Matematičko razmišljanje i nastava matematike

Anić, Rina

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Diplomski sveučilišni studij Matematika

Rina Anić

Matematičko razmišljanje i nastava matematike

Diplomski rad

Rijeka, 1.10.2023.

Sveučilište u Rijeci
Fakultet za matematiku

Diplomski sveučilišni studij Matematika

Rina Anić

Matematičko razmišljanje i nastava matematike

Mentor: prof. dr. sc. Sanja Rukavina

Diplomski rad

Rijeka, 1.10.2023.

Sažetak

Matematika danas predstavlja jedan od temeljnih i nužnih čimbenika za razumijevanje svijeta koji nas okružuje, a njezina je primjena uvelike pridonijela razvoju suvremenog društva u svim njegovim područjima, što ujedno ukazuje ne samo na važnost matematike kao znanosti, već i na potrebu učenja i poučavanja matematike. Matematika je stoga i nastavni predmet čiji je opći cilj obrazovanje i odgoj učenika putem matematičkih sadržaja, a glavni prenošenje učenicima određenog sustava znanja, umijeća i navika. Vodeći se time, učenike je potrebno naučiti međusobno razmjenjivati mišljenja i ideje, timski raditi te promišljati na način koji vodi do dubljeg razumijevanja promatranih pitanja i sadržaja, veće koherentnosti poznatih koncepata te veće efektivnosti spoznajnih procesa i kritičnih procjena. Opisani način razmišljanja predstavlja upravo matematičko razmišljanje, a sve spomenuto pospješuje razvoj vještina i znanja kojima će se učenici koristiti u osobnom, društvenom i profesionalnom životu. Određena teorijska razmatranja o učenju i uvjerenjima učenika o vlastitim matematičkim sposobnostima te ljudskim sposobnostima koje su u osnovi matematičkog razmišljanja i djelovanja, predstavljaju polazišnu točku za formiranje konkretnih smjernica za razvoj matematičkog razmišljanja u nastavi matematike. Štoviše, navedena teorija može poslužiti kao motivacija i opravdanje za promišljanje o možebitnim promjenama postojećeg obrazovnog sustava.

Ključne riječi: matematika, nastavni predmet Matematika, matematičko razmišljanje, učenje matematike, mentalni sklop.

Sadržaj

1 Uvod

Kako bi se obradila tema Matematičko razmišljanje i nastava matematike, postavlja se pitanje što je uopće matematičko razmišljanje. Ono je način razmišljanja koji ne mora biti ni na koji način povezan s matematikom, međutim u ovom ćemo ga radu razmatrati isključivo u okvirima matematike i nastave matematike.

S tim ciljem, potrebno je formirati sam pojam matematike, opisati na koji način matematičari matematiku stvaraju i kako pri svojem matematičkom djelovanju razmišljaju. Očekivano, u nastavku, postavlja se pitanje koje su ljudske sposobnosti u osnovi matematičkog razmišljanja i djelovanja, jesu li za isto sposobni svi ljudi i, ukoliko jesu, zašto je matematika mnogima općenito teška.

Pošto je tema rada usmjerena k nastavi matematike, nužno je u nastavku promotriti sva pitanja vezana za matematiku kao nastavni predmet; između ostalog, koja je svrha predmeta Matematika u obrazovanju i koji su odgojno-obrazovni ciljevi učenja i poučavanja matematike. Interesantno, dio matematičara i stručnjaka za nastavu matematike otvoreno progovara i ukazuje na, prema njima, preveliku razliku između matematike kao znanosti i nastavnog predmeta Matematika. Štoviše, neki od njih zauzimaju stav da su upravo te razlike razlog tome što se matematika često karakterizira kao neinteresantna, suhoparna i teško savladiva. Razmatrajući iznesena obrazloženja i teorije, cilj je pokušati pronaći optimalno rješenje i odgovoriti na pitanja kao što su: “Kako školsku matematiku približiti matematici kao znanosti?”, “Kakve nastavne modele zagovaraju matematičari?”, “Koji su zahtjevi današnjice i može li se na iste odgovoriti kroz nastavu matematike?”

Nakon što odgovorimo na navedena pitanja, postat će jasno da bi među glavnim zadacima matematičkog obrazovanja današnjice trebao biti razvoj upravo matematičkog razmišljanja učenika.

Zapravo, matematičko razmišljanje u nastavi matematike predstavlja istovremeno i sredstvo i cilj, stoga je potrebno istražiti svu onu relevantnu teoriju koja je u osnovi matematičkog razmišljanja i djelovanja učenika. Nužno je razumjeti osnove teorije učenja, na koji način učenici percipiraju svoje pogreške i poteškoće u učenju matematike i kako kod njih potaknuti razvoj određenog načina razmišljanja. Sve navedeno predstavlja uvjete za formiranje konkretnih smjernica za razvoj matematičkog razmišljanja u nastavi matematike.

2 Matematika i matematičko razmišljanje

2.1 Matematika

Što je matematika? Prema Klaićevom Rječniku stranih riječi (1978.), matematika je "znanost o veličinama, tj. o kvantitativnim odnosima i prostornim oblicima stvarnog svijeta". U mrežnom izdanju Hrvatske enciklopedije Leksikografskog zavoda Miroslav Krleža navodi se da je matematika "znanstveno razvijeni logički sustav koji proučava idealne objekte i pojmove nastale apstrakcijom brojenja i mjerenja te povezuje varijable (npr. promjenjive veličine), apstraktne strukture (npr. brojeve, skupove, vektore) i prostore (npr. euklidski, vektorski, metrički, normirani). Matematika se primjenjuje u proučavanju pojava kvantitativnih rješenja problema". Je li pojam matematike oduvijek bio objašnjen na ovaj način? Je li matematika oduvijek smatrana znanošću o veličinama, tj. o kvantitativnim odnosima i prostornim oblicima stvarnog svijeta i je li se matematika oduvijek primjenjivala u proučavanju pojava kvantitativnih rješenja problema?

Matematičar Keith Devlin (2008.) ističe da se odgovor na pitanje "Što je matematika?" u posljednjih dvije tisuće i petsto godina promijenio više puta. Naime, matematika se oko 500. god. pr. Kr. bavila brojevima. Drevna egipatska, babilonska i kineska matematika sastojala se gotovo u cijelosti od aritmetike. Tijekom idućih osamsto godina, između 500. god. pr. Kr. i 300. godine, matematika se počela razvijati i izvan granica proučavanja brojeva. Matematičari drevne Grčke više su se bavili geometrijom i brojeve su često promatrali u geometrijskom smislu. Osim što su bili usredotočeni na broj i oblik, za Grke je matematika postala akademska disciplina s estetskim i vjerskim elementima. Na početku antičkog razdoblja Tales je uveo ideju da se precizno postavljene matematičke tvrdnje mogu formalnim argumentima logički dokazati. Taj je pristup svoj vrhunac imao u Euklidovim elementima - djelu od trinaest svezaka objavljenom oko 350. god. pr. Kr. U njima je Euklid sistematski opisao predmete svojih izučavanja i spoznaje svojih prethodnika koristeći se metodom logičnog istraživačkog rada koja se održala do danas. Vrlo značajna promjena u matematici desila se zatim sredinom 17. stoljeća kad su sir Isaac Newton u Engleskoj i Gottfried Wilhelm Leibniz u Njemačkoj otkrili diferencijalni račun. Posljedično, matematikom, koja je do tada bila ograničena na statične tehnike brojenja, mjerenja i opisivanja oblika, dodatno su se proučavale i opisivale promjene i gibanja. Oko 1750. godine razvoj matematike, osim u području njezine primjene, proširio se i na matematičku teoriju. Do kraja 19. stoljeća matematikom su se proučavali brojevi, oblici, gibanja, promjene, prostori te matematički alati koji su se pritom rabili, a što ujedno možemo smatrati početkom moderne matematike.

Moderna se matematika bavi apstraktnim obrascima, apstraktnim strukturama i apstraktnim odnosima. Matematičar Walter Warwick Sawyer (1955.), kako je istaknuo Devlin (2008.), napisao je: "Matematika je klasifikacija i istraživanje svih mogućih obrazaca. Pojam obrasca ovdje rabim u značenju s kojim se neki neće složiti. Mora ga se razumjeti u širem smislu, u značenju bilo koje vrste pravilnosti koju um može prepoznati." Devlin (2008.) nadalje upućuje na sličan opis matematike kojeg je matematičar Andrew Gleason objavio u biltenu Američke akademije znanosti i umjetnosti u listopadu 1984. godine. Gleason kaže: "Matematika je znanost o uređenosti. Kad govorim o redu, mislim na pojmove obrazaca i pravilnosti. Cilj je matematike prepoznati i opisati podrijetlo i vrste uređenosti te povezanost raznih vrsta uređenosti čiju pojavu zamjećujemo." Prema matematičarki Jo Boaler (2016.), matematika je, štoviše, kulturološki fenomen; skup ideja, ustanovljenih veza i odnosa kojima se može objasniti stvarni svijet. Devlin (2008.)

uz to nadodaje da matematika, osim što uopćava pojave iz svijeta oko nas i na taj način odražava taj svijet, odražava i misaone strukture bića koja vrše to uopćavanje, to jest misaone procese nas samih.

Dakle, možemo reći da je danas matematika znanost o uređenosti, obrascima, strukturi i logičkoj povezanosti. Ona predstavlja proces otkrića, kako vanjskog svijeta, tako i nas samih kao misaonih bića koja u tom svijetu žive. Njome se proučavaju svojstva i veze raznih objekata; stvarnih objekata u pojavnom svijetu (točnije, idealizirane inačice tih stvarnih objekata) ili apstraktnih entiteta koje stvaraju matematičari.

O radu matematičara Devlin (2008.) ističe izjave matematičara Paula Halmosa i Richarda Borcherdsa. Halmos je 1968. godine napisao: "Matematika nikad nije deduktivna u svojem stvaranju. Matematičar u svojem poslu nejasno nagađa, zamišlja općenitu primjenu i donosi neopravdane zaključke. Slaže i preslaguje ideje te počinje vjerovati u njihovu istinitost mnogo prije nego što može izvesti logičan dokaz." Borcherds, dobitnik Fieldsove medalje 1988. godine, iznio je slična razmišljanja. Neposredno nakon uručenja medalje izjavio je: "Logički napredak dolazi tek na kraju i zapravo je prilično dosadno provjeravati uklapaju li se doista sve pojedinosti. Prije toga morate sve djeliće posložiti zajedno, što uključuje mnogo eksperimentiranja, nagađanja i intuicije."

