Sveučilište u Rijeci – Fakultet za matematiku

Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Mihaela Kreš

Kompleksne transformacije i M.C.Escher

Završni rad

Rijeka, 2023.

Sveučilište u Rijeci – Fakultet za matematiku

Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Mihaela Kreš

Kompleksne transformacije i M.C.Escher

Završni rad

Mentor: mr.sc.Ines Radošević Medvidović

Rijeka, 2023

Sadržaj

1 Uvod

U ovome radu upoznat ćemo se s konformnim preslikavanjem kao kompleksnom funkcijom kompleksne varijable, te ćemo navesti osnovna konformna preslikavanja i primjere. Nadalje, navest ćemo Möbiusovu transformaciju kao najznačajniji primjer konformnog preslikavanja i prikazati ju kao kompoziciju osnovnih konformnih preslikavanja. Möbiusova transformacija nazvana je po njemačkom matematičaru Augustu Ferdinandu Möbiusu (1790.-1860.). Također, povezat ćemo navedene matematičke pojmove s radovima nizozemskog grafičara M.C.Eschera i pokazati primjenu konformnih preslikavanja u njegovim grafikama. Na kraju rada kratko ćemo se upoznati s biografijom navedenog umjetnika i njegovim umjetničkim opusom.

2 Osnovni pojmovi

Definicija 2.1. Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ definiramo kao:

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Prva komponenta x je *realni dio* kompleksnog broja $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ i označava se s $\mathrm{Re}(z)$. Druga komponenta y je *imaginaran dio* kompleksnog broja $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ i označava se s $\mathrm{Im}(z)$.

Na $\mathbb{C}$ definiramo operaciju *zbrajanja* $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \text{ za } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}.$$

Na $\mathbb{C}$ definiramo operaciju *množenja* $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1), \text{ za } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}.$$

Teorem 2.1 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je *polje* koje nazivamo polje kompleksnih brojeva.

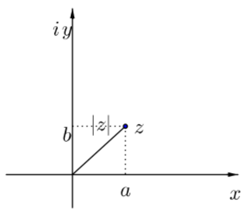
Dokaz vidi u [4].

Napomena 2.1 Skup $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ naziva se *realna os*, a skup $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ naziva se *imaginarna os*.

Definicija 2.2 *Modul* ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = (x, y)$ je realan broj: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definicija 2.3 Kut $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ kojeg radijvektor točke $z \in \mathbb{C}$ zatvara s pozitivnim smjerom realne osi naziva se *argument* kompleksnog broja z i označava sa $\arg(z)$.

Napomena 2.3 Geometrijski gledano, modul $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ kompleksnog broja $z = (x, y)$ predstavlja njegovu udaljenost od ishodišta $(0,0)$ u kompleksnoj ravnini.

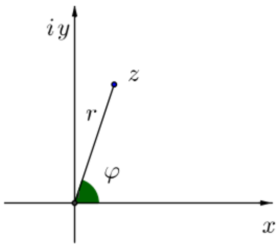


Slika 2 1 Geometrijski prikaz modula kompleksnog broja (vidi [2])

Napomena 2.4 Svaki $z \in \ \mathbb{C} \backslash \{0\}$ može se prikazati u *trigonometrijskom* (polarnom) *obliku*:

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

Uvodeći oznaku: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ trigonometrijski oblik kompleksnog broja postaje eksponencijalni oblik: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.



Slika 2 2 Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja (vidi[2])

Definicija 2.4 *Konjugirano kompleksni broj* $\bar{z}$ kompleksnog broja $z = (x, y)$, je broj:

$$\bar{z} = (x, -y) \in \mathbb{C}.$$

Konjugiranje kompleksnih brojeva tj. funkciju f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x, y) = (x, -y)$, možemo geometrijski interpretirati kao zrcaljenje kompleksne ravnine s obzirom na realnu os.

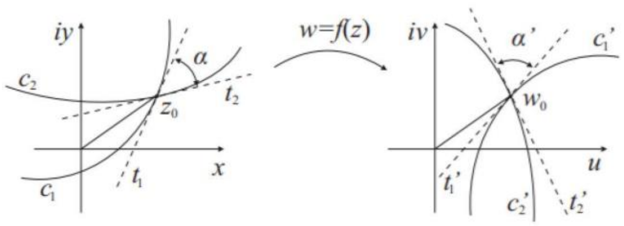
3 Kompleksne transformacije

3.1 Karakterizacija konformnog preslikavanja

Definicija 3.1 Neka je $f: D \rightarrow K$ preslikavanje. Kažemo da je f *kompleksna funkcija* ako je $K = \mathbb{C}$, te je f *funkcija kompleksne varijable* ako je $D \subseteq \mathbb{C}$.

Neka je preslikavanje kompleksna funkcija $w = f(z) = (u, v)$ dana s funkcijama $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ gdje je $z = (x, y) \in \mathbb{C}, D \subset \mathbb{R}^2$ te $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Pri tome se kompleksni broj $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ u kompleksnoj z-ravnini identificira s točkom $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u xy-ravnini.

Definicija 3.2 Neka je zadano preslikavanje $u = u(x, y), v = v(x, y)$ koje točku (x_0, y_0) iz (x, y)-ravnine preslika u (u_0, v_0) u (u, v)-ravnini, a krivulje C_1 i C_2 koje se sijeku u (x_0, y_0) preslika u C_1', C_2' koje se sijeku u (u_0, v_0). Ako je kut α između krivulja C_1 i C_2 jednak kutu α' između krivulja C_1', C_2' po iznosu i smjeru onda je *preslikavanje f konformno u točki* (x_0, y_0).



