Kospektralni grafovi

Jovanović, Ivan

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku

Diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Ivan Jovanović

KOSPEKTRALNI GRAFOVI

Diplomski rad

Rijeka, lipanj 2024.

Sveučilište u Rijeci - Fakultet za matematiku

Diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Ivan Jovanović

KOSPEKTRALNI GRAFOVI

Mentor: izv. prof. dr. sc. Andrea Švob

Diplomski rad

Rijeka, lipanj 2024.

Sadržaj

Sažetak

U ovom radu proučavat ćemo kospektralne grafove i dati uvod u spektralnu teoriju grafova. Ukratko, kažemo da su dva grafa kospektralna ako imaju jednaki spektar. Glavni fokus će biti na prikazu kospektralnih grafova te načinima na koje ih možemo konstruirati. Sve ovo bit će popraćeno s raznim primjerima, a na samome kraju bit će dan i primjer u programskom jeziku GAP.

Ključne riječi: spektar, matrica susjedstva, Laplaceova matrica, kospektralni grafovi, Godsil-Mckay zamjena

1 Uvod

U ovom radu pobliže ćemo se upoznati s pojmom spektra kospektralnih grafova što je centralna tema rada. Bit će predstavljeni razni primjeri te dokazana njihova osnovna svojstva. Također, opisat će se i neke konstrukcije kospektralnih grafova. No, da bi došli do pojma kospektralnih grafova, započet ćemo prvo sa spektrom grafa.

Spektralna teorija grafova proučava odnos između strukturalnih svojstava grafova i svojstvenih vrijednosti matrica pridruženih grafovima. Grafovi se često proučavaju po njihovim matricama susjedstva. No osim matrica susjedstva, mogu se koristiti i Laplaceove matrice koje ćemo također kasnije definirati.

Cijela tema je povezana s brojnim pojmovima iz područja teorije grafova i linearne algebre pa će na samome početku rada biti predstavljene i neke osnovne definicije koje će pomoći u boljem shvaćanju same teme.

2 Osnovne definicije

Za osnovne definicije koristili smo [8] i [12].

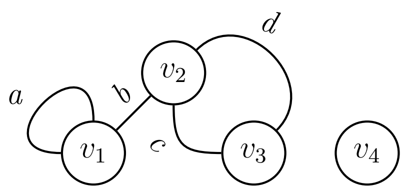
2.1 Definicija grafa i osnovnih pojmova vezanih uz njega

Da bi bolje razumjeli pojmove s kojima ćemo se baviti u ovom radu, prvo ćemo se prisjetiti nekih osnovnih pojmova iz teorije grafova.

Definicija 2.1 ***Graf*** *$\mathcal{G}$ je uređena trojka $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}), \psi(\mathcal{G}))$ koja se sastoji od nepraznog skupa $V(\mathcal{G})$ čiji su elementi vrhovi od $\mathcal{G}$, skupa $E(\mathcal{G})$, disjunktnog sa $V(\mathcal{G})$ čiji su elementi bridovi od $\mathcal{G}$ i funkcije incidencije $\psi(\mathcal{G})$ koja svakom bridu od $\mathcal{G}$ pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova od $\mathcal{G}$. Ako je $e \in E(\mathcal{G})$ i ako su $u, v \in V(\mathcal{G})$ te ako je $\psi_{\mathcal{G}}(e) = uv$ kažemo da e spaja vrhove u i v, te obrnuto da su u i v krajevi brida e.*

Sad kad smo definirali graf, možemo dati i jedan njegov primjer.

Primjer 2.1 *Primjer grafa*



$V(\mathcal{G}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(\mathcal{G}) = \{a, b, c, d\}$, $\psi_{\mathcal{G}}(a) = v_1v_1, \psi_{\mathcal{G}}(b) = v_1v_2,$
$\psi_{\mathcal{G}}(c) = v_2v_3, \psi_{\mathcal{G}}(d) = v_2v_3.$

Definicija 2.2 *Kažemo da su krajevi u i v brida e* ***incidentni*** *s bridom e i obratno.*

Definicija 2.3 *Za dva vrha koja su incidentna s istim bridom kažemo da su* ***susjedni****. Također, za dva brida incidentna s istim vrhom kažemo da su* ***susjedni****.*

Definicija 2.4 *Brid koji je incidentan samo s jednim vrhom naziva se* ***petlja****.*

Definicija 2.5 *Graf je* ***jednostavan*** *ako nema petlje i nikoja 2 brida ne spajaju isti par vrhova (odnosno nema višestrukih bridova).*

Definicija 2.6 *Neka je $v \in V(\mathcal{G})$.* ***Stupanj*** *ili* ***valencija*** *vrha v je broj bridova od $\mathcal{G}$ incidentnih sa v, pri čemu svaku petlju brojimo 2 puta. U radu ćemo stupanj vrha v označavati s $deg(v)$.*

Napomena 2.1 *Za graf $\mathcal{G}$ iz definicije 2.1 kažemo još da je* ***neusmjereni****.*

Kod neusmjerenih grafova nije bitna orijentacija bridova, tj. nije bitno koji od dvaju vrhova koje spaja brid je početni, a koji završni kraj brida. Ponekad je orijentacija bridova bitna te takve grafove nazivamo usmjerenim grafovima ili digrafovima. U ovom radu svi grafovi će biti neusmjereni.

2.2 Matrice povezane s grafom

U ovom potpoglavlju ćemo definirati par matrica koje su povezane s pojmom grafa i koje ćemo koristiti dalje u radu.

Definicija 2.7 *Neka je $\mathcal{G}$ graf bez višestrukih bridova sa $\mathcal{V}$ vrhova $v_1, ..., v_{\mathcal{V}}$.* ***Matrica susjedstva*** *grafa $\mathcal{G}$ je $0-1$ matrica A dimenzije $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, gdje je $A_{ij} = 1$ ako postoji brid između vrhova v_i i v_j. U suprotnom je $A_{ij} = 0$.*

Napomena 2.2 *Matrica susjedstva iz definicije 2.7 može poprimiti samo vrijednosti 0 i 1 jer smo pretpostavili kako je riječ o grafu bez višestrukih bridova.*

Definicija 2.8 *Neka je $\mathcal{G}$ graf bez petlji koji ima $\mathcal{V}$ vrhova i $\mathcal{E}$ bridova.* ***Matrica incidencije*** *grafa $\mathcal{G}$ je $0-1$ matrica M dimenzije $\mathcal{V} \times \mathcal{E}$, gdje je $M_{ve} = 1$ ako su vrh v i brid e incidentni. U suprotnom je $M_{ve} = 0$.*

Napomena 2.3 *Ako dozvolimo da graf ima petlje, onda M_{ve} može biti jednak 2 ukoliko je brid e petlja na vrhu v.*

Definicija 2.9 *Neka je $\mathcal{G}$ graf sa $\mathcal{V}$ vrhova $v_1, ..., v_{\mathcal{V}}$.* ***Matrica stupnja*** *grafa $\mathcal{G}$ je $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ dijagonalna matrica D gdje je $D_{ij} = deg(v_i)$ ako je $i = j$, a 0 inače.*

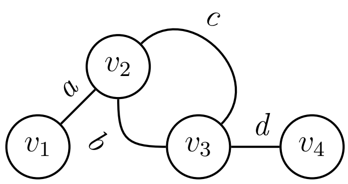
Definicija 2.10 *Neka je $\mathcal{G}$ graf bez petlji sa $\mathcal{V}$ vrhova $v_1, ..., v_{\mathcal{V}}$.* ***Laplaceova matrica*** *grafa $\mathcal{G}$ je matrica L dimenzije $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, gdje je*

$$L_{ij} = \begin{cases} deg(v_i), & \text{ako je } i = j, \\ -1, & \text{ako je } i \neq j \text{ i vrh } v_i \text{ je susjedan s } v_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ili ekvivalentno, $L = D - A$, pri čemu je D matrica stupnja, a A matrica susjedstva.

Napomena 2.4 *Matrica L je matrica koja ima svojstvo da je suma elemenata svakog retka jednaka nula.*

Primjer 2.2 *Neka je zadan sljedeći graf.*



Matrica stupnja D danog grafa je

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a matrica susjedstva A je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi kako je Laplaceova matrica L jednaka

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako smo definirali Laplaceovu matricu, na sličan način možemo definirati i Laplaceovu matricu bez predznaka.

Definicija 2.11 *Neka je $\mathcal{G}$ graf bez petlji sa $\mathcal{V}$ vrhova $v_1, ..., v_{\mathcal{V}}$.* ***Laplaceova matrica bez predznaka*** *grafa $\mathcal{G}$ je matrica Q za koju vrijedi $Q = D + A$.*

Primjer 2.3 *Za dani graf iz primjera 2.2 Laplaceova matrica bez predznaka je*

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Važno svojstvo Laplaceove matrice L i Laplaceove matrice bez predznaka Q je da su obje pozitivno semidefinitne matrice. Prisjetimo se, $n \times n$ simetrična matrica A je pozitivno semidefinitna ako i samo ako je $x^T Ax \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$.

2.3 Podsjetnik osnovnih pojmova iz linearne algebre

Nakon što smo dali kratki uvod važnih pojmova iz teorije grafova i predstavili matrice koje će nam biti važne u samome radu, prisjetit ćemo se još i nekih osnovnih definicija iz linearne algebre poput definicije karakterističnog polinoma, svojstvenih vrijednosti te spektra linearnog operatora budući da će nam svi ovi pojmovi trebati radi boljeg razumijevanja same teme.

Definicija 2.12 *Neka je B kvadratna matrica reda n nad poljem $\mathbb{F}$. Onda matricu $C = B - \lambda I$, gdje je λ varijabilni parametar, a I jedinična matrica nazivamo* ***karakteristična matrica*** *ili također i* ***svojstvena matrica*** *za matricu B. Ako je $B = [b_{ik}]$, njezina karakteristična matrica je oblika*

$$C = \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & ... & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice C,

$$det\ C = det\ (B - \lambda I) = |B - \lambda I|,$$

je polinom n-tog stupnja u varijabli λ, s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$,

$$k_B(\lambda) = k_n \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots k_0,$$

$k_i \in \mathbb{F}$, koji nazivamo ***karakteristični*** *ili* ***svojstveni polinom*** *matrice B. Pripadnu jednadžbu, $k_B(\lambda) = 0$ nazivamo* ***karakteristična*** *ili* ***svojstvena jednadžba*** *za matricu B.*

Definicija 2.13 *Kratnost nultočke λ karakterističnog polinoma nazivamo* ***algebarska kratnost****.*

Definicija 2.14 *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $f : V \to V$ linearni operator. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ nazivamo* ***svojstvena vrijednost*** *operatora f ako postoji vektor $a \in V$, različit od nulvektora, takav da vrijedi $f(a) = \lambda a$.*
Svaki vektor a različit od nulvektora, koji zadovoljava navedeni uvjet, naziva se ***svojstveni vektor*** *operatora f pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.*

Definicija 2.15 *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $f : V \to V$ linearni operator te neka je $S(\lambda) = \{a \in V | f(a) = \lambda a\}$. Potprostor $S(\lambda)$ vektorskog prostora V nazivamo* ***svojstveni potprostor*** *operatora f pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.*

Uz pojam svojstvenog potprostora usko vežemo i pojam geometrijske kratnosti.

Definicija 2.16 ***Geometrijska kratnost*** *je dimenzija svojstvenog potprostora $S(\lambda)$.*

Na kraju ovog kratkog pregleda pojmova iz linearne algebre definirat ćemo još i spektar linearnog operatora.

Definicija 2.17 *Skup $\sigma(f)$ svih svojstvenih vrijednosti linearnog operatora f nazivamo* ***spektar*** *linearnog operatora.*

3 Spektar grafa

Jedan od glavnih ciljeva u spektralnoj teoriji grafova je zaključiti glavna svojstva i strukturu grafa iz njegovog spektra. Svojstvene vrijednosti su usko povezane s gotovo svim glavnim svojstvima grafa. Na primjer, iz spektra grafa možemo vidjeti je li on regularan ili bipartitan. Spektar sadrži mnogo informacija o grafu, ali općenito ne određuje graf do na izomorfizam. Općenito, spektralna teorija grafova se bavi odgovorom na pitanje što možemo reći o strukturi grafa na temelju njegovog spektra.

U ovom poglavlju bavit ćemo se s osnovnim pojmovima iz spektralne teorije grafova pa prvo definirajmo pojam spektra grafa.

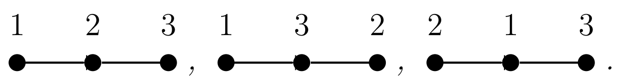
Definicija 3.1 ***Spektar*** *konačnog grafa $\mathcal{G}$ je spektar matrice susjedstva A tog grafa. Drugim riječima, to je skup svojstvenih vrijednosti matrice A zajedno s njihovim višestrukostima.*

Slično možemo definirati i Laplaceov spektar.