O matematičkoj istini presuđuje matematički dokaz. Matematički dokaz je proces koji se sastoji od organiziranja raznih ideja i uvida koji vode do potvrđivanja ili opovrgavanja neke matematičke tvrdnje na temelju točno određenih logičkih zaključaka. Prema Devlinu (2012.), izgradnja matematičkog dokaza predstavlja jedan od najkreativnijih činova ljudskog uma.

2.2 Sposobnost za matematiku

Unatoč svemu navedenom, matematika ne zahtijeva posebnu sposobnost koju većina ljudi ne posjeduje. Devlin zagovara teoriju prema kojoj ne postoji urođena sposobnost za matematičko razmišljanje i djelovanje koju posjeduju samo pojedinci te ističe da su osobine mozga koje omogućuju matematičko razmišljanje iste one osobine pomoću kojih shvaćamo svijet oko sebe, a postojale su prije pojave matematike te su se razvile u svrhu nekih drugih potreba; primarno potreba za razumijevanjem i komunikacijom. On navodi: "Svojstvo mozga koje nam omogućuje jezičnu komunikaciju isto je ono svojstvo koje čini mogućim i matematičko mišljenje. Time što je ljudski mozak razvio sposobnost uporabe jezika, automatski je stekao i matematičku sposobnost." Do prije 75000 do 200000 godina naši preci komunicirali su proto−jezikom koji je bio sadržan od riječi koje označuju objekte, stanja i djelovanja u neposrednoj okolini te kojima su se prenosile informacije o trenutnim emocionalnim stanjima pojedinaca, njihovim potrebama, izravnoj opasnosti, mjestu na kojem se nalazi hrana i slično. Vremenom, sa svrhom opstanka za koji je bilo potrebno bolje razumjeti svijet i ostvariti bolju međusobnu komunikaciju, primitivan sustav komunikacije evoluirao je do pojave jezika. U smislu onoga što se njime može izraziti, jezik se kvalitativno razlikuje od proto−jezika. Jezik dopušta oblikovanje i iznošenje znatno složenijih ideja − onih o uvjetima i zbivanjima izvan neposredne okoline pojedinca, a posljedica je razvoja sposobnosti naših predaka koje su im, između ostalog, omogućile zamišljanje razvoja događaja u budućnosti i planiranje temeljeno na zamišljenim idejama, odnosno način razmišljanja koje je bilo direktna posljedica pitanja "Što ako?".

Ljudski um sposoban je uočiti i prepoznati obrasce. Ti obrasci mogu biti stvarni ili izmišljeni, oni koji se mogu zorno predočiti ili oni o kojima se može samo promišljati, statični ili dinamični, kvalitativni ili kvantitativni, oni koji mogu proizlaziti iz pojavnog svijeta ili iz znanstvenih potraga. Devlin ističe da ljudsko iskustvo nije posljedica učenja primjene pravila, već stjecanje sposobnosti prepoznavanja, pa čak i stvaranja, velikog broja obrazaca i djelovanja u skladu s tim te navodi: "Milijuni godina evolucije opremili su nas mozgom koji posjeduje određene vještine potrebne za opstanak. Dio tog dara čini sposobnost uma da prepoznaje obrasce, povezuje pojmove te brzo prosuđuje i zaključuje. Sposobni smo brzo i razborito odlučivati na temelju relativno malog broja informacija."

Usprkos opisanom, za matematiku ipak možemo reći da je općenito teška. Prema Devlinu, razlog tome je taj što matematika zahtijeva kognitivne sposobnosti koje su se razvile s nekom drugom, gore opisanom, svrhom. Ljudi posjeduju sposobnost apstraktnog razmišljanja, ali su objekti takve misaone obrade stvarni ili njima nalik, dok su predmeti apstraktnog razmišljanja u matematici također apstraktni, odnosno nisu ni na koji način povezani s realnim svijetom već su nastali uopćavanjem stvarnih objekata. Pod pojmom apstrakcija podrazumijeva se jedan od temeljnih misaonih procesa koji označuje djelotvoran i logički razvijen mehanizam za upoznavanje nekog objekta ili pojave; ona je postupak kojim se zadržavaju samo opća bitna svojstva promatranog objekta ili pojave i istovremeno odbacuju ona koja su za određeno proučavanje nebitna. Takvu kompleksnost um obrađuje nastojeći promatrane apstraktne objekte učiniti na bilo kakav način stvarnijima. Iako su za takav umni rad sposobni gotovo svi ljudi, on zahtijeva dodatni misaoni angažman, što matematiku čini teškom.

Dakle, čini se da se pojedinci razlikuju samo u volji i ustrajnosti da se navedene sposobnosti koriste u svrhu matematike. Devlin kaže: "Bez obzira na to što uzrokuje zanimanje za matematiku, činjenica je da to zanimanje čini glavnu razliku između osoba koje su dobre u matematici od onih koji tvrde da je smatraju nemogućom."

2.3 Matematičko razmišljanje

Čovjek je umno biće koje oduvijek pokušava odgovoriti na pitanja o svijetu oko sebe, postanku svijeta, poretku stvari, svojem položaju u svijetu i smislu života. Unatoč tome, prema hrvatskom filozofu Borisu Kalinu (1995.), prva tumačenja u obliku mitskih predodžbi rezultati su fantazije i neobrazloženog izvođenja, a ne kritičkog mišljenja čovjeka usmjerenog prema spoznaji. Tek u nastavku umnog djelovanja čovjeka, dalje govori Kalin, razvilo se nastojanje dosljednog mišljenja da racionalno pronikne u tajne svijeta i života, odnosno da se otkrije prirodni temelj prirode, to jest prirodno načelo iz kojeg sve postaje. Nastavno na to, hrvatski filozof Srđan Lelas u svojem djelu "Promišljanje znanosti" iz 1990. godine, a kako navodi Kalin, iznosi: "Da je priroda racionalna znači da je priroda logična i kada je Galilei ustvrdio da je priroda pisana matematičkim jezikom, a drugi tvrdili da je Svevišnji vrhunski matematičar, mišljeno je da je svijet po svom stvoritelju – savršenom umu – zadobio logičku strukturu."

Kalin ističe da je još od pitagorejaca matematička racionalna spoznaja postala uzor spoznaje i znanja uopće te da je Platon upravo matematičku spoznaju smatrao primjerom misaone spoznaje koja se približava onoj najvišoj.

Što je uopće matematičko razmišljanje? Matematičko razmišljanje dinamičan je mentalni proces čovjeka koji produbljuje njegovo razumijevanje promatranih pitanja i sadržaja, poznate koncepte čini koherentnima te povećava efektivnost kritičkih procjena i spoznajnog procesa. Ono se manifestira kroz sljedeće misaone aktivnosti: identificiranje ključnih značajki problema, raščlanjivanje problema na odgovarajuće dijelove, identificiranje sličnih slučajeva koji mogu biti od pomoći, identificiranje odgovarajućih i potrebnih znanja i vještina, odabir odgovarajućih strategija, razmatranje alternativnih pristupa, traženje pravilnosti, obrazaca i veza, generiranje primjera i protuprimjera te posebnih slučajeva, razmatranje ograničenja, daljnje proširenje problema pitanjem "što ako...". Sve navedeno vodi k formiranju određenih pretpostavki te utvrđivanju njihove istinitosti, odnosno dokazivanju istih i donošenju valjanih zaključaka.

Prema Devlinu (2008.), umna svojstva koja utječu na sposobnosti matematičkog razmišljanja su: osjećaj za broj (tj. sposobnost koja pojedincu omogućuje uočavanje i najsitnijih promjena u količini), sposobnost brojenja i računanja, sposobnost apstraktnog i logičkog razmišljanja te razmišljanja o odnosima među objektima, mogućnost povezivanja uzroka i posljedice i stvaranje te upravljanje uzročno-posljedičnim nizovima činjenica i događaja i učinkovito snalaženje u prostoru. Ključna među navedenim sposobnostima, a na kojoj počiva mogućnost matematičke misli današnjeg čovjeka, sposobnost je apstraktnog razmišljanja.

S obzirom na objekt o kojemu se razmišlja, apstraktno razmišljanje možemo razlučiti na četiri razine. Na prvoj razini predmeti razmišljanja su stvarni objekti koji su sadržani u neposrednoj okolini pojedinca koji o njima u tom trenutku promišlja. Već na drugoj razini ti objekti, iako su i dalje stvarni i pojedincu poznati, nisu oni koje on može u trenutku razmišljanja zamijetiti. Predmeti razmišljanja na trećoj razini mogu biti stvarni, ali pojedinac nikada s njima nije ni na kakav način došao ususret ili su to pak izmišljene ili zamišljene verzije nekih stvarnih i njemu poznatih objekata. Četvrta razina ove raščlambe za predmet misaone obrade ima potpuno apstraktne objekte koji, kako je ranije navedeno, nisu ni na koji način povezani s realnim svijetom već su nastali uopćavanjem stvarnih objekata. Dakle, presudni pomak u razvoju umnih sposobnosti koje su u osnovi matematičkog razmišljanja nije bio usvajanje novih i složenijih misaonih procesa, već upravo razvoj apstraktnog razmišljanja. Devlin govori: "Ključno svojstvo matematičkog razmišljanja jest otići korak dalje od sposobnosti laživanja stvarnosti i ući u čisto simbolički svijet na četvrtoj razini apstraktnog mišljenja. Matematičari uče živjeti i razmišljati o tom potpuno simboličkom svijetu."

Možemo stoga zaključiti da je mogućnost matematičkog načina promišljanja kod ljudi posljedica umnih sposobnosti razvijenih prije nekoliko tisuća pa čak i milijuna godina. Ono ne zahtijeva neke posebne niti nove kognitivne sposobnosti, već učinkovite načine uporabe postojećih osobina mozga.

