# John Conway

**Lovrić, Nikola**

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Diplomski studij Matematika i informatika

Nikola Lovrić

# JOHN CONWAY

Diplomski rad

Rijeka, srpanj 2023.

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Diplomski studij Matematika i informatika

Nikola Lovrić

# JOHN CONWAY

**Mentor:** doc. dr. sc. Sanda Bujačić Babić

Diplomski rad

Rijeka, srpanj 2023.

# Sadržaj

## Sažetak

U ovome radu prezentirat će se biografija Johna Hortona Conwaya te neki poznatiji problemi kojima se bavio. Igra života je najpoznatiji problem kojim se John Conway bavio pa je tom problemu posvećen značajan dio rada. Uz Igru života u radu je prikazan i izrazito zanimljiv Problem anđela. John Conway je bio izvrstan matematičar s izrazito puno ideja te inovativnih metoda prilikom dokazivanja tvrdnji iz različitih grana matematike. Njegovi radovi predstavljaju vrlo značajne i progresivne doprinose u teoriji brojeva, algebri i teoriji igara.

## Ključne riječi

John Conway, Igra života, Problem anđela

# 1 Uvod

John Horton Conway dao je značajan doprinos mnogim granama matematike, uključujući logiku, algebru, teoriju brojeva, kombinatoriku i geometriju, što je iznimno matematičko postignuće. Štoviše, bio je veliki popularizator matematike i njegova su predavanja uvijek privlačila veliki broj ljudi. Česta suradnja s Martinom Gardnerom i objavljivanje radova u časopisu *Scientific America* predstavili su ga široj javnosti. Njegov zarazni entuzijazam za matematiku uvjerio je studente i kolege da je matematika zabavna. Zbog toga su ga studenti jako voljeli, a često su bili promatrači kada je eksperimentirao s raznim idejama. S druge strane, Conway je promatrajući studente i njihove igre dolazio do novih spoznaja u matematici. Upravo je na taj način došao do *Igre života*, svojeg najpoznatijeg i najpopularnijeg algoritma. Ono sto je Igru života učinilo tako popularnom bila je upravo njezina jednostavnost, odnosno jednostavno definirana pravila koja je karakteriziraju. Igra života opisuje odvijanje života koj uključuje rađanje, trajanje života i njegov kraj što je Conway postigao vrlo jednostavnim skupom pravila koja su razumljiva svakome, čak i nekome tko nema matematičko obrazovanje. U ono vrijeme igru su posebno voljeli programeri početnici koji su uživali na računalima gledati kako se mjenjaju polja nakon pokretanja početnog stanja. Igru je mogao svatko igrati i bila je razumljiva svima. Ono što je također ljude oduševljavalo je bila povezanost igre sa stvarnim životom.

Conwayjeva veličina bila je u njegovoj jednostavnosti: u naoko jednostavnim i uobičajenim pojavama i zakonitostima pronalazio je matematička otkrića koja su se proučavala godinama poslije. Na sličan način je proučavao i *Problem anđela*, odnosno igru *Anđeo i vrag*, problem *Sudnjeg dana* i mnoge druge probleme kojima se bavio.

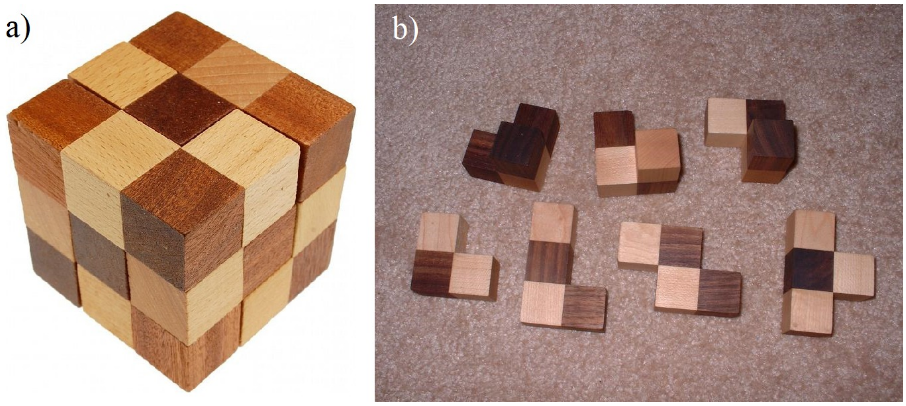
Conway je bio jako znatiželjan i izrazito predan matematici. Njegov rad i vrijeme koje je posvetio znanosti rezultiralo je bogatom ostavštinom u svijetu matematike. Mali dio njegovog velikog doprinosa pokušat ćemo prenijeti u ovome radu.

## 2 Biografija

John Conway rođen je 26. prosinca 1937. u Liverpoolu u Engleskoj. Njegovi roditelji bili su Agnes Boyce i Cyril Horton Conway. Johnov otac bio je asistent u kemijskom laboratoriju. John je imao dvije sestre, Sylviu i Joan. U vrlo ranoj dobi, John se zainteresirao za matematiku. Njegova majka je govorila kako je već s 4 godine znao recitirati potencije broja 2. Djetinjstvo mu je bilo dosta teško jer je odrastao u vrijeme ratne oskudice. U osnovnoj školi John je bio izvanredan učenik i najbolji u gotovo svakom razredu. Već na razgovoru prije srednje škole Conway je rekao da želi biti matematičar na Cambridgeu. U srednjoj školi je u matematici bio daleko ispred svih učenika u razredu. Pokazivao je velike interese i za astronomiju. Nakon što je završio srednju školu, upisuje matematiku na Sveučilištu Cambridge ([1], [2]).


Slika 1: John Horton Conway

Tijekom godina studiranja Conway je zavolio matematičke igre te je postao strastveni igrač *tavle* (eng. backgammon). Kao student diplomskog studija bio je uključen u sveučilišne matematičke klubove: New Pytagoreans i Archimedeans, kojima je često davao doprinose vlastitim istraživanjima, zanemarujući ponekad svoja predavanja. U to vrijeme upoznao je britanskog matematičara Michaela Guya[1] koji je bio student preddiplomskog studija matematike i s kojim je Conway puno surađivao. Zajedno su klasificirali sva moguća rješenja *Soma kocke* danskog matematičara Pieta Heina.




Slika 2: a) Soma kocka sastoji se od $3\times3\times3$ jedinične kocke, obojanih u dvije boje pri čemu je smeđih 13, a bijelih 14. b) 7 dijelova Soma kocke sastoje se od svih mogućih kombinacija 3 ili 4 jedinične kocke pri čemu svaki dio ima barem jedan unutarnji kut.

Conway i Guy su otkrili da postoji točno 240 različitih načina na koje se kocka može sastaviti. Nacrtali su graf (*Somap*) s 240 vrhova koji odgovaraju rješenjima. Bridovi koji spajaju dva vrha su poveznica između dva odgovarajuća rješenja koja se mogu dobiti jedno iz drugoga povlačenjem, zakretanjem i ponovnim umetanjem dvaju dijelova. Graf je sadržavao jednu povezanu komponentu od 239 rješenja i jedno izolirano rješenje. Uz to, za vrijeme studiranja, Conway i Guy dali su potpunu listu konveksnih uniformnih 4-dimenzionalnih Arhimedovih politopa ([3]). Tek je 2004. godine formalno dokazano da je Conway-Guyev skup konveksnih uniformnih 4 - dimenzionalnih Arhimedovih politopa potpun ([4]).

John je diplomirao matematiku 1959. godine, ali njegova uključenost u mnoge izvannastavne matematičke aktivnosti dovela je do toga da nije postigao konačne rezultate Matematičkog Triposa koje je očekivao. Matematički Tripos drugi je naziv za preddiplomski studij matematike na Cambridgeu koji može biti trogodišnji ili četverogodišnji. Kako bi se pohađalo četvrtu godinu,

[1]Michael J. T. Guy (1943.) britanski je računalni znanstvenik i matematičar. Poznat je po ranom radu na računalnim sustavima, kao što je sustav Phoenix na Sveučilištu u Cambridgeu, te po doprinosima teoriji brojeva, računalnoj algebri i teoriji poliedra u višim dimenzijama.

potrebno je postići jako dobre rezultate u trećoj godini. Međutim, britanski matematičar Cristopher Zeeman prepoznao je njegovu urođenu briljantnost i potpunu predanost matematici, podržavši njegov napredak do doktorata.

Conwaya je za studenta istraživača na doktorskom studiju uzeo Harold Davenport[2] te su proučavali probleme u teoriji brojeva. Od Harolda je dobio zadatak da pronađe rješenje Waringovog problema za pete potencije. Naime, Waringov problem dobio je ime po engleskom matematičaru Edgaru Waringu koji ga je postavio 1770. godine. Waring je postavio tvdnju da se svaki prirodan broj može zapisati kao suma četiri kvadrata, devet kubova i 19 četvrtih potencija te općenito da svaki prirodan broj možemo zapisati u obliku sume fiksnog broja $k$-tih potencija za svaki pozitivan broj $k$. No, sve te tvrdnje su bile samo slutnje. Waringov problem glasi ovako:

**Teorem 2.1 (Waringov problem)** *Za svaki $k \geq 0$ postoji pozitivan cijeli broj $s$ (koji ovisi samo o $k$) takav da se svaki pozitivan cijeli broj može zapisati u obliku sume od $s$ nenegativnih $k$-tih potencija.*

Conwayjev zadatak bio je riješiti Waringov problem za $k = 5$. U početku nije bio zainteresiran za rješavanje problema. No, nakon jednog sastanka s Davenportom zainteresirao se za problem te godinu dana intenzivno radio na rješenju. Nakon godinu dana uspio je riješiti problem star skoro 200 godina i bio je izrazito ponosan na tu činjenicu. Međutim, Davenport nije bio zadovoljan dokazom te mu je savjetovao da se bavi nekim drugim granama matematike. Conwayjev dokaz nikada nije službeno objavljen jer je Conway smatrao da u dokazu nije doprinio svojim idejama, nego je sve bila ideja Edgara Waringa. Waringov problem za $k = 5$ dokazao je Jing-Run Chen 1964. godine. Conway je doktorirao 1964. godine, a naslov doktorske disertacije bio je *Homogeni uređeni skupovi* ([5]).

Nakon doktorata, imenovan je predavačem čiste matematike na Sveučilištu u Cambridgeu. Iste godine izabran je i za stipendiju te se počeo baviti matematičkom logikom. Međutim, sam za sebe je rekao da se osjećao kao da se ne bavi pravom matematikom te je postao vrlo depresivan. U tom razdoblju Conway je objavio svoju prvu knjigu Regular *Algebra and Finite Machines* ([6]). Njegov rad, veliki interes za matematiku te golemi talent bili su već prepoznati unutar Sveučilišta, ali još uvijek nije postigao značajniji uspjeh.

[2]Harold Davenport (1907. - 1969.) bio je engleski matematičar koji se bavio teorijom brojeva. Specijalno, bavio se geometrijom brojeva, diofantskim aproksimacijama i analitičkom teorijom brojeva. Diplomirao je matematiku na Sveučilištu u Manchesteru, a kasnije je stekao još jednu diplomu iz matematike na Sveučilištu u Cambridgeu, što je u ono vrijeme bilo uobičajeno.

## 2.1 Conwayjeva čudesna godina (*annus mirabilis*)

1968. godine Conway je dao neke od najznačajnijih doprinosa matematici što je promijenilo njegov status u matematičkom društvu. Zbog toga je ovu godinu često nazivao svojom čudesnom godinom (*annus mirabilis*) ([1]).

U to je vrijeme pozornost matematičara bila usmjerena na područje matematike o kojem Conway nije znao gotovo ništa, a koje će imati ogroman utjecaj na njegovu karijeru: pakiranje sfera u $n$-dimenzionalnom prostoru. Udaljenost između dviju točaka u $n$-dimenzionalnom euklidskom prostoru lako se definira proširenjem poznatih 2D i 3D udaljenosti koje slijede neposredno iz Pitagorina poučka. Prema tome, ako su $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dvije točke u $\mathbb{R}^n$, tada je udaljenost između točaka $x$ i $y$, definirana kao

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Jedinična kugla kojoj je središte $a \in \mathbb{R}^n$, može se definirati kao

$$B(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < 1\},$$

odnosno, skup točaka u $\mathbb{R}^n$ čija je udaljenost od središta $a$ manja od 1. Postavlja se pitanje: koji dio od $\mathbb{R}^n$ mogu zauzeti jedinične sfere koje se ne preklapaju ako su raspoređene optimalno (tako da minimizuraju praznine između njih). Odgovor je jednostavan za $n = 2$, gdje su sfere krugovi, ali postaje prilično težak čak i za $n = 3$. Problem postaje rješiv ako se ograničimo na rešetkasta pakiranja gdje su središta sfera smještena u točkama

$$\{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n \mid m_i \in \mathbb{Z}\},$$

pri čemu je $a_1, a_2, \dots, a_n$ linearno nezavisan skup $n$ vektora u $\mathbb{R}^n$.

Međutim, čak i s tim pravilnijim pakiranjem može biti izuzetno teško dokazati optimalnost pakiranja. Unatoč tome, 1965. John Leech[3], matematičar s Cambridgea koji se bavio i računarstvom, proizveo je 24-dimenzionalnu rešetku $\Lambda$ koja je omogućila izuzetno učinkovito pakiranje. Konstrukcija rešetke $\Lambda$ temeljila se na bogatoj kombinatornoj strukturi Mathieuove grupe $M_{24}$ ([7]). Kompletna grupa simetrija od $\Lambda$ je beskonačna jer sadrži sve translacije za vektore rešetke. Leech je promatrao podgrupu koja se sastoji od svih simetrija koje fiksiraju ishodište $O$. Leech je predvidio red spomenute podgrupe do na faktor 2, ali nije mogao dokazati postojanje svih simetrija koje je predvidio ([8]).

[3] John Leech (1926. - 1992.) britanski je matematičar koji se bavio teorijom brojeva, geometrijom i kombinatornom teorijom grupa. Najpoznatiji je po *Leechovoj rešetki* koja je bila od velike važnosti u teoriji konačnih jednostavnih grupa.

