Igre s N igrača

Kučinić, Josipa

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:196:151660

Rights / Prava: Attribution 3.0 Unported/Imenovanje 3.0

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-02**

SVEUČILIŠTE U RIJECI
FAKULTET ZA MATEMATIKU

Repository / Repozitorij:

Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Matematika i informatika

Josipa Kučinić

IGRE S *N* IGRAČA

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2024.

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Matematika i informatika

Josipa Kučinić

IGRE S *N* IGRAČA

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Nina Mostarac

Rijeka, rujan 2024.

SADRŽAJ

SAŽETAK

Teorija igara je složeno područje proučavanja koje ima primjenu u širokom rasponu disciplina, od ekonomije i politike do biologije i psihologije. U svojoj srži, teorija igara se bavi razumijevanjem načina na koji pojedinci i grupe donose odluke u strateškim situacijama u kojima ishodi ovise o akcijama više igrača. Analizirajući poticaje, sklonosti i ponašanja igrača, teoretičari igara imaju za cilj predvidjeti i objasniti ishode tih interakcija, kao i uočiti strategije koje mogu pomoći igračima da postignu svoje ciljeve.

Jedan od ključnih pojmova u teoriji igara je ideja igre, koja se odnosi na bilo koju situaciju u kojoj postoje dva ili više igrača koji imaju različite moguće radnje ili strategije koje mogu poduzeti, gdje isplata ili ishod ovise o izborima koje su napravili svi igrači. Igre mogu imati mnogo različitih oblika, od jednostavnih igara za dva igrača poput kamen-škare-papir do složenih igara za više igrača poput zatvoreničke dileme ili borbe spolova. Kako bi se igre analizirale i dalo predviđanje o ishodima, teoretičari igara koriste razne matematičke modele i alate, uključujući stabla odlučivanja, Nashovu ravnotežu i matrice igara. Ovi alati im omogućuju uočavanje dominantnih strategija, procjenu utjecaja različitih vrsta informacija na odluke igrača i predviđanje kako će se igrači vjerojatno ponašati u različitim scenarijima.

U ovom radu najviše ćemo se posvetiti razmatranju igre s dva igrača. Nakon uvodnog opisa i definicije igre, počet ćemo s opisivanjem igara s dva igrača. U najjednostavnijem slučaju, za nula – suma igre s dva igrača pokazat ćemo kako se takve igre rješavaju. Spomenut ćemo važne pojmove kao što su: strategija, matrična igra, matrica plaćanja i tablica isplata, princip dominacije, sedlo, mješovite i čiste strategije. Isto tako ćemo spomenuti ne nula – suma igre s dva igrača. U ovoj vrsti igre interesi igrača nisu strogo suprotstavljeni. Igrači mogu međusobno surađivati, što znači da je i ponekad omogućena komunikacija među njima. Pojasniti ćemo pojmove Nashova ravnoteža, Paretovo načelo i što je Zatvorenikova dilema. Nakon igre s dva igrača na primjeru ćemo pojasniti igru s tri igrača i prikazati kako se mogu dogoditi određene koalicije u igri te spomenuti pojam karakteristične funkcije igre. Na samom kraju rada ćemo spomenuti primjenu igara s *N* igrača u strateškom glasanju u politici te u drugim područjima.

Ključne riječi: igra, teorija igara

1. UVOD

Igra je formalni model interaktivne situacije između dva ili više igrača. Teorija igara proučava interaktivno donošenje odluka, gdje ishod za svakog igrača ovisi o akcijama ostalih igrača. Tada igrač odabire svoju strategiju s obzirom na izbore drugih. Ali razmišljajući o njihovim izborima, igrač mora biti svjestan da ostali igrači također razmišljaju o njegovom izboru, i zauzvrat pokušavaju uzeti u obzir njegovo mišljenje o njihovom razmišljanju, i tako dalje.

Takvo razmišljanje čini se jako složeno. Shvaćanje pravih motiva suparnika i prepoznavanje složenih obrazaca često se opiru logičnoj analizi. Ali mnogi aspekti strategije mogu se proučavati i sistematizirati u znanost, koju nazivamo teorijom igara.

Ova je znanost neobična zbog široke primjene. Pravila teorije igara korisna su u čitavom nizu aktivnosti, od svakodnevnih društvenih interakcija i sporta do biznisa i ekonomije, politike, prava, diplomacije i rata. Darwinova borba za opstanak uključuje strateške interakcije, a moderna evolucijska teorija ima bliske veze s teorijom igara.

Teorija igara započela je radom Johna von Neumanna dvadesetih godina prošlog stoljeća. Njegov rad je 1944. kuluminirao u knjizi Theory of Games and Economic Behaviour s Oskarom Morgensternom, koja je postavila temelje moderne teorije igara. John Nash je pokazao da konačne igre uvijek imaju točku ravnoteže, u kojoj svi igrači biraju poteze koji su najbolji za njih bez obzira na poteze ostalih protivnika. U pedesetim i šezdesetim godinama prošloga stoljeća, teorija igara je proširena i primijenjena na probleme rata i politike. Drugi teoretičari, Reinhard Selten i John Harsanyi su 1994. godine podijelili Nobelovu nagradu s Nashom. Proučavali su složenije igre s nizovima poteza i igre u kojima jedan igrač ima više informacija od drugih.

2. UVOD U IGRE S *N* IGRAČA

U ovome poglavlju razmatrat ćemo igre s N igrača. Nakon uvodnog opisa i definicije igre, počet ćemo s opisivanjem igara s dva igrača. U najjednostavnijem slučaju, za nula – suma igre s dva igrača pokazat ćemo kako se takve igre rješavaju. Isto tako ćemo spomenuti ne nula – suma igre s dva igrača te prikazati njihovu primjenu. U ovom dijelu spominjemo pojam Nashove ravnoteže i zatvoreničke dileme. Također ćemo na primjeru razmotriti igre s tri igrača te kakve se sve poteškoće pojavljuju u igrama s tri igrača.

2.1. Osnovni pojmovi teorije igara

Teorija igara je proučavanje matematičkih modela strateške interakcije među racionalnim donositeljima odluka. Ima primjenu u svim područjima društvenih znanosti, logici, prirodnim znanostima i informatici. Izvorno se bavila nula – suma igrama, u kojima su dobici ili gubici svakog sudionika točno uravnoteženi s onima ostalih sudionika. Danas se teorija igara primjenjuje na širok raspon odnosa ponašanja, te je osnovni pojam za znanost o logičkom odlučivanju kod ljudi, životinja i računala.

Teorija igara je formalno proučavanje sukoba, natjecanja i suradnje. Koncepti teorije igara primjenjuju se kad god su akcije nekoliko igrača međusobno ovisne. Ti igrači mogu biti pojedinci, grupe, tvrtke ili bilo koja njihova kombinacija. Koncepti teorije igara pružaju jezik za formuliranje, strukturiranje, analizu te razumijevanje strateških scenarija. Teorija igara pruža metodologiju za strukturiranje i analizu problema strateškog izbora. Proces formalnog modeliranja situacije kao igre zahtijeva od donositelja odluka da eksplicitno nabroji igrače i njihove strateške opcije te da uzme u obzir njihove osobnosti i reakcije.

Najraniji primjer formalne analize teorije igara je studija Antoinea Cournota iz 1838. godine. Matematičar Emile Borel predložio je formalnu teoriju igara 1921. godine, koju je 1928. godine produbio matematičar John von Neumann s teorijom salonskih igara. Teorija igara uspostavljena je kao zasebno područje nakon objavljivanja monumentalnog sveska Teorija igara i ekonomsko ponašanje 1944. godine od von Neumanna i ekonomista Oskara Morgensterna.

Godine 1950. John Nash je pokazao da konačne igre uvijek imaju točku ravnoteže, u kojoj svi igrači biraju poteze koji su najbolji za njih s obzirom na ostale izbore protivnika. Ovaj središnji koncept nekooperativne teorije igara od tada je središnja točka analize. U pedesetim i šezdesetim godinama prošlog stoljeća, teorija igara je teorijski proširena i primijenjena na probleme rata i politike. Od sedamdesetih godina pokrenuta je revolucija u ekonomskoj teoriji. Osim toga, pronašla je primjenu u sociologiji i psihologiji te uspostavila veze s evolucijom i biologijom. Teorija igara dobila je posebnu pozornost 1994. godine dodjelom Nobelove nagrade za ekonomiju Johnu Nashu, Johnu Harsanyiju i Reinhardu Seltenu.

Krajem devedesetih godina, primjena teorije igara bilo je dizajniranje dražbi. Istaknuti teoretičari igara sudjelovali su u osmišljavanju dražbi za dodjelu prava na korištenje pojaseva elektromagnetskog spektra industriji mobilnih telekomunikacija. Većina tih aukcija osmišljena je s ciljem učinkovitije raspodjele tih resursa od tradicionalne vladine prakse, a dodatno su prikupile milijarde dolara u Sjedinjenim Američkim Državama i Europi.

Igra je formalni model interaktivne situacije. Obično uključuje nekoliko igrača. Igra sa samo jednim igračem obično se naziva problem odluke. Formalna definicija navodi igrače, njihove osobnosti, informacije, strateške akcije koje su im dostupne i kako one utječu na ishod.

Svaki sudionik u igri se zove igrač. Središnja pretpostavka u mnogim varijantama teorije igara je da su igrači racionalni. Racionalan igrač je onaj koji uvijek bira potez koji daje ishod najpovoljniji za njega, s obzirom na ono što očekuje od svojih protivnika. Ekonomski racionalan igrač je onaj koji može:

- procijeniti ishode, u smislu njihovog rangiranja s obzirom na njihov doprinos njegovoj dobrobiti,
- izračunati putove do ishoda, u smislu prepoznavanja koji su nizovi radnji vjerojatno povezani s kojim ishodima,
- odabrati radnje koje donose njegove najpoželjnije ishode, s obzirom na radnje drugih igrača.

Teorija igara je logična analiza situacija sukoba i suradnje. Točnije, igra je definirana kao svaka situacija u kojoj:

- Postoje najmanje dva igrača. Igrač može biti pojedinac, ali može biti i općenitiji entitet poput tvrtke, nacije ili čak biološke vrste.
- Svaki igrač ima nekoliko mogućih poteza, pravaca djelovanja koje on ili ona može odabrati.
- Potezi koje odaberu svi igrači određuju ishod igre. Određeni skup poteza svih igrača u igri naziva se partijom.
- Uz svaki mogući ishod igre povezana je lista numeričkih isplata, po jedna za svakog igrača. Isplate predstavljaju vrijednost ishoda za različite igrače.

Svaki igrač mora imati određenu strategiju u igri, koja predstavlja skup pravila u skladu s kojima se provodi izbor poteza. Čista strategija je ona u kojoj igrač uvijek bira isti potez (iz tog razloga se pojmovi potez i strategija u literaturi često koriste u istom kontekstu). Mješovita strategija za danog igrača koji na raspolaganju ima m mogućih poteza je uređena m – torka

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_1, \dots, x_m \geq 0\,, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

gdje je x_i vjerojatnost s kojom dani igrač bira i – ti potez. Čista strategija je poseban slučaj mješovite, gdje je vjerojatnost odabira nekog poteza jednaka 1.

Osnovni cilj teorije igara je pronalaženje racionalnih kriterija za izbor strategije. Cilj svakog igrača je da što više dobije ili da barem što manje izgubi. U nastavku ćemo promatrati nula – suma igre s dva igrača u kojima igrači imaju strogo konfliktne odnose, odnosno možemo reći da je dobitak jednog igrača jednak gubitku drugog igrača, zatim ne nula – suma igre s dva igrača i nula – suma igre s tri igrača.