Slika 3.1 Očuvanje kutova pri konformnom preslikavanju (vidi [2])

Definicija 3.3 Za funkciju $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da je *diferencijabilna u točki* z_0 otvorenog skupa[1] $D \subseteq \mathbb{C}$, ako funkcija

$$z \rightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ima limes u točki z_0. Tada se taj limes označava sa $f'(z_0)$ i naziva se derivacija funkcije f u točki z_0. Slijedi,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

[1] Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otvoren ako: $(\forall z \in \Omega)(\exists r_z > 0)(K(z, r_z) \subseteq \Omega)$

Definicija 3.4 Ako je funkcija $f': D \to \mathbb{C}$ neprekidna na $D \subseteq \mathbb{C}$ onda je f *derivabilna funkcija* na D.

Definicija 3.5 Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ i f derivabilna funkcija. Preslikavanje $f: D \to \mathbb{C}$ naziva se *konformno preslikavanje* ako čuva veličinu i orijentaciju kutova.

Definicija 3.6 Neka je funkcija $f: D \to \mathbb{C}$ derivabilna na $D \subset \mathbb{C}$ te neka je $f'(z_0) \neq 0$ u točki $z_0 \in D$. Tada je preslikavanje $w = f(z)$ *konformno u točki* z_0.

Napomena 3.1 Neka je funkcija $f: D \to \mathbb{C}$ derivabilna na $D \subset \mathbb{C}$ te neka je $f'(z) \neq 0$ na području D. Tada je preslikavanje $w = f(z)$ *konformno u svim točkama* područja D .

Primjer 3.1

a) Preslikavanje $f(z) = z^n, n = 2,3, \dots$ je konformno na $\mathbb{C}$ osim u točki $z_0 = 0$.
   Deriviranjem zadane funkcije dobivamo uvjet $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$.
   Zaključujemo da je preslikavanje konformno za $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

b) Preslikavanje $f(z) = \cos z$ je konformno na $\mathbb{C} \backslash \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.
   Deriviranjem zadane funkcije dobivamo uvjet $f'(z) = -\sin z \neq 0$.
   Zaključujemo da je preslikavanje konformno za $z \in \mathbb{C} \backslash \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

c) Preslikavanje $f(z) = \frac{z+2}{z-2}$ je konformno na $\mathbb{C} \backslash \{2\}$.
   Deriviranjem zadane funkcije dobivamo uvjet $f'(z) = \frac{z-2-(z+2)}{(z-2)^2} = \frac{-4}{(z-2)^2} \neq 0$.
   Zaključujemo da je preslikavanje konformno za $z \in \mathbb{C} \backslash \{2\}$.

d) Preslikavanje $f(z) = e^z$ je konformno na $\mathbb{C}$.
   Deriviranjem zadane funkcije dobivamo uvjet $f'(z) = e^z \neq 0$.
   Zaključujemo da je preslikavanje konformno za $\forall z \in \mathbb{C}$.

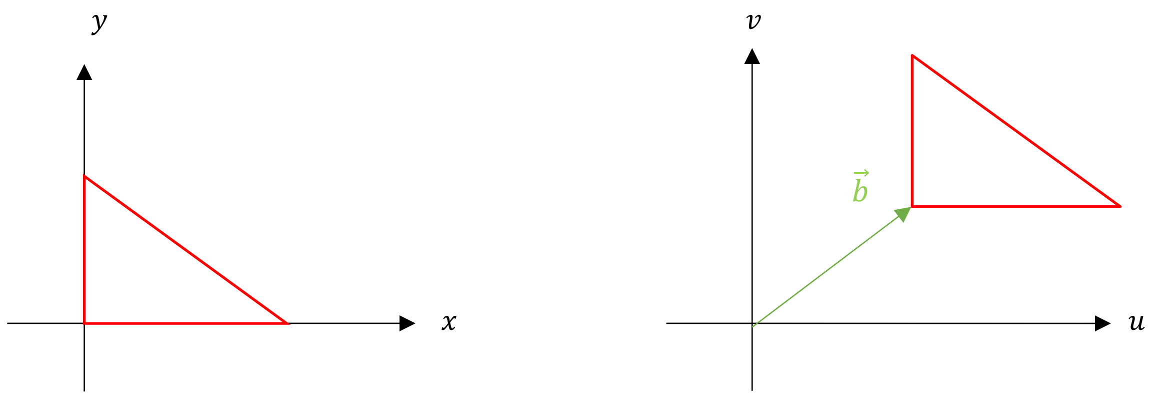
3.2 Preslikavanje osnovnim funkcijama

U ovom ćemo poglavlju navesti neka osnovna konformna preslikavanja. Složenija konformna preslikavanja dobivaju se kompozicijom osnovnih. Svaka kompozicija konfomnih preslikavanja također je konformno preslikavanje.

3.2.1 Translacija

Najjednostavnije konformno preslikavanje je *translacija*. Translacija je transformacija oblika

$$f_1(z) = z + b,\ \ b \in \mathbb{C}.$$

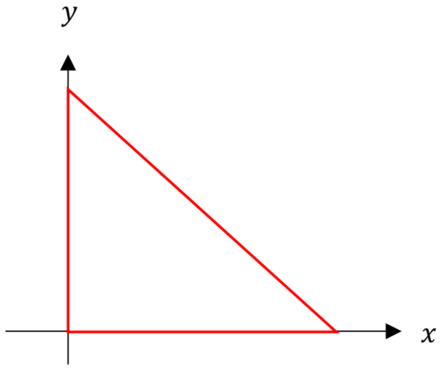


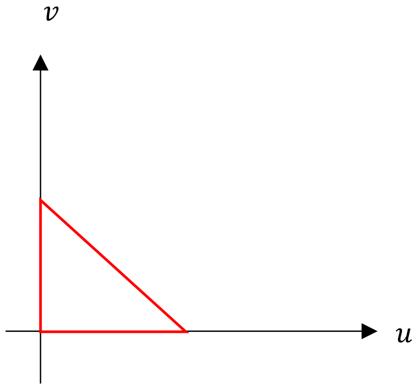
Uočimo kako se translacijom svaka točka kompleksne ravnine preslika u novu točku kompleksne ravnine pomaknutu za vektor b.