John McKay[4], koji je u to vrijeme bio doktorand u Edinburghu i koji je upoznao Conwaya na Međunarodnom kongresu matematičara u Moskvi 1966., zainteresirao je Conwaya za Leechovu slutnju. Conway je pronašao jednostavnu dodatnu simetriju od $\Lambda$ i red grupe koju ona generira zajedno s monomijalnom grupom permutacija i promjena predznaka korištenih u konstrukciji $\Lambda$. On je dokazao da je to potpuna grupa simetrija od $\Lambda$ (s fiksnim ishodištem) te opisao još neka bitna svojstva te grupe ([9]). Grupu je nazvao $\cdot O$, kako bi označio da stabilizira ishodište $O$. U njegovu čast te grupe su nazvane *Conwayjeve grupe.* Detaljniji uvid u ovaj dio njegovog proučavanja može se naći u knjizi *Atlas of finite groups* ([9]).

Naime, Conway je bio glavni od pet autora knjige *Atlas of finite groups* ili kako su je skraćeno zvali samo *Atlas.* Proučavajući konačne grupe postao je svjestan da ne postoji jedinstveni izvor informacija o grupama. Odlučio je stoga napisati referentnu knjigu za to područje matematike. Knjiga je dobila ime *Atlas* jer su razne beskonačne familije grupa predstavljale kontinente, iz kojih je lako bilo uočiti određenu zemlju, odnosno grupu unutar te familije. Sporadične su grupe bile otoci, a neke od njih su tvorile i arhipelage. Dvije najvažnije informacije dostupne u knjizi bile su tablica s oznakama grupa i maksimalne podgrupe. U ovoj knjizi Conway je skupa s koautorima objedinio sve što se u tom trenutku znalo o konačnim grupama, što nam opet govori o kakvom je znalcu i matematičaru riječ ([1]).

Ubrzo nakon toga, 1970. godine, Conway je osmislio Igru života. Koristeći Go ploču[5] Conway je konstruirao stanični automat u kojem su istaknuti kvadrati na ploči "živi". U svakoj idućoj generaciji neki od njih bi "umrli" zbog prenapučenosti, dok bi novi bili "rođeni". Igra života vrlo brzo je prerasla $19 \times 19$ Go ploču. Širu popularnost igra je stekla nakon što joj je Martin Gartner posvetio svoju kolumnu u *Recreational mathematics* u časopisu *Scientific American.* Gardner je također tvrdio kako je igra otvorila novo veliko polje za matematička istraživanja ([10]). Mnogi su govorili da je u 1970. godini više računalnog vremena bilo posvećeno Igri života nego bilo kojoj drugoj pojedinačnoj aktivnosti.

Conway je 1972. godine osmislio još jednu vrstu igre koju je nazvao *Sudnji dan.* Sudnji dan je algoritam pomoću kojeg možemo odrediti koji je dan u tjednu proizvoljni datum. Conway je sebi postavio cilj da će udvostručiti

[4]John McKay (1939. - 2022.) bio je britansko - kanadski matematičar i akademik koji je radio na Sveučilištu Concordia u Montrealu u Kanadi. McKay se bavio svojstvima konačnih grupa, njihovim reprezentacijama i simetrijama. Svjetski je poznat po McKayejevoj korespondenciji te *Nevjerojatnoj mjesečini.*

[5]Go ploča služi za igranje strateške društvene igre Go porijeklom iz Kine u kojoj je cilj okružiti više teritorija od protivnika. Sastoji se od $19 \times 19$ mreže linija koja sadrži 361 točku.


Slika 3: Pet autora *Atlasa* na konferenciji *Atlas 10 Years On* održanoj u Birminghamu 1985. skupa s tortom koja predstavlja knjigu ([1])

svoju brzinu određivanja dana u tjednu svakih 5 godina za 10 datuma u nizu. Brzinu je vježbao na način da mu računalo, prije nego počne s radom, izbaci 10 nasumičnih datuma iz prošlosti i budućnosti, a Conway mora izračunati koji će to biti dan u tjednu. Njegov rekord 1993. godine iznosio je 15.92 sekunde za izračunavanje svih 10 datuma, odnosno otprilike 1.5 sekundi za svaki datum. Conwayu je to osim zabave bila i strategija da održi svoj mozak oštrim i spriječi starenje koje ga je sve više brinulo ([11]).

Još jedno otkriće po kojem je Conway poznat su nadrealni brojevi (*Surreal numbers*). Conway ih je smatrao svojim najznačajnijim otkrićem te je živio u nadi da će nadrealni brojevi ipak dobiti univerzalno priznanje koje zaslužuju. Oni su nastali tako što je Conway proučavao igre dvojice igrača Goa te otkrio da se neke igre ponašaju kao brojevi.

Nadrealne brojeve publici je predstavio Donald Knuth u svojoj matematičkoj noveli *Surreal numbers: How Two Ex-students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness* ([12]). U spomenutoj noveli, dvoje diplomiranih kolega, Bill i Alice, nasukani su na pustom otoku te pronalaze drevni kamen s misterioznim natpisom, "U početku je sve bilo uništeno, a J.H. Conway je počeo stvarati brojeve". Bill i Alice zatim provode dane radeći na natpisima na kamenu kako bi otkrili teoriju koja se krije u pozadini nadrealnih brojeva ([13]).

Svaki nadrealni broj stvoren je na određeni dan i odgovara dvama skupovima brojeva. Za svaki nadrealni broj $x$ pišemo $x = \{X_L \mid X_R\}$ pri čemu $X_L$ i

$X_R$ zovemo redom lijevi i desni skupovi od $x$. Nadrealne brojeve označavamo sa $S$, a temelje se na 2 aksioma koja je Conway definirao ([13]).

**Aksiom 2.1** *Svaki broj odgovara dvama skupovima prethodno stvorenih brojeva tako da ne postoji element lijevog skupa koji je veći ili jednak bilo kojem elementu desnog skupa.*

Dakle, ako je $x = \{X_L \mid X_R\}$, tada za $\forall x_L \in X_L$ i $\forall x_R \in X_R$ vrijedi $x_L \ngeq x_R$. Pišemo to kao $X_L \ngeq X_R$. Drugim aksiomom definirana je relacija biti manji od ($\leq$) između dva nadrealna broja.

**Aksiom 2.2** *Jedan broj je manji ili jednak od drugog broja ako i samo ako ne postoji element lijevog skupa prvog broja koji je veći ili jednak od drugog broja i ne postoji element desnog skupa drugog broja koji je manji ili jednak od prvog broja.*

Dakle, $x = \{X_L \mid X_R\} \leq y = \{Y_L \mid Y_R\} \iff X_L \ngeq y$ i $Y_R \nleq x$.

Prema tome, na nulti dan definiramo nulu kao $0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$ ili jednostavnije $0 = \{|\}$. Sada kada smo stvorili prvi nadrealni broj, možemo stvarati nove u sljedećem danu, danu 1. Stavimo li 0 umjesto lijevog ili desnog skupa broja, dobivamo dva nova broja $x = \{0 \mid\}$ i $y = \{\mid 0\}$ pri čemu je $x = 1$, a $y = -1$. Svaki novi broj mora biti konzistentan s dva aksioma kojima smo definirali nadrealne brojeve. Na sličan način bismo u danu 2 stvorili 17 novih brojeva i tako dalje ([13]).

Nadrealne brojeve možemo povezati s Dedekindovim rezovima[6]. Uloga Dedekindovih rezova je konstrukcija skupa realnih brojeva pomoću skupa racionalnih brojeva. Dedekindova metoda dijeli racionalne brojeve u dva skupa $\alpha$ i $\beta$ tako da nijedan element iz $\alpha$ nije veći od bilo kojeg elementa iz $\beta$. Dedekindov rez je uredeni par $(\alpha, \beta)$ dva skupa, $\alpha$ ("lijevi" ili "donji" skup) i $\beta$ ("desni" ili "gornji" skup), $\alpha$, $\beta \subset \mathbb{Q}$, koji zadovoljavaju uvjete:

1. Svaki racionalni broj pripada jednom od dva skupa $\alpha$, $\beta$.
2. $\alpha$, $\beta \neq \emptyset$.
3. Svaki element iz $\alpha$ je manji od svakog elementa iz $\beta$.
4. $\beta$ nema najmanji element.

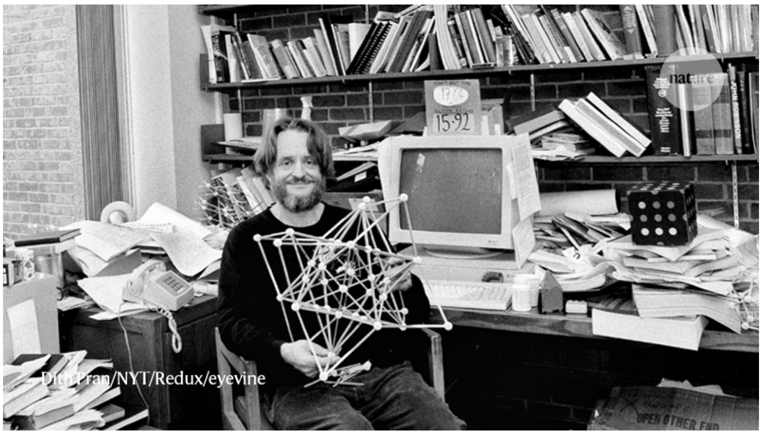
[6]Dedekindovi rezovi dobili su ime po njemačkom matematičaru Richardu Dedekindu (1831. - 1916.) koji je dao veliki doprinos teoriji brojeva, apstraktnoj algebri i aksiomatskim temeljima aritmetike.

Svaki je rez jedinstveno određen svojim lijevim i desnim skupom od kojih jedan određuje drugi ([14]).

U svojoj knjizi *On numbers and games* ([15]) Conway govori da je njegova metoda konstrukcije nadrealnih brojeva puno jednostavniji i općenitiji slučaj Dedekindove metode. Glavna kritika Dedekindove metode je što se očekuje da su racionalni brojevi već konstruirani na neki drugi način ([15]).

Godine 1982. Conway je postavio *Problem anđela* (*The Angel problem*). Problem se prvi puta pojavio u Conwayjevoj knjizi *Winning Ways for Your Mathematical Plays* ([16]) pod naslovom *Anđeo i izjelica kvadrata* (*The angel and the square-eater*). Anđeo ima određenu moć koja mu govori koliko polja na beskonačnoj šahovskoj ploči može preskočiti. Ako je anđeo moći 1, onda se kreće poput šahovskog kralja. Vrag može pojesti bilo koje polje na ploči. Pitanje je tko od ova dva igrača pobjeđuje? Vrag pobjeđuje ako okruži anđela pojedenim poljima tako da anđeo ne može više napraviti nijedan korak, a anđeo pobjeđuje ako se može nastaviti kretati zauvijek ([17]).

Inače, Conway je bio pomalo neuredan, stolovi su mu često bili puni papira, knjiga, bilješki, modela. Soba na fakultetu mu je bila u sličnom stanju. Znalo mu se dogoditi da unatoč izvrsnom pamćenju ne može naći papirić s važnim rezultatom koji je otkrio prije nekoliko dana, a nije zabilježen nigdje.



Slika 4: Conwayjev ured na Sveučilištu

Conway je 1986. godine napustio Cambridge i prihvatio imenovanje na Katedri za matematiku Johna Von Neumanna na Princetonu u Sjedinjenim Američkim Državama, gdje je velik dio njegova rada bio usmjeren na geometriju. Johnov razigrani pristup matematici osvojio je njegove nove kolege na Princetonu te je John potaknuo odličnu atmosferu koja je na Sveučilištu nedostajala ([1]).

Tijekom života Conway je bio jako zainteresiran za teoriju brojeva i nikada ga interes nije napustio. Godine 1998. objavio je *Senzualne (kvadratne) forme* (*Sensual (quadratic) form*) ([18]). Skupa s američkim matematičarom Williamom Alanom Scheenbergerom proučavao je kvadratne forme i u neobjavljenom djelu dokazali su teorem 15, kako su ga sami nazvali. Teorem 15 glasi ovako:

**Teorem 2.2 (Teorem 15)** *Ako pozitivno definitna kvadratna forma čija se matrica sastoji od cijelih brojeva predstavlja svaki pozitivni cijeli broj do 15, tada ona predstavlja i svaki pozitivni cijeli broj.*

Conway je pretpostavio da bi sličan rezultat vrijedio za integralne kvadratne forme. Pretpostavku je dokazao Manjul Bhargava 2005. godine, samo što je broj 15 zamijenjen s brojem 290 ([19]).

Možda najnoviji rad po kojem je Conway poznat je *Teorem slobodne volje* (*Free will theorem)* na kojem je radio skupa sa Simonom Kochenom[7]. To je Conwayu bio izvanredan pomak u svijetu teorijske fizike, ali i filozofije jer je teorem imao puno filozofskih aspekata. Teorem slobodne volje tvrdi da ako imamo slobodnu volju tako da na naše ponašanje ne utječe prošlost, tj. nije determinističko, takvo ponašanje moraju imati i neke elementarne čestice. Dokaz teorema se temeljio na 3 aksioma (Spin, Twin i Fin) ([20]).

Tijekom svoje matematičke karijere Conway je dobio mnoge nagrade i priznanja za svoja postignuća. Londonsko matematičko društvo mu je dodijelilo Berwickovu nagradu 1971. godine. Dobitnik je i Nemmersove nagrade za matematiku Sveučilišta Northwestern (1998.) te nagrade Leroy P. Steele Američkog matematičkog društva za matematička izlaganja (2000.). U ožujku 1981. izabran je za člana kraljevskog društva u Londonu, a 1992. za člana Američke akademije znanosti i umjetnosti. Godine 2001. dobio je počasnu diplomu Sveučilišta u Liverpoolu ([1]).

Conway se ženio 3 puta. Sa svojom prvom ženom Eileen oženio se 1961. godine te imao 4 kćeri. *The Guardian* piše da je datume rođenja svoje djece pamtio kao "60-Fibs", budući da su rođeni 1960. godine plus Fibbonaccijevi brojevi, tj. $1960. + 2$, $1960. + 3$, $1960. + 5$, $1960. + 8$ ([11]). Kada se Conway preselio u SAD, rastao se od Eileen te se oženio s Larissom Queen, s kojom je napisao niz radova i s kojom je imao 2 sina: Alexa i Olivera. Brak Johna i Larisse završio je 1992. godine te je ušao u težak period svoga života tijekom

[7]Simon Bernhard Kochen (1934.) kanadski je matematičar koji se bavio teorijom modela, teorijom brojeva i kvantnom mehanikom. Doktorirao je na Sveučilištu Princeton na kojem trenutno nosi zvanje profesor emeritus. Dobitnik je sedme nagrade Frank Nelson Cole za teoriju brojeva.