2.2. Nula - suma igre s dva igrača

Nula – suma igra s dva igrača je igra u kojoj dva igrača igraju igru, a zbroj isplata za igrače jednak je nuli. Pretpostavke takve igre su:

- Svaki igrač ima konačan broj mogućih poteza za sebe. Broj poteza može, ali i ne mora biti isti za svakog igrača.

- Popis poteza i iznos dobitka ili gubitka za svakog igrača, za svaki mogući odabir poteza, unaprijed su poznati.
- Igrači su racionalni.
- Jedan igrač pokušava maksimizirati dobitak, drugi želi minimizirati gubitak.
- Oba igrača odabiru i najavljuju svoje poteze istovremeno.

Ako su dva igrača *A* i *B*, u nula – suma igri, za procjenu odluke potrebna je isplata samo za jednog igrača. Prema konvenciji, konstruirana je tablica isplata za igrača čije su strategije predstavljene redcima.

Primjer 2.2.1.

Neka su Rose i Colin dva igrača. Neka Rose ima tri poteza *A, B i C,* a Colin dva poteza *A i B.* Tada postoji šest različitih mogućih ishoda. Ova situacija se može prikazati 3×2 tablicom isplata koja je navedena na slici 1. Može se zamisliti Rose kako bira strategiju, odnosno jedan od tri retka, i piše ju na komad papira koji stavlja na stol, licem prema dolje. Colin bira stupac na isti način. Zatim okreću svoje papire i određuju svoje isplate. Za svaki ishod u danoj tablici, prvi broj je isplata za Rose, a drugi broj isplata za Colina.

		Colin	
		A	B
Rose	A	$(2, -2)$	$(-3, 3)$
	B	$(0, 0)$	$(2, -2)$
	C	$(-5, 5)$	$(10, -10)$

Slika 1: Tablica isplata

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

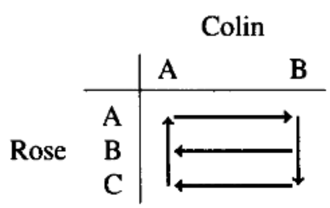
Za ovu igru u svakom ishodu (i, j) vrijedi: i – isplata za Rose, j - isplata za Colina. Također je za svaki pojedini ishod suma dobitaka oba igrača jednaka nuli. To znači da sve što Rose dobije Colin gubi, i obrnuto, tako da su interesi Rose i Colina strogo suprotstavljeni. Takva igra se naziva nula – suma igra. To predstavlja situaciju čistog sukoba između dva igrača. Za nula – suma igru za dvije osobe, dovoljno je dati isplatu Rose za svaki ishod, budući da će isplata Colinu biti samo odgovarajući suprotni broj, odnosno dobit će se množenjem Roseine isplate s -1. Tablica isplata za nula - suma igru s dva igrača, s gledišta prvog igrača, odnosno Rose, dana je na slici 2.

		Colin A	Colin B
Rose	A	2	−3
	B	0	2
	C	−5	10

Slika 2: Igra

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Rose želi ishod s visokim brojem, a Colin želi ishod s malim brojem. Kako bi trebali igrati? Pretpostavimo da Rose smatra da bi najviše voljela dobiti 10 pa bi trebala igrati Rose *C*, nadajući se da će Colin odigrati Colina *B*. Problem je u tome što ako Colin zna ili pogodi da će Rose to učiniti, Colin će odigrati Colina *A*, a Rose će dobiti -5. S druge strane, ako Rose to predvidi, može igrati Rose *A* i dobiti 2. Predviđajući to, Colin bi trebao igrati Colina *B*, ali tada bi Rose trebala igrati Rose *C* te nas takvo zaključivanje vodi u krug. Dijagram kretanja prikazan je na slici 3.



Slika 3: Dijagram kretanja za igru sa slike 2

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

U prvom retku strelica pokazuje na desno, što znači da bi u slučaju da Rose izabere prvi redak tj. A, za Colina bilo bolje da izabere drugi stupac tj. B (jer je tamo najmanji broj u danom retku). U prvom stupcu strelica pokazuje prema prvom retku, što znači da bi u slučaju da Colin izabere prvi stupac, za Rose bilo najbolje birati A (jer je tamo najveći broj u danom stupcu). U svakom retku nacrta se strelica od svakog unosa do najmanjeg unosa u tom retku. U svakom stupcu se crtaju strelice prema najvećem unosu u tom stupcu.

U igri iz prethodnog primjera ne postoji točka zaustavljanja. No iako ne postoje optimalne čiste strategije za ovu igru, ona se može riješiti pomoću mješovitih strategija.

Igra s nultim zbrojem za dvije osobe u kojoj Rose ima m strategija, a Colin ima n strategija se može predstaviti $m \times n$ matricom isplata, čiji su elementi dobitci za Rose za svaki od mn mogućih ishoda.

Matrica plaćanja za nula – suma igru s dva igrača je matrica

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

takva da vrijedi:

- prvi igrač bira i – ti redak, drugi igrač bira j – ti stupac
- a_{ij} označava isplatu za prvog igrača tj.:
  - za $a_{ij} = 0$, nitko ne dobiva niti gubi;
  - za $a_{ij} > 0$, prvi igrač dobiva, drugi gubi;
  - za $a_{ij} < 0$, prvi igrač gubi, drugi dobiva.

Budući da se takve igre mogu zadati matricom (matricom isplata za 1. igrača), poznate su i kao matrične igre. Rose želi odabrati redak matrice koji će rezultirati velikim brojem, dok Colin želi odabrati stupac koji će rezultirati malim brojem.

Za tablicu isplata sa *slike 2* odgovarajuća matrica plaćanja je:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Sljedeće što ćemo opisati su principi dominacije i sedla.

Strategija *S* je dominantna nad strategijom *T* (strategija *T* je dominirana od strategije *S*) ako je:

- svaki ishod u *S* barem toliko dobar kao odgovarajući ishod u T
- barem jedan ishod u *S* strogo bolji od odgovarajućeg ishoda u *T*.

Princip dominacije:

- Nikad ne igraj dominiranu strategiju.
- Dominirana strategija se može pustiti iz razmatranja jer je igrač nikad ne treba igrati, i dalje promatrati reduciranu tablicu isplata.

Strogo determinirane igre su takve igre kod kojih matrica plaćanja ima takozvani sedlasti ili prijevojni element (sedlo).

Sedlo ili sedlasti element je element u tablici isplata igre koji je najmanji u retku i najveći u stupcu u kojem dolazi. Igra može imati više sedla ili niti jedno.

Princip sedla:

- Ako postoji sedlo, oba igrača trebaju odigrati potez koji ga sadrži.

Ako igra nema sedlo koristimo mješovite strategije.

Očekivana vrijednost igre je prosječna isplata po krugu, ako svaki igrač koristi odabrane mješovite strategije za veliki broj partija.

U primjerima 2.2.2. i 2.2.3. ćemo opisati princip dominacije.

Primjer 2.2.2. Na slici 4 dan je primjer jedne nula – suma igre za dva igrača zadane pomoću tablice isplata.

		Colin			
		A	B	C	D
Rose	A	12	−1	1	0
	B	5	1	7	−20
	C	3	2	4	3
	D	−16	0	0	16

Slika 4: Nula - suma igra s dva igrača

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Odgovarajuća matrica isplata dana je sa:

$$P = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 7 & -20 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ -16 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

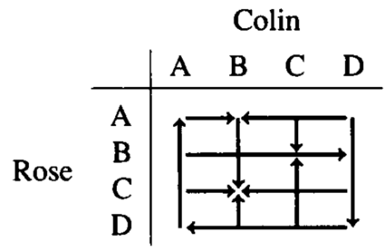
Dakle, Rose želi da isplate budu velike (16 bi bilo najbolje), dok Colin želi da isplate budu male ($-$ 20 bi bilo najbolje). Primijetimo da je za Colina potez Colin B striktno bolji od poteza Colina C, budući da su svi brojevi u drugom stupcu manji ili jednaki od odgovarajućih brojeva u trećem stupcu, a bar jedan je strogo manji. Kažemo da Colin B dominira nad Colinom C ili da je Colin C dominiran od Colina B. Jasno je da nikad nema smisla igrati strategiju kojom dominira neka druga strategija. Dakle, Colin ne bi nikad trebao birati Colin *C*, te se može promatrati smanjena tablica, s izostavljenim stupcem Colin C. Načelo dominacije može eliminirati neke strategije, ali njegova je korisnost često ograničena. U navedenoj igri može se provjeriti da niti jedna strategija od preostalih Colinovih strategija u smanjenoj tablici od Colina $A,\ B\ i\ D$ ne dominira niti jednom od ostalih, i nijedna od Roseinih strategija ne dominira niti jednom drugom Roseinom strategijom. Stoga se ne može koristiti načelo dominacije za daljnje ograničavanje strateških izbora. Primijetimo i da su strategije Rose *C* i Colin B najopreznije strategije za Rose i Colina. S Rose C, Rose je sigurna da će osvojiti najmanje 2, dok s bilo kojom drugom strategijom može izgubiti. S Colinom B, Colin je siguran da neće izgubiti više od 2, dok s bilo kojom drugom strategijom njegov gubitak može biti veći. Međutim, postoje dobri razlozi da igrači izaberu Rose $C -$ Colin *B* čak i ako se ne osjećaju osobito opreznima.

Primjerice:

- Rose $C -$ Colin *B* je ravnotežni ishod. To znači da ako Colin zna ili vjeruje da će Rose igrati Rose *C*, Colin bi želio odgovoriti s Colin *B*, a slično tome, Rose *C* je Rosein najbolji odgovor na Colina *B*. Ako oba igrača igraju ove strategije, nijedan igrač nema poticaja prijeći na drugu strategiju.

- Igrajući Rose *C*, Rose će osvojiti najmanje dvije jedinice. Igrajući Colina *B*, Colin može osigurati da Rose neće osvojiti više od dvije jedinice. Ako Rose osvoji manje od 2, mogla je biti bolja igrajući Rose *C*. Ako Rose osvoji više od 2, Colin je mogao biti bolji igrajući

Colin B. Ako igrači ne igraju svoje strategije ravnoteže, jedan ili drugi su svjesni da su mogli iznuditi bolji ishod. Na slici 5 prikazan je dijagram kretanja za igru sa slike 4.



Slika 5: Dijagram kretanja za igru sa slike 4

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Teoretičari igara smatraju ova dva argumenta dovoljno snažnima da prepišu Rose C - Colin B kao racionalnu igru u ovoj situaciji. Argumenti slijede iz činjenice da je isplata na Rose C - Colin B istovremeno najmanji broj u svom retku i najveći broj u svom stupcu. To znači da su strategije koje vode do ovog ishoda najbolji odgovor jedna na drugu i da je zajamčeno da oba igrača neće biti lošija od ove vrijednosti. Odgovarajući element je na poziciji $(3,2)$ u matrici plaćanja, čija je vrijednost 2. U ovom slučaju to je sedlo za danu igru.

Primjer 2.2.3.

Dan je primjer još jedne nula – suma igre za dva igrača zadane pomoću tablice isplata.

Colin

		A	**B**	**C**	**D**
	A	4	-3	2	-4
Rose	**B**	4	-4	4	-2
	C	0	1	-3	2
	D	-5	2	-7	2
	E	3	-2	2	-2

Colin A je dominiran s Colin C. Reduciramo tablicu.