Matematičko razmišljanje način je razmišljanja koji ne mora biti ni na koji način povezan s matematikom, međutim, u nastavku ovog rada, matematičko razmišljanje razmatrat ćemo isključivo u okvirima matematike i nastave matematike.

3 Školska matematika

3.1 Nastavni predmet Matematika

Matematika danas predstavlja jedan od temeljnih i nužnih čimbenika za razumijevanje svijeta koji nas okružuje. Primjena matematike uvelike je pridonijela razvoju suvremenog društva u svim njegovim područjima, što ukazuje ne samo na važnost matematike kao znanosti, već i na potrebu učenja i poučavanja matematike. Prema Kurikulumu nastavnoga predmeta Matematika (2019.), učenje i poučavanje matematike omogućuje razvoj matematičkih znanja i vještina kojima će se učenici koristiti u osobnom, društvenom i profesionalnom životu, odnosno potiče kreativnost, preciznost, sustavnost, apstraktno mišljenje i kritičko promišljanje koje pomaže pri uočavanju i rješavanju problema iz svakodnevice i društvenog okružja. Matematika je stoga i nastavni predmet čiji je opći cilj obrazovanje i odgoj učenika putem matematičkih sadržaja, a glavni prenošenje učenicima određenog sustava znanja, umijeća i navika. Posebno važna znanja koja u tom procesu učenici trebaju steći su znanja potrebna za učenje nekih drugih znanosti koje su više ili manje bliske matematici, znanja potrebna za buduću primjenu u životu i svakodnevnoj djelatnosti nakon srednjoškolskog obrazovanja, znanje potrebno kao priprema za studije na visokim školama i fakultetima na kojima matematika postoji kao nastavni predmet te znanje matematike kao općeobrazovni element i nužan dio kulture svakog obrazovanog čovjeka. Devlin (2008.) o istome kaže sljedeće: “Najbolja tehnika preživljavanja koju svojoj djeci možemo omogućiti jest sposobnost stjecanja znanja i učenja novih vještina. Dio arsenala vještine preživljavanja jest i općenito razumijevanje matematike te sposobnost usvajanja posebnih matematičkih vještina kad je to potrebno. To znači upoznati ljude s misaonom sposobnošću koju već posjeduju i rabe u svakodnevnom životu te ih naučiti kako tu sposobnost primijeniti u apstraktnom svijetu matematičkog mišljenja."

Unatoč svemu navedenom, za većinu učenika matematika je neinteresantan i teško savladiv nastavni predmet u kojemu je glavni cilj samostalno, brzo i točno riješiti zadane zadatke primjenom neke od usvojenih metoda njihovog rješavanja (Boaler, 2016.). Zaista, osnovnoškolsko i srednjoškolsko matematičko obrazovanje diljem svijeta većim je dijelom usmjereno k podučavanju učenika matematičkim definicijama i poučcima te postupcima i procedurama rješavanja matematičkih zadataka. Nastavno gradivo učenici najčešće usvajaju u ulozi pasivnih primatelja sadržaja nastavnog gradiva čiju zatim razinu usvojenosti, u maniri današnje kulture izvedbe i uspješnosti, prezentiraju u obliku odgovora na kratka pitanja i rješavanja tipskih zadataka u zadanom vremenu. Prema Jo Boaler, sve navedeno u suprotnosti je s onim što matematika jest i što bi u učionicama također trebala biti – između ostalog, sveobuhvatna, višedimenzionalna, ispunjena neizvjesnošću, u potrebi za kreativnošću, isprobavanjem različitih ideja, traženjem pravilnosti, formiranjem pretpostavki, donošenjem i tumačenjem niza zaključaka. Može se reći da se u školskoj matematici kod učenika potiče razvoj formalnog razmišljanja "unutar okvira" dok se, nasuprot tome, u matematici kao znanosti o uređenosti, obrascima, strukturi i logičkoj povezanosti koja predstavlja proces otkrića vanjskog svijeta i nas samih kao misaonih bića, zahtijeva matematičko promišljanje "izvan okvira" s fokusom na otkrivanju i razumijevanju novih koncepata i ideja (Devlin, 2012.).

Boaler (2016.) vjeruje da se školska matematika toliko udaljila od svoje prirode da većina učenika ne bi prepoznala matematiku u radu nekog matematičara na njegovom radnom mjestu, i to ne zbog njezine složenosti, već zbog načina rada tog istog matematičara i njegovog pristupa matematici.

Mnogi matematički ishodi rezultat su zajedničkog i nerijetko dugotrajnog rada matematičara popraćenog brojnim neuspjelim pokušajima. Suprotno tome, učenici za vrijeme nastave u većem dijelu rješavaju zadane probleme samostalno, a sinonim za dobrog matematičara u razrednom odjelu učenik je koji računa i do točnog rezultata dolazi bez greške te brže od ostalih. Matematičar Laurent Schwartz, dobitnik Fieldsove medalje 1950. godine, u svojoj je autobiografiji iz 2001. godine napisao: "Uvijek sam bio vrlo nesiguran u svoje vlastite intelektualne sposobnosti. Mislio sam da sam neinteligentan. Istina je da sam bio, i još uvijek sam, prilično spor. Treba mi vremena da odmjerim situaciju jer uvijek moram u potpunosti sve razumjeti. Dugo sam se o tome brinuo, ali na kraju sam došao do zaključka da brzina nije pokazatelj inteligencije. Važno je duboko razumjeti stvari i njihov međusobni odnos. Činjenica da ste brzi ili spori zapravo nije relevantna."

Uz sve navedeno matematika se neprestano razvija i raste, dok istovremeno školska matematika sadržajno stagnira. Devlin (2012.) kaže da nema ničeg lošeg u tome da se učenike podučava određenim konceptima koji su stari i više stotina godina, međutim, ukorak s promjenama u svijetu, napretkom društva, znanstvenim spoznajama te matematičkim odgovorom na iste, mora ići i obrazovni sustav te njegovi nastavni sadržaji.

Prema obrazovnoj reformi koju zagovara Conrad Wolfram, suosnivač i direktor Wolfram Researcha, jedne od najuglednijih kompanija za znanstvene i tehničke inovacije, matematička znanja i vještine se kod učenika trebaju razvijati radom na, za učenike, izazovnim problemskim situacijama kojima se, s ciljem njihovog rješavanja, pristupa kroz sljedeća četiri koraka:

1. postavljanje pitanja kojima se definira problem

2. prevođenje tako definiranog problema u matematički model

3. rješavanje matematičkog problema
4. interpretacija matematičkog rješenja u terminima inicijalno zadanog problema.

Wolfram pritom sugerira da je najveći dio vremena u nastavi potrebno provoditi prvi, drugi te četvrti korak, za razliku od tradicionalne nastavne prakse u kojoj je dominantno zastupljen treći korak, odnosno, na ranije opisani način, savladavanje sadržaja potrebnih za rješavanje nekog tipskog matematičkog problema. Iako Wolfram zagovara rješavanje matematičkog problema pomoću računala, što je predmet neslaganja mnogih, opisani pristup problemskim situacijama sigurno pospješuje razvoj vještina učenika potrebnih im za život i rad u modernom društvu.

3.2 Školska matematika kao odgovor na zahtjeve današnjice

Sukladno izvještaju najvećih američkih korporacija, sastavljenog i objavljenog u časopisu *Fortune* (Boaler, 2016.), trinaest najtraženijih vještina zaposlenika 1970. godine bile su:

1. pisanje
2. računanje
3. čitanje
4. komunikacijske vještine (oralne)
5. vještine slušanja
6. razvoj osobne karijere

7. kreativno razmišljanje
8. rukovodstvo
9. postavljanje ciljeva/motivacija
10. timski rad
11. organizacijska učinkovitost
12. rješavanje problema
13. interpersonalne vještine.

Godine 1999. isti se popis promijenio na sljedeći način:

1. timski rad
2. rješavanje problema
3. interpersonalne vještine,
4. komunikacijske vještine (oralne)
5. vještine slušanja
6. razvoj osobne karijere
7. kreativno razmišljanje
8. rukovodstvo
9. postavljanje ciljeva/motivacija
10. pisanje
11. organizacijska učinkovitost

12. računanje
13. čitanje.

U *Investopediji*, vodećoj svjetskoj internetskoj stranici koja obrađuje sadržaje poslovanja i financija, kao šest najpoželjnijih vještina zaposlenika u 2022. godini navedene su:

1. kritičko razmišljanje (rješavanje problema)
2. komunikacijske vještine
3. prilagodljivost
4. timski rad
5. samostalnost u radu i odlučivanju
6. digitalna pismenost.

Uzimajući navedeno u obzir, ne čudi što je na tu temu i u Kurikulumu nastavnoga predmeta Matematika (2019.) istaknuto sljedeće: "Zahtjevi suvremenog života ističu rješavanje problema kao važnu vještinu koju učenjem i poučavanjem matematike treba razvijati. Ne znamo što nas u budućnosti očekuje, ali oni koji imaju razvijenu kompetenciju rješavanja problema, imat će puno više prilika za uspjeh."

Interesantno je spomenuti da su istraživanja u Sjedinjenim Američkim Državama pokazala da su proporcionalno većem broju odslušanih matematičkih kolegija tijekom obrazovanja rasla i primanja tih pojedinaca deset godina kasnije. Konkretno, ukoliko je pojedinac odslušao i položio neki od naprednih matematičkih kolegija, utoliko su njegova primanja u periodu od deset godina nakon završene srednje škole u prosjeku bila veća do 19.5% u odnosu na one koji isto nisu učinili (Boaler, 2016).

Dakle, školska matematika medij je u kojem se može uspješno i u potpunosti odgovoriti na navedene zahtjeve današnjice, stoga bi glavni zadatak matematičkog obrazovanja trebao biti učenike naučiti međusobno razmjenjivati mišljenja i ideje, timski raditi te promišljati na način koji vodi do dubljeg razumijevanja promatranih pitanja i sadržaja, veće koherentnosti poznatih koncepata te veće efektivnosti spoznajnih procesa i kritičnih procjena. Opisani način razmišljanja predstavlja upravo matematičko razmišljanje, a sve spomenuto pospješuje razvoj vještina i znanja kojima će se učenici koristiti u osobnom, društvenom i profesionalnom životu.