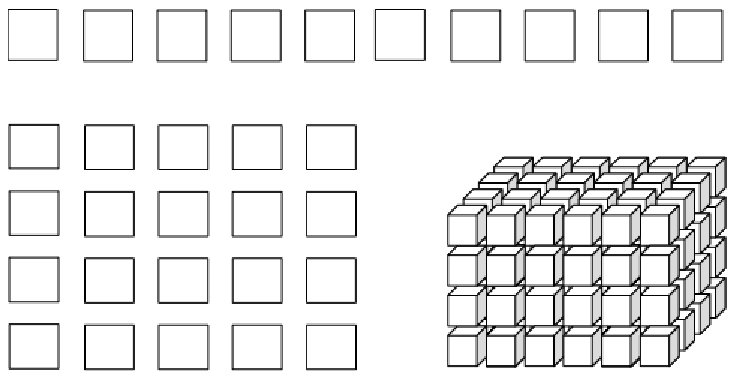
kojega je pokušao i samoubojstvo. Često je kasnije u svojim predavanjima spominjao taj događaj kako bi se na taj način što bolje nosio s time. Također, imao je i ozbiljnih zdravstvenih problema poput srčanih i moždanih udara. Nakon jedne duže veze, upoznao je svoju treću buduću suprugu Dianu s kojoj je imao sina Garetha rođenog 2001. godine. Iako su se John i Diana rastali 2008. godine, ona je živjela blizu njega i ostali su u bliskim odnosima. Diana i Gareth bili su velika podrška kada se Johnovo zdravlje narušilo posljednjih godina njegova života. John Horton Conway umro je 11. travnja 2020. godine u New Jerseyu u SAD-u od Covida 19 u dobi od 82 godine ([1]).

# 3 Igra života

Igra života jedno je od najpoznatijih postignuća Johna Conwaya. Igra života poznata je i pod jednostavnim nazivom "Život".

## 3.1 Osnovna ideja

Igra života stanični je automat koji je osmislio John Conway. Stanični automat je skup stanica na pravilnoj rešetci proizvoljne dimenzionalnosti. Na primjer, 2-dimenzionalni stanični prostor izgleda kao beskonačno velik komad papira s kvadratićima gdje svaki kvadratić predstavlja jednu stanicu. Svaka stanica je u jednom od konačnog broja stanja. Stanje u kojem se nalazi pojedina stanica mijenja se u regularnim vremenskim intervalima (koracima). Svako novo stanje dane stanice definirano je određenim skupom pravila koja uzimaju u obzir njeno trenutno stanje kao i stanja stanica oko nje (njenih susjeda), tj. pravilo je lokalno i vrijedi generalno za sve stanice ([21]).



Slika 5: Primjeri staničnih prostora u jednoj, dvije i tri dimenzije ([21]).

## 3.2 Povijest

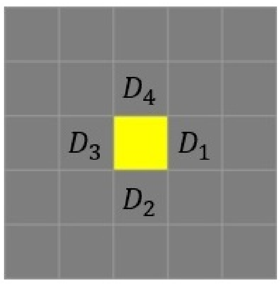
Stanične prostore prvi je otkrio John von Neumann[8]. 1950-ih godina Neumann je pokušao pronaći samoreplicirajuće strojeve, tj. najjednostavnije

[8]John von Neumann (1903. - 1957.) bio je američki matematičar koji je osim matematike studiorao fiziku i kemiju. Došao je do važnih otkrića u različitim granama teorijske

strojeve koji bi mogli sami sebe replicirati. Najprije je radio s diferencijalnim jednadžbama sve dok njegov poljski kolega Stanislav Ulam nije predložio drugačiji model, sličan prostorima rešetki koje je koristio za proučavanje kristala. Ta promjena je dovela do značajnog pojednostavljenja staničnih automata i prostora. Von Neumann je shvatio da bi dvodimenzionalni model bio dovoljan kao koncept za stanični prostor. U svom 2-dimenzionalnom modelu formirao je stanični prostor od stanica koje su mogle biti u jednom od nekoliko mogućih stanja. Svaka stanica bi promijenila svoje stanje u skladu s lokalnim pravilom koje izračunava novo stanje kao funkciju četiri najbliže susjedne stanice (četiri najbliže stanice još se nazivaju ortogonalni susjedi, a ova vrsta susjedstva sada se naziva "von Neumannovo" susjedstvo (Slika 6)).

No samo-replikacija nije bila sve, von Neumann je od svog stroja tražio dva svojstva: univerzalno računanje i univerzalna konstrukcija. Univerzalno računanje osiguralo bi da automati koje je Neumann konstruirao ne budu trivijalni, odnosno konstrukcije u staničnom prostoru bile bi sposobne izračunati bilo koju izračunljivu funkciju. Najjednostavniji način dokazivanja univerzalnog računanja bio je pokazivanje da se Turingov stroj može izgraditi u staničnom prostoru. Univerzalna konstrukcija bila je osnova za samoreplikaciju i omogućavala je izgradnju automata koji može stvarati druge konstrukcije u staničnom prostoru.

Iako je von Neumann razvio jezgru svojih samoreplicirajućih strojeva, otkriće nije dovršio. Potpuni model objavio je Arthur W. Burks nakon njegove smrti 1966. godine ([21]).




Slika 6: Ortogonalni susjedi: $D_1$ i $D_3$, $D_2$ i $D_4$

Istim područjem matematike bavio se i britanski računalni znanstvenik

i primijenjene matematike, a smatra se i jednim od osnivača teorija igara. Također, proučavao je logiku elektroničkih računala, sudjelovao u konstrukciji superračunala ENIAC te projektu atomske bombe.

Edgar F. Codd[9]. On je sažeo svoje istraživanje zahtjeva za univerzalnim računanjem i konstrukcijom i pokazao da ne postoji stanični prostor s 2 stanja i lokalnim pravilom koji koristi von Neumannovo susjedstvo, a ima svojstvo univerzalnosti. Nakon toga, Codd nastavlja razvijati stanični prostor koji pokazuje univerzalnost, ali ima jednostavnija pravila od von Neumannova prostora (Coddov stanični automat ([22])). Pokazao je kako se i univerzalno računanje i univerzalna konstrukcija mogu ostvariti u njegovom jednostavnijem prostoru. Također, prvi je koji isprobava svoje stanične automate online, tj. na računalnom terminalu ([21]).

Vrlo brzo nakon Coddovih eksperimenata John Conway smišlja još jedan stanični prostor kojeg naziva Igra života. Igra života bila je otkriće jer je to jedan od najjednostavnijih staničnih prostora koji posjeduje univerzalno računanje i univerzalnu konstrukciju, iako ta činjenica nije bila poznata kada je Igra prvi put objavljena. Premda je Conway pri konstrukciji pravila za svoj stanični prostor htio omogućiti složenu interakciju, prava složenost i brojnost konstrukcija otkivena je tek nakon što su pravila za prostor postavljena. S druge strane, to nije bio slučaj kod von Neumannna i Codda. Za razliku od von Neumannovih i Coddovih pravila koja su razmatrala samo susjede na određenim pozicijama, Conwayjeva pravila nisu uzimala u obzir pozicije susjeda, nego samo broj susjeda u određenom stanju. Na taj način su Conwayjeva pravila bila općenitija te puno jednostavnija od spomenutih Coddovih i von Neumannovih ([21]).

## 3.3 Osnovni pojmovi

Uvedimo osnovne definicije nužne za konstrukciju i razumijevanje Igre života.

**Definicija 3.1** ***Stanični prostor*** *je rešetkasti prostor koji se sastoji od stanica. Svaka stanica nalazi se u jednom od prethodno definiranih stanja.*

**Definicija 3.2** ***Stanični automat*** *je struktura izgrađena u staničnom prostoru, tj. automat izgrađen od stanica.*

Pojmovi stanični prostor i stanični automat se ponekad poistovjećuju.

**Definicija 3.3** ***Stanica*** *je pojedinačni element staničnog prostora, odnosno najmanja jedinica prostora.*

**Definicija 3.4** ***Susjedstvo*** *neke stanice čine stanice koje ju okružuju i utječu na njezino sljedeće stanje.*

[9]Edgar Frank Codd (1932. - 2003.) bio je engleski računalni znanstvenik koji je izumio relacijski model za upravljanje relacijskim bazama podataka. Također, poznat je i po Alpha jeziku, izvornom jeziku baze podataka kojeg je predložio.

**Definicija 3.5** ***Lokalno pravilo*** *je pravilo koje regulira prijelaz između stanja.*

**Napomena 3.1** *Pravilo se zove "lokalno" jer koristi samo susjedne stanice za određivanje novog stanja.*

Ponašanje staničnog prostora zavisi od izbora susjedstva.

**Definicija 3.6** ***Konfiguracija*** *je trenutni prikaz svih stanja stanica, a predstavlja jednu točku u vremenu.*

Najčešće, kada govorimo o konfiguraciji, mislimo na početnu točku ili rezultat pokretanja staničnog prostora.

**Definicija 3.7** *Međukonfiguraciju, odnosno jedan korak u evoluciji staničnog prostora nazivamo* ***generacija****.*

U evoluciji staničnog prostora, vrijeme koje prolazi mjeri se u generacijama.

## 3.4 Pravila

Spomenuli smo već da Conwayjeva pravila nisu uzimala u obzir pozicije susjeda, nego samo broj susjeda u određenom stanju. Svaka stanica ima dva stanja, živo i mrtvo, te se sastoji od 8 susjednih stanica koje čine njezino susjedstvo. Dakle, ukupno imamo 9 stanica koje promatramo te prema tome $2^9(512)$ različitih kombinacija živih i mrtvih susjeda. Svaka kombinacija može se razviti na svoj način rezultirajući tako brojem od $2^{2^9}$ različitih pravila. Pravila su sljedeća:

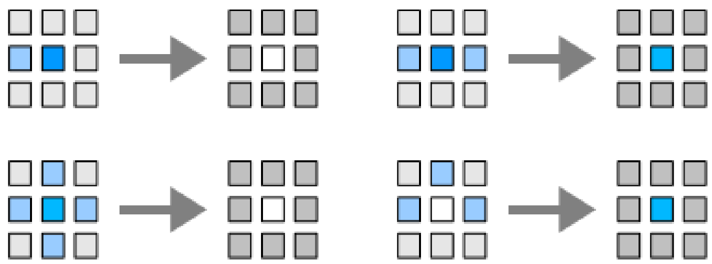
1. Svaka živa stanica s manje od dva živa susjeda umire zbog usamljenosti.

2. Svaka živa stanica s dva ili tri živa susjeda živi do sljedeće generacije.

3. Svaka živa stanica s više od tri živa susjeda umire zbog prenaseljenosti.

4. Svaka mrtva stanica s točno tri živa susjeda postaje živa zbog razmnožavanja.

Početno stanje ili uzorak čini sjeme cijelog sustava koji se kasnije razvija. Rađanje i umiranje stanica se događa istovremeno kao i primjena pravila na svaku stanicu bila ona živa ili mrtva. Igra života je dobila ime po tome što stanice simboliziraju živuće organizme koji trebaju susjede kako bi preživjeli.

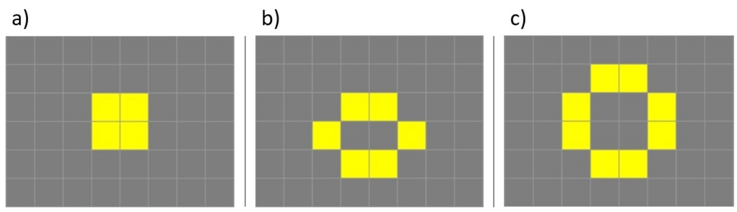


Slika 7: Pravila Igre života ([21])

## 3.5 Primjeri uzoraka

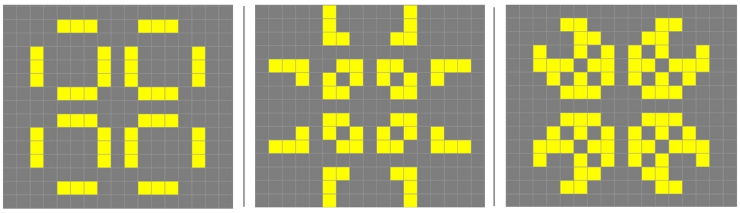
U Igri života postoje različite vrste uzoraka koje dijelimo prema njihovom ponašanju.

Prvi od njih su stabilni oblici (mrtva priroda) ili stanični organizmi kako ih je Conway nazivao (eng. still life). Oni se ne mjenjaju s generacije na generaciju. Od stabilnih oblika najpoznatiji su: blok (*eng. block*), pčelinja košnica (*eng. bee hive*) i jezero (*eng. pond*) (Slika 8). Oni su jednaki kao i početni uzorak te se ne mijenjaju.




Slika 8: a) blok, b) pčelinja košnica i c) jezero

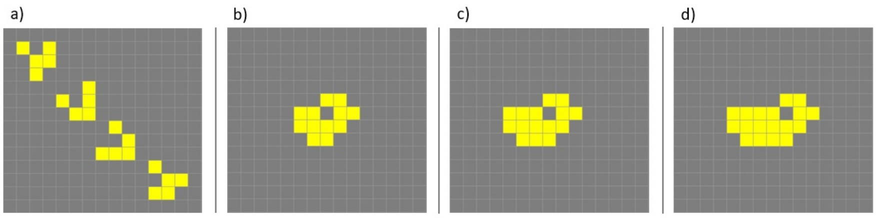
Sljedeća stanja su oscilatori (*eng. oscillators*) koji se vraćaju u početno stanje nakon konačnog broja generacija. Zbog toga razlikujemo oscilatore npr. perioda 2 i perioda 3. Oscilator perioda 2 nakon 2 generacije opet dolazi u početno stanje dok oscilator perioda 3 nakon 3 generaciju poprima početno stanje. Od oscilatora perioda 2 najpoznatiji su: žmigavac (*eng. blinker*), krastaču (*eng. toad*) i svjetionik (*eng. beacon*). Najčešci oscilator perioda 3 je *Pulsar* kojeg je John Conway otkrio 1970. godine (Slika 9). Postoje i oscilatori s periodima 4, 8, 14, 15, 30 i mnogi drugi.



Slika 9: Pulsar perioda 3

Još jedna skupina uzoraka Igre života su svemirski brodovi (*eng. spaceships*) koji se sami prenose preko mreže i tako u beskonačnost. Najpoznatiji svemirski brodovi su klizač (eng. glider) koji ima period 4 te lagani, srednji i teški svemirski brod (*eng. lightweight, middleweight i heavyweight spaceship*) (Slika 10) ([23], [24]).