		Colin		
		B	C	D
	A	−3	2	− 4
Rose	B	−4	4	− 2
	C	1	− 3	2
	D	2	− 7	2
	E	−2	2	− 2

Rose *A* je dominirana s Rose *E*. Reduciramo tablicu.

		Colin		
		B	C	D
	B	−4	4	− 2
Rose	C	1	− 3	2
	D	2	− 7	2
	E	−2	2	− 2

Colin *D* je dominiran s Colin *B*. Reduciramo tablicu

		Colin	
		B	C
	B	−4	4
Rose	C	1	− 3
	D	2	− 7
	E	−2	2

Nema više dominacije.

Na primjeru 2.2.4. ćemo dodatno pojasniti pojam sedla. Promatrat ćemo tri primjera u kojima igra ima jedno sedlo, više sedla i kada igra nema sedla.

Primjer 2.2.4.

Pretpostavimo da u primjeru a) imamo sljedeću matricu plaćanja dvaju igrača.

a) $P = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ \mathbf{3} & 4 & 5 \\ 0 & 8 & -6 \end{bmatrix}$

Da bi provjerili ima li matrična igra sedlo, odredimo najmanji element u svakom retku i najveći element u svakom stupcu. Vidimo da igra ima sedlo s vrijednosti 3. Možemo reći gledajući sa strane Rose i Colina da Rose treba uvijek birati drugi redak, a Colin prvi stupac.

U primjeru pod b) imamo sljedeću tablicu isplata dva igrača.

b)

		Colin			
		A	**B**	**C**	**D**
	A	4	2	5	2
Rose	**B**	2	1	-1	-20
	C	3	2	4	2
	D	-16	0	16	1

Gledamo najmanji element u svakom retku i najveći element u svakom stupcu. Ono što možemo uočiti je da u prvom retku je najmanji broj 2 koji se pojavljuje dva puta. Obje dvojke iz prvog retka su najveći elementi u svojim stupcima. Dakle, dvojka je sedlo. U drugom *B* retku najmanji element je -20, i gledamo Colin *D* stupac gdje je najveći broj 2. Nemamo sedlo u drugom retku. Potom gledamo treći redak i najmanji element je u stupcima Colin *B i D*. U stupcu Colin *B* najveći element je 2, stoga je 2 sedlo. Isto to vrijedi i za stupac Colin *D*. Igra ima 4 sedla s vrijednosti 2, što možemo i vidjeti na slici 6.

Rose \ Colin	A	B	C	D
A	4	2	5	2
B	2	1	−1	−20
C	3	2	4	2
D	−16	0	16	1

Slika 6: Sedlo

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Sva četiri zaokružena ishoda su sedla. Dakle, Rose treba uvijek birati prvi ili treći redak, a Colin drugi ili četvrti stupac.

c) $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$

U primjeru pod c) vidimo da je u prvom prvom retku najmanji element -3, dok je najveći element u drugom stupcu 10. U drugom retku najmanji element je 0, dok je u najveći element u prvom stupcu jednak 2. U trećem retku najmanji element je -5, dok je najveći element u prvom stupcu jednak 2. Možemo zaključiti da ova igra nema sedlo.

Principi sedla i dominacije su uvijek u skladu, odnosno ne mogu doći u sukob. Ako igra ima sedlo, igrači stalno biraju jedan te isti redak, odnosno jedan te isti stupac u kojem se sedlo nalazi tj. koriste čiste strategije. Ako igra nema sedlo, tada se koriste mješovite strategije.

U sljedećem primjeru ćemo odrediti očekivanu vrijednost igre ukoliko igrači koriste zadane mješovite strategije.

Za igru s matricom plaćanja $P = [p_{i,j}]$ te dane mješovite strategije $X = (x_1, \dots, x_m)$,

$Y = (y_1, \dots, y_n)$ za prvog, odnosno drugog igrača redom, očekivana vrijednost igre dana je s:

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \cdot x_i \cdot y_j.$$

Posebna strategija koja optimizira dobitke ili gubitke igrača, bez poznavanja strategija konkurenta, naziva se optimalna strategija.

Optimalne strategije za igru s dva igrača su:

- $\bar{X}$ - strategija 1. igrača s kojom najviše dobiva, odnosno za koju je najmanji očekivani dobitak što veći;
- $\bar{Y}$ - strategija 2. igrača s kojom najmanje gubi, odnosno za koju je najveći očekivani gubitak za njega što manji.

Očekivani ishod kada igrači koriste svoje optimalne strategije naziva se cijena igre. Igra čija je cijena

$$v := E(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$$

poznata je kao poštena igra. Riješiti matričnu igru znači pronaći optimalne strategije i cijenu igre.

Primjer 2.2.5.

Za matricu plaćanja *P*, odredite očekivanu vrijednost igre ako igrači koriste zadane mješovite strategije:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{te } X = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), \ Y = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Uvrštavanjem u formulu:

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \cdot x_i \cdot y_j \ ,$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} E(X, Y) &= 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{9}{10} - \frac{3}{10} + \frac{9}{20} \\ &= \frac{10-18-6+9}{20} \\ &= -\frac{5}{20} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ako igrači odigraju velik broj puta igru koristeći zadane mješovite strategije, prvi igrač će u prosjeku gubiti $\frac{1}{4}$ po igri, a drugi igrač će dobivati taj iznos.

U sljedećem primjeru ćemo odrediti optimalne strategije izjednačavanjem očekivanja, koje se može koristiti kada igra nema sedlo, odnosno kada ne postoji rješenje sa čistim strategijama.

Primjer 2.2.6.

Riješite matričnu igru izjednačavanjem očekivanja.

		Colin	
		A	**B**
	A	2	− 3
Rose	**B**	0	3

Prvo se provjerava ima li igra sedlo ili dominaciju. Igra nema niti sedla niti dominacije.

Roseina strategija: Suma vjerojatnosti mora biti jednaka jedan. Prva koordinata će biti x, no s obzirom da zbroj mora biti jednak 1, druga koordinata će biti $1 - x$.

Slijedi: $X = (x, 1 - x)$.

U slučaju da Colin slučajno sazna strategiju koju Rose koristi, Rose nikako ne želi da tu informaciju iskoristi u svoju korist. Stoga Rose želi da sve očekivane vrijednosti igre za njezinu odabranu strategiju budu jednake, bez obzira koju strategiju Colin odabrao.

Vrijedi:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{ColinA}} = 2 \cdot \mathrm{x} + 0 \cdot (1 - \mathrm{x}) = 2\mathrm{x}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{ColinB}} = -3 \cdot x + 3 \cdot (1 - x) = -3x + 3 - 3x = -6x + 3$$

Izjednačavanjem slijedi :

$$2x = -6x + 3$$

$$2x + 6x = 3$$

$8x = 3 \;/ : 8$

$x = \dfrac{3}{8}$

$1 - x = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$

Optimalna strategija za Rose je: $\bar{X} = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$.

Colinova strategija : Suma vjerojatnosti mora biti jednaka jedan. Prva koordinata će biti y, no s obzirom da zbroj mora biti jednak 1, druga koordinata će biti $1 - y$.

Slijedi: $Y = (y, 1 - y)$.

Colin želi da sve očekivane vrijednosti igre za njegovu odabranu strategiju budu jednake, bez obzira koju Rose strategiju odabrala.

Vrijedi:

$E_{RoseA} = 2 \cdot x - 3 \cdot (1 - x) = 2x - 3 + 3x = 5x - 3$

$E_{RoseB} = 0 \cdot x + 3 \cdot (1 - x) = 3 - 3x$

Izjednačavanjem slijedi:

$5x - 3 = 3 - 3x$

$5x + 3x = 3 + 3$

$8x = 6 \quad / : 8$

$x = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$1 - x = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

Optimalna strategija za Colina je: $\bar{Y} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Cijena igre je: $v := E(\bar{X}, \bar{Y}) = 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4}$

$$E(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{9}{16} - \frac{9}{32} + \frac{15}{32}$$

$$E(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{18 - 9 + 15}{32}$$

$$E(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$v = \frac{3}{4}$$

U ovom primjeru igra je riješena. Pronašle su se optimalne strategije za Rose i Colina te cijena igre.

Općenito, za svaku matričnu igru postoji rješenje, tj. optimalne strategije i odgovarajuća vrijednost igre. Najučinkovitiji način rješavanja matričnih igara većih dimenzija je korištenje tehnika linearnog programiranja, kao što je na primjer simpleks metoda, a koje su implementirane i u mnogim računalnim programima.

2.3. Ne nula - suma igre s dva igrača

U ovom dijelu reći ćemo nešto više o ne nula - suma igrama s dva igrača. Spomenut ćemo Nashovu ravnotežu te reći nešto o zatvorenikovoj dilemi.

Ako igra za dvije osobe nije nula - suma igra, moramo navesti isplate za oba igrača da bismo opisali igru. Općenito, interesi igrača u ne nula - suma igrama nisu strogo suprotstavljeni, niti su strogo podudarni. Takve igre kombiniraju natjecateljske aspekte s nekim prilikama za suradnju.

Suradnja može zahtijevati komunikaciju među igračima. Analiza ne nula - suma igre ovisi o tome kakve se pretpostavke naprave o mogućnostima komunikacije među igračima. Ovdje ćemo pretpostaviti da nikakva komunikacija između igrača nije moguća. Kao i u slučaju nula - suma igre pretpostavit ćemo da igrači biraju svoje strategije istovremeno, a njihov izbor nije poznat drugom igraču. Prvo ćemo razmotriti mogu li se neke ideje iz igara s nultim zbrojem iskoristiti i kod igara koje nisu nula - suma igre. Razmotrimo sljedeći primjer:

Primjer 2.3.1.

		Colin		
		A		B
	A	(2, 3)	←	(3, 2)
		↑		↑
Rose	B	(1, 0)	→	(0, 1)

Slika 7: Tablica isplata za igru 1

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Na slici 7 prikazana je tablica isplata zajedno s dijagramom kretanja dane igre. Možemo vidjeti da je za Rose uvijek bolje izabrati Rose *A*, bez obzira što Colin odabere, odnosno da Rose *A* dominira nad Rose *B*. Dakle, i kod ne nula – suma igre možemo primijeniti načelo dominacije. Znajući ovo, Colin bi naravno trebao izabrati Colin *A*. Time bi dobili ishod (2, 3) kao ravnotežni ishod ili ekvilibrij. U dijagramu kretanja ravnotežni ishod *AA* možemo prepoznati po strelicama koje su samo dolazne. Iako u ovom primjeru isplate izgledaju simetričnio, vidimo da raspored ide u prilog Colinu.

Ishodi ravnoteže u ne nula - suma igrama odgovaraju sedlu u nula - suma igrama, a baš kao što postoje nula - suma igre bez sedla, postoje i ne nula - suma igre bez ravnotežnog ishoda u čistim strategijama.

Primjer 2.3.2.