Definicija 3.2 ***Laplaceov spektar*** *konačnog grafa bez petlji je spektar Laplaceove matrice L tog grafa.*

Retci i stupci matrice reda n označeni su brojevima $1, ..., n$, dok je matrica A indeksirana po vrhovima grafa $\mathcal{G}$ što znači da zapisivanje matrice A zahtjeva dodjeljivanje brojeva vrhovima. Međutim, spektar matrice ne ovisi o odabranom numeriranju. To je spektar linearne transformacije matrice A na vektorskom prostoru $\mathbb{K}^X$. Pritom je $\mathbb{K}^X$ po definiciji vektorski prostor svih preslikavanja iz X u $\mathbb{K}$, pri čemu je X skup vrhova danog grafa, a $\mathbb{K}$ je polje koje može biti $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

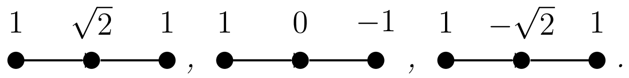
Primjer 3.1 *Neka je P_3 dani graf. P_3 je graf koji se sastoji od 3 vrha od kojih su početni i krajnji stupnja 1, a srednji stupnja 2. Ovisno o tome kako numeriramo vrhove, možemo imati 3 slučaja.*



U ovisnosti o slučaju, matrica susjedstva A može redom izgledati:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

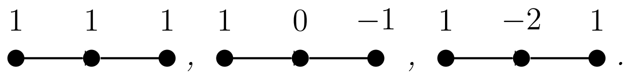
Idući korak je računanje karakterističnog polinoma po formuli $k_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$. *Neovisno, o tome koju od tri matrice uzmemo, dobit ćemo isti karakteristični polinom, a to je* $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda$. *Karakteristična jednadžba ovoga polinoma je* $\lambda^3 + 2\lambda = 0$ *iz čega slijedi da se spektar sastoji od sljedećih svojstvenih vrijednosti* $\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}$. *Za svaku svojstvenu vrijednost iz spektra možemo izračunati i svojstvene vektore po formuli* $(A - \lambda I)x = 0$ *te dobivamo da su svojstveni vektori pridruženi svojstvenim vrijednostima* $\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}$ *redom:*



Iz gornjih matrica susjedstva možemo izvesti sljedeće Laplaceove matrice L:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Također, neovisno koju uzmemo dobivamo sljedeće svojstvene vrijednosti $0, 1, 3$, *a svojstveni vektori koji im odgovaraju su redom:*



3.1 Spektar grafa

Neka je $\mathcal{G}$ jednostavan graf s n vrhova $v_1, ..., v_n$. Matrica susjedstva A danog grafa je realna (ne može sadržavati vrijednosti iz skupa kompleksnih brojeva) i simetrična, te su njene svojstvene vrijednosti realni brojevi. Također, za svaku svojstvenu vrijednost λ, njena geometrijska kratnost se podudara s njenom algebarskom kratnošću. Kako je graf jednostavan, to znači da po definiciji jednostavnog grafa, on ne sadrži petlje, pa samim time na dijagonali matrice susjedstva A imamo same nule. To znači da je trag matrice susjedstva A jednak nuli, a osim toga i zbroj svojstvenih vrijednosti je također nula.

Slično tome, Laplaceova matrica L ima realne svojstvene vrijednosti te je simetrična, pa se i spektar Laplaceove matrice također sastoji od realnih svojstvenih vrijednosti. Kao što smo već ranije i napomenuli, matrica L je pozitivno semidefinitna, a uz to je i singularna pa možemo označiti svojstvene vrijednosti sa $\mu_1, ..., \mu_n$, pri čemu je $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n$. Suma ovih svojstvenih vrijednosti jednaka je tragu matrice L koji je dvostruko veći od broja bridova grafa $\mathcal{G}$.

Spomenimo još i kako se spektar Laplaceove matrice bez predznaka Q također sastoji od realnih svojstvenih vrijednosti. Matrica Q je pozitivno semidefinitna, ali ne mora nužno biti singularna. Vrijedi i tr $L =$ tr Q.

Sada ćemo pogledati svojstva svojstvenih vrijednosti nekih posebnih poznatih tipova grafova.

3.1.1 Regularni grafovi

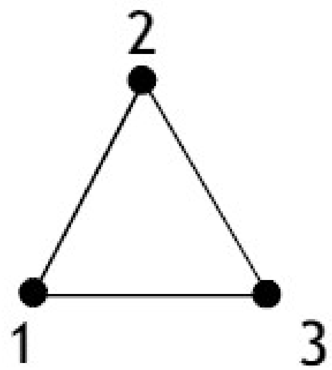
Definicija 3.3 *Ako je deg*$(V) = k$ *za svaki vrh* v *grafa* $\mathcal{G}$*, onda kažemo da je graf* $\mathcal{G}$ k-***regularan****. Graf je* ***regularan*** *ako je* k*-regularan za neki* k*.*

Jedno od svojstava k-regularnog grafa je to da je suma redaka njegove matrice susjedstva A jednaka k.

Ako je $\mathcal{G}$ k-regularan graf, tada za svaku njegovu svojstvenu vrijednost λ vrijedi $|\lambda| \leq k$.

Ako je $\mathcal{G}$ k-regularan graf, tada je njegova Laplaceova matrica jednaka $L = kI - A$. Slijedi kako $\mathcal{G}$ ima svojsvene vrijednosti $k = \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$, a Laplaceove svojstvene vrijednosti $0 = \mu_1 \leq ... \leq \mu_n$ iz čega slijedi kako je $\lambda_i = k - \mu_i$, za svaki $i = 1, ..., n$. Svojstvene vrijednosti matrice Q su $2k, k + \lambda_2, ..., k + \lambda_n$.

Primjer 3.2 *Neka je dan sljedeći graf.*



Slika 1: 2-regularan graf na 3 vrha

Za dani graf vrijedi deg$(v) = 2$ *za svaki vrh* v *pa zaključujemo kako je riječ o 2-regularnom grafu. Matrica susjedstva danog grafa je*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo izračunati karakteristični polinom matrice A u varijabli λ te dobivamo da je on jednak $k_A(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$. Iz ovoga slijedi kako se spektar danog grafa sastoji od svojstvenih vrijednosti 2 i -1, pri čemu je 2 svojstvena vrijednost algebarske kratnosti 1, a -1 je svojstvena vrijednost algebarske kratnosti 2. Označimo svojstvene vrijednosti s $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ te $\lambda_3 = -1$. Vidimo kako vrijedi da je $|\lambda_i| \leq k$ za svaku svojstvenu vrijednost iz spektra te da je svojstvena vrijednost s najvećom apsolutnom vrijednosti jednaka k. Sada možemo izračunati Laplaceovu matricu te dobivamo kako je ona jednaka

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Analognim postupkom možemo izračunati karakteristični polinom matrice L te iz njega dobivamo da su njegove svojstvene vrijednosti poredane od najmanje do najveće 0, 3 i 3. Vidimo da ovo u potpunosti zadovoljava formulu $\lambda_i = k - \mu_i$. Naposlijetku, matrica Q je jednaka

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice Q su 4, 1 i 1 što također odgovara traženom izrazu.

3.1.2 Komplementarni grafovi

Definicija 3.4 ***Komplementaran graf*** *$\mathcal{G}^C$ jednostavnog grafa $\mathcal{G}$ je jednostavan graf s istim skupom vrhova $V = V(\mathcal{G})$ pri čemu su dva vrha u $\mathcal{G}^C$ susjedna ako i samo ako nisu susjedna u $\mathcal{G}$.*

Ako graf $\mathcal{G}$ ima matricu susjedstva A, tada njegov komplementarni graf $\mathcal{G}^C$ ima matricu susjedstva $\overline{A} = J - I - A$, pri čemu s J označavamo matricu koja se sastoji od samih jedinica, a I je dijagonalna matrica istog reda kao i J i A. Laplaceova matrica komplementarnog grafa u oznaci $\overline{L}$ je jednaka $\overline{L} = nI - J - L$, pri čemu je L Laplaceova matrica početnog grafa, a n red tih matrica.

Budući da su svojstveni vektori od L također i svojstveni vektori od J, slijedi kako su svojstvene vrijednosti od $\overline{L}$ jednake $0, n - \mu_n, ..., n - \mu_2$, pri čemu vrijedi da je $\mu_n \leq n$.

Kod regularnog grafa stupnja k najveća svojstvena vrijednost je jednaka upravo k, a odgovarajući svojstveni vektor koji možemo pridružiti toj svojstvenoj vrijednosti je oblika $j_n^t = (1, ..., 1)^t \in \mathbb{R}^n$. Ako je $\mathcal{G}$ regularan graf stupnja k, tada je njegov komplement $\mathcal{G}^C$ regularan graf stupnja $n - 1 - k$.

Za svojstvene vrijednosti komplementarnog grafa vrijedi sljedeća lema.

Lema 3.1 *Neka je $\mathcal{G}$ regularan graf s n vrhova stupnja k te neka su svojstvene vrijednosti grafa $\mathcal{G}$ jednake $k = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Tada su svojstvene vrijednosti njegovog komplementarnog grafa $\mathcal{G}^C$ $n - 1 - k, -1 - \lambda_2, ..., -1 - \lambda_n$.*

Prije dokaza ove leme prisjetit ćemo se definicije ortogonalnih matrica.

Definicija 3.5 *Za realnu kvadratnu matricu O kažemo da je ortogonalna ako vrijedi $OO^T = O^TO = I$, pri čemu je I jedinična matrica istog reda kao i matrica O, a O^T je transponirana matrica matrice O.*

Dokaz leme 3.1:

Neka je A matrica susjedstva grafa $\mathcal{G}$. Tada postoji ortogonalna matrica O koja se sastoji od svojstvenih vektora matrice A kod koje je prvi stupac oblika j_n^t takva da vrijedi

$$O^{-1}AO = \text{diag}(k, \lambda_2, ..., \lambda_n).$$

Tada je

$$\begin{aligned} O^{-1}(J_n - I_n - A)O &= O^{-1}J_nO - O^{-1}I_nO - O^{-1}AO \\ &= \text{diag}(n, 0, ..., 0) - \text{diag}I_n - \text{diag}(k, \lambda_2, ..., \lambda_n) \\ &= \text{diag}(n - 1 - k, -1 - \lambda_2, ..., -1 - \lambda_n), \end{aligned}$$

iz čega slijedi rezultat tvrdnje.

■

Gornju tvrdnju možemo ilustrirati na primjeru 2-regularnog grafa na 3 vrha. Njegov komplement je graf koji se sastoji od 3 vrha i 0 bridova. Njegova matrica susjedstva je nul-matrica reda 3 iz čega slijedi da je 0 svojstvena vrijednost tog grafa kratnosti 3. Iz ovoga direktno proizlazi da vrijedi tvrdnja gornje leme:

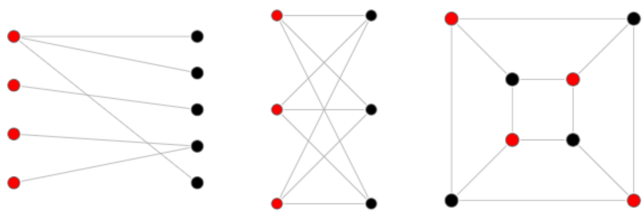
$$0 = 3 - 1 - 2,$$

$$0 = -1 - (-1),$$

$$0 = -1 - (-1).$$

3.1.3 Bipartitni grafovi

Definicija 3.6 ***Bipartitni graf*** *je graf čiji se skup vrhova može podijeliti (particionirati) u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y. Particija (X, Y) zove se* ***biparticija grafa****.*



Slika 2: Primjeri bipartitnih grafova

Matrica susjedstva bipartitnog grafa ima oblik $A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$ pa slijedi kako je spektar bipartitnog grafa simetričan s obzirom na 0, odnosno vrijedi: ako je $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ, tada je $\begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix}$ svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost $-\lambda$.

Sada možemo uvesti pojam komponenti povezanosti. Ukoliko su dva vrha spojena s bridom, kažemo da su oni **povezani**. Povezanost je relacija ekvivalencije te povezanost između vrhova u i v označavamo s $u \sim v$. Klase ekvivalencije na skupu vrhova grafa s obzirom na relaciju povezanosti nazivamo **komponentama povezanosti** grafa.

Definicija 3.7 *Za graf $\mathcal{G}$ kažemo da je* ***povezan*** *ako ima samo jednu komponentu povezanosti.*

Sada ćemo iskazati dvije propozicije na koje ćemo se pozvati u idućem dokazu.

Propozicija 3.1 *Neka je $\mathcal{G}$ graf. Kratnost nule kao svojstvene vrijednosti Laplaceove matrice tog grafa jednaka je broju komponenti povezanosti od $\mathcal{G}$.*[1]

Propozicija 3.2 *Neka je $\mathcal{G}$ graf. Kratnost nule kao svojstvene vrijednosti Laplaceove matrice bez predznaka tog grafa jednaka je broju bipartitnih komponenti povezanosti od $\mathcal{G}$.*[2]

Iduća propozicija nam daje vezu između bipartitnih grafova i njihovog spektra. Budući da u njoj koristimo svojstvo sličnih matrica, prvo se prisjetimo kakve su to matrice.