4 Matematičko razmišljanje u nastavi matematike

4.1 Učenje i poučavanje matematike

Tridesetih godina dvadesetog stoljeća, kako navodi Boaler (2016.), psiholog Jean Piaget odbacio je ideju o tome da se učenje svodi na pamćenje procedura i istaknuo da "pravo" učenje ovisi o povezanosti novih ideja i iskustava s postojećim mentalnim obrascima pojedinaca koji mogu biti definirani kao skup uvjerenja i znanja temeljem kojih se organizira vlastita stvarnost. Središnje mjesto u njegovoj teoriji zauzima pojam adaptacija koji označava prilagođavanje ili privikavanje pojedinca na neku novu situaciju, nove ideje i iskustva. Adaptacija je sadržana od dva potprocesa: asimilacije – težnje k razumijevanju novih ideja i iskustava na temelju postojećih znanja (mentalnog obrasca), te akomodacije – mijenjanja spoznajnih struktura (mentalnog obrasca) kako bi se uskladile s novim idejama i iskustvom. Njegova teorija objašnjava dinamiku prilagodbe pojedinca kroz procese asimilacije i akomodacije. Dakle, kad se učenici susreću s novim idejama, nastoje ih uklopiti u svoje postojeće mentalne obrasce (asimilacija). Ukoliko se te ideje uklapaju u postojeće mentalne obrasce, pojedinac ulazi u stanje koje Piaget naziva ravnoteža. U suprotnom, ako se nove informacije ne uklapaju u postojeće mentalne obrasce pojedinca, on ulazi u stanje tzv. neravnoteže. Tijekom neravnoteže, a ako nove informacije "imaju smisla" i "nisu za odbaciti", pojedinac postojeće mentalne obrasce mijenja. Piaget opisuje učenje kao proces koji se događa u situacijama promjene – od ravnoteže k neravnoteži pa prema novoj ravnoteži. Možemo stoga reći da je "zapeti s razumijevanjem" poželjno stanje u kojemu se odvija proces učenja, koliko god za učenika stanje nerazumijevanja bilo neugodno.

Uzimajući u obzir opisanu teoriju te prema uputi Kurikuluma nastavnog predmeta Matematika (2019.), potrebno je težište suvremene nastave pomaknuti s rješavanja zadataka u kojima se traži primjena već utvrđenog postupka k razvoju vještina i sposobnosti njihove primjene u nepoznatim situacijama. U Kurikulumu se dalje navodi da je s tim ciljem poželjno odabirati zadatke u kojima je naglasak na procesu rješavanja problema i raspravi, koji od učenika traže predviđanje, promišljanje, zaključivanje, kreativnost, a jedno ili više rješenja moguće je dobiti koristeći se različitim ispravnim strategijama. Boaler (2016.) također ukazuje na to da je nastavni proces predmeta Matematika potrebno provesti radom na, za učenike, zahtjevnim, dubokim i konceptualnim matematičkim problemima. Tijekom tako koncipirane nastave matematike učenici bi se ponajprije trebali osjećati sigurno, odnosno osjećati se slobodnima za promišljanje i isprobavanja raznih ideja, traženje smisla i određenih pravilnosti te nastaviti s radom čak i kad je teško ili se rješenje niti ne nazire.

4.2 Mentalni sklop

Nastaviti s radom kada je teško, ili kad se rješenje niti ne nazire, nekim je učenicima teško ostvariti, a najčešći razlog tome je taj što vjeruju da su poteškoće s kojima se suočavaju prilikom usvajanja i primjene matematičkih znanja i vještina pokazatelj da "njima matematika jednostavno ne ide" (Boaler, 2016.).

Sveučilišna psihologinja dr. sc. Carol S. Dweck (2016.), tvrdi da način na koji pojedinac razmišlja o svojim sposobnostima može utjecati na gotovo svako područje njegovog života. Razmišljanje o vlastitim sposobnostima ona naziva mentalnim sklopom i dijeli ga na statični mentalni sklop (eng. Fixed Mind−Set) i razvojni mentalni sklop (eng. Growth Mind−Set). Odlika statičnog mentalnog sklopa je uvjerenje da su obilježja pojedinca zadana i nepromjenjiva, određena rođenjem, dok, nasuprot tome, razvojni se mentalni sklop temelji na uvjerenju da se osnovna obilježja pojedinca mogu razvijati i mijenjati vlastitim trudom i iskustvima.

Temeljem navedenog pristupa i teorije, uvjerenja učenika o vlastitim matematičkim sposobnostima također možemo podijeliti u dvije kategorije: uvjerenje da su matematičke sposobnosti određene rođenjem i nepromjenjive te, suprotno tome, uvjerenje da se matematičke sposobnosti mogu razvijati i mijenjati. Prema Boaler (2016.), učenici statičnog mentalnog sklopa većim dijelom vjeruju da je matematika "samo za pametne", da u matematici mogu biti uspješni samo pojedinci koji su rođeni s talentom za matematiku kojeg "ili imaš, ili nemaš" te da neki ljudi naprosto nisu za matematiku. S druge strane, učenici razvojnog mentalnog sklopa imaju drugačija uvjerenja: vjeruju da uspješnost u matematici nije unaprijed određena, da u matematici može biti uspješan svatko i da ona nije rezervirana "samo za pametne" te da se neovisno o urođenim talentima uspješnost u matematici ostvaruje radom i učenjem.

Rezultati istraživanja provedenog u jednoj hrvatskoj školi ukazuju na to da postoji veza između uvjerenja učenika o vlastitim matematičkim sposobnostima, s jedne strane, te načina na koji djeluju u raznim nastavnim situacijama i pri savladavanju matematičkog gradiva, s druge (Anić, 2022.). Neki od rezultata i zaključaka tog istraživanja su:

- učenici mentalnog sklopa koji teži k razvojnom ulažu znatno više vremena u učenje matematike od učenika mentalnog sklopa koji teži k statičnom

- učenici mentalnog sklopa koji teži k razvojnom intenzivnije se trude razumjeti matematičke sadržaje koji se obrađuju za vrijeme nastave

- nastavniku će glede vlastitih nejasnoća postaviti pitanje učenici koji su dominantno razvojnog mentalnog sklopa, dok to većim dijelom neće učiniti učenici koji su mentalnog sklopa koji teži k statičnom

- u razredne diskusije uključuju se učenici mentalnog sklopa koji teži razvojnom, dok će se učenici više statičnog mentalnog sklopa na isto odlučiti u znatno manjem dijelu

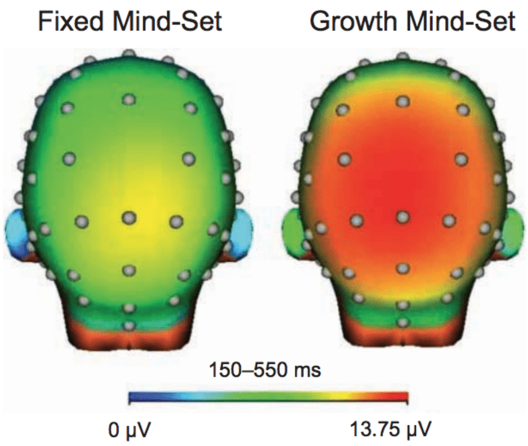
- čak 20% učenika sa statičnim mentalnim sklopom uslijed sporijeg rješavanja zadanih zadataka tijekom nastave izgubiti će volju za daljnjim rješavanjem

- 34% učenika s dominantno statičnim mentalnim sklopom će u slučaju neispravno riješenih zadataka tijekom nastave odustati od daljnjeg rješavanja

- učenici čiji mentalni sklop teži k razvojnom u najvećem dijelu nakon dobivanja slabijeg rezultata ispita pregledavaju učinjene pogreške te planiraju dodatno učiti. Isto u najmanjem dijelu čine učenici statičnog mentalnog sklopa. Učenici sa statičnim mentalnim sklopom u najvećem dijelu loš rezultat tumače kao pokazatelj "manjka pameti" te su obeshrabreni za daljnje učenje matematike.

- dodatni matematički sadržaji više interesiraju učenike mentalnog sklopa koji teži k razvojnom, dok navedeni sadržaji najmanje interesiraju učenike s pretežito statičnim mentalnim sklopom.

Psiholog Jason Moser predvodio je znanstvenu studiju u sastavu koje su istraživani neuronski mehanizmi u ljudskom mozgu koji su u osnovi različitih reakcija pojedinca na vlastite pogreške. Mozak pri pogrešci pojedinca ima dva potencijalna odgovora. Prvi, tzv. ERN (eng. Error−related negativity), ukazuje na povećanu električnu aktivnost u situaciji kada mozak "doživljava sukob" između ispravnog odgovora i pogreške. Zanimljivo, ova moždana aktivnost događa se bez obzira na to je li osoba koja daje odgovor svjesna svoje pogreške ili nije. Drugi odgovor, tzv. Pe (eng. The error positivity), moždani je signal koji ukazuje na svjesnu pažnju pojedinca o učinjenim pogreškama i na njih je vrlo usredotočen. Moser i njegovi suradnici došli su do fascinantnih zaključaka koje su objavili 2011. godine. Iz te su studije proizašla dva velika rezultata. Prvi, mozgovi ispitanika reagirali su s većim ERN i Pe odgovorima onda kada su njihovi odgovori bili pogrešni. Drugi zaključak spomenute studije je taj da pojedinci s razvojnim mentalnim sklopom vlastite pogreške doživljavaju kao priliku za učenje i poboljšanje vlastitih znanja i vještina, dok oni sa statičnim mentalnim sklopom vlastite pogreške tretiraju kao pokazatelj nedostatka svojih sposobnosti.



Slika 1: Moždana aktivnost osoba sa statičnim i razvojnim mentalnom sklopom.
Izvor: https://www.youcubed.org/evidence/believe-brain-operates-differently/ (6.6.2022)

Dakle, može se ustanoviti da učinjene pogreške učenika tijekom nastave matematike predstavljaju okolnosti za pojačan neurološki razvoj učenika, čak i onda kada svijest o učinjenim vlastitim pogreškama kod učenika izostane. S tim ciljem potrebno ih je izlagati takvim matematičkim problemima čije će im rješavanje omogućiti aktivaciju neuroloških procesa kojima se pospješuje razvoj mozga.