		Colin		
		A		B
	A	(2, 4)	←	(1, 0)
Rose		↓		↑
	B	(3, 1)	→	(0, 4)

Slika 8: Igra 2 bez čiste strateške ravnoteže

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

U ovom primjeru iz dijagrama kretanja je vidljivo da nema ravnotežnog ishoda, tj. ekvilibrija u čistim strategijama. Kao i kod nula – suma igara, možemo probati odrediti mješovite strategije za Rose i Colina takve da ako oboje igraju ove strategije, nijedno ne bi moglo dobiti prebacivanjem na neku drugu strategiju. Razmotrimo Colinovu igru, koja je nula - suma igra (s isplatama za Colina) dobivena razmatranjem samo Colinovih isplata u igri 2. Roseina optimalna mješovita strategija u ovoj igri je $\left(\frac{3}{7}\mathrm{A},\ \frac{4}{7}\mathrm{B}\right)$, a ova strategija ima svojstvo da će dati Colinu očekivani dobitak od $\frac{16}{7}$ bez obzira koju strategiju Colin igra. Nazovimo to Roseina strategija izjednačavanja. Slično tome, Colinova strategija izjednačavanja od $\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}, \frac{1}{2}\mathrm{B}\right)$, dobivena promatranjem Roseine igre, Rose će dati očekivani dobitak od $\frac{3}{2}$, bez obzira na to što Rose učini. [1] Dakle, ako oba igrača usvoje ove strategije izjednačavanja, niti jedan igrač ne može dobiti odstupajući. Pronašli smo ravnotežu u mješovitim strategijama, kada je nije bilo u čistima. John Nash je dokazao da svaka igra s dvije osobe ima barem jednu ravnotežu u čistim ili mješovitim strategijama. Ravnoteže u ne nula - suma igrama zovemo Nashove ravnoteže ili Nashovi ekvilibriji njemu u čast.

Nažalost, Nashova ravnoteža ne može se upotrijebiti kao opći concept rješenja za ne nula – suma igre. Postoje igre u kojima Nashove ravnoteže imaju problematična svojstva, kao na primjer Nashova ravnoteža u igri 2. Našli smo tu ravnotežu tako što je svaki igrač igrao u igri drugog igrača. Svaki igrač zanemaruje svoje isplate i igra samo kako bi izjednačio isplate drugog igrača. Dobici od (1.50, 2.29) se čine niskim za oba igrača. Zasigurno bi igrači mogli učiniti bolje ako bi obratili pozornost na vlastite dobitke.

[1] Važno je napomenuti da Colinova strategija izjednačavanja ovdje nije Colinova optimalna strategija u Roseinoj igri. Roseina igra ima sedlo u AB. Ako na nju primijenimo metodu izjednačavanja očekivanja dobije se $\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}, \frac{1}{2}\mathrm{B}\right)$ za Colina, no rezultat nije optimalna strategija, budući da igra ima sedlo. To je ipak strategija koja izjednačava Roseine očekivane isplate za Roseine dvije strategije, a to je ono što se ovdje traži.

Razmotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.3.3.

		Colin		
		A		B
Rose	A	(1, 1)	→	(2, 5)
		↓		↑
	B	(5, 2)	←	(−1, −1)

Slika 9: Igra 3 - igra s dvije neekvivalentne i nezamjenjive ravnoteže

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

U ovoj igri postoje dvije različite ravnoteže u čistim strategijama, *AB* i *BA*. Prisjetimo se da je nula - suma igra mogla imati više sedala, ali su ta sedla uvijek bila ekvivalentna i međusobno zamjenjiva: sva sedla imala su istu vrijednost, a ako su oba igrača igrala strategiju sedla, rezultat je uvijek bio sedlo. Igra 3 pokazuje da niti jedno od ovih svojstava ne vrijedi za ne nula - suma igru. Zapravo, ravnoteža na *BA* je bolja za Rose, ravnoteža na *AB* je bolja za Colina, no ako oba igrača pokušaju postići svoju omiljenu ravnotežu, završit će na *BB*, što nije ravnoteža i najgori je ishod za oboje igrača. Ako igra ima nekoliko neekvivalentnih i nezamjenjivih Nashovih ravnoteža, možda neće biti jasno koju bi ravnotežu igrači trebali postići.

U sljedećem primjeru igre ćemo uočiti igru s jedinstvenom ravnotežom koja nije Pareto optimalna.

Primjer 2.3.4.

		Colin		
		A		B
Rose	A	(3, 3)	→	(−1, 5)
		↓		↓
	B	(5, −1)	→	(0, 0)

Slika 10: Igra 4

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Ova igra ima jedinstvenu Nashovu ravnotežu na *BB*. Zapravo, Rose *B* dominira Rose *A*, a Colin *B* dominira Colin *A*, tako da je ovo ravnoteža najjačeg mogućeg tipa. Međutim, čini se da to nije baš sretan ishod, budući da bi i Rose i Colin bili bolji u *AA*, dobivajući isplatu od 3 umjesto 0. Oko 1900. talijanski ekonomist Vilfredo Pareto predložio je da ne bismo trebali prihvatiti ekonomski sustav ako postoji drugi dostupan sustav koji sve može učiniti boljim. Ova se ideja može prilagoditi igrama za dvije osobe.

Definicija 2.3.5.

Ishod igre nije Pareto najpovoljniji ako postoji drugi ishod koji bi obojici igrača dao veće isplate ili bi jednom igraču dao istu isplatu, ali drugom igraču veću isplatu. Ishod je Pareto najpovoljniji, tj. Pareto optimalan, ako ne postoji takav drugi ishod.

Općenito, igra će imati mnogo Pareto najpovoljnijih ishoda. Zapravo, u nula - suma igri svaki je ishod Pareto najpovoljniji, jer svaki dobitak za jednog igrača znači gubitak za drugog. U igri 4 ishodi *AA*, *AB* i *BA* su Pareto najpovoljniji. Samo BB nije Pareto najpovoljniji, budući da bi *AA* obojici igrača dao veće isplate. Paretova se ideja može formulirati kao:

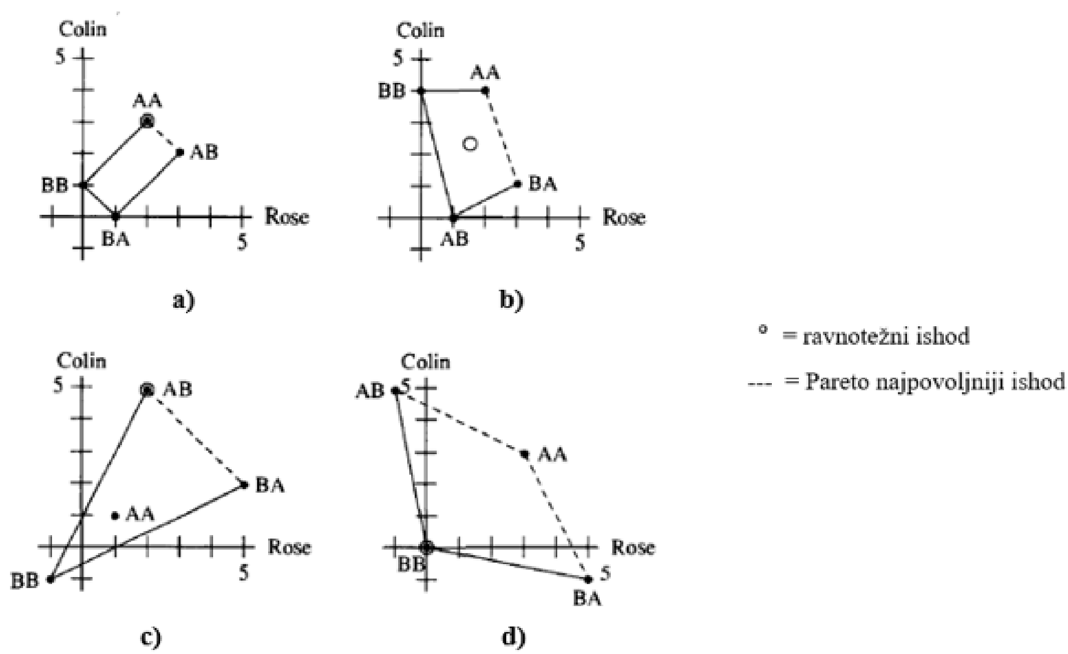
PARETOVO NAČELO - Da bi bio prihvatljiv kao rješenje igre, ishod bi trebao biti Pareto najpovoljniji.

Paretovo načelo je načelo grupne racionalnosti. U igri 4 ono dolazi u sukob s načelom individualne racionalnosti, načelom dominacije. Budući da utjelovljuje ovaj sukob, igra 4 je središnji primjer u teoriji ne nultog zbroja.

Možemo vidjeti koji su ishodi igre Pareto najpovoljniji ako prikažemo ishode u koordinatnoj ravnini. Os apscisa predstavlja Rosein dobitak, a os oridnata predstavlja Colinov dobitak. Ishode za čiste strategije prikazujemo točkama u koordinatnoj ravnini, a ishodi za mješovite strategije predstavljeni su točkama konveksnog poligona koji je konveksna ljuska skupa točaka pridruženih čistim strategijama. Na primjer, ishod $\frac{1}{2}AA+\frac{1}{2}BB$ pojavljuje se kao središte segmenta koji spaja *AA* i *BB*. Ovaj poligon se zove isplatni poligon za igru. Na slici 11 su prikazani isplatni poligoni za igre od 1 – 4. Pareto najpovoljniji ishodi su upravo oni koji pripadaju "sjeveroistočnoj" granici isplatnog poligona. Skup Pareto najpovoljnijih ishoda za igru može biti segment, nekoliko segmenata ili čak samo jedna točka.

U prethodnom primjeru Nashova ravnoteža u mješovitim strategijama za igru 2 nije bila najbolji ishod. Ovdje vidimo da je to zato što to nije Pareto najpovoljniji ishod pa nije prihvatljiv kao rješenje igre. Čisti ishod *AA* i mnoge mješavine *AA* i *BA* bili bi bolji za oba igrača.

Iako je Nash pokazao da ravnotežni ishod uvijek postoji, problem je u tome što može postojati više ravnoteženih točaka koje su neekvivalentne i nezamjenjive, a čak i ako postoji jedinstvena, ona ne mora biti Pareto optimalna. Dakle, ravnotežna točka se ne može iskoristiti kao concept rješenja za ne nula - suma igre. U nula - suma igrama ishodi ravnoteže nastali su upravo kada su oba igrača igrala oprezne minimax strategije maksimiziranja njihove isplate u najgorem mogućem slučaju, odnosno minimiziranjem maksimalnog mogućeg gubitka igrača. Promotrimo ponašanje minimax strategija u kontekstu ne nula – suma igara.



Slika 11: Isplatni poligon

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Razmotrimo Rosein izbor u igri 2. Najgori mogući slučaj bio bi da Colin igra kako bi smanjio Roseinu isplatu. Rose bi u tom slučaju da smanji štetu trebala igrati minimax strategiju u Roseinoj igri. Roseina igra ima sedlo na *AB*, tako da bi Rose trebala igrati Rose *A*, osiguravajući joj barem isplatu od 1, što je vrijednost Roseine igre.

Definicija 2.3.6.

U ne nula – suma igri, Roseina optimalna strategija u Roseinoj igri naziva se Roseina razborita strategija. Vrijednost Roseine igre naziva se Roseina sigurnosna razina.

Igrajući svoju razboritu strategiju, Rose može osigurati da će dobiti barem svoju razinu sigurnosti. Definicija za Colina je analogna. U igri b) Colinova oprezna strategija je mješovita strategija $\left(\frac{4}{7}A, \frac{3}{7}B\right)$, a Colinova razina sigurnosti je $\frac{16}{7}$.