3.2.2 Homotetija

Složenije konformno preslikavanje oblika $f_2(z) = kz, k \in \mathbb{R}^+$naziva se *homotetija*. Ovo preslikavanje svaku točku preslika u točku pri čemu argument kompleksnog broja ostaje sačuvan, a apsolutna vrijednost kompleksnog broja se poveća ili smanji u ovisnosti o k. Dakle, homotetija je zajednički naziv za kontrakciju i dilataciju odnosno stezanje i rastezanje. Pogledajmo slučajeve kada je $k < 1$ i $k > 1$.

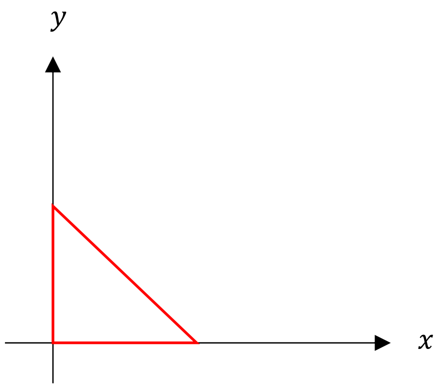
$k < 1$:

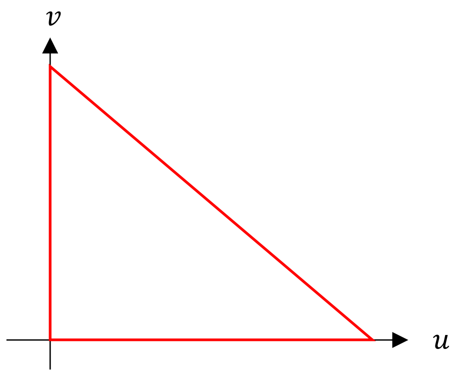




Uočavamo da za $k < 1$ imamo kontrakciju odnosno stezanje.

$k > 1$:





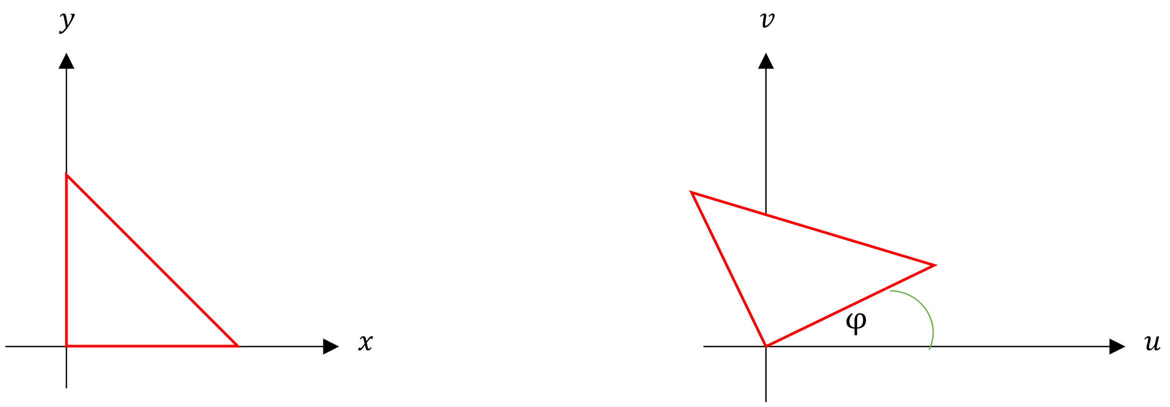
Uočimo da za $k > 1$ imamo dilataciju odnosno rastezanje.

Ovo preslikavanje svaku točku preslika u točku pri čemu su kutovi sačuvani (*konformno preslikavanje*) a apsolutna vrijednost $|z_0|$ se poveća, odnosno, smanji k puta.

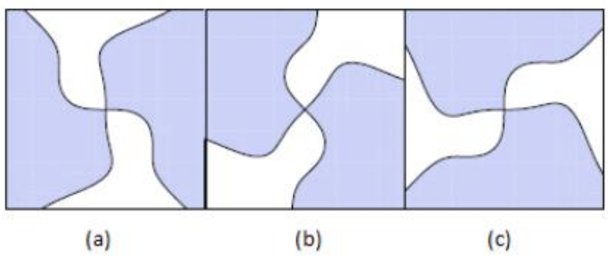
3.2.3 Rotacija

Preslikavanje oblika $f_3(z) = e^{i\theta}z$ nazivamo *rotacija*. Ako ga prikažemo u trigonometrijskom obliku dobivamo $f_3(z) = (\cos\theta, \sin\theta)z$. Odnosno za $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dobivamo

$f_3(z) = r(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi))$



Ovim se preslikavanjem svaka točka kompleksne ravnine zarotira za kut φ u pozitivnom smjeru.



Slika 3 1 Slika (b) je rotacija slike (a) za -π/4, a slika (c) je rotacija slike (a) za -π/2, (vidi [1])

3.2.4 Inverzija

Inverzija je preslikavanje oblika $f_4(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Definiramo preslikavanje na proširenoj kompleksnoj ravnini odnosno dodajemo točku ∞, pa vrijedi

$f_4(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0$, $f_4(0) = \frac{1}{0} = \infty$.