Mentalni sklop ljudi se može mijenjati, a kako bi se ostvario, osnažio i očuvao razvojni mentalni sklop učenika u nastavi matematike, nastavnu praksu je potrebno obogatiti određenim strategijama. Najznačajnije od tih strategija su:

- ukazivanje učenicima na činjenicu da su pogreške, nerazumijevanje i poteškoće pri usvajanju matematičkih sadržaja normalan i očekivani dio procesa učenja i savladavanja gradiva te date prilike za napredak i razvoj mozga;

- usmjeravanje učenika ka tranziciji od "ne znam" prema "ne znam još" i definiranje jasnih i ostvarivih ciljeva te stalni samorefleksivni i refleksivni osvrt kako bi osvijestili vlastiti napredak.

Na tom ih je putu potrebno pozitivno poticati, umjesto za sposobnosti, isključivo za njihov trud, ustrajnost i rad.

Sve navedeno ima za cilj ostvarivanje optimalnih uvjeta za učenje i usvajanje matematičkog gradiva te razvoj matematičkog razmišljanja učenika.

4.3 Razvoj matematičkog razmišljanja u nastavi matematike

Matematičko razmišljanje, kako je ranije utvrđeno, dinamičan je mentalni proces za koji nisu potrebne neke posebne kognitivne sposobnosti pojedinca, već učinkovit način uporabe postojećih osobina mozga. Spomenuta učinkovitost načina uporabe postojećih osobina mozga umijeće je koje se stječe i oblikuje kroz učenje i određena iskustva, stoga bi u nastavi matematike matematičko razmišljanje trebalo istovremeno predstavljati i sredstvo, ali i cilj. Što to konkretno znači? Kao sredstvo, matematičko razmišljanje u nastavi neizostavan je alat pri učenju i savladavanju matematičkog gradiva i rješavanju raznih tipova matematičkih problema. Ono učeniku omogućuje duboko razumijevanje promatranih pitanja i sadržaja, njihovu logičku povezanost i općenito povećava efektivnost kritičkih procjena i spoznajnog procesa. S druge strane, matematičko razmišljanje kao cilj predstavlja način razmišljanja koji se kroz nastavne sadržaje nastavnog predmeta Matematika može i treba razvijati. Upravo ostvareno umijeće matematičkog razmišljanja pojedincu će postati važno sredstvo koje će isti primjenjivati u svim aspektima svojeg svakodnevnog života.

O važnosti matematičkog razmišljanja u nastavi matematike govori i činjenica što je upravo *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje* jedna od pet imenovanih skupina po kojima su klasificirani matematički procesi u Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika iz 2019. godine. Prema uputi u opisu tog matematičkog procesa, učenje matematike mora biti okarakterizirano razvojem i njegovanjem logičkog i apstraktnog mišljenja. Kako bi se to ostvarilo, učenici se moraju suočiti s onakvim nastavnim konceptima i matematičkim problemima koji će od njih zahtijevati identificiranje ključnih značajki problema, njegovo raščlanjivanje na odgovarajuće dijelove, identificiranje sličnih slučajeva koji mogu biti od pomoći, identificiranje i uporabu odgovarajućih i potrebnih znanja i vještina, odabir odgovarajućih strategija, razmatranje alternativnih pristupa, traženje pravilnosti, obrazaca i veza, po potrebi generiranje primjera i protuprimjera te posebnih slučajeva, razmatranje mogućih ograničenja, daljnje proširenje problema pitanjem "Što ako ...?", formiranje i istraživanje pretpostavki, stvaranje lanaca matematičkih argumenata, utvrđivanje istinitosti pretpostavki, te donošenje samostalnih zaključaka.

Pri realizaciji svega navedenog koriste se osnovne znanstvene metode mišljenja, istraživanja i zaključivanja, a koje su ujedno važno oruđe matematičara pri dokazivanju matematičkih tvrdnji i uspostavljanju veze istog s od ranije poznatim činjenicama i teorijama. To su: analiza, sinteza, analogija, konkretizacija, apstrakcija, indukcija, dedukcija, specijalizacija i generalizacija. Sveučilišni profesor dr. sc. Zdravko Kurnik (2009.) ističe da je zadatak nastavnika izabrati pogodne probleme i primjenjivati navedene metode kako bi se učenike osposobilo na rad koji je vrlo blizak onom istraživačkom. Kurnik također skreće pažnju na činjenicu da se u udžbenicima matematike i u nastavnom procesu često ne poklanja dovoljno pozornosti na pravilnost primjene znanstvenih postupaka te navodi da je učenike potrebno postupno i na primjeren način naučiti primjenjivati spomenute metode neovisno o tome hoće li se oni kasnije ozbiljnije baviti matematikom ili ne. On vjeruje da su neuspjesi učenika nakon završenog školovanja velikim dijelom posljedica toga što se tijekom obrazovanja suviše inzistira samo na usvajanju gradiva istovremeno zapostavljajući one razine nastave matematike za koju su potrebne zahtjevnije nastavne metode zasnovane na heurističkoj i problemskoj nastavi.

5 Primjeri u nastavi matematike

U nastavku rada navedena su dva primjera iz nastave matematike, od kojih svaki sadrži jedan obrađeni matematički zadatak. Zadatak u Primjeru 1. namijenjen je učenicima petog razreda osnovne škole, a zadatak u Primjeru 2., učenicima prvog razreda gimnazije. Oba navedena zadatka nestandardni su problemski zadaci u kojima je naglasak na procesu rješavanja koji omogućuje razvoj i oblikovanje matematičkog razmišljanja učenika i provođenje nevelikih istraživanja primjernih njihovoj dobi.

Tijekom rada na takvim matematičkim problemima u nastavi, poželjno je učenike poticati k glasnom razmišljanju i razmjeni mišljenja i ideja s nastavnikom i ostalim učenicima. Nastavnik u procesu rješavanja ima ulogu moderatora koji intervenira samo po potrebi. Intervencije nastavnika u takvim situacijama uključuju sve one akcije (npr. pružanje konkretnih odgovora i postavljanje određenih pitanja) kojima se učenici potiču na daljnji matematički rad. Isti se ostvaruje manifestacijom ranije spomenutih misaonih aktivnosti koje su svojstvene matematičkom razmišljanju, a u čijoj je osnovi korištenje osnovnih znanstvenih metoda mišljenja, istraživanja i zaključivanja.

Nakon inicijalnog identificiranja ključnih značajki problema u svakom od zadataka, metodom konkretizacije, zadaju se konkretni primjeri – oni koji su za taj zadatak značajni. U tom smislu, zadaća metode konkretizacije nije riješiti dani problem već ga na neki način pojednostaviti i spoznajno "približiti" kako bi u nastavku pokušali uočiti određene pravilnosti, obrasce i veze koje predstavljaju zajedničke značajke tih generiranih primjera. Upravo uočavanje određenih pravilnosti, obrazaca i veza, koje predstavljaju zajedničke značajke konkretnih primjera, odlike su metode generalizacije. U osnovi metode generalizacije je analiza te zaključivanje po analogiji i/ili induktivno zaključivanje. Generalizacijom oblikovani zaključci ne moraju biti istiniti; oni predstavljaju zaključke koji su osnova pretpostavki koje slijede i čija se istinitost tek treba utvrditi. Utvrđivanje istinitosti formiranih pretpostavki postupak je kojim se stvaraju lanci matematičkih i logički ispravnih argumenata koji vode do traženog zaključka. Logički ispravni argumenti formiraju se primjenom neke od ranije navedenih znanstvenih metoda mišljenja, istraživanja i zaključivanja.

Svaki od zadataka metodom se analize raščlanjuje na odgovarajuće dijelove, raščlanjeni dijelovi problema se odgovarajućim metodama proučavaju, a zatim se metodom sinteze povezuju. U tom smislu analitičko – sintetička metoda predstavlja okvir unutar kojeg se odvija proces rješavanja.

5.1 Primjer 1.

Prema aktualnom kurikulumu za nastavni predmet Matematika (2019.), u petom se razredu obrađuju sadržaji *Djeljivost prirodnih brojeva*, *Pravila djeljivosti prirodnih brojeva*, *Djeljivost umnoška, zbroja i razlike.* Odgojno−obrazovni ishod tog sadržaja je primjena djeljivosti prirodnih brojeva, pri čijoj se razradi djeljivost umnoška, zbroja i razlike i ispituje.

Zadatak koji slijedi namijenjen je učenicima petog razreda osnovne škole s ciljem utvrđivanja spomenutih nastavnih sadržaja.

Zadatak:

Brojevi koji čitani od početka prema kraju ili obrnuto glase jednako nazivaju se *palindromi*. Jesu li svi četveroznamenkasti palindromi djeljivi s 11?

Rješenje zadatka:

Nastavnik inicijalno potiče učenike na analizu zadanog problema (u nastavku teksta: *Problem 1*) te identifikaciju njegovih ključnih značajki . U konkretnom zadatku, ključne značajke su: četveroznamenkasti palindromi, djeljivost četveroznamenkastih palindroma brojem 11, djeljivost svih četveroznamenkastih palindroma brojem 11.

Konkretizacija 1

Učenike se u nastavku usmjerava na provedbu metode konkretizacije (u daljnjem tekstu: *Konkretizacija 1*). Potiče ih se na navođenje nekoliko četveroznamenkastih palindroma te ispitivanje njihove djeljivost brojem 11. Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da se ispituje djeljivost brojeva 2552, 3443, 3993, 7447 brojem 11.

$$2552 : 11 = 232$$

$$3443 : 11 = 313$$

$$3993 : 11 = 363$$

$$7447 : 11 = 677$$

Zaključak Konkretizacije 1

Učenici temeljem provedenog mogu zaključiti da su svi navedeni, nasumično odabrani, četveroznamenkasti palindromi zaista djeljivi brojem 11.