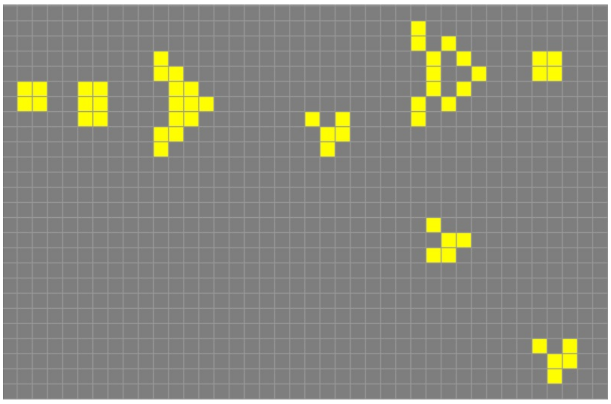
Postoje i slučajevi kad uzorak potpuno izumire, tj. sve žive stanice iščezavaju, no to nam nije toliko zanimljivo, i obično kada nam se to dogoditi zaključimo da nam početno stanje nije bilo odgovarajuće.




Slika 10: a) četiri oblika klizača, b) lagani, c) srednji i d) teški svemirski brod

Conway je izvorno pretpostavio da nijedan uzorak ne može rasti beskonačno. Drugim riječima, populacija proizvoljnog početnog uzorka s konačnim brojem živih stanica ne može rasti preko nekog konačnog broja živih stanica. Matematički, možemo reći da je kardinalni broj skupa živih stanica nekog uzorka u svim generacijama konačan. Conway je čak te 1970. godine ponudio i nagradu onome tko do kraja godine dokaže ili opovrgne njegovu pretpostavku. Nagradu je osvojio u studenom iste godine tim s Instituta za tehnologiju Massachusetts koji je bio predvođen Bilom Gosperom. Uzorak je nazvan Gosperov pištolj klizača (*eng. Gosper glider gun*) te je bio prvi poznati konačni uzorak s neograničenim rastom, tj. broj živih stanica ovog uzorka raste neograničeno. Gosperov pištolj klizača (Slika 11) u 15. generaciji proizvodi prvi klizač, a onda svake 30. generacije nakon toga novi klizač.

Kasnije su pronađeni i uzorci s manjim početnim brojem živih stanica koji su mogli također rasti neograničeno ([24]).



Slika 11: Gosperov pištolj klizača

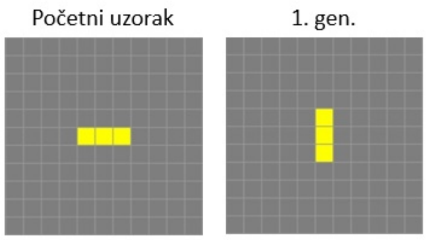
## 3.6 Nepredvidivost Igre života

Postoji li neki način da se predvidi sudbina uzorka Igre života? Hoće li uzorak na kraju potpuno nestati, ili možda postati stabilan, ili oscilirati, ili se prenositi preko ravnine, ili se možda neograničeno proširiti? Odgovoriti na ovakva pitanja je jako teško. Kao primjer pogledajmo jednostavnu početnu konfiguraciju - ravnu crtu koja se sastoji od $n$ živih stanica:

**Primjer 3.1**

| | |
|---|---|
| $n = 1$ ili 2 | Uzorak odmah nestaje jer se sastoji od jedne ili dvije žive stanice. Prema Conwayjevim pravilima one umiru od usamljenosti jer svaka od njih ima manje od dva živa susjeda, a nijedna druga stanica ne može oživjeti. |
| $n = 3$ | Uzorak je žmigavac (oscilator perioda 2) koji se iz konfiguracije od 3 vodoravno spojene žive stanice pretvara u konfiguraciju od 3 vertikalno spojene žive stanice (Slika 12). |
| $n = 4$ | Uzorak postaje pčelinja košnica nakon 2 generacije (Slika 13). |
| $n = 5$ | Uzorak se pretvara u semafor (*eng. traffic lights*) koji se sastoji od 4 žmigavca ( Slika 14). |
| $n = 6$ | Uzorak nestaje nakon 12. generacije |

| | |
|---|---|
| $n = 7$ | Uzorak se u 14. generaciji pretvori u farmu meda [10] (*eng. honey farm*) |
| $n = 8$ | Uzorak se u 48. generaciji pretvori u 4 bloka i 4 pčelinje košnice |
| $n = 9$ | Uzorak se u 20. generaciji pretvori u dva semafora |
| $n = 10$ | Uzorak se u 2. generaciji pretvori u oscilator perioda 15 (*eng. pentadecathlon*) |
| $n = 11$ | Uzorak se u 15. generaciji pretvori u 2 žmigavca |
| $n = 12$ | Uzorak se u 15. generaciji pretvori u 2 pčelinje košnice |
| $n = 13$ | Uzorak se u 24. generaciji pretvori u 2 žmigavca |
| $n = 14$ ili 15 | Uzorak nestaje u 28., odnosno 40. generaciji |
| $n = 16$ | Uzorak se u 32. generaciji pretvori u 8 žmigavaca |
| $n = 17$ | Uzorak se u 24. generaciji pretvori u 4 bloka |
| $n = 18$ ili 19 | Uzorak nestaje u 20., odnosno 25. generaciji |
| $n = 20$ | Uzorak se u 20. generaciji pretvori u samo 2 bloka |



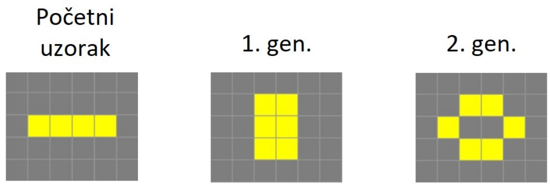

Slika 12: Za $n = 3$ uzorak je žmigavac

Uočimo da i kada pratimo jednostavne uzorke koji počinju s jako malim brojem živih stanica i dalje nije lako predvidjeti što će se dogoditi s uzorkom. Ova nepredvidivost Igre života ujedno je i razlog njezine zanimljivosti i intrigantnosti koju pobuđuje. Conway u svojoj knjizi *Winning Ways for Your Mathematical plays* ([24]) zaključuje odlomak o nepredvidivosti Igre života rečenicom: "Život (Igra života) je stvarno nepredvidiv!" (Life is really unpredictable!).

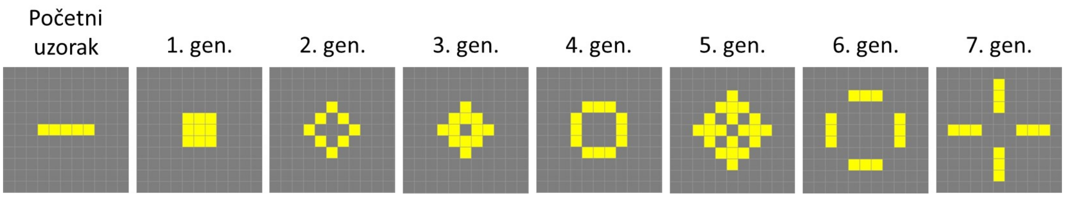
## 3.7 Edenski vrtovi

Postoje konfiguracije koje mogu biti samo početno stanje, odnosno ne postoje konfiguracije iz kojih su nastale (nemaju roditelje). Takve konfiguracije nazvane su Edenski vrtovi (*eng. Gardens of Eden*) jer su stvorene "niotkuda",

[10] Farma meda sadrži 4 pčelinje košnice

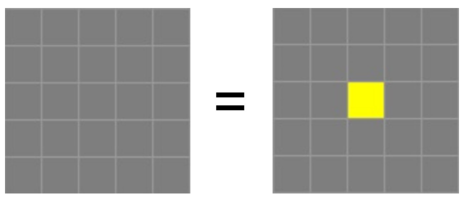



Slika 13: Za $n = 4$ uzorak u 2. generaciji postaje pčelinja košnica




Slika 14: Za $n = 5$ uzorak u 7. generaciji postaje semafor

poput prvih ljudi Adama i Eve koji su živjeli u Edenskom vrtu. Pokazat ćemo da takva konfiguracija postoji unutar kvadrata $(5n-2)\times(5n-2)$, za dovoljno veliki $n$. Kao potencijalne roditelje bit će dovoljno promatrati konfiguracije na kvadratu $5n \times 5n$. Promotrimo sada komponentu $5 \times 5$. Primjetimo da, ukoliko je komponenta prazna, možemo je zamijeniti komponentom koja ima jednu živu stanicu u centru (Slika 15), bez utjecaja na sljedeće generacije. Time smo smanjili broj mogućih konfiguracija potencijalnih roditelja s $2^{25n^2}$




Slika 15: Dvije slične komponente $5 \times 5$

na:

$$(2^{25} - 1)^{n^2} = 2^{24.999999957004337\ldots\cdot n^2}$$

u $5n \times 5n$ kvadratu. Međutim, u $(5n - 2) \times (5n - 2)$ kvadratu ima

$$2^{(5n-2)^2} = 2^{25n^2-20n+4}$$

mogućih konfiguracija. Stoga, ako za neki $n$ vrijedi da je

$$24.999999957004337... \cdot n^2 < 25n^2 - 20n + 4,$$

odnosno da je broj konfiguracija potencijalnih roditelja u $5n \times 5n$ kvadratu manji od broja svih konfiguracija u $(5n-2) \times (5n-2)$ kvadratu, onda sigurno bar jedna od konfiguracija na manjem kvadratu neće imati roditelja. Rješavanjem ove kvadratne nejednadžbe dobivamo da nejednakost vrijedi za $n \leq 465163200$. Iz ovoga slijedi da se unutar $2325816000 \times 2325816000$ kvadrata nalazi bar jedna konfiguracija Edenskog vrta.

Ovakav način argumentiranja prvi je koristio E. F. Moore[11] u puno općenitijem kontekstu. Preciznim i pažljivim brojanjem u Igri života ovaj slučaj se smanjio na kvadrat $1400 \times 1400$.

Svaki Edenski vrt sadrži konačan uzorak koji se naziva siroče (*eng. orphan*) s jednakim svojstvom da nema roditelja, bez obzira na preostale stanice. Korištenjem računala napravljeni su sve manji Edenski vrtovi. Matematičari su sami sebi postavili izazov pronaći najmanji Edenski vrt (siroče), to jest uzorak koji ima najmanje živih stanica ili mu je potrebno najmanje područje za život. 1971. godine nastao je prvi objavljeni uzorak koji je imao 226 živih stanica te zauzimao prostor veličine $9 \times 33$. Siroče koje trenutno drži rekord po broju živih stanica nastalo je 2009. godine, a pronašao ga je Nicolay Beluchenko. Sastoji se od 45 živih stanica na dimenziji $11 \times 11$ (Slika 16 a)). Siroče koje drži rekord po najmanjem području koje mu je potrebno za život pronađeno je 2016. godine, a otkrio ga je Steven Eker. Sastoji se od 57 živih stanica na dimenziji od $12 \times 8$ (Slika 16 b)).

## 3.8 Igra života kao računalo

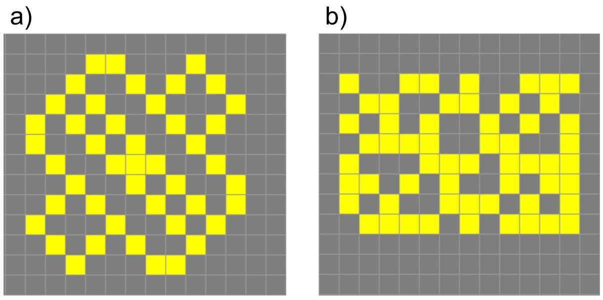
Velik broj računala je 1970-ih godina programiran tako da može igrati Igru života. U današnje vrijeme, igra je dostupna online[12], ili kao aplikacija pod nazivom *Conway's Game of Life* dostupna na Google Play-u.

U ovom odlomku pokazat ćemo obrnutu činjenicu, a to je da uzorke igre života možemo definirati tako da imitiraju računala. Ideja je prikazana na sljedećoj slici (Slika 17).

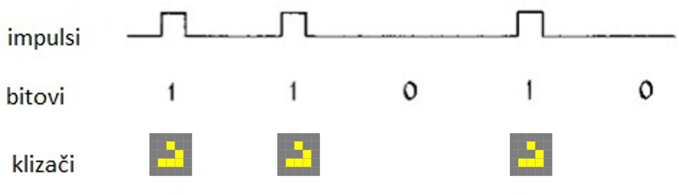
Stara računala su napravljena od komada žice duž koje prolaze impulsi električne energije. Umjesto toga možemo postaviti da određenim linijama

[11] Edward Forest Moore (1925. - 2003.) bio je američki profesor matematike i informatike, poznat kao izumitelj Mooreovog konačnog stroja stanja. Proučavao je stanične automate, između ostalog i Igru života, gdje je dokazao Teorem Edenskog vrta (*The Garden of Eden theorem*).

[12] https://playgameoflife.com




Slika 16: a) siroče s najmanjim brojem živih stanica, b) siroče s najmanjim područjem potrebnim za život ([26])

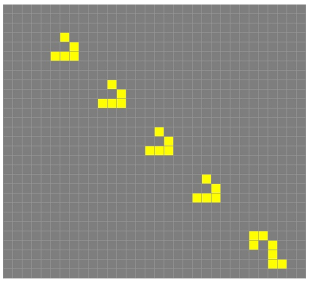



Slika 17: Klizanje impulsa ([24])

u ravnini kao impulsi putuju klizači. Budući da klizači putuju dijagonalno, rotiramo ravninu za 45 stupnjeva, te se onda oni kreću prema gore ili prema dolje. Dio stroja koji se zove sat generira impulse u pravilnim intervalima, a većina radnih dijelova stroja sastavljena je od logičkih vrata, odnosno uređaja koji provode logičke operacije NE, ILI i I.