Ako oba igrača igraju svoje oprezne strategije u igri b), ishod će biti $\frac{4}{7}AA + \frac{3}{7}AB = \left(\frac{11}{7}, \frac{16}{7}\right)$. Colin dobiva točno svoju razinu sigurnosti. Rose radi nešto bolje od svoje sigurnosne razine. Ako ucrtamo ovaj ishod u isplatni poligon, vidimo da nije Pareto optimalan. To također nije ravnoteža. Zapravo, ako Colin misli da će Rose igrati svoju razboritu strategiju Rose *A*, Colin ne bi trebao igrati $\left(\frac{4}{7}A, \frac{3}{7}B\right)$, već čistog Colina *A*. Slično tome, ako Rose misli da će Colin igrati svoju razboritu mješovitu strategiju, Rose može izračunati svoje očekivane isplate za

Rose A: $\left(\frac{4}{7}\right)(2) + \left(\frac{3}{7}\right)(1) = \frac{11}{7}$ Rose B: $\left(\frac{4}{7}\right)(3) + \left(\frac{3}{7}\right)(0) = \frac{12}{7}$

i trebala bi igrati Rose *B*. Ovim strategijama "najboljeg odgovora" dat ćemo naziv u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.3.7.

U ne nula – suma igri, igračeva proturazborita strategija je njegov najpovoljniji odgovor na protivnikovu razboritu strategiju.

Tablica na slici 12 prikazuje ishode mogućih kombinacija razborite i proturazborite igre. Colin bi želio da Rose igra razborito, kako bi mogao odgovoriti proturazborito. Rose bi bila sretna kad bi oba igrača igrala proturazborito. Možemo primijetiti da iako je oprezna igra dovela do stabilnosti u nula – suma igrama, kod ne nula – suma igara ne uspijeva to postići.

Rose strategy	Colin strategy	Rose payoff	Colin payoff
prudential	prudential	1.57	2.29
prudential	counter-prudential	2.00	4.00
counter-prudential	prudential	1.71	2.29
counter-prudential	counter-prudential	3.00	1.00

Rose prudential:	A
Colin prudential:	$\frac{4}{7}$A, $\frac{3}{7}$B
Rose counter-prudential:	B
Colin counter-prudential:	A

Slika 12: Razborita i proturazborita igra u igri b)

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Zaključujemo da se teorija rješenja za nula - suma igre ne prenosi na rješenja za ne nula - suma igre, odnosno da ne postoji uvjerljiv opći koncept rješenja za ne nula - suma igre. Jednostavno se ne može dati opći recept kako igrati sve takve igre kada komunikacija među igračima nije dopuštena. Ipak, možemo izdvojiti one igre u kojima se ne javljaju problemi o kojima se raspravljalo, za koje se može dati razuman savjet.

Definicija 2.3.8.

Igra u dvoje je "rješiva u strogom smislu" (ili SSS) ako

i) postoji barem jedan ishod ravnoteže koji je Pareto najpovoljniji i

ii) ukoliko postoji više od jedne Pareto najpovoljnije ravnoteže, sve su one ekvivalentne i međusobno zamjenjive.

Za igru koja je rješiva u strogom smislu možemo propisati jedinstvenu Pareto optimalnu ravnotežu, ili skup svih ekvivalentnih i međusobno zamjenjivih Pareto optimalnih ravnoteža, kao rješenje igre. Igra 1 je SSS, ali igre 2, 3 i 4 nisu.

U sljedećem primjeru će se opisati pojam Zatvorenikove dileme te koja je njezina važnost.

Godine 1950. Melvin Dresher i Merrill Flood iz RAND korporacije osmislili su igru prikazanu na slici 13 kako bi ilustrirali da ne nula - suma igra može imati ravnotežni ishod koji je jedinstven, ali ne uspijeva biti Pareto najpovoljniji.

Primjer 2.3.9.

		Colin	
		A	B
Rose	A	$(0,0)$	$(-2,1)$
	B	$(1,-2)$	$(-1,-1)$

Slika 13: Igra 5 - izvorna zatvorenikova dilema

(A označava "nemoj priznati", B označava "priznaj")

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Kasnije, kada je predstavljao ovaj primjer na seminaru na Sveučilištu Stanford, Albert W. Tucker ispričao je priču koja ide uz igru. Igrači su dvojica zatvorenika, uhićenih zbog zajedničkog zločina, koji se ispituju u odvojenim sobama. Okružni tužitelj svakom zatvoreniku kaže:

• ako jedan od njih prizna, a drugi ne, onaj koji prizna će dobiti nagradu (isplata $+1$), a njegov partner će dobiti tešku kaznu (isplata -2);

• ako oboje priznaju, svaki će dobiti blažu kaznu (isplata -1).

U isto vrijeme, svatko od njih ima dobar razlog vjerovati da:

• ako niti jedan ne prizna, oboje će biti slobodni (isplata 0).

U godinama nakon 1950. ova je igra postala poznata kao Zatvorenikova dilema. To je igra koja se najviše proučava i koristi u društvenim znanostima.

Igra 5 obično je ekvivalentna igri 4, koja bi se također zvala Zatvorenikova dilema. Dilemu smo već vidjeli. Strategija *B* je dominantna za oba igrača, što dovodi do jedinstvene ravnoteže na *BB*. Međutim, ova ravnoteža nije Pareto najučinkovitija, budući da bi oba igrača bila bolja u *AA*. U smislu priče, svakom je zatvoreniku bolje da prizna, bez obzira što vjeruje da će drugi zatvorenik učiniti. Međutim, ako oboje priznaju, obojici je gore nego da niti jedan nije priznao. Ovdje se sukobljavaju individualna racionalnost u obliku načela dominacije i grupna racionalnost u obliku Paretovog principa. Pojedinci koji razumom teže vlastitom najboljem interesu završavaju ishodom koji je nesretan za oboje.

Opći oblik Zatvorenikove dileme prikazan je kao igra 6 na slici 14, sa sugestivnim nazivima za strategije i dobitke.

		Colin	
		C	D
Rose	C	(R,R)	(S,T)
	D	(T,S)	(U,U)

C: cooperate
D: defect
R: reward for cooperation
S: sucker payoff
T: temptation payoff
U: uncooperative payoff

Slika 14: Igra 6 - općeniti izgled Zatvorenikove dileme

Uvjeti : $T > R > U > S$ *i* $R > \frac{S+T}{2}$

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican A ssociation of America, United States of America

Prvi uvjet jamči da strategija *D* dominira nad strategijom *C* za oba igrača i da je jedinstvena ravnoteža kod *DD* Pareto inferiorna u odnosu na *CC*. Drugi uvjet kaže da bi igračima bilo barem jednako dobro uvijek igrati *CC* kao i izmjenjivati *CD* i *DC*, tako da je *CC* Pareto najučinkovitiji.

Važnost Zatvorenikove dileme pripada činjenici da mnogi društveni fenomeni imaju Zatvorenikovu dilemu u svojoj srži. Za primjer imamo dvije trgovine koje ratuju cijenama i odlučuju hoće li sniziti cijene svojih proizvoda ili ne. Ako drugi dućan ne snizi cijene, prvi dućan će privući njegove kupce snižavanjem cijena. Ako drugi dućan ipak smanji cijene, za prvi dućan je bolje da i on smanji cijene kako ne bih izgubio kupce. Ako obje trgovine razmišljaju na ovaj način i snize cijene, obje ostvaruju manji profit nego da nijedna nije snizila cijene. Za dvije nacije uključene u utrku u naoružanju, odgovarajući strateški izbori mogu biti "naoružati se" i "ne naoružati se", a isto razmišljanje može prevladati.

2.4. Igre s tri ili više igrača

Do sada smo govorili o igrama između dva igrača. U našoj svakodnevici takve su igre rijetke. Danas su važnije ekonomske, društvene i političke igre, a one najčešće uključuju više od dva igrača.

U nastavku ćemo obratiti pozornost na igre u kojima sudjeluju tri ili više igrača. U takvim igrama se pojavljuju nove i zanimljive poteškoće.

Promotrit ćemo najjednostavniji primjer nula – suma igre s tri igrača.

Primjer 2.4.1.

Larry A

		Colin A	Colin B
Rose	A	$(1, 1, -2)$	$(-4, 3, 1)$
	B	$(2, -4, 2)$	$(-5, -5, 10)$

Larry B

		Colin A	Colin B
Rose	A	$(3, -2, -1)$	$(-6, -6, 12)$
	B	$(2, 2, -4)$	$(-2, 3, -1)$

Slika 15: Nula - suma igra s tri igrača

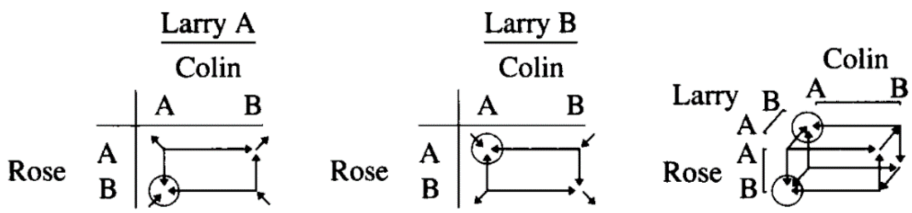
Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Tri igrača koja igraju igru nazivaju se Rose, Colin i Larry. Svaki ishod je uređena trojka brojeva koja sadrži isplate za ova tri igrača tim redoslijedom. Postoji

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

mogućih ishoda koji se mogu smjestiti u trodimenzionalnu tablicu. Radi praktičnosti na dvodimenzionalnoj stranici, rezultati za Larryja A i Larryja B dani su u dvije odvojene dvodimenzionalne tablice. Igra je s nultim zbrojem budući da je zbroj triju isplata u svakom ishodu jednak nuli.

Kao u igrama za dva igrača, može se tražiti ravnoteža u čistim strategijama crtanjem dijagrama kretanja. Dva moguća oblika prikazana su na slici 16. Trodimenzionalni dijagram je jasan, ali ga je teško dobro nacrtati. U dvodimenzionalnom dijagramu, strelice pokazuju od Larryja A prema Larryju B kada Larry preferira više svoju isplatu za B od svoje isplate za A. Na primjer, ako Rose i Colin oboje igraju A, Larry više voli svoju isplatu -1 kod AAB nego njegovu isplatu -2 kod AAA. Stoga, kod Rose A - Colin A strelica pokazuje van Larryjevog A dijagrama u Larryjev B dijagram.



Slika 16: Struktura dijagrama kretanja

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Dijagram kretanja na slici 16 pokazuje da nijedan od tri igrača nema dominantnu strategiju i da postoje dvije ravnoteže u čistim strategijama

$$BAA = (2, -4, 2),$$

$$AAB = (3, -2, -1).$$

Može se primijetiti da te ravnoteže nisu ekvivalentne niti međusobno zamjenjive. Zapravo, Rose i Colin bi više voljeli ravnotežu na AAB, dok bi Larry više volio ravnotežu na BAA. Ako Rose odigra A da pokuša postići svoju omiljenu ravnotežu, a Larry odigra A da pokuša svoju, rezultat će biti AAA, što nije ravnoteža. Ovaj primjer pokazuje da se glavne poteškoće u igrama s nultim zbrojem za dvije osobe pojavljuju čak i u igrama s nultim zbrojem čim postoje tri ili više igrača. Ne postoji jednostavna teorija rješenja.

Dodatna poteškoća pojavljuje se ako se igračima omogući komunikacija. Može postojati velika mogućnost da dva igrača formiraju koaliciju protiv trećeg igrača. Pretpostavimo da Colin i

Larry formiraju koaliciju i dogovore se da će koordinirati svoju igru protiv Rose. Rezultat se može prikazati kao igra dva igrača, Rose protiv kombiniranog igrača Colin i Larry. Budući da je ova igra nula - suma igra, može se samo dati isplate za Rose, dobivajući igru 2×4.