Definicija 3.8 *Za matrice A, $B \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da su* ***slične*** *ako postoji invertibilna matrica $C \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi $B = C^{-1}AC$. U tom slučaju pišemo $A \sim B$.*

Propozicija 3.3 *Graf $\mathcal{G}$ je bipartitan ako i samo ako su spektri njegove Laplaceove matrice i Laplaceove matrice bez predznaka jednaki.*

Dokaz:

"$\Rightarrow$"

Neka je $\mathcal{G}$ bipartitan graf. Laplaceova matrica L i Laplaceova matrica bez predznaka Q su slične jer postoji dijagonalna matrica D s elementima ± 1 na glavnoj dijagonali za koju vrijedi uvjet iz definicije sličnih matrica. Odnosno, za matricu D vrijedi $L = D^{-1}QD$. Ovo znači da matrice Q i L imaju isti spektar.

"$\Leftarrow$"

Pretpostavimo kako matrice Q i L imaju isti spektar. Tada po propozicijama 3.1 i 3.2 slijedi da je broj komponenti povezanosti jednak broju bipartitnih komponenti povezanosti, odnosno slijedi kako je $\mathcal{G}$ bipartitan graf.

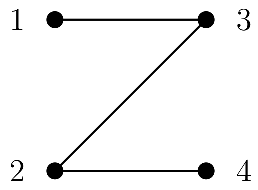
$\blacksquare$

Sada ćemo na jednom jednostavnom primjeru bipartitnog grafa prikazati da su spektri njegove Laplaceove matrice i Laplaceove matrice bez predznaka jednaki.

Primjer 3.3 *Neka je dan sljedeći graf:*

[1]Dokaz propozicije možete pogledati u [15].

[2]Dokaz proizlazi iz tvrdnji koje su predstavili Cvetković, Rowlinson i Simić u svom radu [9].



Očito je kako je dani graf bipartitan s biparticijom ({1,2}, {3,4}). Matrica susjedstva ovoga grafa je $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, iz čega slijedi kako je* $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*, a* $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Može se lako pokazati kako obje matrice imaju karakteristični polinom $k(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 10\lambda^2 - 4\lambda$*, a svojstvene vrijednosti su* $0, 2, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$.

3.2 Primjeri spektra grafa

U ovom potpoglavlju dotaknut ćemo se još nekih posebnih vrsta grafova i proučit ćemo njihov spektar. Svi grafovi u ovom potpoglavlju su konačni, neusmjereni i jednostavni. Napomenimo i da sve matrice J reda n (matrice koje se sastoje od samih jedinica) imaju rang 1 te vektor koji se sastoji od samih jedinica je svojstveni vektor sa svojstvenom vrijednošću n. Svojstvene vrijednosti koje će se nalaziti u spektru tih matrica će biti 0 i n s tim da će svojstvena vrijednost 0 imati kratnost $n-1$, a svojstvena vrijednsot n kratnost 1. Kratnost svojstvene vrijednosti ćemo pisati u obliku eksponenta pripadne svojstvene vrijednosti pa spektar matrice J možemo pisati kao $\{n^1, 0^{n-1}\}$.

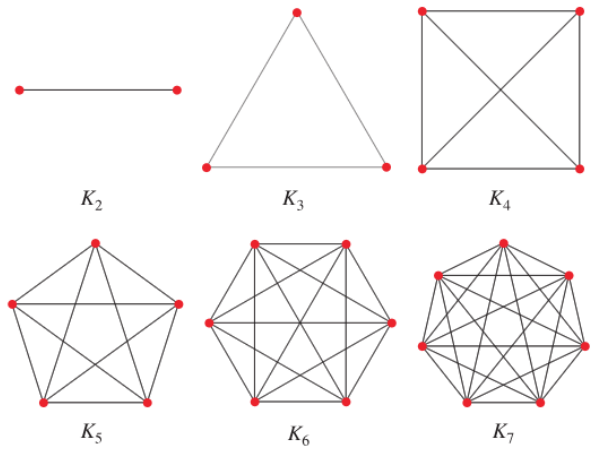
Ovo možemo ilustrirati na konkretnom primjeru. Uzmimo da je $n = 3$ pa matrica J onda izgleda ovako: $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom u varijabli λ ove matrice je $k_J(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2$ iz čega slijedi kako je 0 svojstvena vrijednost kratnosti 2, a 3 svojstvena vrijednost kratnosti 1. Dakle, spektar matrice J u ovom slučaju izgleda $\{3^1, 0^2\}$.

3.2.1 Potpuni graf

Prvi tip grafa kojeg ćemo se dotaknuti u ovom potpoglavlju je potpuni graf pa se prvo prisjetimo njegove definicije.

Definicija 3.9 ***Potpuni graf*** *je jednostavni graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom.*

Napomena 3.1 *Do na izomorfizam, postoji točno jedan potpuni graf na n vrhova, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$. Potpuni graf na n vrhova označavamo s K_n.*



Slika 3: Primjeri potpunih grafova

Matrica susjedstva A potpunog grafa K_n izgledat će $A = J - I$. Ovo je poprilično očito jer iz definicije potpunog grafa slijedi kako će svaki vrh biti stupnja $n-1$, odnosno svaki vrh će biti spojen sa svim drugim vrhovima, osim sa samim sobom. Prema tome, u matrici susjedstva ćemo imati svugdje jedinice osim na glavnoj dijagonali gdje ćemo imati nule.

Sada kada smo utvrdili kako je matrica A jednaka razlici matrica J i I, možemo jednostavno odrediti njezin spektar. Ranije smo spomenuli kako je spektar matrice J jednak $\{n^1, 0^{n-1}\}$. S druge strane, očito je kako je spektar matrice I jednak $\{1^n\}$ pa će spektar matrice A biti $\{(n-1)^1, (-1)^{n-1}\}$.

S druge strane, Laplaceovu matricu L možemo napisati kao $L = nI - J$. Lako se pokaže da matrica nI ima svojstvenu vrijednost n kratnosti n pa slijedi kako Laplaceova matrica L ima svojstvene vrijednosti $0^1, n^{n-1}$.

Primjer 3.4 *Pokažimo ovo na konkretnom primjeru. Neka je dan potpuni graf na* 4 *vrha,* K_4. *Njegova matrica susjedstva je* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Da bi izračunali spektar, prvo moramo izračunati karakteristični polinom matrice* A.

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$$

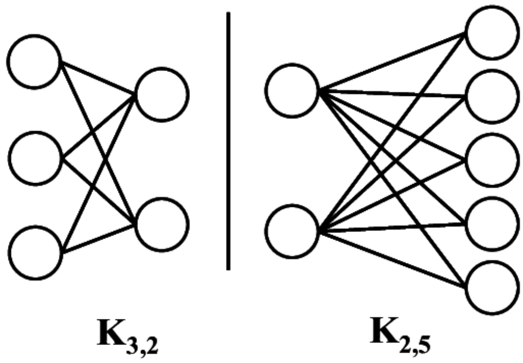
Rješavanjem karakteristične jednadže $\lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0$ *dobivamo da se spektar matrice* A *sastoji od svojstvene vrijednosti* 3 *koja je kratnosti* 1, *te od svojstvene vrijednosti* -1 *koja je kratnosti* 3. *Dakle, spektar matrice* A *možemo zapisati kao* $\{3^1, (-1)^3\}$, *što u potpunosti odgovara izrazu* $\{(n-1)^1, (-1)^{n-1}\}$. *Promotrimo sada Laplaceovu matricu grafa* K_4.

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom ove matrice u varijabli λ *je* $k_L(\lambda) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 48\lambda^2 - 64\lambda$. *Iz njega slijedi kako spektar Laplaceove matrice izgleda* $\{0^1, 4^3\}$.

3.2.2 Potpuni bipartitni graf

Definicija 3.10 ***Potpuni bipartitni graf*** *je jednostavni bipartitni graf s biparticijom* (X, Y) *u kojem je svaki vrh iz* X *spojen sa svakim vrhom iz* Y. *Ako je* $|X| = m$, *a* $|Y| = n$, *onda takav graf označavamo s* $K_{m,n}$.



Slika 4: Primjeri potpunih bipartitnih grafova

Ako s $K_{m,n}$ označimo potpuni bipartitni graf, slijedi kako on ima $m+n$ vrhova te mn bridova.

Idući teorem kaže kako izgleda spektar potpunog bipartitnog grafa.

Teorem 3.1 *Neka je $K_{m,n}$ potpuni bipartitni graf. Spektar od $K_{m,n}$ je $\{\sqrt{mn}, -\sqrt{mn}, 0^{m+n-2}\}$.*

Da bi dokazali ovaj teorem prvo ćemo uvesti pojam glavne minore.

Definicija 3.11 *Neka je C matrica.* ***Minora*** *M_{ij} matrice C je determinanta manje kvadratne matrice koja se iz matrice C dobije izbacivanjem i-tog retka i j-tog stupca iz matrice C.*

Definicija 3.12 ***Glavne minore*** *matrice C su minore elemenata koji se nalaze na glavnoj dijagonali matrice C.*

Na primjer, za matricu $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ njene glavne minore su M_{11}, M_{22} i M_{33}.

U dokazu teorema 3.1 proučavat ćemo glavnu minoru matrice susjedstva A grafa $K_{m,n}$. Matrica susjedstva na glavnoj dijagonali ima same nule. Preostali njeni elementi su ili nule ili jedinice, ovisno o tome jesu li pripadni vrhovi susjedni ili ne. Dakle, 2×2 glavna minora matrice A koja se sastoji od i-tog retka i j-tog stupca matrice A je $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ako vrhovi i i j nisu susjedni, ili $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ako su vrhovi i i j susjedni. Dakle, za sve minore u kojima se nalaze odgovarajući retci i stupci matrice A koji predstavljaju susjedne vrhove vrijedi da je njihova determinanta $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$. Kako ovo vrijedi za sve susjedne vrhove, slijedi da je suma svih 2×2 glavnih minora jednaka $-|E(K_{m,n})|$.

Sada možemo dokazati teorem 3.1.

Dokaz:

Matrica susjedstva potpunog bipartitnog grafa $K_{m,n}$ je $A = \begin{bmatrix} 0 & J_m \\ J_n & 0 \end{bmatrix}$, pri čemu je J_m blok matrica koja se sastoji od samih jedinica dimenzije $m \times n$, a J_n blok matrica koja se sastoji od samih jedinica dimenzije $n \times m$. Za svaku matricu koja se sastoji od samih jedinica vrijedi kako je njen rang jednak 1. Vrijedi: $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(J_m) + \mathrm{r}(J_n) = 1 + 1 = 2$. Iz ovoga slijedi da matrica A ima točno dvije ne-nula svojstvene vrijednosti. Ukupan broj svojstvenih vrijednosti mora odgovarati dimenziji matrice, odnosno broju vrhova grafa $K_{m,n}$. Dakle, $K_{m,n}$ ukupno mora sadržavati $m + n$ svojstvenih vrijednosti, od čega dvije ne-nul, pa znači da je 0 svojstvena vrijednosti kratnosti $m + n - 2$.

Kako je trag matrice A jednak nuli, to znači da će preostale dvije svojstvene vrijednosti biti oblika λ i $-\lambda$.

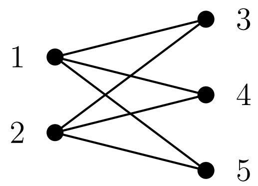
Općenito za svojstvene vrijednosti $\alpha_1, ..., \alpha_n$ vrijedi da je zbroj $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_2\alpha_n + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n$ jednak sumi svih 2×2 glavnih minora. U ovom konkretnom slučaju imamo 2 svojstvene vrijednosti λ i $-\lambda$ pa će suma svih 2×2 glavnih minora biti jednaka umnošku tih dviju svojstvenih vrijednosti, odnosno bit će jednaka $-\lambda^2$.

Ranije smo zaključili kako je suma svih 2×2 glavnih minora jednaka $-|E(K_{m,n})|$, pri čemu s $|E(K_{m,n})|$ označavamo broj bridova grafa. Broj bridova potpunog bipartitnog grafa $K_{m,n}$ jednak je umnošku broja vrhova u particijama, pa slijedi kako je suma svih 2×2 glavnih minora jednaka $-mn$. Sada možemo izjednačiti pripadne izraze te dobivamo da je $-mn = -\lambda^2$, odnosno $mn = \lambda^2$. Iz ovoga direktno slijedi kako je $\lambda = \pm\sqrt{mn}$ pa su preostale dvije svojstvene vrijednosti $\sqrt{mn}$ i $-\sqrt{mn}$.

■

Napomena 3.2 *Laplaceov spektar potpunog bipartitnog grafa* $K_{m,n}$ *jednak je* $\{0^1, m^{n-1}, n^{m-1}, (m+n)^1\}$*.([6])*

Primjer 3.5 *Navedenu tvrdnju također možemo ilustrirati na konkretnom primjeru. Neka je dan graf* $K_{2,3}$



Matrica susjedstva i Laplaceova matrica grafa $K_{2,3}$ *su redom*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice susjedstva je $k_A(\lambda) = -\lambda^5 + 6\lambda^3$ *iz čega slijedi da je spektar jednak* $\{0^3, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$ *što odgovara vrijednostima iz teorema 3.1.*

Karakteristični polinom Laplaceove matrice je $k_L(\lambda) = -\lambda^5 + 12\lambda^4 - 51\lambda^3 + 92\lambda^2 - 60\lambda$ *iz čega se lako može pokazati kako je Laplaceov spektar* $\{0^1, 2^2, 3, 5\}$.