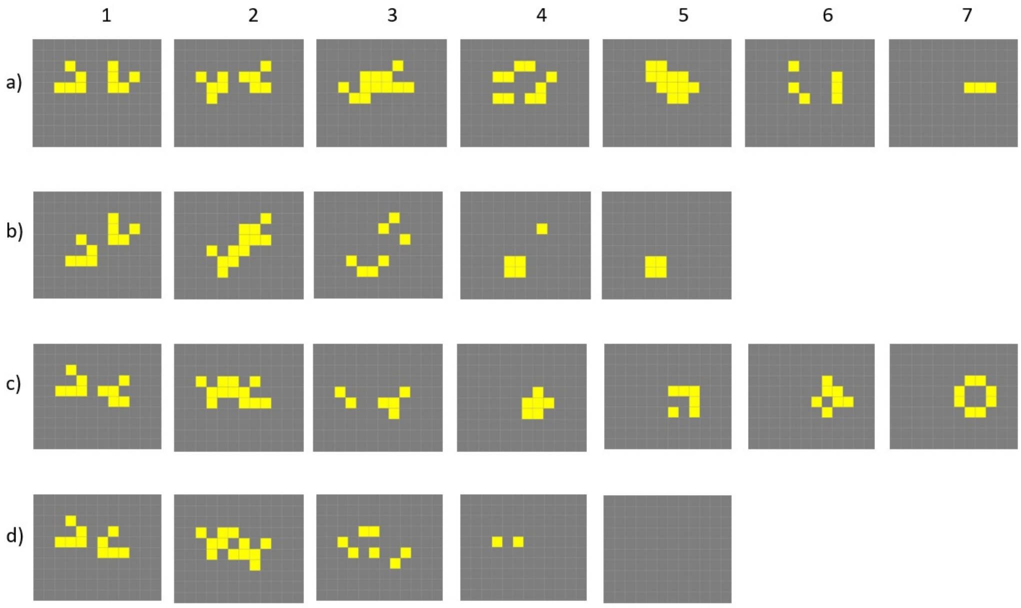
Ako se prisjetimo kako izgleda pištolj klizača (Slika 2), očito je da ga možemo koristiti kao generator impulsa jer u jednakim intervalima stvara klizače (osim prvog). Za konstrukciju proizvoljnog impulsa potreban nam je jedan poseban uzorak koji je od velike važnosti. Zovemo ga izjelica (*eng. eater*), a dobio je naziv po tome što pojede svaki klizač pri sudaru s njime (Slika 18). Izjelica je nastala sudaranjem dvaju klizača, a otkrio ju je Bil Gosper. Želimo li simulirati impulse vrijednosti 0, jednostavno samo ispred pištolja klizača postavljamo izjelicu koja pojede svaki klizač te signal ima samo bitove vrijednosti 0. Na taj način dodavanjem i uklanjanjem izjelice ispred pištolja klizača možemo modulirati proizvoljni signal. Pitanje je kako ćemo programirati logička vrata, tj. konfiguraciju koja bi provodila logičke operacije na putujućem nizu klizača? Pogledajmo nekoliko primjera interakcije dvaju klizača koji se sijeku pod pravim kutovima.

Ima jako puno načina na koje se dva klizača mogu sudariti jer postoji puno



Slika 18: Četiri klizača i izjelica

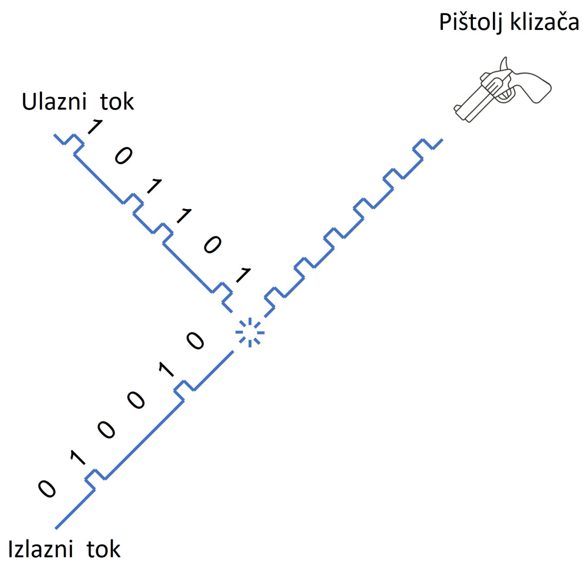
različitih mogućnosti njihovog točnog rasporeda i vremenskog podešavanja njihovog kretanja. Na Slici 19 prikazane su neke od mogućnosti sudaranja klizača u kojima nastaje žmigavac (a), blok (b), jezero (c) te jedan od mogućih načina u kojem klizači potpuno nestaju (d). Ovaj zadnji slučaj se možda čini prilično nekonstruktivan, ali ovakve reakcije nestajanja ponekad mogu biti izrazito korisne.




Slika 19: Sudaranje klizača

### 3.8.1 Logička vrata NE

Iskoristimo li spomenutu reakciju nestajanja, zajedno s pištoljem klizača možemo stvoriti logička vrata NE. Pretpostavimo da s lijeve strane dolazi niz impulsa u obliku niza klizača koji čine ulazni tok. Svaki klizač na ulaznom toku označava logičku jedinicu, a njegov nedostatak predstavlja logičku nulu (Slika 17). Ulazni tok je vremenski i prostorno sinkroniziran s kontrolnim tokom (pištolj klizača s desne strane). U slučaju kada je na ulaznom toku prisutan klizač, on se sudara s klizačem iz kontrolnog toka te se reakcijom nestajanja (Slika 19 d)) pretvara u prazan uzorak. U slučaju da na ulaznom toku nema klizača, klizač iz kontrolnog toka neometano prolazi. Dakle, za ulazni bit 1 kao izlaz dobivamo 0, dok za ulazni bit 0 kao izlaz dobivamo 1 (kao što je shematski prikazano u Slici 20).




Slika 20: Shematski prikaz logičkih vrata NE u Igri života

Na sličan način mogu se stvoriti logička vrata ILI i I ([25]) koja su malo složenija. Kod I vrata imamo 2 ulazna toka te jedan kontrolni tok i jednu izjelicu. Kod ILI vrata uz dva ulazna toka imamo dva kontrolna toka te jednu izjelicu. Uz pomoć ovih osnovnih logičkih operatora možemo konstruirati i razne druge logičke sustave.

## 3.9 Zaključak

Igra života imala je jako veliki utjecaj na svijet sve od 1970. kad ju je Conway osmislio. Iako je otkrivena prije 50 godina i dalje je popularna te se njezine konfiguracije proučavaju i danas. Za njezinu raširenost najviše je zaslužna jednostavnost i nepredvidivost konfiguracija te široka dostupnost. Igru života možemo povezati s mnogim područjima kao što su na primjer: logički sklopovi, fizika (npr. strujni krugovi), biologija (evolucija ekoloških zajednica), glazba (vizualizacija tonova), i mnogim drugim. Također, Igra života potakla je upotrebu staničnih automata za simuliranje raznih prirodnih procesa . Igra života smatra se Conwayjevim najpoznatijim otkrićem te ga je učinila široko poznatim i izvan matematičkog svijeta.

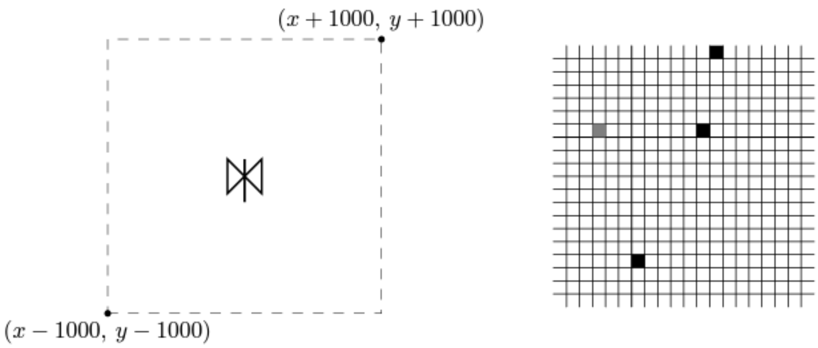
# 4 Problem anđela

Problem anđela problem je u kombinatornoj teoriji igara koji je postavio John Conway. Problem je poznat i pod nazivom Igra anđela i vraga. Igru igraju dva igrača koji se zovu anđeo i vrag, a igra se na beskonačnoj šahovskoj ploči, pri čemu je svako polje uređeni par cijelih brojeva $(x, y)$. Prije početka igre navede se koliku moć ima anđeo. Na primjer, ako je anđeo moći $k$ ($k-$anđeo) pri čemu je $k$ prirodan broj, to znači da anđeo može skočiti na bilo koje polje koje je udaljeno za $k$ polja od trenutnog polja na kojem se anđeo nalazi. To bismo matematički zapisali na sljedeći način: anđeo može skakati s polja $(x, y)$ na polje $(x', y')$ ako je

$$|x - x'| \leq k \quad i \quad |y - y'| \leq k.$$

S druge strane vrag može skočiti na bilo koje polje. Jednom kada vrag skoči na neko polje, anđeo na to polje više ne može sletjeti, ali ga može preletjeti. Vrag pobjeđuje u igri ako dovede anđela u situaciju da se više ne može pomaknuti na nijedno slobodno polje, dok anđeo pobjeđuje samo ako se može nastaviti kretati zauvijek. Glavni nedostatak za anđela je što vrag ne može napraviti krivi potez, odnosno vrag je u boljem položaju od anđela jer nikad ne može pogriješiti. Koliko god potez vraga izgledao loš, anđeo je izgubio jedno polje na koje može sletjeti i vrag je sigurno u većoj prednosti, nego što je bio u ranijim koracima ([17]).

Problem anđela formuliramo pitanjem: *Može li anđeo s dovoljno velikom moći k pobijediti vraga?*

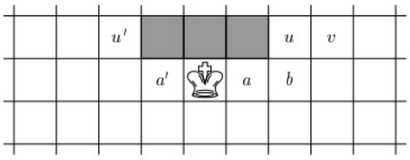



Slika 21: Anđeo moći 1000 i vrag koji je iskoristio već 3 polja ([17])

## 4.1 Lov anđela moći 1 - šahovskog kralja

Berlekamp[13] je 1982. godine u knjizi *Winning Ways for Your Mathematical Plays* ([16]) pokazao da vrag može pobijediti anđela moći $k = 1$ koji se kreće kao šahovski kralj. No, mi ćemo skicirati jednu noviju strategiju ([27]) koja se bazira na izvornim Berlekampovim analizama.

Pretpostavimo da vrag želi spriječiti kralja da pređe određenu horizontalnu liniju sastavljenu od kvadrata u koordinatnoj mreži. U slučaju da su tri kvadrata neposredno iznad kralja iskorištena, kako je prikazano na Slici 22, zadatak obrane linije je lako riješiti.



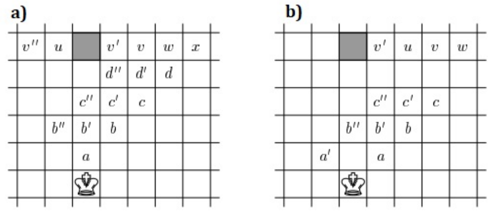

Slika 22: Guranje šahovskog kralja duž linije ([27])

Ako se kralj pomakne udesno na polje $a$, vrag jednostavno odgovara blokiranjem polja $u$. Daljnji kraljev pomak na polje $b$ rezultira vragovim slijetanjem na polja $v$ i tako dalje. U slučaju kraljevog pomaka ulijevo na polje *a'*, vrag blokira polje *u'*. Ovakvom igrom, gdje god da kralj krene, tri kvadrata iznad njega su uvijek blokirana, što mu onemogućava da pređe tu horizontalnu liniju.

Na Slici 23 a) kralj se nalazi pet koraka od obrambene linije duž gornjeg ruba gdje je vrag upravo iskoristio prvi kvadrat. Pokazat ćemo, kako god kralj prilazio toj liniji, vrag će uvijek moći složiti tri iskorištena kvadrata iznad njega.

Ako kralj napravi jedan korak naprijed na polje $a$, vrag odgovara poljem $u$. Kraljevi pomaci na polja *b'* ili *b"* direktno rezultiraju trostrukim blokom vraga koji odgovara poljima *v'* ili *v"*. Nadalje, promatramo kraljev potez na polje $b$. U tom slučaju vrag pojede polje $v$, nakon čega su kraljevi pomaci na polja *c'* ili *c"* oba blokirani vragovim odlaskom na polje *v'*. Ostaje u obzir uzeti samo još kraljev pomak na polje $c$, na što vrag odgovara poljem $w$. Zatim kraljev pomak na polje $d$, vrag može blokirati poljem $x$, dok kraljevi koraci na polja *d'* ili *d"* vrag blokira poljem *v'*.

[13]Elwyn Ralph Berlekamp (1940. – 2019.) bio je profesor matematike i informatike na Kalifornijskom sveučilištu Berkeley. Poznat je po svom radu u računalnim znanostima, teoriji kodiranja i kombinatornoj teoriji igara. Koautor je knjige *Winning Ways for Your Mathematical Plays.*

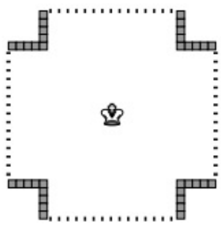



Slika 23: Postavljanje trostrukog bloka kvadrata ([17])

Druga opcija za prvi kraljev korak prikazana je pomakom na polje *a*, kao na Slici 23 b). Kraljev pomak na polje *a'* simetričan je pomaku na polje *a*, stoga ga nećemo dalje razmatrati. Kralj napravi korak na polje *a*, a vrag na polje *u*. Ako se kralj sada pomakne na polje *b'*, vrag formira tri kvadrata korištenjem polja *v'*. Kraljevi pomaci na polja *b* i *b"* rezultiraju simetričnim konfiguracijama, pa možemo promotriti jedan slučaj od ta dva, kraljev pomak na polje *b*. Vrag odgovara poljem *v*. Zatim kraljev pomak na polje *c* vrag blokira s poljem *w*, dok kraljeve pomake na polja *c'* ili *c"* vrag blokira poljem *v'*.

Dakle, pet koraka je dovoljno vragu da složi tri kvadrata u nizu kako bi blokirao kralja koji mu prilazi.

Slika 24 prikazuje kako pretvoriti prethodno opisanu vragovu obranu linije s tri kvadrata u uspješnu strategiju hvatanja šahovskog kralja. S prva 44 poteza vrag blokira određene kvadrate u četiri kuta zamišljenog kvadrata oko kralja. Zamišljeni kvadrat mora biti dovoljno velik kako bi se osiguralo da se tijekom te prve faze kralj ne približi rubu tog kvadrata. U trenutku kada kralj dođe do na pet koraka od iscrtkane linije vragovi kutovi napravljeni od pojedenih kvadrata moraju biti gotovi te vrag dalje igra strategiju obrane linije. Četiri kuta su tu kako bi osigurala da vrag nikad ne bude primoran istovremeno igrati na dvije strane.



Slika 24: Hvatanje kralja ([17])

## 4.2 Neke strategiije za hvatanje ograničenog anđela proizvoljne moći $k$

Većina ljudi koji su 1980-ih godina razmišljali o ovom problemu stvarali su probne strategije za anđela poizvoljne moći $k$. Savjetovali su anđelu da izračuna određenu "potencijalnu funkciju" koja ovisi o iskorištenim kvadratima, a zatim da napravi potez koji minimizira (ili maksimizira) tu funkciju ([17]).