Rješenje za ovu igru je da Rose igra $\frac{3}{5}A, \frac{2}{5}B$ i prima očekivanu isplatu od -4.4. Budući da je ovo najbolje što Rose može učiniti u najgoroj mogućoj situaciji, kada se Colin i Larry udruže i igraju protiv Rose, ima smisla ovu strategiju nazvati Rosenom opreznom strategijom, a isplatu od 4.4 Roseina razina sigurnosti. Analiza govori što bi Colin i Larry trebali učiniti ako se odluče udružiti s ciljem da osvoje što više od Rose. Colin bi uvijek trebao igrati B, a Larry bi trebao igrati $\frac{4}{5}A, \frac{1}{5}B$. Koalicija će od Rose dobiti očekivani dobitak od 4.4.

Također, bilo bi moguće da Rose i Larry formiraju koaliciju protiv Colina ili da Rose i Colin formiraju koaliciju protiv Larryja. Ove su mogućnosti prikazane na slici 17. pod slučajevima b i c. Kako bi se razumjele isplate, potrebno je proučiti svaku od igara 2×4. Vidljivo je da je Colinova oprezna strategija Colin A, koja daje razinu sigurnosti -4. Larryjeva oprezna strategija je $\frac{3}{7}A, \frac{4}{7}B$ sa razinom sigurnosti od -1.43.

Iz ove analize jasno je da bi, ako su koalicije moguće, svaki od igrača želio biti u jednoj. Biti izostavljen je skupo. No, koja bi od tri moguće koalicije nastala? Jedan pristup odgovoru na ovo pitanje mogao bi biti promatranje kako se dijele koalicijski dobitci. Na primjer, znamo da ako Colin i Larry formiraju koaliciju i igraju optimalno protiv Rose, mogu očekivati da će dobiti ukupni dobitak od 4.4. Pitanje je kako će se između njih podijeliti dobit od 4.4. Očekivani ishod je

$$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\mathrm{ABA} + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\mathrm{ABB} + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\mathrm{BBA} + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\mathrm{BBB} =$$

$$= \left(\frac{12}{25}\right)(-4, 3, 1) + \left(\frac{3}{25}\right)(-6, -6, 12) + \left(\frac{8}{25}\right)(-5, -5, 10) + \left(\frac{2}{25}\right)(-2,3,-1)$$

$$= (-4.40, -0.64, 5.04).$$

a)

		Colin-and-Larry				
		AA	BA	AB	BB	Rose optimal:
Rose	A	1	−4	3	−6	$\frac{3}{5}$
	B	2	−5	2	−2	$\frac{2}{5}$
Colin-and-Larry	optimal:		$\frac{4}{5}$		$\frac{1}{5}$	Value = −4.4

b)

		Rose-and-Larry				
		AA	BA	AB	BB	Colin optimal:
Colin	A	1	−4	−2	2	1
	B	3	−5	−6	3	0
Rose-and-Larry	optimal:		1	0		Value = −4

c)

		Rose-and-Colin				
		AA	BA	AB	BB	Larry optimal:
Larry	A	−2	2	1	10	$\frac{3}{7}$
	B	−1	−4	12	−1	$\frac{4}{7}$
Rose-and-Colin	optimal:	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$			Value = −1.43

Slika 17: Koalicije u igri

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Ovaj izračun daje bolji uvid u igru. Larry je taj koji dobro prolazi u ovoj koaliciji. S druge strane, može se primijetiti da Colin, iako mu nije dobro, još uvijek nije ni približno loše kao da je izostavljen. U tom su slučaju Rose i Larry formirali koaliciju protiv njega.

Rezultati za druge moguće koalicije su:

- Colin protiv Rose i Larryja:

$$(2.20, -4.00, 2.00),$$

- Larry protiv Rose i Colina:

$$(2.12, -0.69, -1.43).$$

Ove bi brojke mogle poslužiti da se odredi koja se koalicija treba formirati. Na primjer, Rose bi više voljela Colina kao koalicijskog partnera, budući da u koaliciji s Colinom dobiva 2.12, u usporedbi sa samo 2.00 u koaliciji s Larryjem. Slično tome, Colinov preferirani koalicijski partner je Larry, a Larryjev preferirani koalicijski partner je Colin. Budući da Larry i Colin više vole jedan drugoga, mogućnost je da će se formirati koalicija Colin-Larry. Nažalost, u drugim igrama za tri osobe može se dogoditi da se niti jedan par igrača ne preferira, a nije jasno što bi se u tom slučaju moglo očekivati.

Von Neumann i Morgenstern 1944. godine su napravili dodatnu pretpostavku kod promatranja koalicija u igrama s N osoba. Pretpostavili su da su moguće dodatne isplate između igrača. Stoga je u prethodnoj igri Rose mogla ponuditi Colinu dodatnu isplatu od 0.1 da se pridruži koaliciji s njom, čineći efektivne isplate za koaliciju Rose - Colin

$$(2.02, -0.59, -1.43).$$

Sada bi ova koalicija bila privlačnija Colinu od koalicije Colin - Larry. Naravno, ništa ne bi spriječilo Larryja da se također nadmeće za Colinovu potporu, ili Rose da Larryju ponudi dodatnu isplatu.

Postoji teorija igara s N osoba bez dodatnih plaćanja koju je uveo Aumann 1967. godine. U ostatku ovog poglavlja, slijedit će se razmišljanja von Neumanna i Morgensterna i pretpostaviti, za igru s N osoba, da:

- igrači mogu komunicirati i formirati koalicije s drugim igračima,
- igrači mogu vršiti dodatne uplate drugim igračima.

Rezultirajuća teorija poznata je kao teorija surađivačkih igara s dodatnim uplatama. Teorija takvih igara bogata je i zanimljiva te primjenjiva u mnogim područjima.

U von Neumann - Morgenstern teoriji surađivačkih igara s dodatnim plaćanjima, postoje pitanja od velikog interesa, a to su:

- koje koalicije treba formirati,
- kako bi koalicija koja se formira podijelila svoje dobitke svojim članovima.

Informacija relevantna za odgovor na ova pitanja je zapravo koliko svaka koalicija može osvojiti ako se formira. Konkretna strategija koju će koalicija slijediti kako bi osvojila ovaj iznos nije od posebne važnosti. Stoga su von Neumann i Morgenstern predložili da se isključe specifične strategije prelazeći s igre u normalnom obliku na igru u obliku karakteristične funkcije.

Definicija 2.4.1. Igra u obliku karakteristične funkcije je skup igrača N, zajedno s funkcijom v koja za bilo koji podskup $S \subseteq N$ daje broj $v(S)$.

Broj $v(S)$ se naziva vrijednost od S i treba ga tumačiti kao iznos koji bi igrači u skupu S mogli osvojiti ako formiraju koaliciju. Funkcija v je karakteristična funkcija igre. Tradicionalno se vrijednost prazne koalicije ϕ, odnosno koalicije bez ikakvih igrača, uzima kao nula.

Bilo koja igra u normalnom obliku može se prevesti u igru u obliku karakteristične funkcije, uzimajući za $v(S)$ sigurnosnu razinu od S. Drugim riječima, za izračun $v(S)$, pretpostavka je da se koalicija S formira i zatim igra optimalno pod najgorim mogućim uvjetima, a to je da svi ostali igrači formiraju suprotstavljenu koaliciju $N-S$ i igraju kako bi smanjili isplatu za S. To rezultira nula - suma igrom za dvije osobe, odnosno S protiv $N-S$, budući da $N-S$ igra da smanji isplatu za S. Vrijednost ove igre za S je $v(S)$. Primijetimo da je to upravo proces koji je korišten u analizi koalicija u prethodno navedenoj igri. Karakteristična funkcija za tu igru, koja koristi simbole R, C i L za Rose, Colina i Larryja, je

$$v(\phi)=0,$$

$$v(R)=-4.4, \qquad v(C)=-4, \qquad v(L)=-1.43,$$

$$v(CL)=4.4, \qquad v(RL)=4, \qquad v(RC)=1.43,$$

$$v(RCL)=0.$$

Igra je nula – suma igra, što se može vidjeti u činjenici da vrijedi

$$v(S)+v(N-S)=0$$

za svaki podskup igrača S.

Ako izvorna igra nije nula – suma igra, prethodno navedeni postupak se još uvijek može koristiti za dobivanje igre u obliku karakteristične funkcije. Međutim, rezultirajuća igra u obliku karakteristične funkcije možda neće biti vrlo točan odraz igre u normalnom obliku, budući da ako se koalicija S formira u ne nula – suma igri, možda uopće neće biti povoljno za $N-S$ da se formira, i ako se $N-S$ formira, možda neće biti korisno za tu koaliciju igrati da smanji isplatu za S.

Postoji važan odnos između vrijednosti različitih koalicija koji vrijedi za sve igre u obliku karakteristične funkcije koje proizlaze iz igara u normalnom obliku.

Definicija 2.4.3. Za igru u obliku karakteristične funkcije (N, v) kažemo da je superaditivna ako vrijedi

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

za bilo koje dvije disjunktne koalicije S i T.

Ako (N, v) proizlazi iz igre normalnog oblika, uzimajući da je $v(S)$ sigurnosna razina od S, to će uvijek biti superaditivna karakteristična funkcija. Ako se dvije koalicije S i T, bez zajedničkih članova, odluče udružiti kako bi formirale $S \cup T$, uvijek si mogu osigurati barem $v(S) + v(T)$ jednostavno nastavljajući raditi ono što bi činili da se nisu udružili. Naravno, oni često mogu učiniti bolje od ovoga koordinirajući svoje akcije.

Moguće je razmotriti igre u obliku karakteristične funkcije koje ne proizlaze iz igre normalnog oblika. Zapravo, mnoge se zanimljive situacije mogu jednostavno modelirati izravno kao igre u obliku karakteristične funkcije.

Primjer 2.4.4.

Von Neumann i Morgenstern su 1944. godine smislili igru Podijeli dolar. Tri igrača će dobiti dolar ako mogu odlučiti, većinom glasova, kako podijeliti dolar među sobom. Neka je

$$N = \{1,2,3\}$$

i karakteristična funkcija igre je

$$v(\phi) = v(1) = v(2) = v(3) = 0,$$

$$v(12) = v(13) = v(23) = v(123) = 1.$$

Primjer 2.4.5.

McDonald je 1977. godine osmislio igru komunikacijskih satelita. Western Union (W), Hughes Aircraft (H) i General Telephone (G) mogu postaviti pojedinačne komunikacijske satelite ili zajednički dijeliti satelite u različitim kombinacijama. McDonald izračunava vrijednosti koalicija u milijunima dolara kao

$$v(\phi) = 0, \quad v(W) = 3, \quad v(H) = 2, \quad v(G) = 1,$$

$$v(WH) = 8, \quad v(WG) = 6.5, \quad v(HG) = 8.2, \quad v(WGH) = 11.2.$$

Ova igra nije konstantnog zbroja, ali je karakteristična funkcija superaditivna.

Primjer 2.4.6.

Ovaj primjer je iz zakonodavstva u Sjedinjenim Američkim Državama. Da bi postao zakon, prijedlog zakona mora odobriti većina Zastupničkog doma i većina Senata i mora ga potpisati predsjednik, ili ga mora odobriti $\frac{2}{3}$ Doma i Senata, time nadjačavajući predsjednikov veto.

