za kvadratne matrice* A *i* B *imamo*

$$[A, B] = \frac{d}{dt} e^{\sqrt{t}A} e^{\sqrt{t}B} e^{-\sqrt{t}A} e^{-\sqrt{t}B}\bigg|_{t=0} = AB - BA$$

što je lako vidljivo iz formule

$$\left(I + tA + \tfrac{t^2A^2}{2}\right)\left(I + tB + \tfrac{t^2B^2}{2}\right)\left(I - tA + \tfrac{t^2A^2}{2}\right)\left(I - tB + \tfrac{t^2B^2}{2}\right) =$$
$$I + 2t^2(AB - BA) + o(t^3).$$

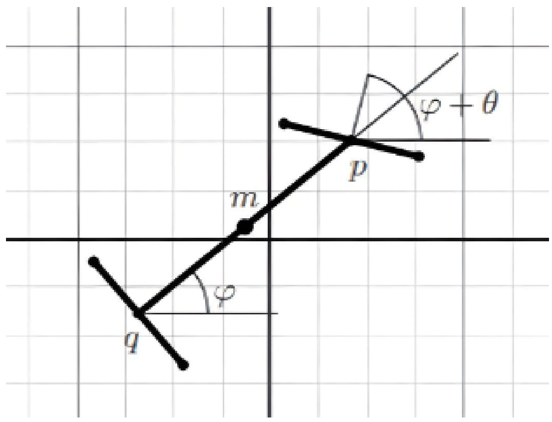
Problem paralelnog parkiranja vozila

Problem kojim ćemo se baviti je primjer problema upravljanja. Cilj je pronaći krivulju po kojoj se kreće vozilo pri bočnom parkiranju. Rješenje problema svodi se na rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \tag{4.1}$$

gdje f predstavlja vektorsko polje koje djeluje na konfiguraciju vozila koju označavamo s (x,u). Problem je za dane krajnje točke: x_0 i x_1 u prostoru odabrati krivulju tako da rješenje $x(t)$ jednadžbe (4.1) zadovoljava $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. Slijedi da x_0 predstavlja početnu konfiguraciju, a x_1 krajnju konfiguraciju vozila, dakle kada je vozilo parkirano. Krivulju $x(t)$ će zapravo činiti pomaci vozila u smjeru vektorskih polja koja ćemo opisati u ovome poglavlju.

Definirajmo konfiguraciju vozila na temelju slike:



Slika 4.1: Vozilo u ravnini $\mathbb{R}^2$ (preuzeto iz [3])

p - polovište prednje osovine vozila

g - polovište stražnje osovine vozila

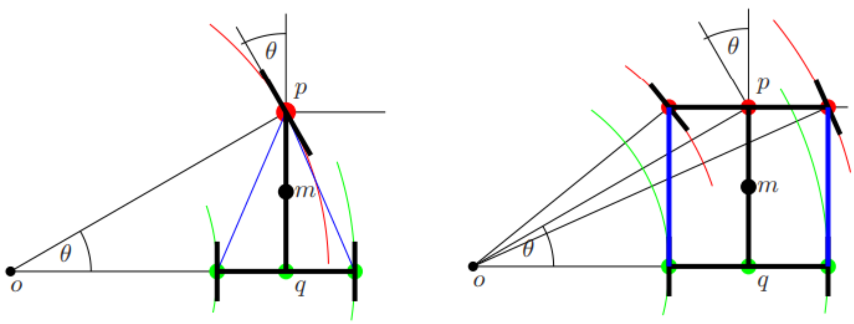
(p i g su radij-vektori polovišta osovina s obzirom na odabrano ishodište.)

φ - kut između pravca pg i horizontalnog pravca (x-osi)

θ - kut između pravca pg i okomice na prednju osovinu kroz točku p (kut između smjera vozila i smjera prednjih guma)

Objasnimo detaljnije konfiguraciju vozila (x, u) koju smo uveli u jednadžbi (4.1). x predstavljaju koordinate točke p: $x(p)$ i $y(p)$, dok u predstavljaju kutevi φ i θ. Dakle, konfiguracijski prostor auta gledamo kao 4-dimenzionalnu mnogostrukost $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ parametriziranu s (x, y, φ, θ).

Napomena 4.0.1. *Ne promatramo klasičan auto kojemu su prednja i stražnja osovina uvijek paralelne već promatramo ono vozilo kojemu se cijela prednja osovina rotira pri rotaciji guma tj. okretanjem volana okrećemo cijelu prednju osovinu.*



Slika 4.2: Tricikl i auto (preuzeto iz [3])

Glavnu kontrolu predstavlja kut θ. Vozač mijenja taj kut okretanjem volana. Druga kontrola je da li se auto kreće naprijed ili natrag.