Vragu je obično lako pobijediti takve strategije pronalaženjem neke karakteristike na koju je ova funkcija "previše osjetljiva". Pretpostavimo da je funkcija "vrlo osjetljiva" na pojedene kvadrate blizu anđela. Na primjer, neka je funkcija zadana tako da kao argument uzima koordinate kvadrata na kojem se anđeo i vrag trenutno nalaze te računa udaljenost između njih. U slučaju da je ta udaljenost jako mala, funkcija poprima neke neobične vrijednosti. Tada bi vrag trebao izgraditi zamku u obliku potkove, jako velikog promjera, daleko - sjeverno od njihove početne pozicije. To će, naravno, dovesti do toga da anđeo odleti u suprotnom smjeru prema jugu, što je brže moguće. Kad je zamka postavljena, vrag natjera anđela u nju tako što uzastopno koristi kvadrate južno od njega ([17]).

Koristi li anđeo neku novu funkciju koja je osjetljiva na iskorištene kvadrate koji su jako daleko od njega, vrag bi mogao napraviti zamku u obliku potkove srednje veličine u odnosu na polje koje koriste u igri. Zatim vrag može, nakon što napravi zamku, uplašiti anđela tako što bi koristio nekoliko kvadrata koji su jako daleko i južno od anđela. Kako je funkcija koju koristi anđeo osjetljiva na pojedene kvadrate jako daleko od njega, anđeo upada u zamku vraga te vrag pobjeđuje ([17]).

Točni detalji strategije vraga ovisit će o određenoj potencijalnoj funkciji anđela. Čini se nemogućim pronaći funkciju koja je jako dobra i koja može zaštititi anđela od vraga.

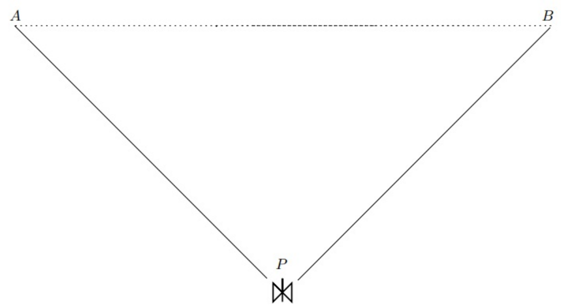
Razmišljajući o ovom problemu Conway je smislio nekoliko strategija koje omogućuju vragu da pobijedi anđela proizvoljne moći $k$ koji ima ograničeno kretanje. Jedan takav anđeo opisan je u sljedećoj definiciji.

**Definicija 4.1** *Anđeo koji se kreće tako da mu se $y$ koordinata u svakom koraku strogo povećava naziva se* ***budala*** *(eng. fool).*

**Teorem 4.1** *Vrag može pobijediti budalu.*

Uočimo da, ako se anđeo nalazi u početnoj točki $P$, u svakom sljedećem koraku može se nalaziti u konusu koji je definiran polupravcima nagiba $\pm\frac{1}{k}$, čija je početna točka $P$ (Slika 25). Stoga je dovoljno da vrag svojim kretanjem omeđi konus s gornje strane, zidom debljine $k$ kako ga anđeo ne bi mogao preskočiti kada dođe do njega. Očigledno je da već anđeo moći $k = 2$ može doći do zida prije nego ga vrag dovrši. Conway je pronašao moguće rješenje kao strategiju profinjavanja zida.

**Skica Dokaza:**
Pretpostavimo da je zid udaljen $h$ kvadrata sjeverno od budale (u daljnjem tekstu anđeo). Zid će biti duljine $|AB| = 2hk + 1$ kvadrata, stoga bi se cijeli zid debljine $k$ sastojao od oko $2hk^2$ kvadrata. Vrag počinje parcijalno puniti zid korištenjem kvadrata. Pola puta do zida, $\frac{h}{2}$, anđeo moći $k$ može prijeći za najviše $\frac{h}{2k}$ koraka. Za to vrijeme vrag je od ukupnog broja kvadrata zida, $2hk^2$, pojeo također njih najviše $\frac{h}{2k}$, odnosno 1 od svaka $4k^3$ kvadrata zida, raspoređujući ih jednoliko po duljini zida. Nakon toga, vrag određuje novi konus potencijlnih anđelovih koraka, koji sada pokriva samo pola duljine početnog zida. Nadalje, vrag sada raspoređuje svoja sljedeća $\frac{h}{4k}$ iskorištena kvadrata duž manjeg segmenta te opet popuni isti udio zida, 1 na $4k^3$ kvadrata. U ovom trenutku, anđeo se nalazi na udaljenosti $\frac{h}{4}$ od zida. Kako bi vrag popunio cijeli zid ispred anđela, očigledno mu je potrebno $4k^3$ ovakvih koraka, što znači da $h$ mora biti veći od $2^{4k^3}$.




Slika 25: Konus kretanja anđela kao budale ([17])

Modifikacijom spomenute strategije, Conway je dokazao da vrag može pobijediti i "pametnije" budale koje se uz kretanje prema gore mogu kretati i horizontalno ($y$ koordinata se ne mora strogo povećavati), ali i budale koje se osim prema gore i horizontalno, mogu kretati i prema dolje konačan broj koraka.

## 4.3 Máthéov dokaz za anđela moći $k = 2$

Problem anđela 2007. godine dokazao je András Máthé[14]. Máthé je pokazao da anđeo moći $k = 2$ može pobijediti vraga, iz čega slijedi i da bilo koji anđeo koji je veće moći od $k = 2$ ga također može pobijediti.

U svojem radu *The angel of power 2 wins* ([28]) Máthé uvodi *dobrog vraga* (eng. nice devil) koji nikada ne uništava polja na kojima je anđeo bio ili na koja je anđeo mogao doći u prethodnim koracima. Kada anđeo igra protiv dobrog vraga, on priznaje poraz u slučaju da ga vrag uspije ograničiti na konačno područje.

Máthéov dokaz dijeli se na dva dijela:

1. Ako anđeo može pobijediti dobrog vraga, tada može i pravog vraga.

2. Máthé daje eksplicitnu strategiju kako pobijediti dobrog vraga.

U drugom dijelu, anđeo pobjeđuje dobrog vraga uz pretpostavku da je uz sve kvadrate koje vrag uništi, uništena i cijela lijeva poluravnina. Anđeo uništene kvadrate tretira kao zidove labirinta, koje potom zaobilazi tehnikom "ruka na zidu". Odnosno, anđeo drži lijevu ruku na zidu labirinta i kreće se uz zid. Máthé je pokazao da dobri vrag ne može uhvatiti u zamku anđela koji usvoji ovu strategiju.

Prvi dio dokaza dokazan je kontradikcijom, te stoga Máthéov dokaz ne daje eksplicitnu pobjedničku strategiju protiv pravog vraga.

Osim Máthéa, Problem anđela je dokazao i Oddvar Kloster[15]. U isto vrijeme kad je Máthéov dokaz objavljen (2007.), objavljen je i Klostterov dokaz ([29]) za anđela moći $k = 2$ koji daje eksplicitnu pobjedničku strategiju protiv pravog vraga.

Problem anđela ima razne varijante i generalizacije u kojima moć anđela ne mora biti samo prirodan broj, nego može biti i racionalan ili realan broj. Često se umjesto anđela promatrao šahovski kralj određene moći. Jedina razlika između anđela i kralja je što kralj veće moći od 1 nije mogao preskakati iskorištena polja. Ako je kralj moći $\frac{3}{2}$, to znači da kralj napravi 3 poteza, a zatim vrag napravi 2 poteza ($KKKVVKKKVV...$). No, to može rezultirati različitim uzorcima kretanja kraljeva koji su jednake moći. Na primjer, kralj moći $\frac{3}{2}$ i kralj moći $\frac{6}{4}$ imaju različite uzorke kretanja, što nije sasvim pošteno. Kao rješenje, Kutz u svom doktorskom radu ([27]) uvodi funkciju koja ovisi

[14] András Máthé izvanredni je profesor na Sveučilištu u Warwicku u Velikoj Britaniji. Bavi se aktualno kombinatorikom, fraktalnom geometrijom, realnom analizom itd.

[15] Oddvar Kloster trenutno je viši programer softwarea na odjelu matematike i kibernatike u jednom od najvećih europskih istraživačkih instituta pod nazivom Naklada za industrijska i tehnička istraživanja (SINTEF) sa sjedištem u Trondheimu u Norveškoj.

o kraljevoj moći te kao kodomenu ima skup $\{0,1\}$. Ako je vrijednost funkcije 1, potez dobiva kralj, a ako je vrijednost 0, na potezu je vrag. Proučavajući takve generalizacije Kutz je pokazao da vrag ima pobjedničku strategiju protiv kralja moći $2-\varepsilon$.

Godine 1996. Conwaya je činjenica da nitko nije do tada uspio riješiti Problem anđela, potakla da ponudi nagradu za rješenje ovog problema. Nagrada je iznosila 100 dolara za dokaz da anđeo dovoljno velike moći pobjeđuje vraga i 1000 dolara za dokaz da vrag može uvijek pobijediti bez obzira na moći anđela. Između ostalog, i po nagradi možemo zaključiti da je Conway pretpostavljao da postoji anđeo određene moći koji može pobijediti anđela, no uz veliki napor i trud nije uspio dokazati svoju slutnju, sve dok 2007. nije dokazana.

# 5 Igra života u nastavi matematike

U ovom poglavlju opisat ćemo jedan školski sat u kojem ćemo uvesti Igru života u nastavu matematike.

Cilj ovakve realizacije jednog sata matematike jest upoznati učenike s matematičkim razmišljanjem u praksi, kroz igru, van standardnih šablonskih okvira na koje su učenici navikli.

Sat nosi naslov *Igra života*, a namijenjen je učenicima 6. razreda osnovne škole kao inovativna konceptualizacija uvedenih nastavnih sadržaja: *Pravokutni koordinatni sustav u ravnini, uređeni par, točke s cjelobrojnim koordinatama*. Osim spomenutog gradiva, na ovom satu bi se s učenicima ponovilo gradivo postotka i postotnog iznosa te omjera i uspoređivanja dvaju nenegativnih racionalnih brojeva.

Dodatno, cilj ovog nastavnog sata matematike je ponavljanje i utvrđivanje već obrađenog gradiva s učenicima, ali na zanimljiv i primjenjiv način koji bi potaknuo motivaciju učenika za matematiku i samim time popularizirao matematiku kao predmet u školi. Također, na ovom satu učenici proširuju svoju opću i "matematičku" kulturu susrećući se s pojmovima koji nisu dio regularne nastave matematike, ali su dio općeg i matematičkog obrazovanja.

**Ishodi učenja**
Nakon odslušanog nastavnog sata učenici će moći:

1. prepoznati pravokutni koordinatni sustav u ravnini
2. crtati cjelobrojne točke u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini,
3. zapisivati omjer,
4. primjenjivati računanje postotnog iznosa,
5. crtati konfiguracije Igre života na koordinatnoj mreži,
6. primjenjivati pravila Igre života na konkretnom primjeru.

**Korelacija unutar matematike i s drugim nastavnim predmetima**

| Predmet | Gradivo | Razred |
|---|---|---|
| Matematika | Omjer | 6. razred |
| Matematika | Postotak i postotni iznos | 6. razred |
| Matematika | Pravokutni koordinatni sustav u ravnini s cijelim brojevima | 6. razred |
| Geografija | Geografska mreža | 5. razred |
| Geografija | Stanovništvo i populacija | 6. razred |
| Priroda i društvo | Stanice | 5. razred |
| Tehnička kultura | Prometna mreža | 5. razred |
| Informatika | Internet, mrežni preglednik i pretraživanje interneta | 5. razred |

**Nastavna načela**

1. **Načelo znanstvenosti**
   Načelo znanstvenosti nastave matematike sastoji se u nužnom skladu nastavnih sadržaja i nastavnih metoda s jedne i zahtjeva i zakonitosti matematike kao znanosti s druge strane ([30]).
   U ovom satu načelo znanstvenosti očituje se u korištenju referentnih materijala koji su u skladu s matematičkim zakonitostima tj. ispravno i precizno definiranim pravilima Igre života, točno navedenim definicijama i formulama te ispravno riješenim zadacima.

2. **Načelo aktivnosti i samostalnosti**
   Načelo aktivnosti i samostalnosti počiva na svjesnom usvajanju obrađenog gradiva, misaonoj aktivnosti učenika za vrijeme nastave matematike, stvaranju situacija koje potiču na samostalni rad ([30]).
   Načelo aktivnosti i samostalnosti u ovom satu primijenjeno je poticanjem učenika na sudjelovanje na nastavi, postavljanjem pitanja tijekom cijelog školskog sata te poticanjem učenika na kreativnost i samostalnost tijekom igranja Igre života.

3. **Načelo postupnosti, povezanosti i sustavnosti**
   Načelo postupnosti, povezanosti i sustavnosti temelji se na tome da se obrada novog matematičkog gradiva treba zasnivati na već prije obrađenom gradivu, poticati učenike na uočavanje bitnih obilježja gradiva koje se obrađuje, obrađivati jednostavnije i lakše, a zatim složenije i teže nastavno gradivo ([30]).
   Načelo postupnosti, povezanosti i sustavnosti ostvareno je kroz ponavljanje osnovnih pojmova vezanih uz omjere, postotke i pravokutni koordinatni sustav u ravnini, čime se povezuje već poznato gradivo s temom sata kako bi učenici od jednostavnijeg išli prema složenijem i od lakšeg prema zahtjevnijem nastavnom gradivu.

4. **Načelo pristupačnosti**
   Ostvarenje načela pristupačnosti u nastavi matematike očituje se najbolje u oblikovanju plana i programa ili kurikuluma iz matematike koji se temelji na kronološkoj dobi učenika. Što su učenici stariji prezentira im se više matematičkog sadržaja ([30]).
   Načelo pristupačnosti primijenjeno je odabirom sadržaja u skladu s Kurikulumom za nastavni predmet Matematike za osnovne i srednje škole u Republici Hrvatskoj[16] te količinom sadržaja koje odgovara jednom nastavnom satu.