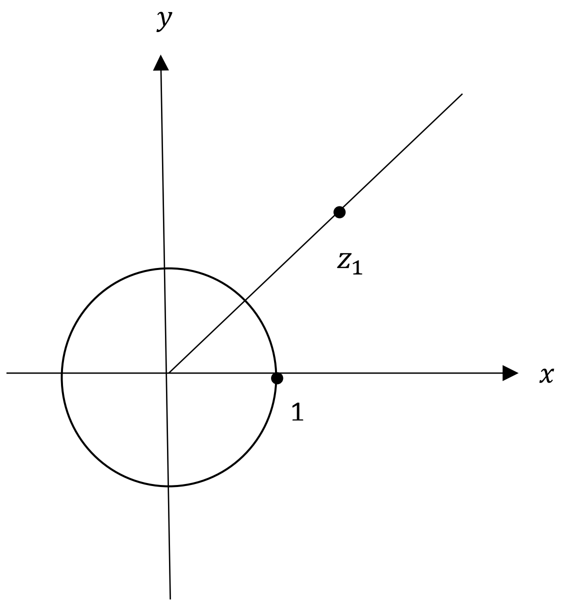
Kako bi shvatili na koji način preslikava inverzija, pogledajmo simetriju s obzirom na jediničnu kružnicu.

3.2.3.1 Simetrija obzirom na jediničnu kružnicu

Kompleksni brojevi $z_1 i$ z_2 su simetrični s obzirom na jediničnu kružnicu ako vrijedi

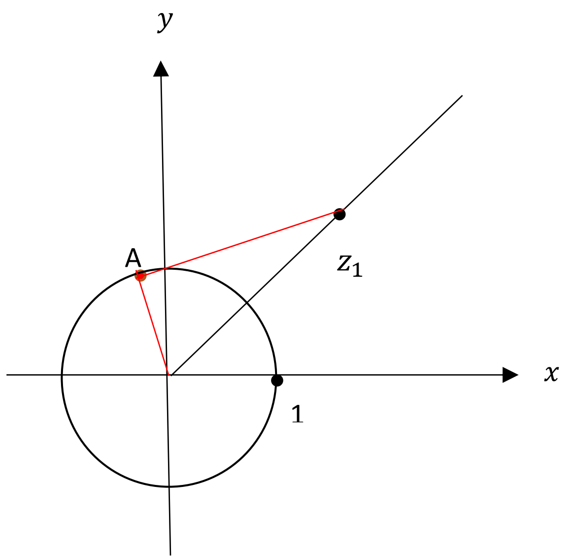
$\arg(z_1) = \arg(z_2)$ i $|z_1||z_2| = 1$.

Želimo pronaći z_2 koji je simetričan broju z_1 s obzirom na jediničnu kružnicu; vidi skicu.

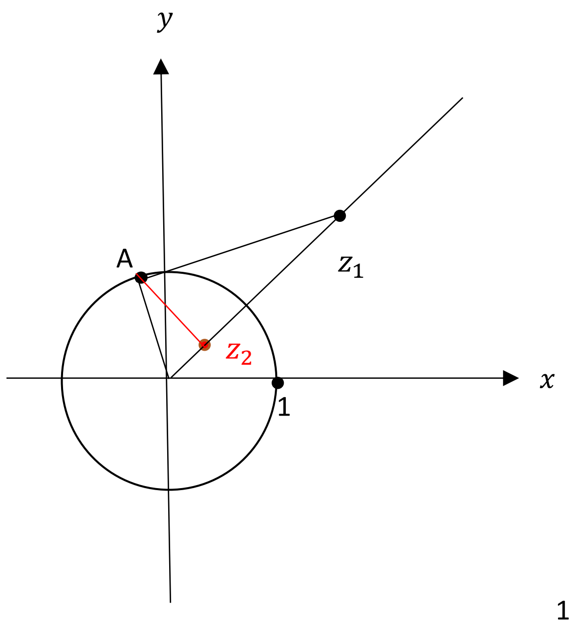


Kako mora vrijediti $\arg(z_1) = \arg(z_2)$, uočavamo da će se kompleksan broj z_2 nalaziti na označenom polupravcu.

$(\varphi_1 = \varphi_2)$



Prvo konstruiramo tangentu na jediničnu kružnicu iz z_1 i dobivamo točku A. Spojimo točku A i ishodište, te dobivamo pravi kut pri vrhu A (linije crvene boje).



Spuštamo visinu iz točke A na polupravac, na kojem se nalazi z_1. Nožište te visine na polupravcu je traženi kompleksni broj z_2.

Iz sličnosti trokuta vrijedi $1 : |z_2| = |z_1| : 1$, odnosno $\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{1}$, čime je zadovoljen uvjet $|z_1||z_2| = 1$.

Kako je ovo povezano s inverzijom?