4 Kospektralni grafovi

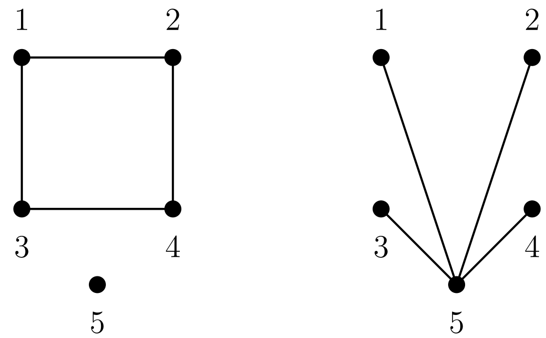
4.1 Kospektralni grafovi

Dosad smo promatrali spektar nekih posebnih tipova grafova. Pritom smo se mogli zapitati postoje li grafovi s istim spektrom. Upravo na to pitanje odgovor daje ova glavna cjelina rada.

Definicija 4.1 *Neka su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ dva grafa te neka je A matrica susjedstva grafa $\mathcal{G}$, a A' matrica susjedstva grafa $\mathcal{G}'$. Za grafove $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ kažemo da su* ***kospektralni*** *ako njihove matrice susjedstva A i A' imaju isti spektar.*

Postavlja se pitanje ima li svaki graf svoj kospektralni par. Odgovor na to pitanje je negativan, a kontraprimjere možemo potražiti već na grafovima s manje od 5 vrhova. Za neizomorfne grafove s manje od 5 vrhova općenito vrijedi da ne postoje matrice susjedstva s istim spektrom, pa kažemo da su oni određeni svojim spektrom.

Prvi primjer neizomorfnih kospektralnih grafova pronašli su dvojica matematičara Collatz i Sinogowitz. U njihovom zajedničkom radu koji je objavljen 1957. godine "*Spektren endlicher Grafen*"[7] predstavili su sljedeća dva grafa kao najmanji primjer neizomorfnih kospektralnih grafova.



Pokažimo sada da ova dva grafa imaju jednaki spektar. Matrica susjedstva prvog grafa je $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, iz čega slijedi kako je karakteristični polinom koji dobivamo iz nje jednak

$$k_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^5 + 4\lambda^3.$$

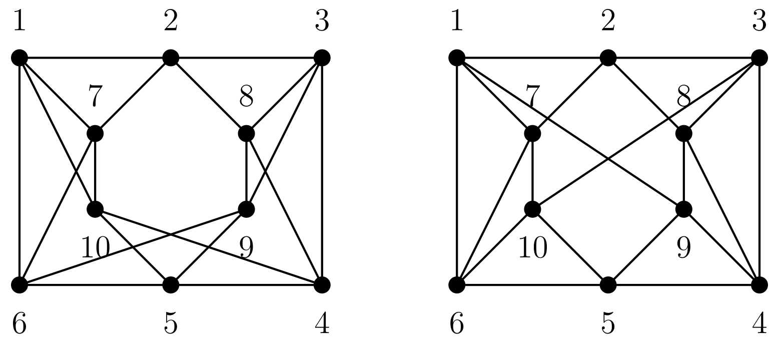
Rješavanjem karakteristične jednadžbe $k_{A_1}(\lambda) = 0$ dobivamo kako su svojstvene vrijednosti 0 kratnosti 3, 2 kratnosti 1 te -2 kratnosti 1. Odnosno, drugim riječima, spektar ovog grafa je $\{2^1, 0^3, (-2)^1\}$.

Pogledajmo sada drugi graf. On ima također 5 vrhova pa će njegova matrica susjedstva biti također dimenzija 5×5, ali bit će različita u odnosu na prvi graf iz jednostavnog razloga jer su vrhovi drugačijeg stupnja (u prvom grafu je jedan vrh bio stupnja 0, a preostali stupnja 2, dok u ovom grafu je jedan vrh stupnja 4, a preostali su stupnja 1). Matrica susjedstva drugog grafa je $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Na isti način možemo izračunati i karakteristični polinom.

$$k_{A_2}(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^5 + 4\lambda^3$$

Primijetimo da, iako smo imali različite matrice susjedstva, dobili smo iste karakteristične polinome. Iz ovoga slijedi kako je spektar drugog grafa također $\{2^1, 0^3, (-2)^1\}$, odnosno direktno slijedi kako oba grafa imaju jednake spektre. Drugim riječima, oni su kospektralni.

Primjer 4.1 *Sljedeća dva grafa su također kospektralni.*



Matrice susjedstva ova dva grafa su redom

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&1&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&1&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Računanjem determinante gornjih matrica oblika $A - \lambda I$, iz obje matrice susjedstva dobivamo isti karakteristični polinom $k_A(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda+1)^4(\lambda^2-5)(\lambda^2+\lambda-4)$ iz čega slijedi kako oba grafa imaju isti spektar, a on je jednak $\{4^1, 1^1, (-1)^4, (\sqrt{5})^1, (-\sqrt{5})^1, (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2})^1, (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2})^1\}$.

Dosad smo u primjerima većinom koristili matricu susjedstva, no osim nje možemo još koristiti i generaliziranu matricu susjedstva.

Definicija 4.2 *Neka je $\mathcal{G}$ graf, A matrica susjedstva tog grafa, I jedinična matrica istog reda kao i A te J matrica koja se sastoji od samih jedinica istog reda kao A i I. Matricu M oblika $M = xI + yJ + zA$, pri čemu su $x, y, z \in \mathbb{R}$ te $z \neq 0$ nazivamo **generalizirana matrica susjedstva** grafa $\mathcal{G}$.*

U sklopu ovoga rada, nas će naravno zanimati u kakvom su odnosu graf $\mathcal{G}$ te spektar generalizirane matrice susjedstva M. Bez smanjenja općenitosti, možemo restringirati generalizirane matrice susjedstva na matrice oblika $yJ - A$. Kao što ćemo vidjeti u idućem teoremu koji su dokazali matematičari Johnson i Newman, ako su grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$, čije su generalizirane matrice susjedstva oblika $yJ - A$ i $yJ - A'$, kospektralni za dvije različite vrijednosti varijable y, tada su oni kospektralni za sve y iz čega slijedi kako su kospektralni s obzirom na sve generalizirane matrice susjedstva. U tom slučaju, kažemo da su grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ **$\mathbb{R}$-kospektralni**. U protivnom, ako su kospektralni samo za neke vrijednosti varijable y, tada su kospektralni za točno jednu vrijednost $\hat{y}$ od y. U tom slučaju kažemo da su grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ **$\hat{y}$-kospektralni**. U najčešćem slučaju, kospektralni grafovi su ili 0-kospektralni ili $\mathbb{R}$-kospektralni.

Slično kako smo ranije nakon matrice susjedstva definirali karakteristični polinom koji nam je koristio u određivanju spektra, tako i sada za generaliziranu matricu susjedstva možemo definirati generalizirani karakteristični polinom.

Definicija 4.3 *Neka je $\mathcal{G}$ graf te A matrica susjedstva tog grafa. Polinom $p(\lambda, y) = det(\lambda I + yJ - A)$ nazivamo* ***generalizirani karakteristični polinom*** *matrice $A - yJ$. Posebno, $p(\lambda, 0) = k_A(\lambda)$ je karakteristični polinom matrice susjedstva A.*

Ranije, u potpoglavlju 3.1.2 smo definirali pojam ortogonalnih matrica. Posebna klasa takvih matrica su regularne ortogonalne matrice. Za ortogonalnu matricu O kažemo da je **regularna** ako je suma svakog reda jednaka nekoj konstanti, odnosno vrijedi da je $O\mathbf{1} = r\mathbf{1}$, pri čemu je $\mathbf{1}$ jednostupčani vektor koji se sastoji od samih jedinica.

Sada ćemo iskazati i dokazati ranije spomenuti teorem dvojice matematičara Johnsona i Newmana.

Teorem 4.1 *Ako je $\mathcal{G}$ graf s matricom susjedstva A te $\mathcal{G}'$ graf s matricom susjedstva A', tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

1. *Grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ su kospektralni, a također i njihovi komplementi su kospektralni.*

2. *Grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ su $\mathbb{R}$-kospektralni.*

3. *Postoji regularna ortogonalna matrica O takva da je $O^T A O = A'$.*

Dokaz:

Prvo ćemo dokazati da ako su grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$, čije su generalizirane matrice susjedstva oblika $yJ - A$ i $yJ - A'$, kospektralni za dvije različite vrijednosti varijable y, tada su oni kospektralni za sve y iz čega slijedi kako su kospektralni s obzirom na sve generalizirane matrice susjedstva. Neka su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ grafovi čiji su generalizirani karakteristični polinomi redom $p(\lambda, y)$ i $p'(\lambda, y)$. Primijetimo da je za fiksni y, $p(\lambda, y)$ karakteristični polinom matrice $A - yJ$. Kako je matrica J matrica koja se sastoji od samih jedinica, njen rang je jednak 1 pa to povlači da je u polinomu $p(\lambda, y)$ y stupnja 1 (ovo slijedi iz Gaussove eliminacije u $\lambda I + yJ - A$), pa postoje cijeli brojevi $a_0, ..., a_n$ i $b_0, ..., b_n$ takvi da vrijedi

$$p(\lambda, y) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i y)\lambda^i.$$

Iz definicije $\mathbb{R}$-kospektralnih grafova slijedi da je $p(\lambda, y) \equiv p'(\lambda, y)$ ako i samo ako su grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ $\mathbb{R}$-kospektralni. S druge strane, iz definicije $\hat{y}$-kospektralnih grafova slijedi da su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ $\hat{y}$-kospektralni ako i samo ako je $p(\lambda, \hat{y}) = p'(\lambda, \hat{y})$, za sve $\lambda \in \mathbb{R}$, pri čemu je $p(\lambda, y) \not\equiv p'(\lambda, y)$ (ovo je očito jer ako su grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ $\hat{y}$-kospektralni, za neki $\hat{y}$, ali nisu za sve y, tada odgovarajući polinomi $p(\lambda, y)$ i $p'(\lambda, y)$ nisu identični, ali vrijedi $p(\lambda, \hat{y}) = p'(\lambda, \hat{y})$).

Ako vrijedi $p(\lambda, \hat{y}) = p'(\lambda, \hat{y})$, tada je $a_i + \hat{y}b_i = a'_i + \hat{y}b'_i$, pri čemu je $(a_i, b_i) \neq (a'_i, b'_i)$, za neki i, $0 \leq i \leq n - 3$. Ovo implicira da je $\hat{y} = \frac{-(a_i - a'_i)}{b_i - b'_i}$ jedinstven i racionalan. Time je dokazana ekvivalencija između (1) i (2).

S druge strane, $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ su $\mathbb{R}$-kospektralni ako je O regularna ortogonalna matrica. Ovo znamo budući da iz uvjeta $O^T\mathbf{1} = \mathbf{1}$ slijedi $O^T(yJ - A)O = yJ - A'J$, što znači da su $yJ - A$ i $yJ - A'$ kospektralni za svaki $y \in \mathbb{R}$.

Naposljetku, stavimo li $y = 1$, dobivamo da $\mathbb{R}$-kospektralni grafovi imaju kospektralne komplemente.

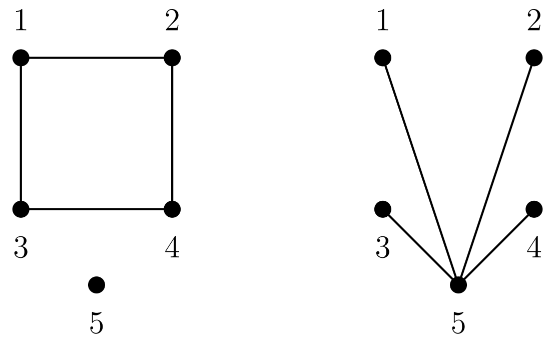
∎

Spektar grafa $\mathcal{G}$ zajedno sa spektrom njegovog komplementa $\mathcal{G}^C$ nazivamo **generalizirani spektar** grafa $\mathcal{G}$. Kažemo da je dani graf $\mathcal{G}$ **određen svojim spektrom** ako je svaki graf kospektralan s $\mathcal{G}$ ujedno i izomorfan s njim. S druge strane, kažemo da je graf $\mathcal{G}$ **određen svojim generaliziranim spektrom** ako je svaki graf $\mathbb{R}$-kospektralan s $\mathcal{G}$, ujedno i izomorfan s njim.

4.2 Primjeri $\mathbb{R}$-kospektralnih i $\hat{y}$-kospektralnih grafova

Primjer 4.2 ***Primjer* 0*-kospektralnih grafova***

Ranije smo utvrdili da su sljedeća dva grafa kospektralni.



Budući da su kospektralni, automatski slijedi kako su oni i 0-kospektralni. Ovo znamo zato što kod y-kospektralnih grafova promatramo matrice susjedstva oblika $yJ - A$, a ako za y uzmemo da je jednak nuli, automatski promatramo kospektralne grafove. Pitanje je jesu li oni $\mathbb{R}$-kospektralni? Ako jesu, po definiciji, moramo naći još jedan y za koji će njihove matrice oblika $yJ - A$ davati isti spektar. Iz definicije slijedi da ako postoje barem 2 takva y-ona, onda tvrdnja vrijedi za svaki y.