4.1 Vektorska polja *Drive* i *Steer*

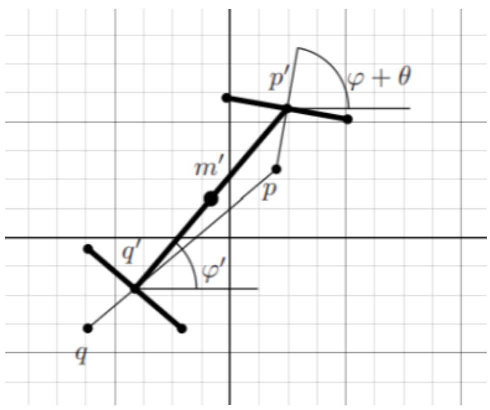
Istaknimo vektorska polja *Drive* i *Steer* koja odgovaraju dvama načinima na koja možemo promijeniti položaj auta. U teoriji, proces kretnje vozila unaprijed dok se volan ne okreće zove se **Drive motion**, a proces okretnje volana ulijevo dok vozilo stagnira, dakle ne dajemo gas, zove se **Steer motion**.

4.1.1 *Drive*

Definirajmo detaljnije vektorsko polje *Drive* i promjenu konfiguracije vozila njegovom primjenom.
Označimo s $normal_{front} := (\cos(\varphi + \theta), \sin(\varphi + \theta))$ i $normal_{rear} := (\cos\varphi, \sin\varphi)$ jedinične vektore okomite na prednju i stražnju osovinu vozila.
Volan se ne okreće (kut θ je konstantan) i auto se pomiče unaprijed. Tada se točke p i g pomiču do točaka p' i g':

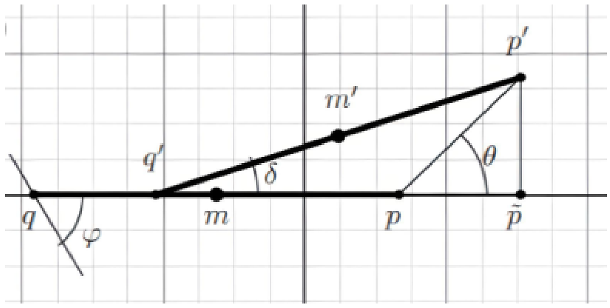
$$p' = p + h\, normal_{front} + o(h), \;\; g' = g + k\, normal_{rear} + o(h) \tag{4.2}$$

h i k su udaljenosti za koje se pomiču točke p i g u smjeru jediničnih vektora.
Vektor $p - p'$ je ortogonalan na prednju, a vektor $g - g'$ je ortogonalan na stražnju osovinu.
Ignoriramo li grešku $o(h)$ slika nove konfiguracije auta je



Slika 4.3: Drive motion (preuzeto iz [3])

Promotrimo sliku u kojoj nam je pravac pg horizontalan (paralelan s x-osi). Fiksirajmo kut θ i neka se auto pomakne s pozicije (g, p) u poziciju (g', p').



Slika 4.4: Rotacija slike 4.3. za kut -φ (preuzeto iz [3])

S $\tilde{p}$ označimo točku na pravcu pg koja zadovoljava $||g' - g|| = ||\tilde{p} - p||$.

Označimo kuteve:

$\theta = \angle p'p\tilde{p}$ i $\delta := \angle p'g'p$.

Kut δ definiramo kao $\varphi' - \varphi$. Sa ℓ označimo duljinu auta , a to je isto što i udaljenost između polovišta osovina p i g: $\ell = ||p - g|| = ||p' - g'|| = ||\tilde{p} - g'||$.

Po definiciji funkcije sinus u pravokutnom trokutu iz slike možemo iščitati:

$||p' - \tilde{p}|| = h \sin\theta = \ell \sin\delta$, tada je $\dfrac{\sin(\varphi' - \varphi)}{h} = \dfrac{\sin\theta}{\ell}$.

Iz (4.2) dobivamo

$$\frac{x(p') - x(p)}{h} = \cos(\varphi + \theta), \; \frac{y(p') - y(p)}{h} = \sin(\varphi + \theta).$$

Zanemarimo li uvjete na udaljenost h, promjena konfiguracije vozila primjenom vektorskog polja *Drive* može se prikazati sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\dot{x}(p) = \cos(\varphi + \theta), \;\; \dot{y}(p) = \sin(\varphi + \theta), \;\; \dot{\varphi} = \frac{\sin\theta}{\ell}. \tag{4.3}$$

Dakle, promijenile su se koordinate točke p i kut φ.