Iz konstrukcije smo dobili $z_2 = \frac{1}{\overline{z_1}}$. S obzirom da vrijedi $|\overline{z_1}| = |z_1|$ imamo

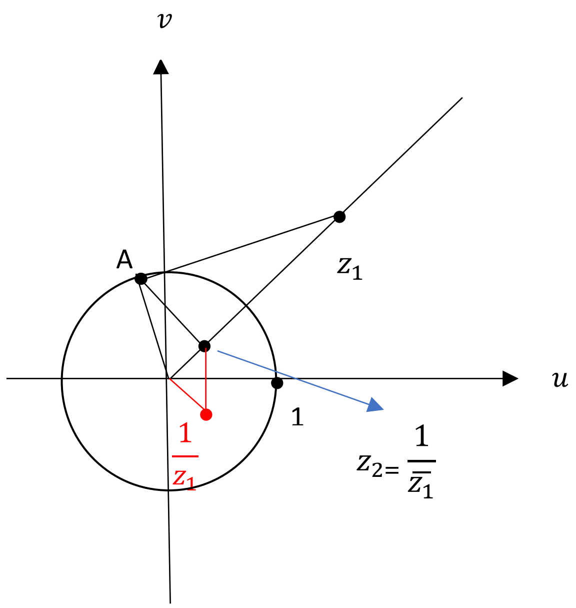
$\arg(z_2) = \arg\left(\frac{1}{\overline{z_1}}\right) = -\arg(\overline{z_1}) = -(-\arg(z_1)) = \arg(z_1)$

odnosno zadovoljen je uvjet $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

Kod inverzije potrebno je dobiti oblik $z_2 = \frac{1}{z_1}$.

Inverziju možemo prikazati kao kompoziciju dva preslikavanja, inverzije s obzirom na jediničnu kružnicu (gdje dobivamo $\frac{1}{\overline{z_1}}$) i simetrije s obzirom na realnu os.

Promotrimo gdje bi se trebala nalaziti točka $\frac{1}{z_1}$, kad točku z_1 preslikamo inverzijom. Točka simetrična z_2 s obzirom na os. Dakle, djelovanje inverzije je osna simetrija točke s obzirom na realnu os i potom dilatacija.



4 Möbiusova transformacija

Jedan od najznačajnijih primjera konformnog preslikavanja je bilinearno preslikavanje[2] ili Möbiusova transformacija.

Definicija 4.1 Neka su zadane konstante $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ takve da je $ad - bc \neq 0$. *Möbiusova transformacija* je racionalna funkcija kompleksne varijable $f: \mathbb{C} \backslash \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}$ definirana sa:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Möbiusova transformacija definirana je kao kvocijent dviju derivabilnih bijekcija, pa je i početna funkcija derivabilna na svojoj domeni.

Dakle,

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

pa bi $ad - bc = 0$ povlačilo da je f konstanta. Iz tog razloga je stavljen uvjet $ad - bc \neq 0$.

Budući da je funkcija derivabilna sa svojstvom $f'(z) \neq 0$ zaključujemo da je i konformna funkcija.

Ranije smo naveli da se složenija konformna preslikavanja mogu prikazati kao kompozicija osnovnih. U nastavku ćemo Möbiusova transformacija prikazat na taj način

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Neka su

$f_1(z) = z + \frac{d}{c}$, translacija za $\frac{d}{c}$,

$f_2(z) = \frac{1}{z}$, inverzija,

[2] Möbiusova transformacija ili bilinearna transformacija jer se može prikazati i jednadžbom $czf(z) - az + df(z) - b = 0$, gdje se vidi da je to linearna funkcija posebno po z i posebno po $f(z)$.

$f_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2} z$, dilatacija i rotacija,

$f_4(z) = z + \frac{a}{c}$, translacija za $\frac{a}{c}$.

Sada $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ možemo prikazati kao kompoziciju $f(z) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$.

Primjer 4.1

a) Funkcija zadana sa $f(z) = \frac{(3+i)z+2}{z+3i}$ je Möbiusova transformacija.

Da bi navedena funkcija bila Möbiusova transformacija potrebno je provjeriti zadovoljavaju li konstante $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ uvjet $ad - bc \neq 0$, pri čemu je $a = 3 + i$, $b = 2, c = 1, d = 3i$.

$(3 + i)3i - 2 = 9i - 5 \neq 0$. Dakle, funkcija je Möbiusova transformacija.

b) Rastavimo Möbiusovu transformaciju $f(z) = \frac{2iz+3i}{2z+2}$ na osnovna konformna preslikavanja.

$$f(z) = \frac{2iz + 3i}{2z + 2} = \frac{2z + 3}{2z + 2} i = \frac{2z + 2 + 1}{2z + 2} i = i + \frac{i}{2z + 2}$$

Neka je $f_1(z) = 2z$ homotetija za faktor 2, $f_2(z) = z + 2$ translacija za 2, $f_3(z) = \frac{1}{z}$ inverzija, $f_4(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} z$ rotacija za kut $\frac{\pi}{2}$ i $f_5(z) = z + i$ translacija za i. Tada je $f(z) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$.

5 Escherova djela

U nastavku ćemo promatrati umjetnička djela nizozemskog grafičara M.C.Eshera te na njima primijeniti navedena preslikavanja.

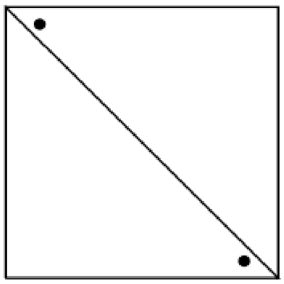
Slika 6 1 Regular Division of The Plane VI

Zbog jednostavnosti i jasnoće smatrat ćemo da je svaki gmaz jednakokračan pravokutan trokut s glavom u jednom od kutova veličine 45 stupnjeva i rep u drugom. Uočavamo da na kraćim stranicama strši jedna šapa, a na hipotenuzi dvije.

Spajanje navedenih trokuta može se podijeliti u tri kategorije:

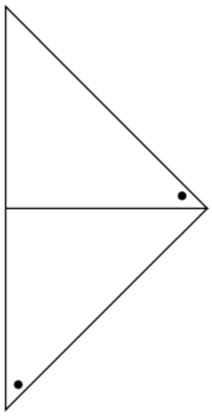
1) Spajanje trokuta preko dvije hipotenuze.
2) Spajanje trokuta preko dvije katete.
3) Spajanje trokuta preko hipotenuze i katete.