Neka je

$$N = \{članovi\ Doma, članovi\ Senata, predsjednik\}.$$

Može se uzeti da sve koalicije imaju jednu od dvije vrijednosti, +1 za pobjedu i 0 za poraz. Tada vrijedi

$$v(S) = 1$$

ako i samo ako S sadrži barem većinu Doma i Senata zajedno s predsjednikom, ili S sadrži barem $\frac{2}{3}$ Doma i Senata. Igra je konstantnog zbroja i karakteristična funkcija je superaditivna.[2]

3. PRIMJENA IGARA S *N* IGRAČA

Teorija igara predstavlja granu matematike koja analizira modele optimalnog odlučivanja u uvjetima sukoba. Ona pripada operacijskom istraživanju, znanosti namijenjenoj planiranju i vođenju vojnih operacija. Međutim, raspon njezine primjene čini se mnogo širim.

Teorija igara ima brojne primjene. Jedna od njih je primjena u socijalnoj psihologiji. T. W. Adorno i njegovi suradnici su 1950. godine kao središnji dio svoje monumentalne studije „Autoritarna osobnost“ razvili jedan od prototipova inventara osobnosti. Jedan od njih je inventar F – ljestvice. To je niz izjava na koje su ispitanici trebali odgovoriti upisivanjem brojeva od jedan

[2] Straffin, P. D. (1993.): *Game Theory and Strategy*, Mathematican Association of America, United States of America

do sedam. Pri čemu bi broj jedan značio uopće se ne slažem, a broj sedam u potpunosti se slažem. Izjave su bile osmišljene za testiranje varijable osobnosti za koje su autori tvrdili da su podložne poticajnim ideologijama. F – ljestvica je bila kompleksna od početka i bila je predmet istraživanja u socijalnoj psihologiji. Morton Deutch je istraživao vezu između Adornove kompleksne osobnosti i zdravorazumskih koncepata povjerenja, sumnje i pouzdanosti. Pitali su se, bi li ljudi s visokim rezultatom na F – ljestvici bili sumnjivi zbog ponašanja drugih, bi li im manje vjerovali. Ideju evolucijski stabilne strategije su prvi predstavili John Maynard Smith i G.R.Price. Strategija je posebno primjenjiva na proučavanje ponašanja. Budući da pojedini članovi bioloških vrsta imaju slične potrebe, a resursi su ograničeni, često dolazi do konfliktnih situacija u kojima postoji mnogo različitih strategija koje pojedinci slijede. Glavno pitanje se postavlja koju strategiju odabrati.

Primjena u poslovanju se može uočiti na primjeru uprave tvornice i uprave sindikata. Uprava tvornice pregovara o novom ugovoru sa sindikatima koji predstavljaju svoje radnike. Sindikat traži povlastice za svoje članove, a to je povišica jedan dolar po satu te povećanje mirovina. No s druge strane uprava sindikata bi željela eliminirati pauzu za kavu jer se pokazala pretjerano skupom iz razloga što se radnici ne vraćaju do proizvodne trake u normalno vrijeme već kasne. Sindikati se također protive automatizaciji koja bi ukinula radna mjesta. Dogovor se nije dogodio, ali su obje strane pokušale to riješiti sporazumom da se što prije završi. U ovom primjeru se postavlja pitanje, može li se pronaći rješenje koje bi bilo pošteno prema i jednoj i drugoj strani.

Važnost primjene teorije igara možemo pronaći i u ekonomiji, gdje se spominje problem duopola. Duopol je situacija u kojoj dvije tvrtke kontroliraju tržište za određenu robu. Problem duopola je odlučiti kako će tvrtke u toj situaciji prilagoditi svoju proizvodnju kako bi obje maksimizirale svoj profit.

Metode teorije igara dale su temeljne rezultate u evolucijskoj biologiji. Pojam evolucijski stabilnih strategija koji je uveo britanski biolog J.M. Smith omogućio je objašnjenje evolucije nekoliko osobitosti ponašanja životinja, kao što su agresivnost, migracija i borba za preživljavanje. Metode teorije igara koriste se u problemima racionalnog gospodarenja prirodom. Na primjer, raspodjela ribolovnih kvota u oceanu, vađenje drva od strane nekoliko sudionika, određivanje poljoprivrednih cijena su problemi teorije igara. Teorija igara se također koristi se i za međuvladine sporazume o korištenju prirodnih resursa i smanjenju onečišćenja okoliša. U političkim znanostima, teorija igara bavi se modelima glasovanja u parlamentima, modelima procjene utjecaja za pojedine političke frakcije, kao i modelima raspodjele obrambenih resursa za postizanje stabilnog mira. U sudskoj praksi, teorija igara se primjenjuje u arbitraži za procjenu utjecaja sukobljenih strana na ponašanje na sudske odluke. Također se pojavljuje kod tehnološkog napredka u analizi virtualnog svijeta informacija. U teoriji igara, svi sudionici globalne računalne mreže ili interneta i mobilnih komunikacijskih mreža predstavljaju međusobno povezane igrače koji primaju i prenose informacije odgovarajućim podatkovnim kanalima. Svaki igrač slijedi individualne interese i cilj mu je prikupiti neke informacije ili zakomplicirati proces prikupljanja informacija.

U posljednjih nekoliko desetljeća, niz izvanrednih istraživača u području teorije igara dobilo je Nobelovu nagradu za ekonomske znanosti. To su J.C. Harsanyi, J.F. Nash Jr. i R. Selten 1994. godine „*za njihovu pionirsku analizu ravnoteže u teoriji nekooperativnih igara*“, F.E. Kydland i E.C. Prescott 2004. godine „*za njihov doprinos dinamičkoj makroekonomiji: vremenska dosljednost ekonomske politike i pokretačke snage iza poslovnih ciklusa*“, R. J. Aumann i T.C. Schelling 2005. godine „*za poboljšanje našeg razumijevanja sukoba i suradnje kroz analizu teorije igara*“, L. Hurwicz, E.S. Maskin i R.B. Myerson 2007. godine „*za postavljanje temelja teorije dizajna mehanizma*“.

U sljedećem potpoglavlju opisati ćemo primjenu igara s N igrača na primjeru strateškog glasanja u politici.

3.1. Strateško glasanje u politici

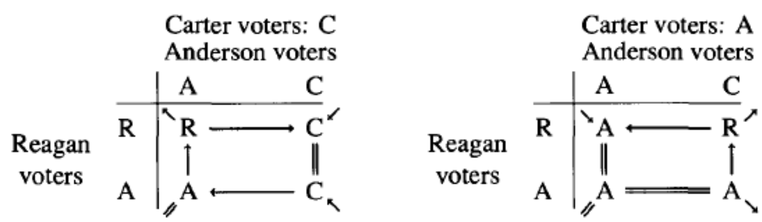
Na predsjedničkim izborima 1980. godine u Sjedinjenim Američkim Državama bila su tri kandidata: demokrat Jimmy Carter, republikanac Ronald Reagan i nezavisni John Anderson. U ljeto prije izbora, ankete su pokazivale da je Anderson prvi izbor za 20% birača, s oko 35% za Cartera i 45% za Reagana. Budući da se Reagana smatralo mnogo konzervativnijim od Andersona, koji je pak bio konzervativniji od Cartera, može se napraviti pojednostavljena pretpostavka da su birači Reagana i Cartera imali Andersona kao drugi izbor, a birači Andersona imali su Cartera kao drugi izbor. Opisana situacija prikazana je na slici 18.

Reagan voters (45%)	Anderson voters (20%)	Carter voters (35%)
R	A	C
A	C	A
C	R	R

Slika 18: Anketa

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Kad bi svi ovi glasači glasali za svog omiljenog kandidata, Reagan bi pobijedio s 45% glasova. Međutim, birači ne moraju glasati za svog omiljenog kandidata. Iako nikada nije korisno glasati za kandidata koji je bio zadnji izbor, postoje situacije u kojima glas za kandidata drugog izbora može biti od pomoći. Možemo zamisliti da smo spojili igrače u svakoj klasi u jednog igrača te promatrati situaciju kao igru s tri igrača u kojoj svaki birački blok ima dvije strategije koje se vide na slici 19.

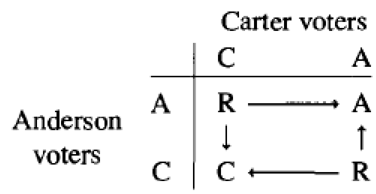


Slika 19: Strategije igre

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Dijagram kretanja pokazuje da ova igra ima tri ravnoteže, na *RCC* u kojoj *C* pobjeđuje i na *RAA* i *AAA* kada *A* pobjeđuje. Treba naglasiti da ishod *RAC* kada *R* pobjeđuje nije ravnoteža.

Analiza ove igre može se pojednostaviti uočavanjem da Reaganovi birači imaju dominantnu strategiju *R*. S obzirom na to, igra se svodi na dijagram kretanja na slici 20.



Slika 20: Dijagram kretanja

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Iskreni ishod je gore lijevo. Glasači Cartera i Andersona mogli bi poboljšati ovaj ishod glasanjem za drugog kandidata. Zapravo, u ljeto i jesen 1980. godine Carterova kampanja je poticala Andersonove glasače da glasaju za Cartera kako bi spriječili Reagana da pobijedi. Mnogi liberalni Andersonovi pristaše poslušali su ovu poruku i glasali za Cartera, iako je Reagan ipak pobijedio na izborima.

Robin Farquharson je 1969. godine uveo terminologiju koja je postala standardna za ovu vrstu situacije. Iskrena strategija glasača je glasati za svog prvog kandidata. Ako birač ima dominantnu strategiju, ta se strategija naziva izravna. Stoga Reaganovi glasači imaju izravnu strategiju, a to je da iskreno glasaju za *R*. Dopustiva strategija je ona koja nije dominirana od strane neke druge strategije. Tako birači Reagana imaju samo jednu dopustivu strategiju, ali glasači Andersona i Cartera imaju po dvije. Treba naglasiti da glasovanje za kandidata koji je bio zadnji izbor nije dopustivo. Slijediti dopustivu strategiju koja nije iskrena naziva se složeno glasovanje. Dilema liberalnih birača Andersona 1980. godine bila je hoće li dati iskrene glasove Andersonu ili složene glasove Carteru. Kada su tri ili više kandidata na izborima, većinsko glasovanje često dovodi birače u ovu vrstu teorijske dileme.

Slične situacije javljaju se i u zakonodavnim tijelima, koja često koriste inačice sekvencionalnog glasovanja po parovima. Kod ove metode glasovanja, prvo se glasa o dva izbora. Većinski pobjednik se zatim uparuje protiv trećeg izbora, pobjednik tog natjecanja se uparuje protiv četvrtog izbora, i tako dalje. Redoslijed kojim se uparuju pojedini izbori naziva se dnevni red glasovanja.[3]

[3] Brams, S. (1975.): *Game Theory and Politics*, Free Press, United States of America

Primjerice, u ožujku 1988. godine Zastupnički dom Kongresa Sjedinjenih Američkih Država održao je povijesno glasovanje kojim je oboren plan, koji je osmislilo demokratsko vodstvo Predstavničkog doma, da se pruži humanitarna pomoć pobunjenicima „Contra“ u Nikaragvi koje podržavaju Sjedinjene Američke Države. Glasovanje je bilo neočekivano i politički složeno. Navesti ćemo pojednostavljeni model situacije. Postojala su tri izbora:

- *A*: zakon koji podržava Reaganova administracija za opskrbu oružjem „Contra“ pobunjenika;
- *H*: prijedlog demokratskog vodstva o zakonu za pružanje humanitarne pomoći, ali ne i oružja;
- *N*: ne dati nikakvu pomoć pobunjenicima.

Složena stvarna situacija može se svesti na sedam birača s preferencijama navedenim na slici 21.