Stavimo da je θ' kut između pravca $p'g'$ i okomice na prednju osovinu kroz p', a φ' kut između pravca $p'g'$ i x-osi. Tada je rješenje jednadžbe (4.3):

$\theta' = \theta,$

$\varphi' = \varphi + cs$ (gdje je $c = \dfrac{\sin\theta}{\ell}$, a s je duljina luka za koji se auto pomaknuo),

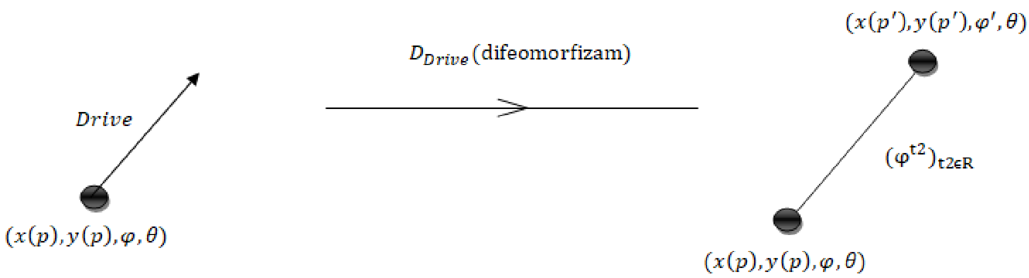
$x(p') = x(p) + \ell(\sin(\varphi' + \theta') - \sin(\varphi + \theta)),$

$y(p') = y(p) - \ell(\cos(\varphi' + \theta') - \cos(\varphi + \theta)).$

Novu konfiguraciju vozila označimo s $(x(p'), y(p'), \varphi', \theta)$.

U prethodnom poglavlju objasnili smo identifikaciju Liejeve algebre Liejeve grupe s tangencijalnim vektorskim prostorom i također smo identificirali vektorska polja s derivacijama diferencijabilnih funkcija. U ovom primjeru vektorsko polje *Drive* gledamo kao derivaciju D_{Drive} difeomorfizma kojom se konfiguracija $(x(p), y(p), \varphi, \theta)$ preslikala tj. pomaknula do konfiguracije $(x(p'), y(p'), \varphi', \theta)$ u smjeru vektora tangente *Drive*.

Ovaj slučaj možemo vizualizirati na sljedeći način:



Slika 4.5: Pomak konfiguracije vozila u smjeru vektora *Drive*

.

Pogledajmo koordinate točke g':

$x(g') = x(p') - \ell \cos\varphi'$, $y(q') = y(p') - \ell \sin\varphi'$.

Pomak točke g do točke g':

$\dot{x}(g) = \dot{x}(p) + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\varphi+\theta) + \sin\theta\sin\varphi$,

$\dot{y}(g) = \dot{y}(p) - \sin\theta\cos\varphi = \sin(\varphi+\theta) - \sin\theta\cos\varphi$.

Kretnjom duž vektorskog polja *Drive* mijenjaju se i koordinate centra vozila m koje je središte dužine $\overline{pg}$.

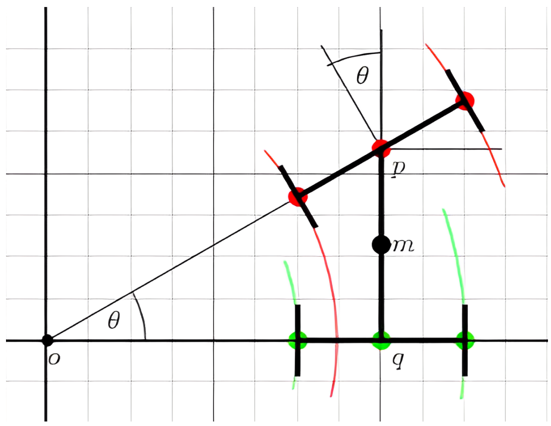
$x(m) = \frac{1}{2}(x(p) + x(g))$, $y(m) = \frac{1}{2}(y(p) + y(g))$.

Stoga,

$\dot{x}(m) = \frac{1}{2}(\dot{x}(p) + \dot{x}(g)) = \cos(\varphi+\theta) + \frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi$,

$\dot{y}(m) = \frac{1}{2}(\dot{y}(p) + \dot{y}(g)) = \sin(\varphi+\theta) - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\varphi$.

Rješenje obične diferencijalne jednadžbe (4.3) pokazuje da se 7 točaka (4 gume, p, g, m) kreću istom kutnom brzinom θ duž različitih krugova oko točke O (O je presjek pravaca kroz osovine).