1)



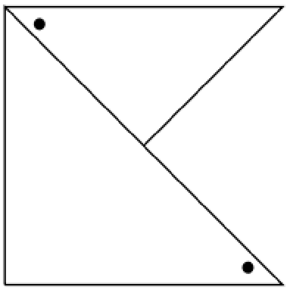
Kompozicija rotacije i translacije.

2)



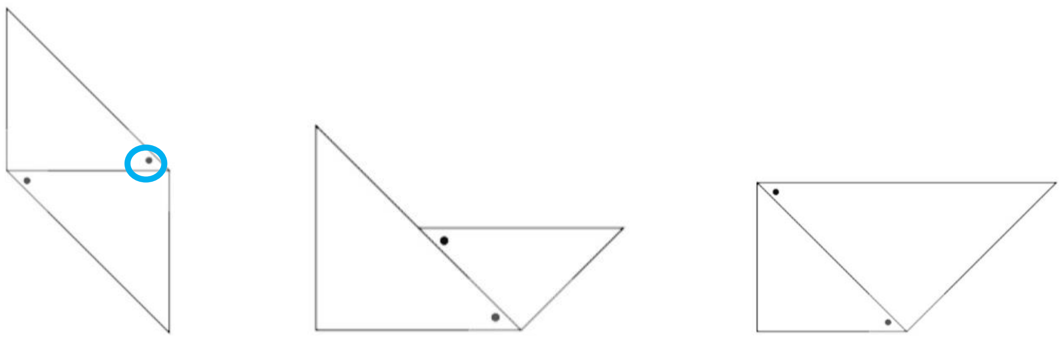
Kompozicija rotacije i translacije.

3)

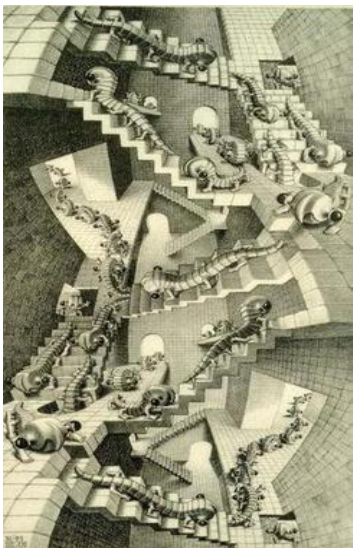


Kompozicija rotacije, translacije i kontrakcije.

Situacije prikazane u nastavku nisu dozvoljene za spajanje dvaju trokuta, a to su:

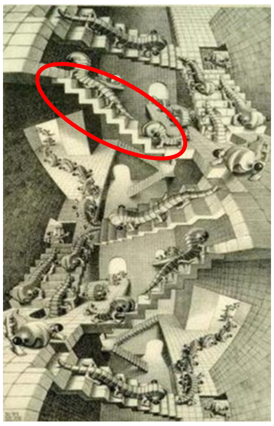


Na prvoj slici oblik označen plavom bojom sadrži glavu ili rep gmaza dok njemu susjedan pravi kut sadrži lakat. Budući da negativan prostor lakta može biti ispunjen samo drugim laktom, a negativan prostor glave ili repa može biti ispunjen samo repom, odnosno glavom, uočavamo da ova dva kuta ne mogu biti susjedna. Isti argument vrijedi i za preostale dvije slike. Odavde vidimo da imamo samo tri načina za spajanje trokuta kako bi napravili pravilna podudaranja (gore navedena).

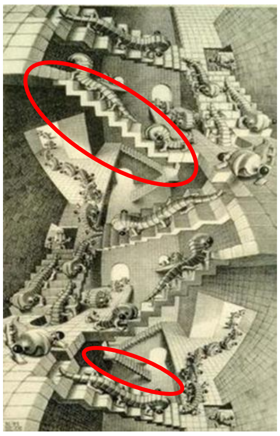


Slika 6 2 House of stairs

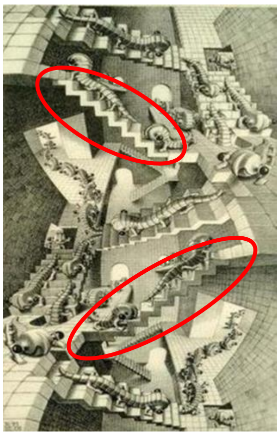
Kao i kod prethodne slike, i na ovoj je vidljiva matematička pozadina. Naime, ako jedne stepenice fiksiramo, ostale dobivamo određenim preslikavanjima.



Zaokružene stepenice uzet ćemo kao fiksne te ćemo raspored ostalih stepenica promatrat u odnosu na fiksne.



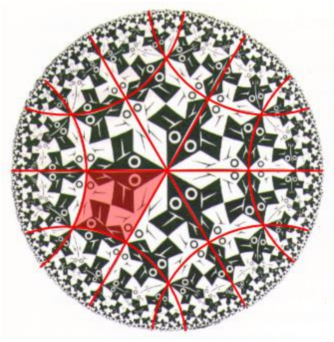
Kompozicija translacije i kontrakcije.



Kompozicija translacije i rotacije.

Slika 6 3 Circle limit I

Navedenim umjetničkim djelom nizozemski je grafičar želio prikazati beskonačnost u konačnom prostoru. Kako bi bolje uočili način na koji je Escher stvorio sliku, pogledajmo linije koje prate bodlje ribe. Imamo dvije vrste linija a to su ravne linije koje prolaze središtem diska te lukovi krugova koji dodiruju rub diska. Uočavamo da imamo poligone čijom translacijom i rotacijom dobivamo cijelu ravninu.