Odgovor na pitanje jesu li grafovi $\mathbb{R}$-kospektralni je negativan, a to lako dokažemo jednostavnim kontraprimjerom. Uzmimo $y = 1$ te promatrajmo matrice susjedstva oblika $J - A$ za oba grafa.

Za prvi graf dobivamo

$$yJ - A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz ovoga slijedi da je generalizirani karakteristični polinom matrice $J - A$ jednak $p_1(\lambda, 1) = -\lambda^5 + 5\lambda^4 - 4\lambda^3 - 4\lambda^2$ te da je generalizirani spektar jednak $\{(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2})^1, 2^1, (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2})^1, 0^2\}$.

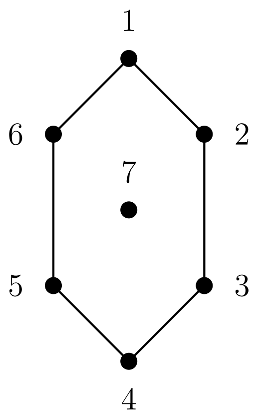
Analogno računamo i za drugi graf te dobivamo

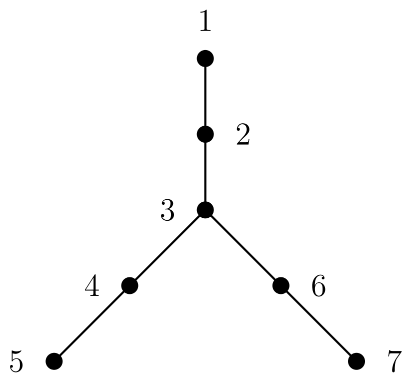
$$yJ - A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Generalizirani karakteristični polinom je $p_2(\lambda, 1) = -\lambda^5 + 5\lambda^4 - 4\lambda^3$, a generalizirani spektar je jednak $\{4^1, 1^1, 0^3\}$. Prema tome, vidimo da njihovi spektri nisu jednaki, pa ova *dva grafa nisu* 1*-kospektralni, a samim time nisu ni* $\mathbb{R}$*-kospektralni. Zaključak, dana dva grafa su* 0*-kospektralni.*

Primjer 4.3 ***Primjer*** $\mathbb{R}$***-kospektralnih grafova***

Pokazat ćemo da su sljedeća dva grafa $\mathbb{R}$*-kospektralni.*





Kako je svejedno za koje dvije vrijednosti y *ćemo promatrati imaju li grafovi isti spektar, uzet ćemo dva najlakša slučaja,* $y = 0$ *i* $y = 1$.

Za $y = 0$ *provjeravamo jesu li grafovi kospektralni. Matrice susjedstva ova dva grafa su redom*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz obje matrice dobijemo isti karakteristični polinom $k(\lambda) = -\lambda^7 + 6\lambda^5 - 9\lambda^3 + 4\lambda$. *Slijedi kako je spektar oba grafa* $\{0^1, (-1)^2, 1^2, (-2)^1, 2^1\}$ *pa su oni kospektralni, odnosno preciznije rečeno,* 0*-kospektralni.*

Sada promotrimo za $y = 1$. Za prvi graf dobivamo $J - A_1 =$

$$= \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&1\\ 1&0&1&0&1&1&1\\ 1&1&0&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

Analogno, za drugi graf dobivamo $J - A_2 =$

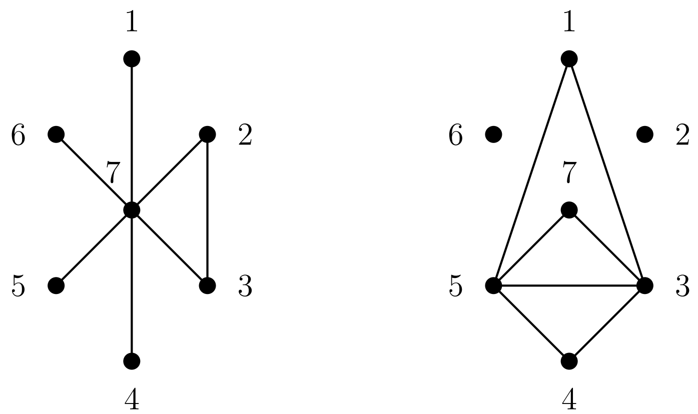
$$= \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1\\ 1&1&0&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&0&1 \end{bmatrix}.$$

Iz obje matrice dobivamo da je generalizirani karakteristični polinom jednak $p(\lambda, 1) = -\lambda^7 + 7\lambda^6 - 6\lambda^5 - 18\lambda^4 + 15\lambda^3 + 15\lambda^2 - 8\lambda - 4$, a generalizirani spektar za oba grafa je $\{(-1)^2, 1^2, 2^1, (\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2})^1, (\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2})^1\}$.

Zaključak: kako su dana dva grafa 0-kospektralni i 1-kospekatralni, slijedi kako su oni i $\mathbb{R}$-kospekatralni.

Primjer 4.4 ***Primjer -1-kospektralnih grafova***

Postoje grafovi koji nisu kospektralni, odnosno nisu 0-kospektralni, ali su kospektralni za neku vrijednost varijable y. Promotrimo sljedeća dva grafa.



Matrica susjedstva prvoga grafa je

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi da je njen karakteristični polinom jednak $k_{A_1} = -\lambda^7 + 7\lambda^5 + 2\lambda^4 - 4\lambda^3$, *a spektar* $\{0^3, (-1)^1, (0.64207)^1, (-2.32340)^1, (2.681334)^1\}$.

Matrica susjedstva drugog grafa je

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi da je njen karakteristični polinom jednak $k_{A_2} = -\lambda^7 + 7\lambda^5 + 6\lambda^4$, *a spektar* $\{0^4, (-1)^1, (-2)^1, 3^1\}$.

Budući da spektri nisu jednaki, slijedi očiti zaključak kako dani grafovi nisu kospektralni. Međutim, oni su -1*-kospektralni što možemo lako vidjeti ako promatramo matrice* $-J - A_1$ *te* $-J - A_2$*. To su sljedeće dvije matrice:*

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obje matrice daju isti karakteristični polinom $p(\lambda, -1) = -\lambda^7 - 7\lambda^6 + 21\lambda^5 - \lambda^4 - 12\lambda^3$ *te isti spektar* $\{0^3, 1^1, (-0.66998)^1, (1.93349)^1, (-9.26351)^1\}$ *pa zaključujemo kako su dani grafovi* -1*-kospektralni.*

5 Konstrukcija kospektralnih grafova

Postoji više načina na koje možemo konstruirati kospektralne grafove. U ovom radu fokusirat ćemo se na najpoznatiji, a to je **Godsil-McKay (GM) zamjena** [11] (eng. **Godsil-McKay (GM) switching**). Osim ove metode, možemo spomenuti i **Seidelovu zamjenu** (eng. **Seidel switching**) koja je dobila ime po **Johanu Jacobu Seidelu** (1919.-2001.), nizozemskom matematičaru poznatijem pod imenom **Jaap Seidel** kojemu je područje rada bila geometrija i teorija grafova. Ova metoda neće biti opisana u sklopu ovoga rada, a više o njoj možete pročitati u [16]. GM zamjena je pak dobila ime po **Chrisu Godsilu** i **Brendanu McKayu**, a u potpoglavlju 5.3 će biti ukratko opisane neke generalizacije ove metode.

5.1 Godsil-Mckay zamjena

Godsil i McKay su dali uvjete pod kojima se od grafa $\mathcal{G}$ može kreirati graf $\mathcal{G}'$ koji će biti kospektralan početnom, a također će vrijediti i da su njihovi komplementi kospektralni. Ovo možemo iskazati u sljedećoj lemi.

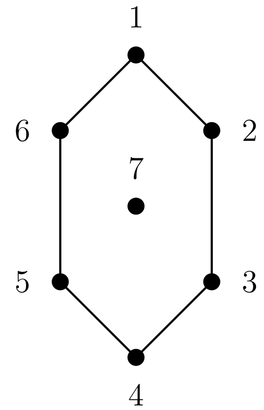
Lema 5.1 *Neka je $\mathcal{G}$ graf i neka je $\{X_1, ..., X_l, Y\}$ particija skupa vrhova grafa $\mathcal{G}$. Pretpostavimo da za svaki vrh $x \in Y$ i za svaki $i \in \{1, ..., l\}$, x ima ili 0 ili $\frac{1}{2}|X_i|$ ili $|X_i|$ susjeda u X_i. Nadalje, pretpostavimo da za svaki $i, j \in \{1, ..., l\}$ broj susjeda proizvoljnog vrha u X_i koji su sadržani u X_j ovisi samo o indeksima i, j, a ne o samim vrhovima. Možemo kreirati graf $\mathcal{G}'$ iz grafa $\mathcal{G}$ na sljedeći način. Za svaki $x \in Y$ i za svaki $i \in \{1, ..., l\}$, takav da x ima $\frac{1}{2}|X_i|$ susjeda u X_i, obrišimo odgovarajućih $\frac{1}{2}|X_i|$ bridova i umjesto njih, pridružimo x drugim vrhovima u X_i. Tada su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ kospektralni s kospektralnim komplementima.*

Dokaz:

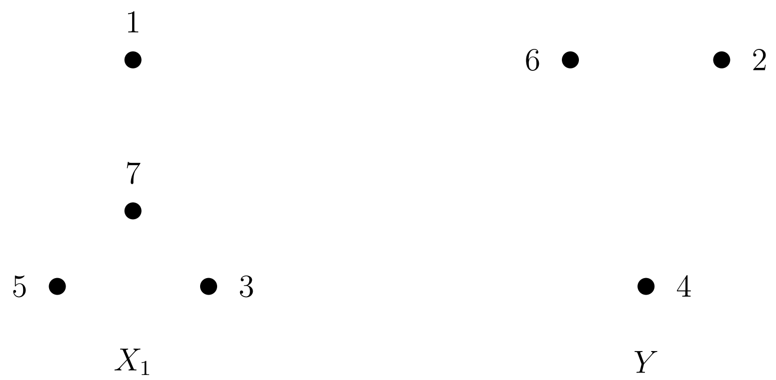
Neka su A i A' redom matrice susjedstva grafova $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$. Neka je n broj vrhova grafova $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$. Za $i = 1, ..., m$ definiramo $|V_i| \times |V_i|$ matricu $R_i = \frac{2}{|V_i|}J - I$ i $n \times n$ blok-dijagonalnu matricu $Q = \begin{bmatrix} R_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & R_m & \\ 0 & & & I \end{bmatrix}$. Ovako definirana matrica Q je ortogonalna i regularna te slijedi da je $Q^T A Q = A'$, odnosno općenitije, $Q^T(A + yJ)Q = A' + yJ$, za svaki $y \in \mathbb{R}$.

Ovaj postupak iz gornje leme možemo pokazati na sljedećem primjeru.

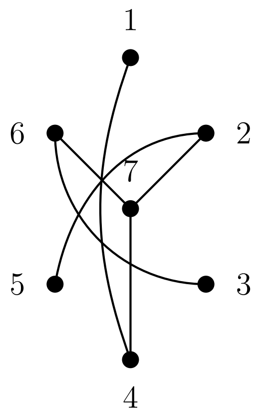
Primjer 5.1 *Neka je dan sljedeći graf $\mathcal{G}$.*



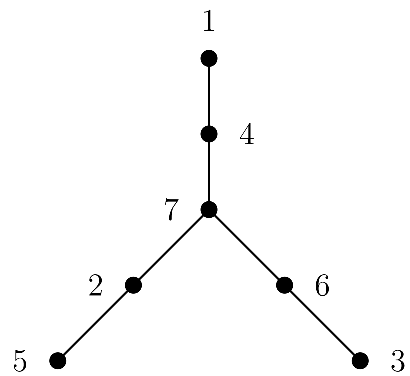
Iz ovoga grafa napravit ćemo particiju $\{X_1, Y\}$ njegovih vrhova na način da su vrhovi $\{1, 3, 5, 7\}$ u skupu X_1, a vrhovi $\{2, 4, 6\}$ u skupu Y, kao što je prikazano na donjim grafovima.



Vrijedi kako je $|X_1| = 4$ te svaki vrh x iz Y u originalnom grafu $\mathcal{G}$ ima $\frac{1}{2}|X_1| = 2$ susjeda u X_1. Sada iz grafa $\mathcal{G}$ brišemo sve bridove s kojima su vrhovi iz Y bili spojeni s vrhovima iz X_1 i umjesto toga spajamo ih s drugom polovicom vrhova. Na primjer, vrh 2 je u grafu $\mathcal{G}$ bio spojen s vrhovima 1 i 3 što znači da u novom grafu $\mathcal{G}'$ neće biti spojen s njima, nego s vrhovima 5 i 7. Slično napravimo i za druge vrhove iz Y i dobivamo graf $\mathcal{G}'$.