Slika 4.6: Drive motion u krug (preuzeto iz [3])

Zaključujemo da se auto vozi u krug ako vozi samo unaprijed (ili samo unazad) kada je kut θ konstantan.

Stoga ćemo razmatrati vozilo kao 3-dimenzionalnu podmnogostrukost $M \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ određenu kvadratnom jednadžbom:

$$(x(p) - x(q))^2 + (y(p) - y(q))^2 = \ell^2.$$

Prema navedenome možemo parametrizirati ograničenu mnogostrukost preko jednadžbi:

$$x(p) = x,\ \ y(p) = y,\ \ x(g) = x - \ell\cos\varphi,\ \ y(g) = y - \ell\sin\varphi.$$

Dakle, sada koordinate ovise samo o kutu φ. Ove jednadžbe pokazuju da je ograničena mnogostrukost difeomorfna s $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

Dalje ćemo promatrati slučaj kada je $\ell = 1$. Označimo konfiguraciju auta u 3-dimenzionalnom prostoru sa $\sigma(x, y, \varphi, \theta) = (x, y, \varphi)$.

4.1.2 *Steer*

Primjenu vektorskog polja *Steer* na konfiguraciju vozila predstavljaju obične diferencijalne jednadžbe:

$$\dot{x} = 0,\ \ \dot{y} = 0,\ \ \dot{\varphi} = \cos\theta. \tag{4.4}$$

U ovom se slučaju mijenjaju kutevi θ i φ (okrećemo volan) dok koordinate točke p ostaju nepromijenjene.

4.2 Vektori baze Liejeve algebre

Zapišimo jednadžbe (4.3) i (4.4) u zapisu vektorskih polja:

$$\dot{\sigma} = Drive(\sigma),\ \ \dot{\sigma} = Steer(\sigma).$$

Jednadžbe predstavljaju kretnju vozila naprijed-natrag i pomak volana lijevo-desno te su zapis našeg problema (4.1) kojeg smo uveli na početku.
Uzmimo jednadžbu $\dot{\sigma} = Drive(\sigma)$. U prethodnom smo poglavlju spomenuli da je protok vektorskog polja familija difeomorfizama. Svaki član familije predstavlja pomak vozila u smjeru vektorskog polja, u ovom slučaju $Drive$. Dakle, rješenje jednadžbe predstavljati će krivulja čiji se tangencijalni vektori u svim točkama podudaraju s vektorskim poljem $Drive$. Analogno vrijedi za jednadžbu $\dot{\sigma} = Steer(\sigma)$.

S obzirom da je vektorski prostor vektorskih polja zatvoren s obzirom na binarnu operaciju komutatora, tada je $[Drive, Steer]$ vektorsko polje. Označimo ga s $Wriggle$. Definirajmo i vektorsko polje $Slide := [Wriggle, Drive]$.
Po definiciji funkcije Ad ($Ad_X(Y) = [X, Y]$) možemo zaključiti da 3 vektorska polja:

$$Drive,\ \ Wriggle = Ad_{Drive}(Steer),\ \ Slide = -Ad^2_{Drive}(Steer)$$

proizlaze iz vektorskog polja $Steer$ primjenom funkcije Ad_{Drive}. Sva 3 vektorska polja ovise o kutu θ.

Sljedećim teoremom uvesti ćemo rješenja jednadžbi (4.3) i (4.4).

Teorem 4.2.1. [3] *Za dovoljno malen kut θ, vektori $Drive, Wriggle, Slide$ formiraju bazu tangencijalnog prostora na mnogostrukosti M u svakoj točki.*
Dokaz. Neka su,

$$X := \cos(\varphi + \theta)\partial_x + \sin(\varphi + \theta)\partial_y,$$
$$Y := -\sin(\varphi + \theta)\partial_x + \cos(\varphi + \theta)\partial_y.$$

Tada iz jednadžbi (4.3) i (4.4) slijedi

$$D_{Steer} = \partial_\theta,$$
$$D_{Drive} = X + \sin\theta\partial_\varphi = \cos(\varphi + \theta)\partial_x + \sin(\varphi + \theta)\partial_y + \sin\theta\partial_\varphi.$$

Za izraz derivacija $D_{Wriggle}$ i D_{Slide} pomoću vektora X i Y potrebno je uvesti sljedeću lemu:

Lema 4.2.1. *Operatori $X, Y, \partial_\varphi, \partial_\theta$ zadovoljavaju*

(a) $[\partial_\theta, X] = [\partial_\varphi, X] = Y,\ [\partial_\theta, Y] = [\partial_\varphi, Y] = -X,\ [X, Y] = 0,$