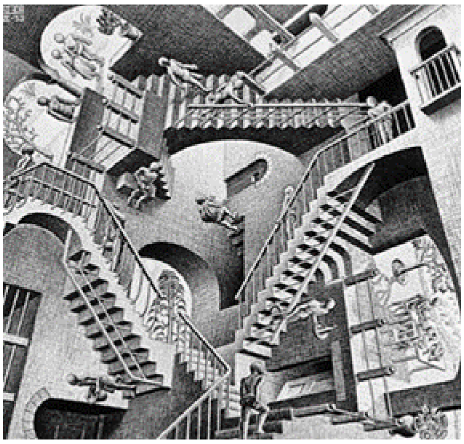


Escher nije bio zadovoljan ovim djelom obzirom da ribe nisu okrenute u istom smjeru te ne izgledaju realistično.

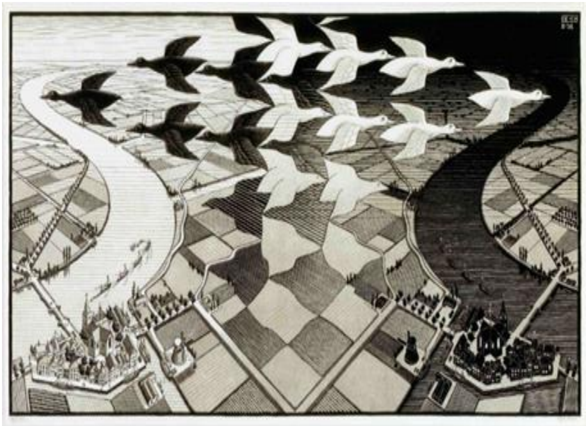
U djelu Circle limit III ribe su bolje organizirane te se boje pravilno izmjenjuju.

Slika 6 4 Circle limit II

6 Galerija



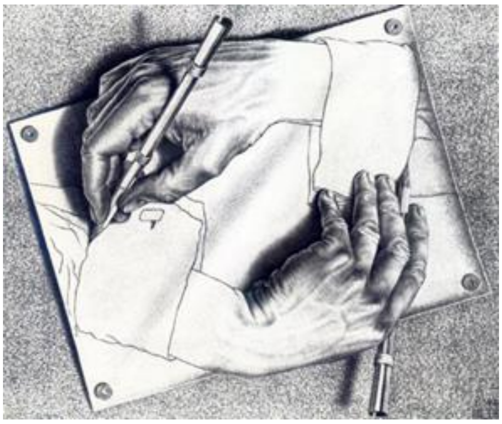
Slika 6 5 Relativity



Slika 6 6 Day and night

Slika 6 7 Print Gallery (nedovršena)

Slika 6 8 Print Gallery (dovršena)

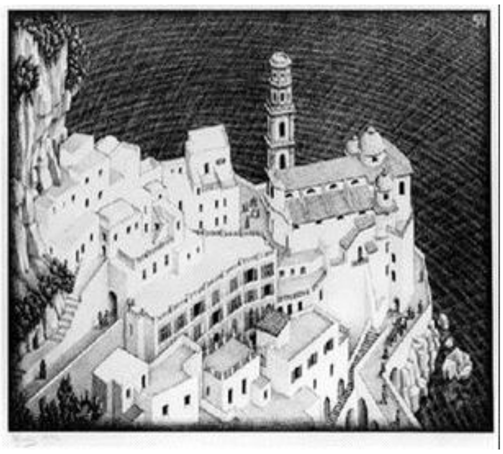


Slika 6 9 Drawing hands

Slika 6 10 The well

Slika 6 11 Waterfall

Slika 6 12 Möbius strip II



Slika 6 13 Atrani

Slika 6 14 Castrovalva

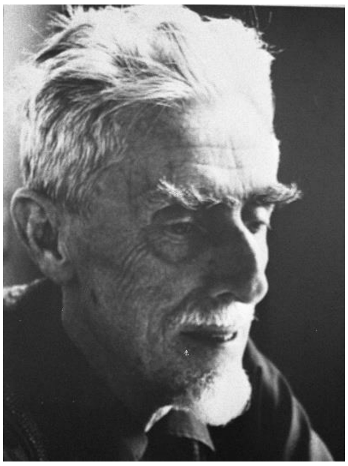
7 Biografija

Maurits Cornelis Escher jedan je od najpoznatijih svjetskih grafičara. Ljudi su ga često nazivali majstorom simetrije, nizozemskim ilustratorom i matematičarem, te specijalistom za optičku umjetnost. Svojim djelima i u njima poigravajući se orijentacijom i prostorom inspirirao je milijune ljudi diljem svijeta.

Rođen je u nizozemskom gradu Leeuwardenu 1898. godine kao četvrti sin građevinskih inženjera Georgea Arnolda Eschera i Sare Gleichman. Nakon pet godina obitelj se seli u grad Arnhern gdje Escher provodi većinu svoje mladosti. Bio je vrlo kreativno dijete s puno interesa, pri čemu ga je posebno privlačila glazba, a i stolarski zanati. Iako pod utjecajem oca inženjera, nije se posebno isticao u matematici. Školu arhitekture i dekorativne umjetnosti pohađao je od 1919. do 1922. godine gdje je razvio interes za grafiku i gdje je pod mentorstvom Samuela Jessurun de Mosquita izradio svoja prva djela u drvorezu.