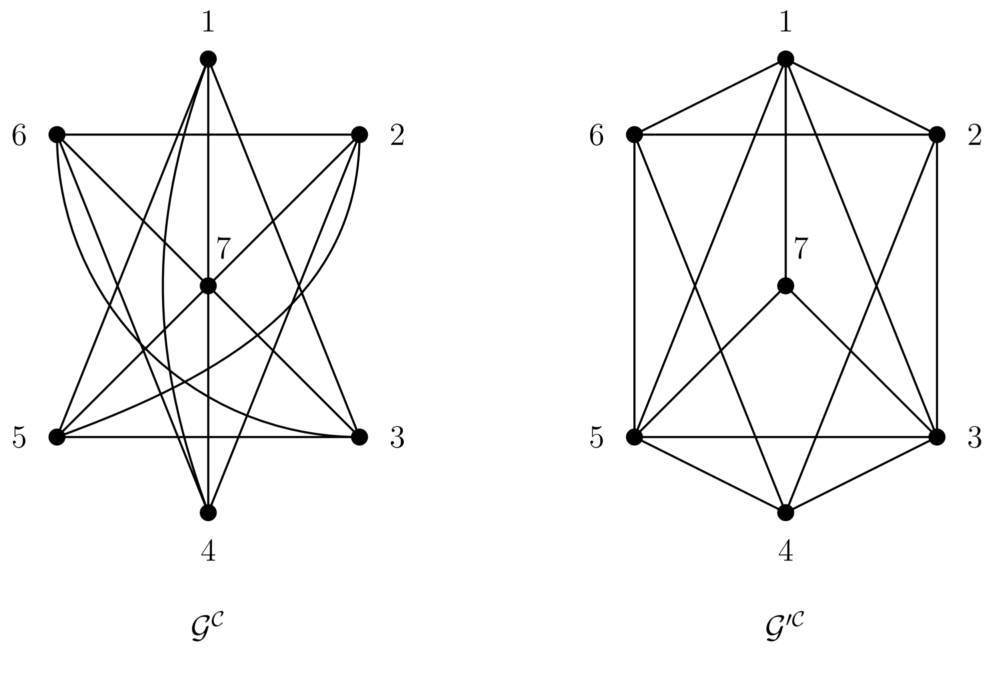


Ovaj graf je pak izomorfan sa sljedećim grafom.



U primjeru 4.3 smo pokazali već kako su grafovi $\mathcal{G}$ *i* $\mathcal{G}'$ *kospektralni.*

Pokažimo još i kako su njihovi komplementi kospektralni. Komplementi grafova $\mathcal{G}$ *i* $\mathcal{G}'$ *su redom:*



$\mathcal{G}^{\mathcal{C}}$ $\mathcal{G}'^{\mathcal{C}}$

Matrice susjedstva ova dva grafa su redom:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obje matrice daju isti karakteristični polinom $k(\lambda) = -\lambda^7 + 15\lambda^5 + 22\lambda^4 - 12\lambda^3 - 24\lambda^2$ *iz čega slijedi kako obje imaju isti spektar* $\{0^2, 1^1, (-2)^2, (\frac{3+\sqrt{33}}{2})^1, (\frac{3-\sqrt{33}}{2})^1\}$. *Odnosno, zaključujemo kako su i komplementi kospektralni.*

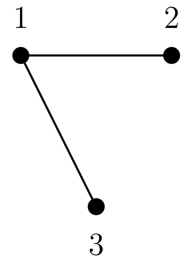
Operacija koja mijenja graf $\mathcal{G}$ u $\mathcal{G}'$ naziva se **Godsil-McKay zamjena**. U gornjem primjeru smo uzeli kako je $l = 1$, a X_1 je nezavisni skup koji se sastoji od 4 vrha. Skup X_1 u ovom slučaju, ili općenito, svi skupovi $X_1, ..., X_l$ nastali particijom vrhova nazivaju se **Godsil-McKay skupovi**.

Nije svaki par kospektralnih grafova nastao preko metode GM zamjene. Na primjer, najmanji par neizomorfnih kospektralnih grafova koji smo predstavili na početku potpoglavlja 4.1 nema kospektralne komplemente pa je očito kako oni nisu nastali preko GM zamjene.

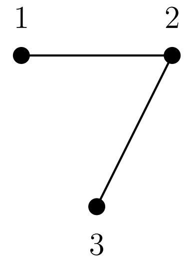
Ako je $l = 1$ i $|X_1| = 2$, tada GM zamjena razmjenjuje dva vrha u X_1 pa graf $\mathcal{G}'$ koji dobijemo ovim postupkom je izomorfan s grafom $\mathcal{G}$ i takvu zamjenu nazivamo **trivijalnom**. Ako je $l = 1$, a $|X_1| \geq 4$, tada GM zamjenom najčešće dobivamo neizomorfne kospektralne grafove.

Primjer 5.2 ***Primjer trivijalne zamjene***

Kao primjer trivijalne zamjene možemo dati sljedeća dva grafa.



$\mathcal{G}$



$\mathcal{G}'$

U grafu $\mathcal{G}$ možemo napraviti particiju vrhova X_1, Y na način da su $1, 2 \in X_1$, a $3 \in Y$. Vrijedi kako je $l = 1$ i $|X_1| = 2$. Vrh $3 \in Y$ spojen je s $\frac{1}{2}|X_1| = 1$ vrhom iz X_1 pa ga u grafu $\mathcal{G}'$ spojimo s drugim vrhom. Ova dva grafa su izomorfni, a lako se može pokazati i kako su kospektralni s karakterističnim polinomom $k(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda$ te spektrom $\{0^1, (\sqrt{2})^1, (-\sqrt{2})^1\}$. Komplementi ova dva grafa su također međusobno izomorfni i kospektralni.

Govoreći o izomorfnosti grafova, postoji lema koja nam daje dovoljne uvjete da bi dva grafa bila neizomorfna.

Lema 5.2 *Sljedeći uvjeti su dovoljni da bi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ bili neizomorfni.*

1. *Multiskup stupnjeva u $\mathcal{G}$ vrhova u Godsil-McKay skupu X se promijeni nakon zamjene.*

2. *Multiskup $\Lambda_{\mathcal{G}} = \{\lambda_{\mathcal{G}}(x, y) | x \in X, y \in V(\mathcal{G})\}$ se promijeni nakon zamjene, pri čemu je $\lambda_{\mathcal{G}}(x, y)$ broj zajedničkih susjeda vrhova x i y.*

3. *Svi vrhovi u skupu X imaju isti stupanj, a multiskup $\overline{\Lambda}_{\mathcal{G}} = \{\lambda_{\mathcal{G}}(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ se promijeni nakon zamjene.*[3]

Napomena 5.1 *Navedeni uvjeti su dovoljni, ali ne i nužni.*

5.2 Primjena Godsil-Mckay zamjene

Jednu od primjena GM zamjene možemo naći kod jako regularnih grafova.

Definicija 5.1 *Za jednostavan graf na $\mathcal{V}$ vrhova kažemo da je* ***jako regularan*** *s parametrima $\mathcal{V}, k, \lambda, \mu$ ako nije potpun i bez bridova te vrijede sljedeći uvjeti:*

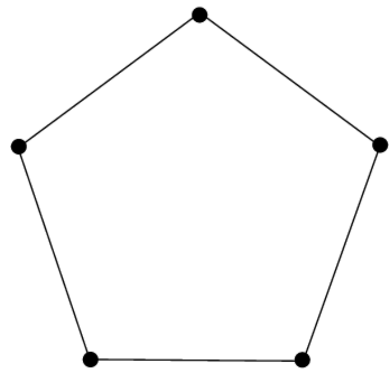
1. *svaki vrh je susjedan s točno k vrhova,*

2. *za svaki par susjednih vrhova postoji λ vrhova koji su susjedni s oba,*

3. *za svaki par nesusjednih vrhova postoji μ vrhova koji su susjedni s oba.*

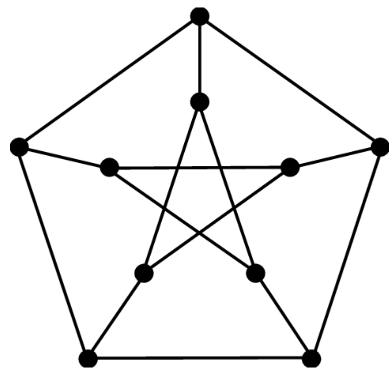
[3]Dokaz leme možete pogledati u [2].

Primjer 5.3 *Pentagon je primjer jako regularnog grafa s parametrima* $(5, 2, 0, 1)$.



Slika 5: Pentagon

Primjer 5.4 *Drugi veoma poznati primjer jako regularnog grafa je* ***Petersenov graf****. Petersenov graf je jako regularan s parametrima* $(10, 3, 0, 1)$.



Slika 6: Petersenov graf

Općenito vrijedi da ako graf $\mathcal{G}'$ ima isti spektar kao i jako regularni graf $\mathcal{G}$, tada je $\mathcal{G}'$ također jako regularan s istim parametrima kao i $\mathcal{G}$.[4] Na taj način GM zamjena služi kao alat za konstrukciju novih jako regularnih grafova iz postojećih. Ali pritom ne postoji garancija da će novonastali graf biti neizomorfan s početnim. Nakon zamjene ne mogu se primijeniti dovoljni uvjeti za neizomorfnost zbog strukture jako regularnih grafova. Jedan od načina na koji možemo razlikovati jako regularne grafove s istim parametrima, a samim time i s istim spektrom je koristeći 2-rang grafa. 2-rang grafa je rang matrice susjedstva danog grafa nad konačnim poljem $\mathbb{F}_2$ koji u ovom kontekstu možemo koristiti za dokazivanje neizomorfnosti grafova. U vezi ovoga možemo definirati i simplektičke grafove.

[4] Tvrdnja je objašnjena u [6].

Definicija 5.2 *Neka je* $\mathbb{F}_2^{2\mathcal{V}}$ $2\mathcal{V}$*-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}_2$ *te neka je* $K = I_{\mathcal{V}} \otimes (J_2 - I_2)$*, pri čemu je* $I_{\mathcal{V}}$ *jedinična matrica reda* $\mathcal{V}$*, a* J_2 *označava matricu reda 2 koja se sastoji od samih jedinica.* ***Simplektički graf*** $Sp(2\mathcal{V}, 2)$ *nad poljem* $\mathbb{F}_2$ *je graf čiji vrhovi su nenula vektori vektorskog prostora* $\mathbb{F}_2^{2\mathcal{V}}$ *pri čemu su dva vrha* x *i* y *susjedna kad god je* $x^T K y = 1$*. Ekvivalentno,* $x = [x_1, ..., x_{2\mathcal{V}}]^T$ *i* $y = [y_1, ..., y_{2\mathcal{V}}]^T$ *su susjedni ako vrijedi*

$$(x_1 y_2 + x_2 y_1) + (x_3 y_4 + x_4 y_3) + \cdots + (x_{2\mathcal{V}-1} y_{2\mathcal{V}} + x_{2\mathcal{V}} y_{2\mathcal{V}-1}) = 1.$$

Napomena 5.2 *Za* $\mathcal{V} \geq 2$ *simplektički graf* $Sp(2\mathcal{V}, 2)$ *je jako regularan s parametrima* $(2^{2\mathcal{V}} - 1, 2^{2\mathcal{V}-1}, 2^{2\mathcal{V}-2}, 2^{2\mathcal{V}-2})$*.*

Abiad i Haemers su u svom radu [4] koristeći GM zamjenu uspjeli dobiti jako regularne grafove s istim parametrima kao simplektički grafovi $Sp(2\mathcal{V}, 2)$, za sve $\mathcal{V} \geq 3$. A također je pokazano i da se 2-rang grafa povećava nakon zamjene. Ovo implicira kako graf nastao GM zamjenom je jako regularan graf s istim parametrima kao i $Sp(2\mathcal{V}, 2)$.

5.3 Druge konstrukcije kospektralnih grafova

Osim Seidel zamjene i GM zamjene postoje još neki načini na koje možemo konstruirati kospektralne grafove. Jedan takav način dali su primjerice Abiad i Haemers u svom radu "*Cospectral graphs and regular orthogonal matrices of level* 2"[3]. U tom radu su prezentirali novu metodu konstrukcije familije kospektralnih grafova koja generalizira GM zamjenu. Pritom su koristili regularne ortogonalne matrice levela 2. Općenito, kažemo da je matrica Q levela l ako je l najmanji pozitivni cijeli broj takav da je lQ cjelobrojna matrica. U ovom slučaju $l = 2$, odnosno $2Q$ je cjelobrojna matrica. Označimo s A matricu susjedstva grafa $\mathcal{G}$, a s A' matricu susjedstva grafa $\mathcal{G}'$. Kako su matrice A i A' simetrične, vrijedi kako su grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ kospektralni onda kada su matrice A i A' slične. Odnosno, postoji ortogonalna matrica Q takva da je $A' = Q^T A Q$. Ako je Q permutacijska matrica, odnosno ako je regularna matrica levela 1, tada su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ izomorfni.

S druge strane, ako su grafovi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ neizomorfni, tada postoji regularna ortogonalna matrica Q levela 2 takva da je $A' = Q^T A Q$. U ovom slučaju kažemo da su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ **semi-izomorfni**. Za semi-izomorfne grafove vrijedi kako su oni $\mathbb{R}$-kospektralni, odnosno matrice $xI + yJ + zA$ te $xI + yJ + zA'$ imaju isti spektar za svaki $x, y, z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$.

Osim ove generalizacije GM zamjene s matricama levela 2, navest ćemo još jednu varijaciju GM zamjene koju su predstavili Wang, Qiu i Hu u svom radu "*Cospectral Graphs, GM-switching and regular rational orthogonal matrices of level p*"[13]. Njihova varijacija iskazana u donjem teoremu može se koristiti pri konstrukciji parova neizomorfnih kospektralnih grafova koji nisu dobiveni originalnom GM zamjenom.