5. **Načelo zornosti**
   Načelo zornosti omogućuje učenicima da u toku nastave osjetilnim organima neposredno zahvaćaju stvarnost koja se u nastavi proučava. Razlikujemo tri vrste zornosti u nastavi matematike: prirodnu, slikovnu i simboličku ([30]).
   Načelo zornosti najviše se očituje kroz crtanje po pravokutnoj koordinatnoj mreži, bojanje stanica prije određivanja omjera i postotaka gdje je najviše izražena slikovna i simbolička zornost. Na taj način učenici povezuju postotni iznos broja živih stanica sa slikom na kojoj su označene žive stanice. Načelo zornosti je jedno od očiglednijih načela koje se primjenjuje u realizaciji ovog nastavnog sata budući igranje Igre života funkcionira putem određenih pravila primjenjenih na specifična polja smještena u koordinatni sustav.

6. **Načelo individualizacije**
   Srž načela individualnog pristupa učenicima je u prilagođavanju nastave razini usvojenih sadržaja i sposobnostima pojedinih učenika. Svaki je zadatak moguće zadati na više različitih načina te ga tako prilagoditi razini usvojenih znanja i sposobnostima pojedinih učenika ([30]).
   Načelo individualizacije ostvareno je kroz individualno praćenje učenika tijekom određivanja novih generacija uzorka te dodatno pojedinačno objašnjavanje pravila Igre života od strane svakog učenika.

7. **Načelo motivacije**
   Načelo motivacije temelji se na sljedećim motivima: gregarnom motivu (potreba za pripadanjem), motivu afirmacije (potreba za postignućem i samopotvrđivanjem), motivu borbenosti (potreba za obranom istine i pravde), motivu sigurnosti (potreba za slobodom od straha i krivnje), motivu radoznalosti (potreba za spoznajama) i motivu stvaralaštva (potreba za ostvarivanjem osobnih potencijala) ([30]).

[16] https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html

Načelo motivacije očituje se motivom radoznalosti kojeg pobuđuje najava nešto drugačijeg nastavnog sata. Također, načelo je ostvareno prezentiranjem zanimljivih crtica iz Conwayjeva života i korištenjem aplikacije Igre života.

**Nastavne metode**

- Prema izvorima znanja

  1. **Metoda usmenog izlaganja**
     Metoda usmenog izlaganja bazira se na prijenosu informacija verbalnim kanalom od izvora, obično nastavnika, pa sve do primatelja informacija, najčešće učenika ([32]).
     Nastavnik koristi usmeno izlaganje u prezentiranju zanimljivih crtica Conwayjeva života, objašnjavanju Igre života i sl.
  2. **Metoda dijaloga**
     Metoda razgovora ostvaruje se dijalogom između učenika i nastavnika te nastavnika i učenika. Dijalog se uglavnom sastoji od pitanja i odgovora ([32]).
     Nastavnik je u stalnoj komunikaciji s učenicima, koristi se heurističkim razgovorom kako bi došao do traženih odgovora i usmjerio učenike u pravom smjeru.
  3. **Metoda crtanja**
     Metoda crtanja se koristi u pojavama, procesima i radnjama koje se ne mogu prikazati na neki drugi način. Crtanjem se pojačava djelotvornost samog učenja, a služi i za prenošenje informacija i sadržaja ([32]).
     Učenici na nastavnim listićima crtaju cjelobrojne koordinate te bojaju kvadratiće na koordinatnoj mreži.

- Prema oblicima zaključivanja

  1. **Metoda analize i sinteze**
     Analiza je metoda koja se zasniva na raščlanjivanju cjeline na dijelove, proučavanju dijelova i izvođenja zaključka o cjelini na temelju dobivenih rezultata. Sinteza je metoda koja se zasniva na povezivanju proučavanih dijelova u cjelinu koje rješava postavljeni problem ili zadatak ([31]).
     Učenici pri određivanju omjera živih i mrtvih stanica analiziraju na koji način doći do točnog odgovora. Potrebno je prebrojati žive i mrtve stanice te ih zatim staviti u omjer. Sinteza se sastoji od zapisivanja omjera dvaju brojeva.

2. **Metoda konkretizacije**
   Konkretizacija je misaona aktivnost pri kojoj se jednostrano pogled usredotočuje na jednu stranu promatranog objekta izvan veze s njegovim drugim stranama ([31]).
   Učenicima su najprije objašnjena pravila Igre života, a zatim na konkretnom primjeru (zadanom uzorku) određuju samostalno sljedeće generacije primjenjujući pravila Igre života.
3. **Metoda uspoređivanja i analogije**
   Zaključivanje po analogiji je misaoni postupak pri kojem se iz opažanja da se dva objekta podudaraju u određenom broju svojstava ili odnosa izvodi zaključak da se oni podudaraju i u drugim svojstvima ili odnosima koji se kod jednog objekta nisu izravno opažali. Razlikujemo analogne objektne, svojstva i postupke ([31]).
   Učenici metodom analogije za svaku generaciju na sličan način primjenjuju pravila Igre života. Također, u određivanju i zapisivanju omjera živih i mrtvih stanica koriste analogan postupak.

**Nastavna sredstva:** Radni listić sa koordinatnom mrežom, aplikacija Conway's Game of Life[17].

**Nastavna pomagala:** Računalo, projektor, prezentacija, pametni telefon, kalkulator.

## 5.1 Artikulacija sata

### Uvodni dio - 5 minuta

| Aktivnost | Cilj aktivnosti |
|---|---|
| Aktivnost 1 | Ponoviti s učenicima gradivo prethodnih satova matematike u okviru kojih su usvojeni pojmovi kao što su: omjer dviju veličina, postotak i postotni iznos te pravokutni koordinatni sustav. |

Nastavnik na početku sata pozdravlja učenike te govori da će danas imati malo drugačiji sat nego inače. Nastavni sat će se realizirati igranjem igre, a prije čega će se prisjetiti gradiva prošlih nastavnih sati. Nastavnik postavlja učenicima pitanja: "Što je omjer i kako smo ga zapisivali?, Što je postotak?, Kako glasi formula za postotni iznos?", i tako dalje. Mogući odgovori učenika su da je omjer kvocijent dviju vrijednosti. Dvije vrijednosti $a$ i $b$ u omjeru

[17] https://playgameoflife.com

zapisujemo kao $a : b$ ili $\frac{a}{b}$. Na pitanja o postotku učenici odgovaraju da je postotak razlomak s nazivnikom 100, a formula za postotni iznos glasi: $p\,\% = \frac{p}{100}$. Nastavnik zatim postavlja pitanja učenicima: "Od čega se sastoji svaki koordinatni sustav u ravnini?, Što je uređeni par?". Pretpostavljeni odgovor učenika je da koordinatni sustav u ravnini sadrži dvije koordinatne osi $x$ i $y$ te točku u kojoj se one sijeku, a zovemo ju ishodište i označavamo s $O$. Svaku točku na koordinatnom sustavu zapisujemo u obliku uređenog para $(a, b)$ kojeg čine dva elementa odabranog skupa te se zna koji element je prva, a koji element je druga komponenta uređenog para.

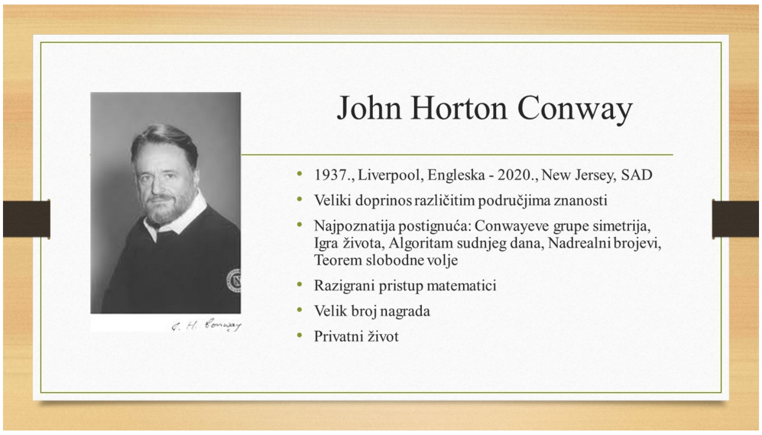
Nastavnik pohvaljuje učenike te im govori da će spomenuto gradivo primijeniti na igri koja se zove Igra života. Nastavnik pokreće prezentaciju s početnim slajdom (Slika 26) na kojem je naslov sata: Igra života.


Slika 26: Početni slajd prezentacije

**Glavni dio - 30 minuta**

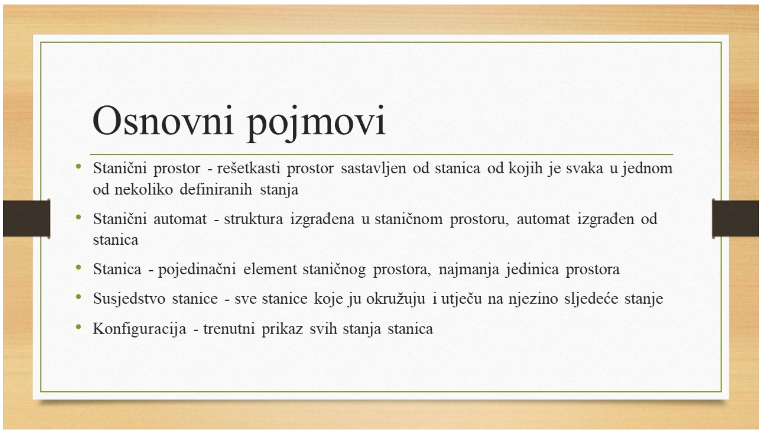
| **Aktivnost** | **Cilj aktivnosti** |
|---|---|
| Aktivnost 2 | Predstaviti ukratko život Johna Hortona Conwaya, a zatim objasniti Igru života, pravila igre te neke zanimljive i jednostavne vrste konfiguracija Igre života. |

Nastavnik započinje aktivnost govoreći da je Igru života osmislio John Horton Conway, a Igra života se smatra njegovim najpoznatijim postignućem. Zbog svoje jednostavnosti i dostupnosti Igra života je postala popularna i izvan matematičkog svijeta. Nastavnik govori učenicima da će na početku reći par rečenica o Conwayu i njegovom životu. Na sljedećem slajdu prezentacije (Slika 27), nabrajajući Conwayjeve najpoznatije radove nastavnik naglašava njegov ogroman doprinos matematici i znanosti u svijetu. Zanimljivim crticama iz Conwayjeva života nastavnik nastoji motivirati i zainteresirati učenike za temu. Objašnjava učenicima kratko Algoritam sudnjeg dana govoreći da se Conway sam sa sobom natjecao i vježbao kako bi mogao u što kraćem vremenu odrediti koji je dan u tjednu proizvoljan datum, za što mu je na kraju trebalo manje od 2 sekunde.




Slika 27: Drugi slajd prezentacije

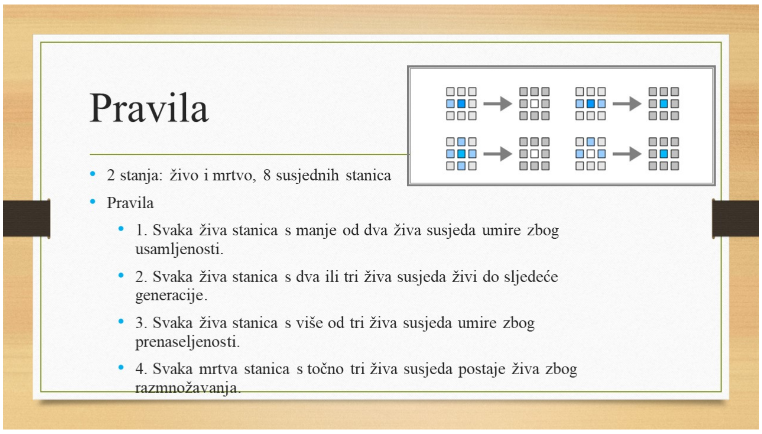
Također, nastavnik ističe Conwayjev razigrani stil proučavanja matematike kojim je oduševljavao svoje kolege, studente i sve druge ljude oko sebe. Tijekom života, Conway je dobio mnoge nagrade za svoja postignuća.




Slika 28: Treći slajd prezentacije

Kako bi učenici mogli razumijeti Igru života nastavnik otvara novi slajd prezentacije (Slika 28) na kojem su osnovni pojmovi. Nastavnik učenicima objašnjava sljedeće pojmove: stanični prostor, stanični automat, stanica, susjedstvo i konfiguracija, koji su prikazani na prezentaciji. Pojmove stanični prostor, stanični automat i stanica nastavnik povezuje s koordinatnim sustavom u ravnini i mrežom kvadratića u njihovim bilježnicama te šahovskom pločom.

Nakon toga prikazuje se novi slajd (Slika 29) na kojem su pravila Igre života. Nastavnik naglašava učenicima da svaka stanica može biti u 2 stanja:

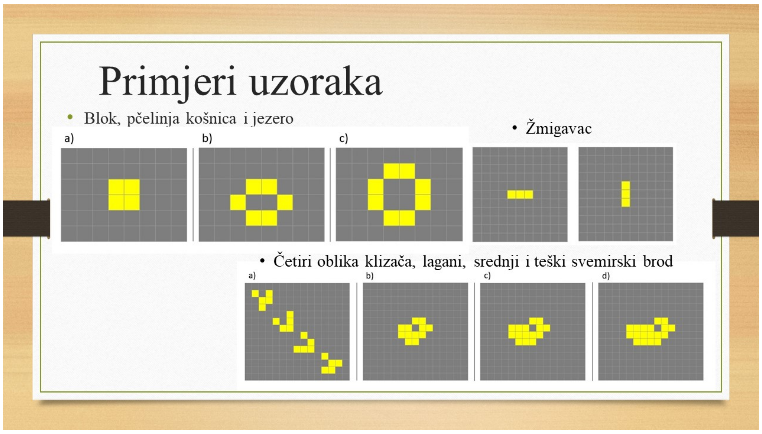



Slika 29: Četvrti slajd prezentacije

živom ili mrtvom te da svaka stanica ima 8 susjeda, odnosno 8 stanica koje ju okružuju i dodiruju. Uz čitanje svakog pravila, nastavnik na slici ispod objašnjava pravila na primjeru. Na primjer, prvo pravilo kaže da živa stanica s manje od dva živa susjeda umire od usamljenosti. U lijevom kutu slike na slajdu nalazi se grafički prikaz prvog pravila. Promatrana živa stanica označena je tamnoplavom bojom te ima jednu živu stanicu s lijeve strane koja je označena svijetloplavom bojom. U sljedećoj generaciji promatrana stanica umire jer ima samo jednu živu susjednu stanicu. Na sličan način nastavnik objašnjava i ostala tri pravila, posebno naglašavajući zadnje pravilo koje se često puta zaboravi kada se bez upotrebe računala crta sljedeća generacija nekog uzorka.