(b) $Xf = Yf = \partial_\varphi f = 0$ *za bilo koji trigonometrijski polinom* $f = f(\theta)$,

(c) Za bilo koje funkcije $a = a(\theta), b = b(\theta), c = c(\theta)$ (bilo koje funkcije koje ne ovise o x, y i φ) imamo:

$$\begin{aligned}[c\partial_\varphi, aX + bY] &= -cbX + caY,\\ [\partial_\theta, aX + bY] &= (a' - b)X + (b' + a)Y,\\ [\partial_\theta, c\partial_\varphi] &= c'\partial_\varphi.\end{aligned}$$

(b) Tvrdnja vrijedi jer su X i Y linearne kombinacije ∂_x i ∂_y, a za funkciju f smo pretpostavili da je neovisna o x, y i φ.

(a) Vrijedi jer su X i Y funkcije po $\varphi + \theta$.

(c) Jednakosti slijede iz tvrdnji (a) *i* (b).

$D_{Wriggle}$=$D_{[Drive,Steer]} = -[D_{Drive}, D_{Steer}] = [D_{Steer}, D_{Drive}] = [\partial_\theta, X + \sin\theta\partial_\varphi]$.
Koristeći svojstvo (a) dobivamo $[\partial_\theta, X] = Y$ te koristeći svojstvo (c) vrijediti će $[\partial_\theta, \sin\theta\partial_\varphi] = cos\theta\partial_\varphi$ stoga dobivamo:

$$D_{Wriggle} = Y + \cos\theta\partial_\varphi.$$

$D_{Slide} = D_{[Wriggle,Drive]} = -[D_{Wriggle}, D_{Drive}] = [X + \sin\theta\partial_\varphi, Y + \cos\theta\partial_\varphi]$,
dalje iskoristimo svojstvo linearnosti i (a) $[X, Y] = 0$ iz čega dobivamo $-\cos\theta[\partial_\varphi, X] + \sin\theta[\partial_\varphi, Y]$, potom koristeći svojstvo (a) na kraju će vrijedi jednakost:

$$D_{Slide} = -\cos\theta Y - \sin\theta X.$$

Sada vrijedi

$$D_{Drive} = X_0, \quad D_{Wriggle} = Y_0 + \partial_\varphi, \quad D_{Slide} = Y_0$$

u $\theta = 0$ te su X_0 i Y_0 ortonormirani vektori X i Y.

□

Dokazali smo da su $Drive, Wriggle$ i $Slide$ vektori tangente u bazi vektorskog tangencijalnog prostora u svakoj točki, odnosno vektorska polja u bazi Liejeve algebre.
Uzmimo za primjer *Wriggle motion*:
Okreni volan malo udesno (obrnuti Steer motion), vozi unazad kratku udaljenost (obrnuti Drive motion), okreni volan malo ulijevo (Steer motion), vozi unaprijed kratku udaljenost (Drive motion).
Ponavljajući ovu kretnju moguće je rotirati auto u malo ograničeno područje tj. bočno ga parkirati.

Zaključak

Konstruirali smo Liejevu algebru vektorskih polja mnogostrukosti $\mathbb{R}^2 \times S^1$ pomoću kojih se može opisati paralelno parkiranje. Dokazali smo da vozilo možemo parkirati krečući se u smjeru vektora Liejeve algebre odnosno u smjeru linearnih kombinacija vektora $Drive, Wriggle$ i $Slide$. Na taj način dobivamo rješenje diferencijalne jednadžbe (4.1), krivulju $x(t)$ koja predstavlja putanju vozila pri bočnom parkiranju.

Popis slika

Literatura

[1] Bishop R.L., Crittenden R.J.: *Geometry of manifolds*, Academic Press Series in Pure and Applied Mathematics XV, April, 1964.

[2] Britannica, Sophus Lie, URL: `https://www.britannica.com/biography/Sophus-Lie`

[3] JWR: *Parking a Car and Lie Brackets*, University of Pennsylvania, October 21, 2012.

[4] Kraljević, Hrvoje: *Liejeve algebre*, Sveučilište u Zagrebu, PMF matematički odjel, Zagreb, lipanj 2013.

[5] Nelson, Edward: *Tensor Analysis*, Mathematical Notes, Princeton University Press, New Jersey, 1967.

[6] Rossmann, Wulf: *Lie Groups, An Introduction Through Linear Groups*, Department of Mathematics and Statistics University of Ottawa, Oxford, 2002.

[7] Slamić, Ivana: *Metrički prostori*, Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku, siječanj, 2022.