Nastavnik zatim usmjerava učenike na promišljanje o sljedećim pitanjima:

"Može li se s obzirom na navedeni zaključak tvrditi da su svi četveroznamenkasti palindromi djeljivi brojem 11?", "Mogu li se u navedenim primjerima uočiti određene pravilnosti, obrasci ili veze?" Sve navedeno zapravo znači da se kod učenika potiče razmatranje mogućnosti provedbe metode generalizacije, formiranje pretpostavki te donošenje generaliziranih i valjanih zaključaka. Očekuje se da će učenici ustanoviti da se temeljem dobivenog zaključka ne može tvrditi da su svi četveroznamenkasti palindromi djeljivi brojem 11, niti da se mogu uočiti neke posebne pravilnosti, obrasce ili veze, što ujedno predstavlja trenutak u kojem je potrebno učenike usmjeriti k tranziciji od "ne znam" prema "ne znam još" i potaknuti ih na daljnji rad.

Pomoćni problem

S tim ciljem, nastavnik sugerira učenicima da bi za odabir daljnjih odgovarajućih strategija rješavanja moglo pomoći znati koliki je broj četveroznamenkastih palindroma; ukoliko ih je "dovoljno malo", zadani problem može se najjednostavnije riješiti dijeljenjem svakog od njih brojem 11, u suprotnom, potrebno je osmisliti neke druge alternativne smjernice. Dakle, identificira se novonastali pomoćni problem – odrediti broj četveroznamenkastih palindroma, koji se rješava analitički.

Prva znamenka takvog broja može biti element skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, druga element skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, treća jednaka drugoj i četvrta jednaka prvoj. To znači da za treću i četvrtu znamenku postoji točno jedna mogućnost nakon odabira prvih dviju. Dakle, prva se znamenka može izabrati na devet načina, istovremeno druga na deset, a treća i četvrta samo na jedan, što znači da četveroznamenkastih palindroma ima $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1$, odnosno ukupno devedeset. Može se stoga zaključiti da je broj četveroznamenkastih palindroma "prevelik" da bi se zadani problem riješio direktnom provjerom djeljivosti svakog od njih brojem 11, stoga je potrebno osmisliti drugačiji pristup problemu.

Ponovnom analizom *Problema 1*, a uzimajući u obzir provedene korake rješavanja i zaključke istih, učenike se potiče na odabir daljnjih odgovarajućih strategija. Željeni put predstavlja ponavljanje metode konkretizacije (u daljnjem tekstu: *Konkretizacija 2*) odabirom i radom na drugačijim primjerima. Nasumično odabrani primjeri u *Konkretizaciji 1* rezultirali su nemogućnošću uočavanja posebnih pravilnosti, obrazaca ili veza. Dakle, u *Konkretizaciji 2* pokušati će se generirati onakvi primjeri koji će možebitno omogućiti uočavanje određenih pravilnosti, obrazaca i veza, a sve sa ciljem mogućnosti provedbe daljnjih procesa matematičkog razmišljanja.

Konkretizacija 2
Jedan od načina formiranja takvih primjera je ispitati datu djeljivost najmanjeg i još troje četveroznamenkastih palindroma, takvih da je svaki od njih sljedeći veći od prethodnog. To su brojevi 1001, 1111, 1221, 1331. Navedeni se brojevi dijele brojem 11:

$$1001 : 11 = 91$$

$$1111 : 11 = 101$$

$$1221 : 11 = 111$$

$$1331 : 11 = 121$$

Zaključak Konkretizacije 2

Učenici temeljem provedenog ponovno mogu zaključiti da su svi navedeni četveroznamenkasti palindromi djeljivi brojem 11.

Generalizacija 1 i Pretpostavka 1

Nastavnik ponovno potiče učenike na razmišljanje i zaključke sljedećim pitanjima: "Može li se s obzirom na navedeni zaključak tvrditi da su svi četveroznamenkasti palindromi djeljivi brojem 11?", "Mogu li se u navedenim primjerima uočiti određene pravilnosti, obrasci ili veze?" Kao i nakon *Konkretizacije 1*, očekuje se da će učenici ustanoviti da se temeljem dobivenog zaključka i dalje ne može tvrditi da su svi četveroznamenkasti palindromi djeljivi brojem 11, međutim uslijed analize rezultata u *Konkretizaciji 2* mogu se ustanoviti sljedeće pravilnosti: "U rastućem nizu navedenih palindroma svaki naredni je za 110 veći od prethodnog."

Posljedično tomu, s ciljem provedbe daljnjih procesa matematičkog razmišljanja, nastavnik navodi učenike na daljnju analizu sljedećim pitanjem: "Vrijedi li navedeno za sve četveroznamenkaste palindrome poredane od najmanjeg k najvećem?" Uočene pravilnosti i razmatranje istinitosti manifestacije istih u svim slučajevima ujedno su dio metode generalizacije koja vodi k formiranju pretpostavke (u daljnjem tekstu: *Pretpostavka 1*) koja glasi: "U rastućem nizu svih palindroma svaki naredni je za 110 veći od prethodnog." Kako bi se na tu temu utvrdio valjani zaključak, potrebno je ispitati istinitost navedene pretpostavke. Od učenika se očekuje generiranje primjera i protuprimjera te zaključak: "Ukoliko navedeno vrijedi, onda će svakom zbroju broja 110 i svakog sljedećeg palindroma koji je veći od prethodnog, posljednja znamenka biti 1, međutim to ne može biti istina. Na primjer palindromu 2002 posljednja znamenka nije 1. Dakle, valjani zaključak glasi: "U rastućem nizu svih palindroma svaki naredni član nije za 110 veći od prethodnog." S obzirom na zaključak kojim se opovrgava istinitost formirane pretpostavke, učenike je ponovno potrebno usmjeriti k tranziciji od "ne znam" prema "ne znam još" i potaknuti ih na daljnji rad.

Ponovnom analizom *Problema 1* te uzimajući u obzir provedene korake rješavanja i zaključke istih, učenike se potiče na odabir daljnjih strategija. Kao i ranije, željeni put predstavlja ponavljanje metode konkretizacije (u daljnjem tekstu: *Konkretizacija 3*) odabirom i radom na drugačijim primjerima kojima se ovog puta "pokriva barem jedno kritično mjesto" u rastućem nizu četveroznamenkastih palindroma. Pod pojmom *kritično mjesto* podrazumijevaju se dva susjedna člana rastućeg niza četveroznamenkastih palindroma koji se međusobno razlikuju u znamenci tisućice.

Konkretizacija 3

Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da se ispituje djeljivost brojeva 1881, 1991, 2002, 2112, 2222, 2332 brojem 11.

$$1881 : 11 = 171$$

$$1991 : 11 = 181$$

$$2002 : 11 = 182$$

$$2112 : 11 = 192$$

$$2222 : 11 = 202$$

$$2332 : 11 = 212$$

Zaključak Konkretizacije 3

Učenici temeljem provedenog mogu ponovno zaključiti da su svi navedeni četveroznamenkasti palindromi djeljivi brojem 11.

Generalizacija 2

Kao i nakon ranije provednih metodi konkretizacije, nastavnik potiče učenike na razmišljanje i zaključke sljedećim pitanjima: "Može li se s obzirom na navedeni zaključak tvrditi da su svi četveroznamenkasti palindromi djeljivi brojem 11?", "Mogu li se u navedenim primjerima uočiti određene pravilnosti, obrasci ili veze?" Kao i nakon *Konkretizacije 1* i *Konkretizacije 2*, očekuje se da će učenici ustanoviti da se temeljem dobivenog zaključka i dalje ne može tvrditi da su svi četveroznamenkasti palindromi djeljivi brojem 11, međutim uslijed analize *Konkretizacije 3*, može se ustanoviti sljedeće:

- u rastućem nizu navedenih palindroma svaki naredni je za 110 veći od prethodnog, osim pri promjeni znamenke tisućice
- razlika između dvaju susjednih članova rastućeg niza četveroznamenkastih palindroma koji se razlikuju u znamenci tisućice je 11.

Pretpostavka 2

Posljedično tomu, s ciljem provedbe daljnjih procesa matematičkog razmišljanja, nastavnik navodi učenike na daljnju analizu sljedećim pitanjem: "Vrijede li navedeni zaključci u svim slučajevima?" Uočene pravilnosti i razmatranje istinitosti manifestacije istih u svim slučajevima ujedno su dio metode generalizacije koja vodi k formiranju pretpostavki. Prva od njih je: "U rastućem nizu svih palindroma svaki naredni je za 110 veći od prethodnog, osim pri promjeni znamenke tisućice", a druga: "Razlika između dvaju susjednih članova rastućeg niza četveroznamenkastih palindroma koji se razlikuju u znamenci tisućice je 11". Kako bi se o tome utvrdili valjani zaključci, potrebno je ispitati istinitost navedenih pretpostavki.

Kako bi ispitali istinitost druge navedene pretpostavke, nastavnik potiče učenike na postupak potpune indukcije pri čemu je potrebno provjeriti date djeljivost u svim slučajevima:

$$2002 - 1991 = 11$$

$$3003 - 2992 = 11$$

$$4004 - 3993 = 11$$

$$5005 - 4994 = 11$$

$$6006 - 5995 = 11$$

$$7007 - 6996 = 11$$

$$8008 - 7997 = 11$$

$$9009 - 8998 = 11$$

Učenici temeljem provedenog mogu zaključiti da je zaista razlika između dvaju susjednih članova rastućeg niza četveroznamenkastih palindroma koji se razlikuju u znamenci tisućice uvijek 11. Pri ispitivanju istinitosti prve od navedenih dviju pretpostavki koristi se analitičko−sintetička metoda. Četveroznamenkasti palindromi koji imaju iste znamenke tisućica, imaju i iste znamenke jedinica te se stoga razlikuju samo u znamenkama desetica i stotica. U rastućem nizu tih palindroma svakom narednom su znamenke desetice i stotice za 1 veće od odgovarajućih znamenki njegovog prethodnika i zbog toga se može zaključiti da je svaki naredni zaista za 110 veći od prethodnog.

Zaključak i rješenje zadatka

S ciljem donošenja konačnog zaključka koji je ujedno i rješenje zadanog zadatka, nastavnik potiče učenike na primjenu ranije usvojenih matematičkih znanja. Konkretno, učenici su upoznati sa time da ako je svaki pribrojnik djeljiv nekim brojem, djeljiv tim brojem je i njihov zbroj. Važan je i zaključak da su brojevi 110 i 11 također djeljivi brojem 11, jer je $110 : 11 = 10$ i $11 : 11 = 1$. Iz dosadašnje razrade datog problema zaključeno je:

- broj 1001 je djeljiv brojem 11
- u rastućem nizu četveroznamenkastih planidroma svaki je sljedeći član zbroj njemu prethodnog i jednog od brojeva 110 ili 11 počevši s tim postupkom od broja 1001.