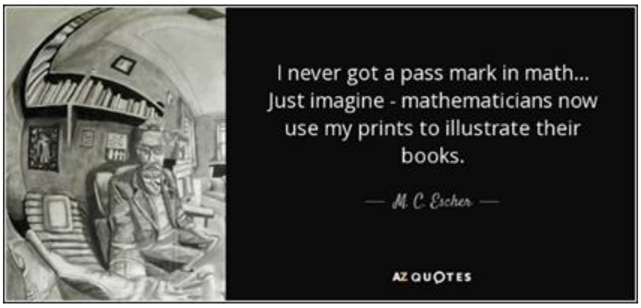
Proveo je niz godina putujući diljem Europe, te je živio u Italiji od 1922. do1935., a zatim se preselio u Švicarsku, a potom u Belgiju. Talijanska arhitektura i krajolik potakla ga je na stvaranje realnijih obrazaca u kojima se poigrava perspektivom i sjenama. U tom razdoblju nastaju djela *„Hand with a reflecting sphere “, „Castrovalva“* i *„Atrani“.* Često je odlazio u Španjolsku gdje ga je očaravao kompleksan dizajn i arhitektura. Metode ponavljanja određenih elemenata kao i međusobna preklapanja slika i figura vidljiva su u njegovim serijama radova *„Metamorphosis“* i *„Development“.* Tijekom života Escher je izradio 448 litografija i drvoreza, te više od 2000 crteža i skica. Kroz svoja je djela pokazao izvanrednu sposobnost prikazivanja nemogućih arhitektonskih konstrukcija, beskonačnih prostora, te metamorfozu jednog predmeta u drugi.

Umro je 1972. godine u svom domu. Njegovi se radovi nalaze po cijelom svijetu: u Nacionalnoj umjetničkoj galeriji (Washington DC), u javnoj knjižnici u Bostonu, u muzeju Escher (Haag), u Huis ten Bosch (Japan), u muzeju Izraela (Jeruzalem), te u Nacionalnoj galeriji Kanade (Ottawa).



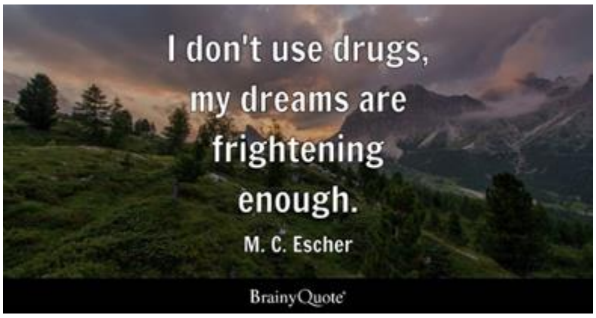
Slika 7 1 Maurits Cornelis Escher

U nastavku se nalaze neki od njegovih citata:

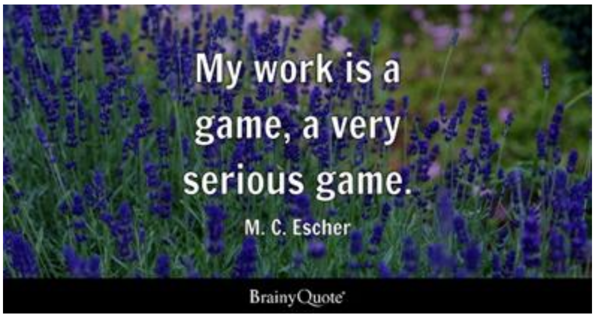


Slika 7 2 Citat I

Slika 7 3 Citat II



Slika 7 4 Citat III



Slika 7 5 Citat IV

8 Zaključak

Primjenom kompleksnih transformacija možemo shvatiti matematičku pozadinu nekih Escherovih djela i time ih doživjeti još ljepšima i sadržajnijima. U nekim je svojim radovima prikazao popločavanja ravnine različitim oblicima primjenom različitih načina preklapanja i ponavljanja tih oblika, a uvijek s prisutnom simetrijim i pravilnim uzorcima. Iako nije posjedovao matematičko obrazovanje, na njega su utjecali matematičari George Pólya i Roger Penrose, te u njegovim radovima prepoznajemo i beskonačnost, involuciju, dualnost te euklidsku i hiperboličku geometriju.

Popis slika

Literatura

1. Batisić, I., Uporaba konformnog preslikavanja u problemima strujanja idealne tekućine, PMF - fizički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2008.
2. Čuljak, V., Primijenjena matematika, Skripta, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011.
3. Devide, V., Matematička čitanka, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
4. Kurepa, S., Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjena, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.
5. Pavković, B., Veljan, D., Elementarna matematika 2, Školska knjiga, Zagreb,1995.
6. Ungar, Šime, Kompleksna analiza, Skripta, PMF-matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2009.
7. Augustyn, A., *M.C. Escher | Biography, Facts, & Tessellation | Britannica*, URL: https://www.britannica.com/biography/M-C-Escher (21.3.2023.)
8. *Biography; M.C. Escher; The Official Website*, URL: https://mcescher.com/about/biography/ (29.5.2023.)
9. *M. C. Escher biografija - djetinjstvo, životna dostignuća i vremenska traka,* URL: https://hr.celeb-true.com/escher-legendary-dutch-graphic-artist-illustrator-this-biography (20.3.2023.)
10. *M. C. Escher quote: I never got a pass mark in math... Just imagine...*, URL: https://www.azquotes.com/quote/919286 (6.6.2023.)
11. *M. C. Escher Quotes – BrainyQuote*, URL: https://www.brainyquote.com/authors/m-c-escher-quotes (2.6.2023.)
12. *The Mathematical Art of M.C.Escher*, URL: https://platonicrealms.com/minitexts/Mathematical-Art-Of-M-C-Escher (6.6.2023.)