Teorem 5.1 *Neka je $\mathcal{G}$ graf čiji skup vrhova možemo prikazati kao $C_1 \cup C_2 \cup D$. Pretpostavimo da je $|C_1| = |C_2|$ te da je $C_1 \cup C_2$ particija vrhova određena na način da svaka dva vrha iz C_1 imaju isti broj susjeda u C_1 i u C_2 te svaka dva vrha iz C_2 imaju isti broj susjeda u C_1 i u C_2. Dodatno, neka za svaki vrh $x \in D$ vrijedi jedan od sljedeća dva uvjeta:*

1. $|\mathcal{G}(x) \cap C_1| = |\mathcal{G}(x) \cap C_2|$,
2. $\mathcal{G}(x) \cap (C_1 \cup C_2) \in \{C_1, C_2\}$.

Tada se graf $\mathcal{G}'$ može konstruirati iz $\mathcal{G}$ mijenjanjem bridova između $C_1 \cup C_2$ i D na sljedeći način:

$$\mathcal{G}'(x) \cap (C_1 \cup C_2) = \begin{cases} C_1 & \textit{ako je } \mathcal{G}(x) \cap (C_1 \cup C_2) = C_2 \\ C_2 & \textit{ako je } \mathcal{G}(x) \cap (C_1 \cup C_2) = C_1 \\ \mathcal{G}(x) \cap (C_1 \cup C_2) & \textit{inače} \end{cases},$$

pri čemu je $x \in D$. Tada je graf $\mathcal{G}'$ kospektralan s grafom $\mathcal{G}$.[5]

[5]Dokaz teorema možete pogledati u [13].

6 Primjeri u programskom jeziku GAP

U ovom poglavlju ćemo predstaviti metodu GM zamjene u programskom jeziku GAP[17]. Programiranje je veoma koristan alat budući da zahvaljujući njemu možemo brže i lakše odrediti koji graf ćemo dobiti nakon GM zamjene.

Prikazat ćemo metodu na dva različita primjera grafova. GM metoda je specifična po tome što se za nju ne može napraviti funkcija koja će raditi za sve različite primjere, već treba za svaki graf posebno pokušavati konstruirati skupove Y te X_i, $i = 1, ..., l$. Prvi primjer koji ćemo dati je par kospektralnih grafova na kojima smo prikazali metodu GM zamjene u poglavlju 5.1. Drugi je primjer vezan uz jako regularne grafove. Vidjet ćemo kako ćemo iz jednog jako regularnog grafa dobiti drugi jako regularni koji će biti kospektralan s početnim te imati iste parametre kao i početni graf, ali neće biti izomorfan s polaznim grafom.

Slijedi kod u GAP-u s objašnjenjima.

```
#Prvo ucitavamo paket "Grape" koji sluzi za rad s grafovima.
LoadPackage("Grape");
```

Sada ćemo definirati prvi graf preko njegove matrice susjedstva.

```
G1:=[
[0,1,0,0,0,1,0],
[1,0,1,0,0,0,0],
[0,1,0,1,0,0,0],
[0,0,1,0,1,0,0],
[0,0,0,1,0,1,0],
[1,0,0,0,1,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0]
];

G:=Group(());
graf_g1:=Graph(G, [1..Length(G1)], OnPoints, function(x,y)
      return G1[x][y]=1; end, true);
```

Programski jezik GAP na sljedeći način prikaže graf koji smo definirali:

```
rec( adjacencies := [ [ 2, 6 ], [ 1, 3 ], [ 2, 4 ], [ 3, 5 ],
  [ 4, 6 ], [ 1, 5 ], [ ] ], group := Group(()), isGraph := true,
  names := [ 1 .. 7 ], order := 7,
  representatives := [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ],
  schreierVector := [ -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7 ] )
```

Sada ćemo definirati pomoćnu funkciju "susjedi" koja će za dani graf i pripadni vrh vraćati sve susjede tog vrha.

```
susjedi:=function(graf1,x)
 local v, br_vrhova, susjedi;
 v:=Vertices(graf1);
 br_vrhova:=Length(Vertices(graf1));
 susjedi:=Adjacency(graf1,x);
 return susjedi;
end;
```

Sada možemo definirati funkciju "GM" koja će za dani graf na 7 vrhova vratiti graf koji će biti kospektralan s njim.

```
GM:=function(graf1)
 local v, e, br_vrhova, Y, Y1, X1, X2, X3, X1_pom, X2_pom, X3_pom,
        i1, i, j, k, x, susjedi_vrha_x, br_za_x, graf2, A_graf2,
        Y_new, X_new;
 v:=Vertices(graf1);
 e:=UndirectedEdges(graf1);
 br_vrhova:=Length(Vertices(graf1));
 X1:=[]; #0 susjeda
 X2:=[]; #|X| susjeda
 X3:=[]; #1/2|X| susjeda
 Y1:=[];
 i1:=1;
```

```
for i in [1..br_vrhova-2] do
 for j in [i+1..br_vrhova-1] do
  for k in [j+1..br_vrhova] do
   Y:=[i,j,k];
   X1_pom:=[];
   X2_pom:=[];
   X3_pom:=[];
   for x in [1..br_vrhova] do
    if not x in Y then
     susjedi_vrha_x:=Intersection(susjedi(graf1,x),Y);
     #gledamo za dani vrh X (koji nije u skupu Y) koliko ima
     #susjeda s vrhovima iz Y
     br_za_x:=Length(susjedi_vrha_x);
     if br_za_x=0 then
      Add(X1_pom,x);
     elif br_za_x=4 then
      Add(X2_pom,x);
     elif br_za_x=2 then
      Add(X3_pom,x);
     fi;
    fi;
    if Length(X1_pom)+Length(X2_pom)+Length(X3_pom)=br_vrhova-3 then
     Y1[i1]:=Y;
     X1[i1]:=X1_pom;
     X2[i1]:=X2_pom;
     X3[i1]:=X3_pom;
     i1:=i1+1;
    fi;
   od;
  od;
 od;
```

```
 od;

 #u ovom slucaju postoje dvije mogucnosti odabira skupova $Y$
 #odabrali smo drugu mogucnost buduci da ona odgovara ranijem primjeru
 Y:=Y1[2];
 X3:=X3[2];
 Add(X3,7);

 #kreiranje novog grafa
 A_graf2:=NullMat(br_vrhova,br_vrhova);
 for i in [1..br_vrhova] do
  for j in [1..br_vrhova] do
   if [i,j] in UndirectedEdges(graf1) then
    A_graf2[i][j]:=1;
    A_graf2[j][i]:=1;
   fi;
   if i in Y and j in X3 then
    A_graf2[i][j]:=1-A_graf2[i][j];
    A_graf2[j][i]:=1-A_graf2[j][i];
   fi;
  od;
 od;


 graf2:=Graph(Group(()), [1..br_vrhova], OnPoints, function(i,j)
        return A_graf2[i][j]=1; end, true);

 return graf2;
end;

GM(graf_g1);
```

Pokretanjem gornjeg koda dobivamo sljedeći graf kao rješenje.

```
rec( adjacencies := [ [ 4 ], [ 5, 7 ], [ 6 ], [ 1, 7 ], [ 2 ],
    [ 3, 7 ], [ 2, 4, 6 ] ], group := Group(()),
    isGraph := true, names := [ 1 .. 7 ], order := 7,
    representatives := [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ],
    schreierVector := [ -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7 ] )
```

Iz "adjacencies" očitamo koji su susjedi pojedinog vrha i vidimo da smo na ovaj način dobili drugi graf iz primjera u poglavlju 5.1.

Drugi primjer vezan je uz jako regularne grafove s parametrima $(36, 15, 6, 6)$. Podsjetimo se, jako regularni graf s ovim parametrima je graf koji ima 36 vrhova, svaki vrh je susjedan s njih 15, svaka 2 susjedna vrha imaju 6 zajedničkih susjeda te svaka 2 nesusjedna vrha imaju po 6 zajedničkih susjeda.

Prvo učitajmo jedan jako regularan graf s danim parametrima. Puna grupa automorfizama tog grafa je reda 51840.

```
    A1:=[
[0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[1,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[1,1,0,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0],
[1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0],
[1,1,0,0,0,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0],
[1,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0],
[1,1,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1],
[1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1],
[1,0,1,0,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0],
[1,0,1,0,1,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1],
[1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,1,1,0,0],
[1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1],
[1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0],
[1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1],
[1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1],
[1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,1,1,0,0],
```

```
[0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0],
[0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1],
[0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0],
[0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1],
[0,1,0,1,1,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0],
[0,1,0,1,1,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1],
[0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1],
[0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0],
[0,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0],
[0,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1],
[0,0,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,1,0,0,1],
[0,0,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0],
[0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,1,0],
[0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,0,1],
[0,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,1,0,0,1],
[0,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,1,0],
[0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1],
[0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,0,1,0],
[0,0,0,0,0,0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0],
[0,0,0,0,0,0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0]
];
G:=Group(());
graf_1:=Graph(G, [1..Length(A1)], OnPoints, function(x,y)
             return A1[x][y]=1; end, true);
```

Pokretanjem koda u GAP-u dobivamo sljedeći prikaz ovoga grafa:

```
rec( adjacencies := [
    [ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 ],
    [ 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 ],
    [ 1, 2, 4, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 25, 26, 27, 28 ],
    [ 1, 2, 3, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 ],
    [ 1, 2, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 29, 30, 31, 32 ],
```

```
[ 1, 2, 5, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 29, 30, 31, 32 ],
[ 1, 2, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 33, 34, 35, 36 ],
[ 1, 2, 7, 11, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 22, 33, 34, 35, 36 ],
[ 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 18, 25, 26, 29, 30, 33, 34 ],
[ 1, 3, 5, 7, 12, 14, 16, 17, 18, 27, 28, 31, 32, 35, 36 ],
[ 1, 3, 6, 8, 9, 14, 16, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 33, 34 ],
[ 1, 3, 6, 8, 10, 13, 15, 19, 20, 25, 26, 31, 32, 35, 36 ],
[ 1, 4, 5, 8, 9, 12, 16, 21, 22, 25, 26, 31, 32, 33, 34 ],
[ 1, 4, 5, 8, 10, 11, 15, 21, 22, 27, 28, 29, 30, 35, 36 ],
[ 1, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 35, 36 ],
[ 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 34 ],
[ 2, 3, 5, 7, 9, 10, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35 ],
[ 2, 3, 5, 7, 9, 10, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36 ],
[ 2, 3, 6, 8, 11, 12, 17, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35 ],
[ 2, 3, 6, 8, 11, 12, 18, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36 ],
[ 2, 4, 5, 8, 13, 14, 17, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 33, 35 ],
[ 2, 4, 5, 8, 13, 14, 18, 19, 23, 26, 28, 29, 31, 34, 36 ],
[ 2, 4, 6, 7, 15, 16, 17, 20, 22, 25, 27, 29, 31, 34, 36 ],
[ 2, 4, 6, 7, 15, 16, 18, 19, 21, 26, 28, 30, 32, 33, 35 ],
[ 3, 4, 9, 12, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 28, 30, 31, 34, 35 ],
[ 3, 4, 9, 12, 13, 15, 18, 19, 22, 24, 27, 29, 32, 33, 36 ],
[ 3, 4, 10, 11, 14, 16, 17, 20, 21, 23, 26, 29, 32, 33, 36 ],
[ 3, 4, 10, 11, 14, 16, 18, 19, 22, 24, 25, 30, 31, 34, 35 ],
[ 5, 6, 9, 11, 14, 15, 17, 19, 22, 23, 26, 27, 32, 34, 35 ],
[ 5, 6, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 28, 31, 33, 36 ],
[ 5, 6, 10, 12, 13, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 28, 30, 33, 36 ],
[ 5, 6, 10, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 29, 34, 35 ],
[ 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 21, 24, 26, 27, 30, 31, 36 ],
[ 7, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 22, 23, 25, 28, 29, 32, 35 ],
[ 7, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 34 ],
[ 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 22, 23, 26, 27, 30, 31, 33 ]
], group := Group(()), isGraph := true, names := [ 1 .. 36 ],
```

```
order := 36, representatives := [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24,
25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 ],
schreierVector := [ -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9,
-10, -11, -12, -13, -14, -15, -16, -17, -18, -19, -20,
-21, -22, -23, -24, -25, -26, -27, -28, -29, -30, -31,
-32, -33, -34, -35, -36 ] )
```