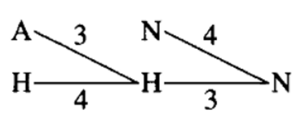
CR (2 voters)	MR (1 voter)	MD (2 voters)	LD (2 voters)
A	A	H	N
N	H	A	H
H	N	N	A

Slika 21: Prednosti

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Inicijali označavaju konzervativne republikance (CR), umjerene republikance (MR), umjerene demokrate (MD) i liberalne demokrate (LD). Konzervativni republikanci su, primjerice, mislili da je Demokratski zakon *H* toliko neprimjeren da radije ne bi pružili nikakvu pomoć nego usvojili *H*.

U parlamentarnom dnevnom redu, prvo glasovanje bilo je između *A i H*, s pobjednikom koji se uparivao s *N*. Rezultat je prikazan na slici 22.

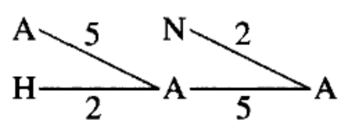


Slika 22: Iskreno glasanje 1

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

U prvom glasovanju, *H* je dobio čvrstu podršku demokrata da pobijedi *A*, 4 prema 3 u navedenom modelu. Međutim, u sljedećem glasovanju *H* protiv *N*, konzervativni republikanci i liberalni demokrati zajedno su porazili *H*, što je rezultiralo ne pružiti pomoći Contri.

U ovom modelu, gornji dnevni red uz iskreno glasovanje dovodi do pobjede za *N*. Pitanje je postoji li drugačiji ishod koji je moguć. Prvo razmotrimo isti dnevni red, ali sa složenim glasovanjem. U zadnjem koraku sekvencionalnog glasovanja po parovima, neiskreno glasovanje ne može pomoći. U bilo kojoj prihvatljivoj strategiji za slijed glasovanja, konačni će glas biti iskren. Dakle, ako *H* pobijedi u prvom glasanju, konačni ishod će biti *N*. S druge strane, ako *A* pobijedi u prvom glasanju, tada će u drugom glasanju *A* pobijediti *N* s 5 prema 2, tako da će *A* biti konačni ishod. Stoga bi složeni glasači trebali prvo glasovanje promatrati kao natjecanje između *N*, kojeg predstavlja *H*, i *A*. Republikanci bi trebali glasovati iskreno za *A*, liberalni demokrati trebali bi glasovati iskreno za *H*, ali umjereni demokrati trebali su glasovati za *A*. Ishod bi bio *A* umjesto *N*.[4]

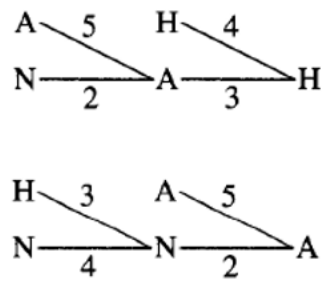


Slika 23 : Složeno glasanje

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Može se razmotriti izmjena dnevnog reda. U ovom primjeru odgovarajući sekvencijalni dnevni red u parovima mogao je proizvesti bilo koji od izbora kao pobjednika pod iskrenim glasovanjem, kao što je vidljivo na slici 24.

[4] Straffin, P. D. (1993.): *Game Theory and Strategy*, Mathematican Association of America, United States of America



Slika 24: Iskreno glasanje 2

Izvor: Straffin, P. D. (1993.): Game Theory and Strategy, Mathematican Association of America, United States of America

Postoje situacije u kojima i većinsko i sekvencijalno glasovanje po parovima zahtijevaju od birača da donesu složene odluke. To nije poželjno sa stajališta demokratske teorije. Ako birači imaju poticaj glasovati neiskreno, kako netko može biti siguran da će ishod glasovanja otkriti i predstavljati prave preferencije birača? Zasigurno bi bilo bolje pronaći metodu glasovanja i to nužno različitu od većinskog glasovanja ili sekvencijalnog glasovanja po parovima, koja bi bila strategijski otporna. U svim glasačkim situacijama svi birači bi imali jednostavne strategije, koje bi bile njihove iskrene strategije. Nikada ne bi bilo korisno glasati neiskreno. Međutim, Gibbard 1973. godine i Satterthwaite 1975. godine su dokazali da kada postoje tri ili više izbora o kojima se glasa, postoji samo jedna shema glasovanja koja je otporna na strategije, a to je da se izabere jedan glasač i da mu se omogući da odabere pobjednički izbor. Drugim riječima, svaka shema glasovanja za tri ili više izbora ili je diktatorska ili podložna strateškoj manipulaciji. U demokratskom društvu svi glasači moraju biti igrači u igrama s *N* osoba.[5]

[5]Straffin, P. D. (1993.): *Game Theory and Strategy*, Mathematican Association of America, United States of America

4. ZAKLJUČAK

Teorija igara je grana primijenjene matematike koja analizira situacije u kojima strane, koje se nazivaju igrači, donose odluke koje su međusobno ovisne. Ova međuovisnost uzrokuje da svaki igrač u formuliranju strategije razmotri moguće odluke ili strategije drugog igrača. Rješenje igre opisuje optimalne odluke igrača, koji mogu imati slične, suprotstavljene ili mješovite interese te ishode koji mogu proizaći iz tih odluka.

Teorija igara je primijenjena na širok raspon situacija u kojima izbori igrača međusobno djeluju kako bi utjecali na ishod. U naglašavanju strateških aspekata donošenja odluka ili aspekata kojima upravljaju igrači, a ne čista slučajnost, teorija nadopunjuje i nadilazi klasičnu teoriju vjerojatnosti. Koristila se, na primjer, da bi se odredilo kakve će se političke koalicije ili poslovna poduzeća vjerojatno formirati, optimalnu cijenu po kojoj će se prodavati proizvodi ili usluge u uvjetima konkurencije, snagu glasača ili bloka birača, koga odabrati za žiri, najbolje mjesto za proizvodni pogon i ponašanje određenih životinja i biljaka u njihovoj borbi za opstanak. Čak se koristila i za osporavanje zakonitosti određenih sustava glasovanja.

Teško bi se neka teorija mogla pozabaviti tako ogromnim rasponom igara, pa zapravo ne postoji jedinstvena teorija igara. Predložen je niz teorija, od kojih je svaka primjenjiva na različite situacije i svaka ima svoje koncepte o tome što predstavlja rješenje.

Igre se mogu klasificirati prema određenim značajnim obilježjima, od kojih je najočitiji broj igrača. Stoga se igra može označiti kao igra za jednu osobu, za dvije osobe ili za N osoba, pri čemu igre u svakoj kategoriji imaju svoje posebne karakteristike. Osim toga, igrač ne mora biti pojedinac. To može biti nacija, korporacija ili tim koji se sastoji od mnogo ljudi sa zajedničkim interesima.

U igrama savršenih informacija, kao što je šah, svaki igrač u svakom trenutku zna sve o igri. Poker je, s druge strane, primjer igre nesavršenih informacija jer igrači ne znaju sve karte svojih protivnika.

Stupanj u kojem se ciljevi igrača podudaraju ili sukobljavaju još je jedna osnova za klasifikaciju igara. Igre s konstantnim zbrojem su igre potpunog sukoba, koje se također nazivaju igrama čistog natjecanja. Poker je, na primjer, igra s konstantnim zbrojem jer zajedničko bogatstvo igrača ostaje konstantno, iako se njegova distribucija mijenja tijekom igre.

Igrači u igrama s konstantnim zbrojem imaju potpuno suprotne interese, dok u igrama s promjenjivim zbrojem svi mogu biti pobjednici ili gubitnici. U sporu radnika i uprave, na primjer, dvije strane sigurno imaju neke sukobljene interese, ali obje će imati koristi ako se štrajk izbjegne.

Konačno, za igru se kaže da je konačna kada svaki igrač ima konačan broj opcija, broj igrača je konačan i igra ne može trajati beskonačno. Šah, dama, poker i većina društvenih igara ograničeni su.

Postoje dvije vrste igara u kojima sudjeluju dvije osobe, a to su nula – suma igra i ne nula – suma igra. Nula – suma igra s dva igrača je igra u kojoj ta dva igrača igraju igru, a zbroj isplata za igrače je jednak nuli. U takvoj se igri pretpostavlja da svaki igrač ima konačan broj mogućih poteza za sebe koji može, ali i ne mora biti isti za svakog igrača. Popis poteza i iznos dobitka ili gubitka za svakog igrača su unaprijed poznati, igrači djeluju racionalno, tj. ako jedan od igrača pokušava maksimizirati dobitak, drugi želi minimizirati gubitak, te oba igrača odabiru i najavljuju svoje poteze istovremeno. Takve se igre mogu zadati matricom, stoga se još nazivaju matrične igre. U ovom obliku igre može postojati, ali i ne mora najmanji element u retku i najveći element u stupcu pod nazivom sedlo. Ukoliko igra sadrži sedlo, treba igrati sedlo. Osim nula – suma igre u ovom se radu spominje i ne nula – suma igra s dva igrača. Interesi ovih igrača nisu strogo suprostavljeni, stoga može postojati suradnja među igračima koja može zahtijevati i međusobnu komunikaciju. Analiza ne – nula suma igre ovisi kakve se pretpostavke naprave o tome kako igrači mogu komunicirati jedni s drugima. Najčešće se pretpostavlja da nikakva komunikacija među igračima nije moguća. Igrači svoje strategije biraju istovremeno, no njihov izbor nije poznat drugom igraču. U ovim igrama John Nash je dokazao da svaka igra s dvije osobe ima barem jednu ravnotežu u čistim ili mješovitim strategijama koje nazivamo Nashove ravnoteže. Talijanski ekonomist Vilfredo Pareto je predložio da ne treba prihvatiti ekonomski sustav ako postoji drugi dostupan sustav koji sve može učiniti boljim. Ukoliko se to prilagodi ne nula – suma igrama s dva igrača dobiva se Pareto načelo koje glasi: Da bi ishod bio prihvatljiv kao rješenje igre, trebao bi biti Pareto najpovoljniji. Ishod igre nije Pareto najpovoljniji ako postoji drugi ishod koji bi obojici igrača dao veće isplate, ili jednom istu, a drugom veću isplatu. Ne postoji općeniti pojam rješenja za ne nula – suma igre s dva igrača. Takve igre ne moraju imati jedinstvenu Nashovu ravnotežu, a čak i ako imaju, ona ne mora biti Pareto optimalna, dakle ne mora biti prihvatljiva kao rješenje.

U igrama s tri igrača se pojavljuju koalicije između igrača. Tada je svaki ishod uređena trojka brojeva. Dodatna poteškoća pojavljuje se ako se igračima omogući komunikacija. Može postojati velika mogućnost da dva igrača formiraju koaliciju protiv trećeg igrača. Von Neumann i Morgenstern su 1944. godine napravili dodatnu pretpostavku kod promatranja koalicija u igrama s N osoba. Pretpostavili su da su moguće dodatne isplate između igrača. U igrama s više od dva igrača javljaju se dakle pitanja koje koalicije treba formirati te kako bi koalicija koja se formira podijelila svoje dobitke svojim članovima.

LITERATURA

1. S. Brams: *Game Theory and Politics*, Free Press, New York, 1975.
2. S. Brams: *The Presidential Electron Game*, Yale University Press, New Haven, 1978.
3. Bilješke s predavanja iz kolegija Linearno programiranje, nositelj: Ana Jurasić, akademska godina 2021./2022.
4. P. D. Straffin: *Game Theory and Strategy*, The Mathematical Association of America, Washington, 1993.

POPIS SLIKA