Nakon pravila, nastavnik na prezentaciji (Slika 30) prikazuje učenicima jednostavne i zanimljive uzorke Igre života kao što su: blok, pčelinja košnica, jezero, žmigavac, klizač te tri vrste svemirskih brodova.

Nastavnik učenicima skreće pozornost na razlike u spomenutim uzorcima govoreći da prva tri pripadaju stabilnim uzorcima koji se nikada ne mijenjaju, žmigavac je oscilator perioda dva koji nakon dvije generacije dolazi u početno




Slika 30: Peti slajd prezentacije

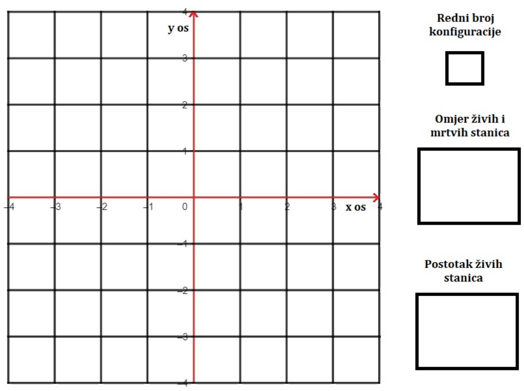
stanje te zadnja 4 uzorka koja ubrajamo u svemirske brodove jer se kreću beskonačno po mreži. Učenici se neformalno upoznaju s pojmom perioda i beskonačnosti

Kako bi još više motivirao učenike, nastavnik objašnjava Conwayjevu pretpostavku da nijedan uzorak ne može beskonačno povećavati broj svojih živih stanica te da je Conway čak ponudio i nagradu onome tko pronađe takav uzorak. Nagradu je osvojio Bill Gosper kada je pronašao uzorak koji je nazvan Gosperov pištolj klizača. Nastavnik na slajdu (Slika 31) prikazuje Gosperov pištolj klizača govoreći kako se najprije nakon 30. generacije stvara klizač, a zatim svaku 15. generaciju nastaje novi klizač.


Slika 31: Šesti slajd prezentacije

| Aktivnost | Cilj aktivnosti |
|---|---|
| Aktivnost 3 | Učenici samostalno crtaju dvije generacije zadanog uzorka Igre života koristeći pravila igre, te primjenjujući gradivo matematike donose zaključke o broju živih stanica dobivenog uzorka. |

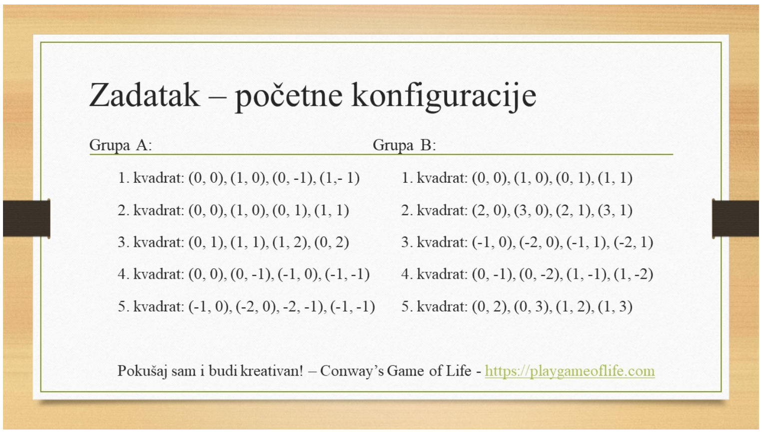
Nastavnik započinje aktivnost govoreći učenicima da će sada samostalno crtati nekoliko generacija dobivenog uzorka. Učenici su podijeljeni u dvije grupe A i B tako da oni koji sjede zajedno pripadaju različitim grupama. Svakom učeniku nastavnik dijeli po tri listića na kojima je koordinatna mreža kao na Slici 32.




Slika 32: Koordinatna mreža dimenzije $8 \times 8$

Na desnom rubu listića nalaze se 3 kućice u koje učenici upisuju broj generacije uzorka, omjer živih i mrtvih stanica te postotak živih stanica u odnosu na cijelu koordinatnu mrežu. Postotak je potrebno zaokružiti na dvije decimale, a učenicima je dozvoljena uporaba kalkulatora.

Na slajdu prezentacije (Slika 33) nastavnik prikazuje 5 skupina po 4 točke s cjelobrojnim koordinatama koje ucrtane na dobivenoj koordinatnoj mreži označavaju sveukupno 5 kvadratića mreže. Za pojedinu grupu, točke se razlikuju kako bi učenici što samostalnije sudjelovali u aktivnosti. Označene kvadratiće učenici trebaju obojati proizvoljnom bojom. Nastavnik govori učenicima da su tako dobili jedan stanični automat koji se nalazi na staničnom prostoru dimenzije $8 \times 8$.




Slika 33: Posljednji slajd prezentacije

Koristeći pravila Igre života[18] učenici crtaju dvije generacije dobivnog uzorka, te zapisuju omjere i računaju postotak živih stanica uzorka. Nastavnik podsjeća učenike na zadnje pravilo koje često bude zaboravljeno te savjetuje učenicima da uzmu u obzir sve mrtve stanice koje su susjedne živima.

Dok učenici rješavaju zadatak, nastavnik obilazi učenike, po potrebi dodatno individualno objašnjava pravila Igre života i potiče učenike na aktivnost i samostalnost.

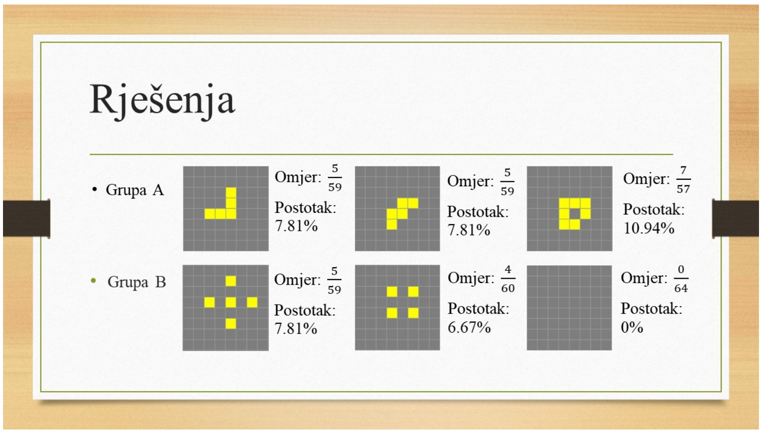
Na kraju aktivnosti, nastavnik traži od učenika da zaključe raste li ili se smanjuje broj živih stanica uzorka kojeg su dobili.

### Završni dio - 10 minuta

| **Aktivnost** | **Cilj aktivnosti** |
|---|---|
| Aktivnost 4 | Provjeriti točnost nacrtanih generacija dobivenog uzorka Igre života te poticati učenike na kreativnost u zadavanju uzoraka. |

Aktivnost započinje tako što nastavnik govori učenicima da na mrežnom pregledniku upišu link za Conwayjevu Igru života koji im je prikazan na prezentaciji. Učenici na svojim pametnim telefonima otvaraju link te provjeravaju točnost generacija koje su određivali za dobiveni uzorak. Rješenje je prikazano na Slici 34.

[18]Pravila će učenicima biti stalno dostupna na prezentaciji dokle god budu crtali generacije dobivenog uzorka.




Slika 34: Rješenja

Nakon provjere, učenici imaju zadatak da sami pokušaju zadati proizvoljan uzorak kojega pokrenu u aplikaciji te uočavaju promjene koje se događaju kroz generacije. Nastavnik objašnjava učenicima da u slučaju da dobiju nakon nekoliko generacija praznu konfiguraciju, nisu dobro zadali početnu konfiguraciju (kao što je bio slučaj kod grupe B).

## 5.2 Zaključak

Kad je Igra života nastala 1970. godine, mnogi nisu mogli priuštiti računalo kao u današnje vrijeme. Jedan od načina kako su igrali Igru života je bio upravo ovaj način opisan na nastavnom satu. Igra se igrala na papiru i šahovskoj ploči ili mreži sastavljenoj od kvadratića.

U ovom satu do izražaja dolazi zornost koja je naglašena u određivanju novih konfiguracija uzorka Igre života. Tema sata nije dio nacionalnog kurikuluma nastave matematike ali su elementi Igre života na kreativan način povezani s redovnim gradivom nastave matematike korištenjem inovativnog pristupa. Ishod Igre života je nepredvidiv, što potiče interes i privlači pažnju učenika, koju je ponekad jako teško dobiti. Igranjem Igre života učenici uočavaju vezu sa životom u prirodi što je naglašeno i u njezinom imenu. Ovakav nastavni sat može potaknuti i motivirati učenika za svladavanje redovnog gradiva matematike te smanjiti negativan stav prema matematici u školi.

# 6 Zaključak

U ovome radu prezentirali smo najvažnija postignuća i uzbudljiv život Johna Hortona Conwayja, intrigantnog matematičara. U prvom poglavlju opisali smo njegove biografske podatke s naglaskom na njegov doprinos u matematici i drugim znanostima. Od malih nogu Conway je pokazivao jako veliki interes za matematiku, a 1968. godine dao je neke od svojih najznačajnijih doprinosa matematici.

U sljedećem poglavlju detaljno je opisana Igra života, kojom je stekao slavu i popularnost u cijelom svijetu. Objašnjena su pravila Igre života i prikazani razni zanimljivi uzorci. Igru života možemo povezati sa mnogim područjima koristeći razvoj i kretanje njenih uzoraka. Kao primjer opisana je realizacija logičkih vrata koja čine osnovu današnjih računala.

U nastavku rada u novom poglavlju opisan je problem kojeg je Conway nazvao Problem anđela ili igra Anđeo i vrag. Conway je proučavao problem, ali nije dokazao svoje pretpostavke koje je naslućivao. U poglavlju je dana ideja dokaza koji je nastao tek 2007. godine.

Posebno poglavlje posvetili smo Igri života u nastavi matematike. Opisali smo jedan školski sat namijenjen učenicima 6. razreda osnovne škole u kojem je uvedena Igra života te povezana s redovnim gradivom nastave matematike. Na ovaj, malo drugačiji, pristup nastavi kod učenika se želi potaknula motivacija i interes za matematikom.

Kroz život Conway je jako puno proučavao igre te ih povezivao sa matematikom. Na taj način, proučavajući jednostavne pojave, dolazio je do otkrića. Naoko nepovezanim stvarima pronalazio je smisao, u čemu se očituje njegova briljantnost.

John Conway obilježio je čitavo jedno razdoblje u svijetu matematike i šire. Veličina ovog matematičara je u njegovoj jednostavnosti, originalnosti te iznimnoj predanosti radu. Mnogima je bio inspiracija, a nadam se da će se i još neka njegova postignuća koristiti ubuduće u odgojno obrazovnom procesu i radu s učenicima.

# Literatura


[1] The Royal Society Publishing, Biografical memoirs of fellows of the royal society, https://doi.org/10.1098/rsbm.2021.0034 (15.4.2023.)

[2] MacTutor, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Conway/ (15.4.2023.)

[3] J. H. Conway, M. J. T. Guy, Four-Dimensional Archimedean Polytopes, Proc. Colloquium on Convexity, Copenhagen, 1965.

[4] Marco Möller, 4-dimensional Archimedean polytopes, Results in Mathematics, 46 (3), 2004.

[5] J. H. Conway, Homogeneous ordered sets, PhD diss., University of Cambridge, 1964.

[6] J. H. Conway, Regular algebra and finite machines, Courier Corporation, 2012.

[7] John Leech, Some sphere packings in higher space, Canadian Journal of Mathematics 16, 1964., 657-682.

[8] J. N. Bray, R. T. Curtis, The Leech Lattice Lambda and the Conway Group .O revisited, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 362, no. 3, 2010., pp. 1351-69.

[9] R. A. Wilson, J. H. Conway, S. P. Norton, ATLAS of Finite Groups, 1985.

[10] Martin Gardner, Scientific American, Mathematical Games, vol. 223, no. 4, 1970., pp. 120-23., (Preuzeto s http://www.jstor.org/stable/24927642 (3.6.2023.)

[11] The Guardian: John Horton Conway: the world's most charismatic mathematician, 2015.

[12] Donald Knuth, Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness, 1974.

[13] Gretchen Grimm, An introduction to surreal numbers, 2012.

[14] Ivana Balatinac: Prirodni, cijeli, racionalni i realni brojevi, Diplomski rad, 2012.

[15] J. H. Conway, On numbers and games, CRC Press, 2000.

[16] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, Winning Ways for Your Mathematical Plays, Volume 3. CRC Press, 2003.

[17] J. H. Conway, The Angel Problem, Games of No Chance, Volume 29, 1996.

[18] J. Horton Conway, Francis YC Fung, The sensual (quadratic) form, No. 26., Cambridge University Press, 1997.

[19] Manjul Bhargava, Jonathan Hanke, Universal quadratic forms and the 290-theorem, preprint, 2005.

[20] J. H. Conway, S. Kochen, The free will theorem, Foundations of Physics 36, 2006., pp. 1441-1473.

[21] Harald Niesche, Introduction to Cellular Automata, Seminar Organic Computing SS2006, 2006.

[22] E.F. Codd, Cellular Automata, ACM Monograph Series, Academic Press, Inc. New York and London, 1968.

[23] Borna Matijanić, Android aplikacija Conwayjeve igre života, Završni rad, 2018.

[24] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, Winning Ways for Your Mathematical Plays, Volume 4. CRC Press, 2003., pp. 927-963.

[25] J.P. Rennard, Implementation of Logical Functions in the Game of Life, In: A. Adamatzky, (eds) Collision-Based Computing, Springer, London, 2002.

[26] Garden of Eden, https://conwaylife.com/wiki/Garden_of_Eden

[27] Martin Kutz, The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots, PhD Thesis, FU Berlin, 2004.

[28] András Máthé, The angel of power 2 wins, Combinatorics, Probability and Computing 16.3, 2007., pp. 363-374.

[29] Oddvar Kloster, A solution to the angel problem, Theoretical Computer Science, 389.1-2., 2007., pp. 152-161.

[30] Sanja Varošanec, Metodika nastave matematike II-dio, Zagreb, 2004.

[31] Jasna Matijaković, Znanstvene metode u nastavi matematike, Diplomski rad, 2012.

[32] Monika Kardina, Nastavne strategije i metode u nastavi primarnog obrazovanja, Diplomski rad, 2019.