GM funkcija koju smo ovdje nazvali "GM36" je konstruirana na sličan način kao ona iz prošlog primjera, s razlikom u tome što je ovdje bilo potrebno uzeti 4 vrha u skup Y.

```
GM36:=function(graf1)
 local v, e, br_vrhova, Y, Y1, X1, X2, X3, X1_pom, X2_pom,
       X3_pom, i1, i, j, k, l, x, susjedi_vrha_x, br_za_x,
       graf2, A_graf2, Y_new, X_new;

 v:=Vertices(graf1);
 e:=UndirectedEdges(graf1);
 br_vrhova:=Length(Vertices(graf1));
 X1:=[]; #0 susjeda
 X2:=[]; #|X| susjeda
 X3:=[]; #1/2|X| susjeda
 Y1:=[];
 i1:=1;

 for i in [1..br_vrhova-3] do
  for j in [i+1..br_vrhova-2] do
   for k in [j+1..br_vrhova-1] do
    for l in [k+1..br_vrhova] do
     Y:=[i,j,k,l];
     X1_pom:=[];
     X2_pom:=[];
     X3_pom:=[];
```

```
    for x in [1..br_vrhova] do
     if not x in Y then
      susjedi_vrha_x:=Intersection(susjedi(graf1,x),Y);
      br_za_x:=Length(susjedi_vrha_x);
      if br_za_x=0 then
       Add(X1_pom,x);
      elif br_za_x=4 then
       Add(X2_pom,x);
      elif br_za_x=2 then
       Add(X3_pom,x);
      fi;
     fi;
     if Length(X1_pom)+Length(X2_pom)+Length(X3_pom)=br_vrhova-4 then
      Y1[i1]:=Y;
      X1[i1]:=X1_pom;
      X2[i1]:=X2_pom;
      X3[i1]:=X3_pom;
      i1:=i1+1;
     fi;
    od;
   od;
  od;
 od;
od;

Y:=Y1[1];
X3:=X3[1];


A_graf2:=NullMat(br_vrhova,br_vrhova);
for i in [1..br_vrhova] do
 for j in [1..br_vrhova] do
```

```
   if [i,j] in UndirectedEdges(graf1) then
    A_graf2[i][j]:=1;
    A_graf2[j][i]:=1;
   fi;
   if i in Y and j in X3 then
    A_graf2[i][j]:=1-A_graf2[i][j];
    A_graf2[j][i]:=1-A_graf2[j][i];
   fi;
  od;
 od;


 graf2:=Graph(Group(()), [1..br_vrhova], OnPoints, function(i,j)
            return A_graf2[i][j]=1; end, true);

 return graf2;
end;
GM36(graf_1);
```

Pokretanjem gornjeg koda dobivamo sljedeći graf koji je kospektralan s početnim.

```
rec( adjacencies := [
    [ 2, 3, 4, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 ],
    [ 1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 25, 26, 27, 28 ],
    [ 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24 ],
    [ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20 ],
    [ 3, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 29, 30, 31, 32 ],
    [ 3, 4, 5, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 29, 30, 31, 32 ],
    [ 3, 4, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 33, 34, 35, 36 ],
    [ 3, 4, 7, 11, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 22, 33, 34, 35, 36 ],
    [ 2, 4, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 18, 25, 26, 29, 30, 33, 34 ],
    [ 2, 4, 5, 7, 12, 14, 16, 17, 18, 27, 28, 31, 32, 35, 36 ],
    [ 2, 4, 6, 8, 9, 14, 16, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 33, 34 ],
```

```
[ 2, 4, 6, 8, 10, 13, 15, 19, 20, 25, 26, 31, 32, 35, 36 ],
[ 2, 3, 5, 8, 9, 12, 16, 21, 22, 25, 26, 31, 32, 33, 34 ],
[ 2, 3, 5, 8, 10, 11, 15, 21, 22, 27, 28, 29, 30, 35, 36 ],
[ 2, 3, 6, 7, 9, 12, 14, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 35, 36 ],
[ 2, 3, 6, 7, 10, 11, 13, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 34 ],
[ 1, 4, 5, 7, 9, 10, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35 ],
[ 1, 4, 5, 7, 9, 10, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36 ],
[ 1, 4, 6, 8, 11, 12, 17, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35 ],
[ 1, 4, 6, 8, 11, 12, 18, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36 ],
[ 1, 3, 5, 8, 13, 14, 17, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 33, 35 ],
[ 1, 3, 5, 8, 13, 14, 18, 19, 23, 26, 28, 29, 31, 34, 36 ],
[ 1, 3, 6, 7, 15, 16, 17, 20, 22, 25, 27, 29, 31, 34, 36 ],
[ 1, 3, 6, 7, 15, 16, 18, 19, 21, 26, 28, 30, 32, 33, 35 ],
[ 1, 2, 9, 12, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 28, 30, 31, 34, 35 ],
[ 1, 2, 9, 12, 13, 15, 18, 19, 22, 24, 27, 29, 32, 33, 36 ],
[ 1, 2, 10, 11, 14, 16, 17, 20, 21, 23, 26, 29, 32, 33, 36 ],
[ 1, 2, 10, 11, 14, 16, 18, 19, 22, 24, 25, 30, 31, 34, 35 ],
[ 5, 6, 9, 11, 14, 15, 17, 19, 22, 23, 26, 27, 32, 34, 35 ],
[ 5, 6, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 28, 31, 33, 36 ],
[ 5, 6, 10, 12, 13, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 28, 30, 33, 36 ],
[ 5, 6, 10, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 29, 34, 35 ],
[ 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 21, 24, 26, 27, 30, 31, 36 ],
[ 7, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 22, 23, 25, 28, 29, 32, 35 ],
[ 7, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 34 ],
[ 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 22, 23, 26, 27, 30, 31, 33 ] ],
group := Group(()), isGraph := true, names := [ 1 .. 36 ],
order := 36, representatives := [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24,
25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 ],
schreierVector := [ -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,
-11, -12, -13, -14, -15, -16, -17, -18, -19, -20, -21, -22,
-23, -24, -25, -26, -27, -28, -29, -30, -31, -32, -33, -34,
```

```
-35, -36 ] )
```

Sada treba još provjeriti je li ovaj dobiveni graf jako regularan s istim parametrima. Radi potrebe toga definiramo pomoćnu funkciju "broj susjeda"

```
broj_susjeda:=function(graf1)
 local v, br_vrhova, stupanj_vrha, stupanj, i;
 v:=Vertices(graf1);
 br_vrhova:=Length(Vertices(graf1));
 stupanj_vrha:=[]; #u listu stupanj vrha spremamo redom
                   #broj susjeda svakog vrha
 for i in [1..br_vrhova] do
  stupanj:=Adjacency(graf1,i);
  stupanj_vrha[i]:=Length(stupanj);
 od;
 return stupanj_vrha;
end;

broj_susjeda(graf_1);
```

Sada konačno možemo definirati i funkciju "Provjera" koja će nam izbaciti parametre danog jako regularnog grafa.

```
Provjera:=function(graf1)
 local v, e, br_vrhova, parametri, pomocna, i, j, br, susjedi_vrha,
      zajednicki_susjedi, zajednicki, nesusjedi, br2, susjedi_i,
      susjedi_j, zajednicki_nesusjedi, zajednicki_2;
 v:=Vertices(graf1);
 e:=UndirectedEdges(graf1);
 br_vrhova:=Length(Vertices(graf1));
 parametri:=[];
 #u listu parametri spremamo parametre jako regularnog grafa
 Add(parametri,br_vrhova);
```

```
#za k
pomocna:=[];

for i in [1..1] do
 for j in [i..br_vrhova] do
  if broj_susjeda(graf1)[i]=broj_susjeda(graf1)[j] then
  #provjera imaju li svi vrhovi isti broj susjeda
   Add(pomocna,1);
  fi;
 od;
od;

if Length(pomocna)=br_vrhova then
 Add(parametri,broj_susjeda(graf1)[1]);
fi;

#za lambda

br:=[];
for i in [1..br_vrhova] do
 susjedi_vrha:=susjedi(graf1,i);
 for j in susjedi_vrha do
  zajednicki_susjedi:=Intersection(susjedi_vrha, susjedi(graf1,j));
  Add(br,Length(zajednicki_susjedi));
 od;
od;
zajednicki:=[];
for i in [1..1] do
 for j in [1..Length(br)] do
  if br[i]=br[j] then
  #provjera imaju li svaka 2 susjedna vrha isti broj susjeda
```

```
   Add(zajednicki,1);
  fi;
 od;
od;
if Length(zajednicki)=Length(br) then
#ako svi parovi imaju jednak broj, tada taj broj je lambda
#i njega dodajemo u listu
 Add(parametri, br[1]);
fi;

#za mu
nesusjedi:=[];
for i in [1..br_vrhova] do
 for j in [i+1..br_vrhova] do
  if not [i,j] in e then
   Add(nesusjedi,[i,j]);
  fi;
 od;
od;

br2:=[];
for i in [1..Length(nesusjedi)] do
 susjedi_i:=susjedi(graf1,nesusjedi[i][1]);
 susjedi_j:=susjedi(graf1,nesusjedi[i][2]);
 zajednicki_nesusjedi:=Intersection(susjedi_i,susjedi_j);
 Add(br2,Length(zajednicki_nesusjedi));
od;

zajednicki2:=[];
for i in [1..1] do
 for j in [1..Length(br2)] do
  if br2[i]=br2[j] then
```

```
   #provjera imaju li svaka 2 nesusjedna vrha isti broj susjeda
    Add(zajednicki2,1);
   fi;
  od;
 od;
 if Length(zajednicki2)=Length(br2) then
 #ako svi parovi imaju jednak broj, tada taj broj je mu
 #i njega dodajemo u listu
  Add(parametri, br2[1]);
 fi;

 return parametri;

end;

Provjera(GM36(graf_1));
```

Pokretanjem gornjeg koda dobivamo rješenje:

```
[ 36, 15, 6, 6 ]
```

Odnosno, vidimo kako dani graf dobiven preko metode GM zamjene je jako regularan te ima iste parametre kao i početni. No, dobiveni graf nije izomorfan s polaznim. Red pune grupe automorfizama dobivenog grafa je 384. Dobili smo dva jako regularna grafa s istim parametrima, ali neizomorfna, što je i bio cilj.

7 Zaključak

Kospektralni grafovi se proučavaju unutar posebne grane teorije grafova koju nazivamo spektralna teorija grafova. Iako se povijest teorije grafova veže još uz 1735. godinu kada je švicarski matematičar Leonhard Euler riješio problem Konigsburških mostova, spektralna teorija grafova se počela proučavati više tek u 1950.-im godinama. U proučavanju ove grane teorije grafova koristimo linearnu algebru kao glavni alat za računanje spektra grafova. Proučavanje spektra grafova važno je unutar same teorije grafova budući da iz spektra možemo zaključiti neka svojstva grafa.

U ovom radu bavili smo se pretežito s kospektralnim grafovima. To su grafovi koji imaju isti spektar. U radu su bili prikazani razni primjeri kospektralnih grafova te su prikazane neke metode konstrukcija novih grafova koji će biti kospektralni s postojećima. Upravo kroz te konstrukcije možemo vidjeti i jednu njihovu primjenu u konstrukciji jako regularnih grafova. Osim toga, kospektralni grafovi su važni i u drugim prirodnim znanostima, poput fizike i kemije gdje također možemo vidjeti njihovu primjenu. S obzirom na to kako je riječ o području matematike koje se tek relativno nedavno počelo više istraživati, očekujem kako bi u budućnosti mogli imati i nešto veći značaj unutar prirodnih znanosti, a možda se pronađe i neka još produktivnija metoda konstrukcije od GM zamjene.

Popis slika

Literatura

[1] A. Abiad, *Eigenvalue tehniques and their applications to graph theory*, Summer School Finite Geometry and Friends, Lecture notes, Belgija, 2019.

[2] A. Abiad, A. E. Brouwer, W.H. Haemers, *Godsil-McKay switching and isomorphism*, Electronic Journal of Linear Algebra 28 (2015), 4–11.

[3] A. Abiad, W. H. Haemers, *Cospectral Graphs and Regular Orthogonal Matrices of Level 2*, The Electronic Journal of Combinatorics 19 (2012), issue 3.

[4] A. Abiad, W. H. Haemers, *Switched symplectic graphs and their 2-ranks*, Des. Codes Crypt. 81 (2016), 35–41.

[5] American Mathematical Society: *Eigenvalues of Graphs - Chapter 2* https://www.ams.org/bookstore/pspdf/cbms-115-prev.pdf

[6] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer, 2011.

[7] L. Von Collatz, U. Sinogowitz, *Spektren endlicher grafen*, Abh.Math.Semin.Univ.Hambg. 21 (1957), 63–77.

[8] D. Crnković, *Diskretna matematika*, Bilješke s predavanja, 2019.

[9] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić, *Signless Laplacians of finite graphs*, ScienceDirect, Linear Algebra and its Applications 423 (2007), 155–171.

[10] E. R. van Dam, W. H. Hamers, J. H. Koolen, *Cospectral graphs and the generalized adjacency matrix*, Center Discussion Paper No. 31 (2006).

[11] C. D. Godsil, B. D. McKay, *Constructing cospectral graphs*, Aeq. Math. 25 (1982), 257–268.

[12] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[13] Y. Hu, L. Qiu, W. Wang, *Cospectral graphs, GM-switching and regular rational orthogonal matrices of level p*, Linear Algebra and its Applications 563 (2019), 154–177. 2019.

[14] M. A. Lastrina, *Seidel switching*, South Hadley, Massachusetts, 2006.

[15] A. Marsden, *Eigenvalues of the Laplacian and their relationship to the connectedness of a graph*, Chicago, 2013.

[16] J. J. Seidel, *Graphs and two-graphs*, in: Proceedings of the Fifth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1974), Congressus Numerantium X, Utilitas Math., Winnipeg, Man. (1974), 125–143.

[17] The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.4 (2016) http://www.gap-system.org