Iz svega navedenog primjenom metode sinteze slijedi zaključak da su svi četveroznamenkasti palindromi djeljivi brojem 11.

5.2 Primjer 2.

Sljedeći primjer namijenjen je učenicima prvog razreda gimnazije. Prema ranije spomenutom kurikulumu, u prvom se razredu gimnazije obrađuju sadržaji *Potencije* i *Algebarski izrazi*. Odgojno-obrazovni ishod sadržaja *Potencije* je i primjena potencija, pri čijoj se razradi potencije povezuju s problemima iz drugih područja i života. Odgojno−obrazovni ishod sadržaja *Algebarski izrazi* je računanje s algebarskim izrazima.

Zadatak u nastavku, kao i prethodni, ima za cilj usvajanje navedenih nastavnih sadržaja.

Zadatak:

Neki prirodni brojevi mogu se prikazati kao zbroj konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva. Koji prirodni brojevi imaju to svojstvo?

Rješenje zadatka:

Inicijalno, nastavnik potiče učenike na analizu zadanog problema i identifikaciju njegovih ključnih značajki. U ovom zadatku, ključne značajke su: prirodni brojevi, prikaz prirodnog broja u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva, određivanje svih prirodnih brojeva koji se mogu prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva.

Konkretizacija 1

Učenike se zatim usmjerava na provedbu metode konkretizacije (u daljnjem tekstu: *Konkretizacija 1*). Ideja i uputa je pokušati prvih deset prirodnih brojeva prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva.

$1 = 0 + 1$

Učenike se na ovom koraku potiče na analizu provedenog koraka pitanjem: "Je li navedeni primjer valjan?". Očekuje se da će učenici zaključiti i argumentirati kako navedeni primjer nije valjan jer nula nije prirodni broj. Učenici zatim dalje provode *Konkretizaciju 1.*

Broj 2 se ne može prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva.

$3 = 1 + 2$

Broj 4 se ne može prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva.

$5 = 2 + 3$

$6 = 1 + 2 + 3$

$7 = 3 + 4$

Broj 8 se ne može prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva.

$9 = 4 + 5$

$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

Zaključak Konkretizacije 1

Učenici temeljem provedenog mogu zaključiti da među prvih deset prirodnih brojeva brojevi 3, 5, 6, 7, 9 i 10 se mogu prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva, a brojevi 1, 2, 4 i 8 ne mogu.

Generalizacija 1

Nastavnik zatim potiče učenike na traženje pravilnosti, obrazaca i veza. Može se prepoznati i identificirati da su brojevi koji se tijekom *Konkretizacije 1* nisu mogli prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva, odnosno brojevi 1, 2, 4 i 8, potencije broja 2.

Konkretizacija 2

S ciljem utvrđivanja (ili opovrgavanja) identificiranih pravilnosti, nastavnik potiče učenike na daljnju konkretizaciju (u daljnjem tekstu: *Konkretizacija 2*) i provjeru smislenosti formiranih indicija pokušajem prikaza daljnjih deset prirodnih brojeva u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva.

$11 = 5 + 6$

$12 = 3 + 4 + 5$

$13 = 6 + 7$

$14 = 2 + 3 + 4 + 5$

$15 = 4 + 5 + 6$

Broj 16 se ne može prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva.

$17 = 8 + 9$

$18 = 5 + 6 + 7$

$19 = 9 + 10$

$20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

Zaključak Konkretizacije 2

Učenici temeljem provedenog mogu utvrditi da među sljedećih deset prirodnih brojeva brojevi 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19 i 20 se mogu prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva, a broj 16 ne može.

Generalizacija 2

Ponovno, kao i ranije, učenici mogu utvrditi da je jedini broj koji se ne može prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva potencija broja 2.

Pretpostavka 1

Nastavnik usmjerava nadalje učenike k formiranju pretpostavke čija se istinitost tek treba utvrditi. Pretpostavka je da se potencije broja 2 ne mogu prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva, te da se brojevi koji nisu potencije broja 2 mogu prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva.

Analiza i sinteza 1

S učenicima se u nastavku provodi analiza. Nastavnik navodi učenike na razmišljanje sljedećim pitanjima: "Postoje li pravilnosti pri zapisu broja koji nije potencija broja 2 u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva?", "Ukoliko se potencije broja 2 ne mogu prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva, što je tomu razlog?", "Koje karakteristike čine razliku između potencije broja 2 i broja koji to nije?"

Kako bi odgovorili na postavljena pitanja, učenici se inicijalno usmjeravaju k iznošenju onoga što je s njihove strane o tim pitanjima za sada poznato. Može se utvrditi i iznijeti sljedeće:

- potencija broja 2 u rastavu na proste faktore nema drugih faktora osim broja 2
- svaki se složeni broj može prikazati kao umnožak potencija prostih brojeva
- sve potencije broja 2, osim broja 1, parni su brojevi
- svi su prosti brojevi, osim broja 2, neparni brojevi
- svaki broj koji nije potencija broja 2 ima, osim broja 1, barem još jednog neparnog djelitelja.

S ciljem odabira daljnje odgovarajuće strategije rješavanja, nastavnik ponovno potiče učenike na razmišljanje i eventualno formiranje sljedeće pretpostavke sljedećim pitanjima: "Mogu li se među navedenim tvrdnjama ustanoviti određene veze?", "Što možemo pretpostaviti da vrijedi?" Očekuje se da će učenici uz pomoć nastavnika sintetizirati i utvrditi: "Pošto smo među prvih dvadeset prirodnih brojeva sve one koji nisu potencija broja 2 uspjeli prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva, a kako svaki broj koji nije potencija broja 2 ima barem još jednog neparnog djelitelja, možda postoji veza između neparnog djelitelja i prikaza broja u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva, kod brojeva koji nisu potencija broja 2.

Konkretizacija 3

Nastavnik nadalje potiče učenike k ponovnoj konkretizaciji; učenici se usmjeravaju da na konkretnim primjerima od nekoliko složenih brojeva, koji nisu potencija broja 2, ustanove postoji li kod svakog od tih brojeva veza između njegovog neparnog djelitelja i prikaza tog broja u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva. Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da se navedeno nastoji uočiti na nekoliko višekratnika broja 3 i višekratnika broja 5. Razlog odabira tih brojeva je taj što je svakom od njih poznat jedan njihov neparni djelitelj - broj 3, odnosno broj 5.

$$\begin{array}{rclllllllllll}
3 & = & 1 & + & 2 & & & & & & & & \\
6 & = & 1 & + & 2 & + & 3 & & & & & & \\
9 & = & & & 2 & + & 3 & + & 4 & & & & \\
12 & = & & & & & 3 & + & 4 & + & 5 & & \\
15 & = & & & & & & & 4 & + & 5 & + & 6 \\
5 & = & & & 2 & + & 3 & & & & & & \\
10 & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & & & & \\
15 & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & & \\
20 & = & & & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 \\
25 & = & & & & & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7
\end{array}$$

Zaključak Konkretizacije 3

Učenici temeljem provedenog mogu zaključiti da se *većina* ispitanih višekratnika broja 3 (odnosno broja 5) može prikazati u obliku zbroja od 3 (odnosno 5) uzastopnih prirodnih brojeva.

Pretpostavka2

Iako se među ispitivanim brojevima brojevi 3, 5 i 10 nisu uspjeli prikazati u obliku zbroja od 3 (odnosno 5) uzastopnih prirodnih brojeva, nastavnik ukazuje učenicima da zbog toga što se ipak *većina* ispitanih višekratnika broja 3 (odnosno broja 5) uspjela prikazati u obliku zbroja od 3 (odnosno 5) uzastopnih prirodnih brojeva, može biti dobra ideja pretpostaviti da se neparni djelitelj nekog prirodnog broja *najčešće* podudara s brojem pribrojnika u prikazu tog prirodnog broja u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva, uz napomenu da će biti potrebno riješiti otvorene probleme koji su ostali iza riječi *većina* i *najčešće*.

Nastavnik također sugerira učenicima da za daljnje traženje i uočavanje pravilnosti, obrazaca i veza, formiranje pretpostavki i donošenje zaključaka može biti korisno dosadašnja razmatranja, spoznaje i pretpostavke prikazati na drugačiji način, konkretno, algebarski.

Nastavnik usmjerava učenike na prijelaz od konkretnih slučajeva, apstrahiranjem, k njihovom generaliziranom algebarskom prikazu. S učenicima se provodi sljedeće:

- utvrđuje se oznaka neparnog prirodnog broja $2k+1$, $k \in \mathbb{N}$
- modificira se posljednja pretpostavka u sljedeći oblik: "Prirodni broj N kojemu je djelitelj broj $2k+1$, *najčešće* se može prikazati u obliku zbroja od $2k+1$ uzastopnih prirodnih brojeva." , odnosno "Ako je $N = (2k+1) \cdot F$, za $F \in \mathbb{N}$, onda se N *najčešće* može prikazati u obliku zbroja od $2k+1$ uzastopnih prirodnih brojeva."
- apstrahiraju se i generaliziraju ranije provedeni uspješni prikazi višekratnika broja 3, to jest broja 5, u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih prirodnih brojeva

$$\begin{array}{ccccccc}
3 \cdot 2 & = & 1 & + & 2 & + & 3 \\
3 \cdot 3 & = & 2 & + & 3 & + & 4 \\
3 \cdot 4 & = & 3 & + & 4 & + & 5 \\
3 \cdot 5 & = & 4 & + & 5 & + & 6 \\
3 \cdot F & = & (F-1) & + & F & + & (F+1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
5\cdot 3 & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 \\
5\cdot 4 & = & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 \\
5\cdot 5 & = & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 \\
5\cdot F & = & (F-2) & + & (F-1) & + & F & + & (F+1) & + & (F+2)
\end{array}$$

Učenici se potiču na daljnju generalizaciju:

Ako je

$$3\cdot F = (F-1)+F+(F+1)$$

i

$$5\cdot F = (F-2)+(F-1)+F+(F+1)+(F+2),$$

onda se može pretpostaviti da je općenito

$$(2k+1)\cdot F = (F-k)+\cdots+(F-2)+(F-1)+F+(F+1)+(F+2)+\cdots+(F+k).$$

Učenici računaju s algebarskim izrazima i utvrđuju istinitost te pretpostavke. Dakle vrijedi:

$$(2k+1)\cdot F = (F-k)+\cdots+(F-2)+(F-1)+F+(F+1)+(F+2)+\cdots+(F+k).$$

Dalje, učenici također uočavaju da je na desnoj strani tog matematičkog izraza točno $(2k+1)$ pribrojnika, temeljem čega utvrđuju istinitost *Pretpostavke 2* i utvrđuju zaključak: ako je $N=(2k+1)\cdot F$, onda je N zbroj od točno $2k+1$ uzastopnih cijelih brojeva oblika $(F+i)$ za $i=-k,\ldots,k$.

Analiza 2

Nastavnik podsjeća učenike na inicijalno zadani problem i postavlja pitanje: "Jesu li svi određeni uzastopni pribrojnici prirodni brojevi, odnosno je li svaki $(F+i)$ za $i=-k,\ldots,k$ prirodni broj?"

Učenici su ranijim razmatranjima ustanovili da su se samo neki višekratnici broja 3, odnosno broja 5, uspješno mogli prikazati u obliku zbroja od točno 3, odnosno 5, uzastopna prirodna broja. Nastavnik upućuje učenike na primjenu jednakosti $(2k+1)\cdot F = (F-k)+\cdots+(F-2)+(F-1)+F+(F+1)+(F+2)+\cdots+(F+k)$ na brojevima 3, 5, 10. Dobije se:

$$
\begin{array}{rcccccccccccccc}
3 & = & 3\cdot 1 & = & & & 0 & + & 1 & + & 2 & & & & \\
5 & = & 5\cdot 1 & = & -1 & + & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & & \\
10 & = & 5\cdot 2 & = & & & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4
\end{array}
$$

Učenici mogu zaključiti da se primjenom jednakosti $(2k+1)\cdot F = (F-k)+\cdots+(F-2)+(F-1)+F+(F+1)+(F+2)+\cdots+(F+k)$ svi ranije ispitivani višekratnici broja 3, odnosno broja 5, mogu prikazati u obliku zbroja od točno 3 odnosno 5 uzastopnih pribrojnika, međutim svaki od tih pribrojnika nije nužno prirodni broj. Nastavnik postavlja pitanje: "Koliko je među njima prirodnih brojeva?"

Nastavnik s učenicima lako utvrđuje da budući da je $N = (F-k)+\cdots+(F-2)+(F-1)+F+(F+1)+(F+2)+\cdots+(F+k)$ prirodni broj, među navedenim pribrojnicima je sigurno više prirodnih brojeva, međutim valja ispitati koliko ih je točno. Učenici s tim ciljem provode odgovarajuće specijalizacije.

Specijalizacija 1

Ako je $F > k$, svih $2k+1$ pribrojnika su uzastopni prirodni brojevi.

Specijalizacija 2

Ako je $F = k$, to znači da je točno jedan od tih pribrojnika broj 0, a svi ostali su prirodni. To znači da je prirodnih pribrojnika za jedan manje od $2k+1$, odnosno paran broj i to njih $2k$.

Specijalizacija 3

Ako je jedan od tih pribrojnika broj 0, a svi ostali nisu prirodni, u zbroju uzastopnih cijelih brojeva se "oko" nule nalaze parovi međusobno suprotnih cijelih brojeva kojih je s nulom neparan broj i njihov zbroj je jednak nuli. Dakle, može se zaključiti da postoji paran broj prirodnih pribrojnika. Koliko je u tom slučaju prirodnih pribrojnika?

Zasigurno će $(F-k)$ biti negativan cijeli broj ako je $F < k$. To znači da postoji prirodni broj m takav da je $k = F + m$, odnosno $F = k - m$. U tom je slučaju:

$$N = (F-(F+m)) + \cdots + F + \cdots + (F+(F+m)) = (-m) + \cdots + (2F+m)$$

Zbroj prvih $m + 1 + m = 2m + 1$ pribrojnika jednak je nuli, što znači da je prirodnih pribrojnika u tom slučaju točno $2k+1-(2m+1) = 2(k-m) = 2F$.

Zaključak

Nastavnik s učenicima utvrđuje konačne zaključke koji vode do rješenja zadatka:

- prirodni se broj N može prikazati kao zbroj parnog ili neparnog broja uzastopnih prirodnih brojeva

- ako je $N = (F-k) + \cdots + (F-2) + (F-1) + F + (F+1) + (F+2) + \cdots + (F+k)$, onda je $N = (2k+1) \cdot F$. To znači da takav N ne može biti potencija broja 2, neovisno o tome ima li paran ili neparan broj prirodnih pribrojnika.

- konačno, prirodni se brojevi koji nisu potencija broja 2, mogu prikazati u obliku zbroja konačnog broja uzastopnih cijelih brojeva. Oblika su

$N = (2k + 1) \cdot F$ i tada vrijedi da je N zbroj od $2k + 1$ uzastopnih cijelih brojeva oblika $(F + i)$ za $i = -k, \ldots, k$. Ako je $F > k$, svih $2k + 1$ pribrojnika su uzastopni prirodni brojevi. Ako je $F = k$, N je zbroj od $2k$ uzastopnih prirodnih brojeva, a ako je $F < k$, N je zbroj od ukupno $2F$ uzastopnih prirodnih brojeva.

6 Zaključak

Glavni zadatak matematičkog obrazovanja trebao bi biti učenike naučiti međusobno razmjenjivati mišljenja i ideje, timski raditi te promišljati na način koji vodi do dubljeg razumijevanja promatranih pitanja i sadržaja, veće koherentnosti poznatih koncepata te veće efektivnosti spoznajnih procesa i kritičnih procjena. Opisani način razmišljanja predstavlja upravo matematičko razmišljanje, a sve spomenuto pospješuje razvoj vještina i znanja kojima će se učenici koristiti u osobnom, društvenom i profesionalnom životu.

Mogućnost matematičkog razmišljanja kod ljudi posljedica je umnih sposobnosti razvijenih prije nekoliko tisuća pa čak i milijuna godina. Ono ne zahtjeva neke posebne niti nove kognitivne sposobnosti, već učinkovite načine uporabe postojećih osobina mozga. Razmišljati na određen način umijeće je koje se može oblikovati aktivacijom određenih misaonih mehanizama.

Uzimajući u obzir teoriju razrađenu u ovom radu, te prema uputi Kurikuluma nastavnog predmeta Matematika iz 2019. godine, potrebno je težište suvremene nastave pomaknuti s rješavanja zadataka u kojima se traži primjena već utvrđenog postupka k razvoju vještina i sposobnosti njihove primjene u nepoznatim situacijama. S tim je ciljem poželjno odabirati zadatke u kojima je naglasak na procesu rješavanja problema i raspravi, koji od učenika traže predviđanje, promišljanje, zaključivanje, kreativnost, a jedno ili više rješenja moguće je dobiti koristeći se različitim ispravnim strategijama. Tijekom tako koncipirane nastave matematike učenici bi se ponajprije trebali osjećati sigurno i nastaviti s radom čak i kad je teško ili se rješenje niti ne nazire, te ih je na tom putu potrebno pozitivno poticati, umjesto za sposobnosti, isključivo za njihov trud ustrajnost i rad.

Tijekom rada na matematičkim problemima u nastavi poželjno je poticati učenike na glasno razmišljanje i razmjenu ideja i informacija s nastavnikom i ostalim učenicima. Nastavnik za to vrijeme ima ulogu moderatora koji bi trebao intervenirati samo po potrebi. Intervencije nastavnika u takvim situacijama uključuju sve one akcije (npr. postavljanje pitanja, pružanje odgovora) kojima se učenike navodi na "usmjerenije" promišljanje te povećava vjerojatnost razvoja korisnih ideja, uočavanja određenih pravilnosti, formiranje pretpostavki i donošenje zaključaka.

Popis slika

Literatura

[1] Anić, Rina: *Uvjerenja učenika o vlastitim matematičkim sposobnostima*, Istraživanje za kolegij Odabrane teme iz nastave matematike, Rijeka, 2022.

[2] Boaler, Jo: *Mathematical Mindset*, Jossey-Bass, San Francisco, 2016.

[3] Boaler, Jo: *What's Math Got to Do with It?*, Penguin Books, New York, 2015.

[4] Devlin, Keith: *Introduction to Mathematical Thinking*, Keith Devlin, Palo Alto, 2012.

[5] Devlin, Keith: *Matematički gen*, Algoritam, Zagreb, 2008.

[6] Devlin, Keith: *What is mathematical thinking?* https://devlinsangle.blogspot.com/2012/08/what-is-mathematical-thinking.html

[7] Diklić P., Smojver-Ažić S.: *Skripta za završni ispit iz kolegija Razvojna psihologija*, Sveučilište u Rijeci - Filozofski fakultet, Rijeka, 2013.

[8] Investopedia - Lake R.: *Most Valuable Career Skills for 2022*, https://www.investopedia.com/personal-finance/most-valuable-career-skills/

[9] Kalin, Boris: *Povijest filozofije*, Školska knjiga, Zagreb, 2001.

[10] Klaić, Bratoljub: *Riječnik stranih riječi A-Ž*, Matica Hrvatska, Zagreb, 1978.

[11] Kurnik Z.: *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element d.o.o., Zagreb, 2010.

[12] Kurnik Z.: *Znanstveni okviri nastave matematike*, Element d.o.o., Zagreb, 2009.

[13] Kurnik Z.: *Znanja*, Matematika i škola, broj 26, Zagreb, 2009.

[14] Lakatos, Imre: *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[15] Mason J., Burton L., Stacey K.: *Thinking Mathematically*, Pearson Education Limited, Harlow, 2010.

[16] Moser J., Schroder H.S., Heeter C., Moran T.P., Le Yu-Hao: *Mind Your Errors: Evidence for a Neural Mechanism Linking Growth Mind-set*

to Adaptive Posterror Adjustments, Psychological Science 22, (2011): 1484-89.