

# Kvazisimetrični dizajni

---

**Mikić, Ivana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka / Sveučilište u Rijeci**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:196:315730>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-22**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Mathematics - MATHRI Repository](#)



Sveučilište u Rijeci  
Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Ivana Mikić

**Kvazisimetrični dizajni**

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2024.

Sveučilište u Rijeci  
Fakultet za matematiku

Sveučilišni diplomski studij Diskretna matematika i primjene

Ivana Mikić

**Kvazisimetrični dizajni**

**Mentor:** izv. prof. dr. sc. Andrea Švob

Diplomski rad  
Rijeka, rujan 2024.

# SAŽETAK

U ovom radu proučavaju se kvazisimetrični dizajni, posebna vrsta dizajna koja nudi veću fleksibilnost u odnosu na simetrične dizajne. Razmotreni su osnovni pojmovi teorije dizajna i teorije grafova, s posebnim naglaskom na jako regularne grafove. Detaljno su analizirani kvazisimetrični dizajni, obuhvaćajući njihove definicije, primjere i osnovna svojstva, a istražena je i njihova povezanost s jako regularnim grafovima i kodovima. U praktičnom dijelu rada prikazana je primjena GAP-a za konstrukciju blokovnih grafova i generirajućih matrica kodova, uključujući funkcije za provjeru jake regularnosti grafova i analizu osnovnih svojstava dizajna.

***Ključne riječi:*** kvazisimetrični dizajni, simetrični dizajni, incidencijske matrice, jako regularni grafovi, konstrukcija blokovnih grafova, linearni kodovi, generirajuće matrice.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Osnovni pojmovi</b>	<b>2</b>
2.1	Osnovni pojmovi teorije dizajna . . . . .	2
2.2	Osnovni pojmovi teorije grafova . . . . .	8
2.2.1	Jako regularni grafovi . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Kvazisimetrični dizajni</b>	<b>15</b>
3.1	Veza kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova . . . . .	23
3.2	Kvazisimetrični dizajni i kodovi . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Primjeri u GAP-u</b>	<b>35</b>
	<b>Zaključak</b>	<b>45</b>
	<b>Popis slika</b>	<b>46</b>
	<b>Literatura</b>	<b>47</b>
	<b>Prilozi</b>	<b>50</b>

# 1 Uvod

Teorija dizajna, kao važan dio kombinatorike, proučava matematičke strukture poznate kao dizajni. Ove strukture imaju široku primjenu u analizi i planiranju eksperimenata, teoriji kodiranja i računalnim znanostima. Njezini korijeni sežu u 18. stoljeće, kada je Leonhard Euler [9] 1782. godine postavio temelje za proučavanje kombinatornih problema istraživanjem latinskih kvadrata i problema *36 časnika*, što je dovelo do razvoja različitih vrsta dizajna. Značajan napredak postignut je sredinom 19. stoljeća, kada je Thomas Kirkman [17] 1847. godine doprinio razumijevanju Steinerovih sustava trojki, čime je postavio temelje za daljnji razvoj teorije dizajna.

Daljnji značajan doprinos dao je Ronald A. Fisher [10] 1926. godine, kada je pokazao kako ortogonalni latinski kvadrati mogu unaprijediti eksperimentalni dizajn. Fisher je također 1938. godine, zajedno s Frankom Yatesom [11], objavio važnu knjigu *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, koja je postavila temelje za mnoge statističke metode u istraživanju. Razvoj teorije dizajna dodatno je oblikovan 1939. godine radom Raj C. Bosea [2], koji je uspostavio teoriju balansiranih nepotpunih blokovnih dizajna i pritom uveo terminologiju važnu za mnoge moderne primjene.

U ovom radu fokusirat ćemo se na kvazisimetrične dizajne, specifičnu vrstu dizajna blisku simetričnim dizajnim. Kvazisimetrični dizajni su posebni po tome što postoje točno dva različita broja  $x$  i  $y$  takva da se svaka dva različita bloka dizajna sijeku u  $x$  ili  $y$  točaka. Ovo svojstvo pruža veću fleksibilnost u odnosu na simetrične dizajne, čime omogućuje rješavanje problema u situacijama gdje simetrični dizajni nisu primjenjivi.

Na početku diplomskog rada razmotrit će se osnovni pojmovi teorije dizajna i teorije grafova, s posebnim naglaskom na jako regularne grafove. Sljedeći dio rada posvećen je kvazisimetričnim dizajnim, uključujući konkretne primjere i dokazivanje njihovih osnovnih svojstava, kao i istraživanje njihove povezanosti s jako regularnim grafovima i kodovima.

Na kraju će biti predstavljena praktična primjena u GAP-u. Demonstrirat će se metode za konstrukciju blokovnih grafova i generirajućih matrica linearnih kodova iz incidencijskih matrica kvazisimetričnih dizajna.

## 2 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju navest ćemo osnovne pojmove i tvrdnje koje ćemo koristiti u nastavku ovog rada. Najprije ćemo navesti osnovne pojmove teorije dizajna te potom i osnovne pojmove teorije grafova. Dokaze teorema u potpoglavljima 2.1 i 2.2 koji su navedeni bez dokaza možete pronaći u [29] i [35].

### 2.1 Osnovni pojmovi teorije dizajna

Budući da su dizajni incidencijske strukture, započnimo s njihovom definicijom. **Incidencijska struktura**  $\mathcal{D}$  je uređena trojka  $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ , pri čemu je  $\mathcal{P}$  neprazni skup čije elemente nazivamo točkama,  $\mathcal{B}$  familija podskupova od  $\mathcal{P}$  čije elemente nazivamo blokovima i  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$  relacija incidencije.

**Definicija 2.1.** *Neka su  $v, k$  i  $\lambda$  prirodni brojevi. Incidencijska struktura  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  je  $t$ - $(v, k, \lambda)$  **dizajn** ako vrijedi:*

1.  $|\mathcal{P}| = v$ ,
2. svaki element skupa  $\mathcal{B}$  incidentan je s točno  $k$  elemenata skupa  $\mathcal{P}$ ,
3. svakih  $t$  elemenata skupa  $\mathcal{P}$  incidentno je s točno  $\lambda$  elemenata skupa  $\mathcal{B}$ .

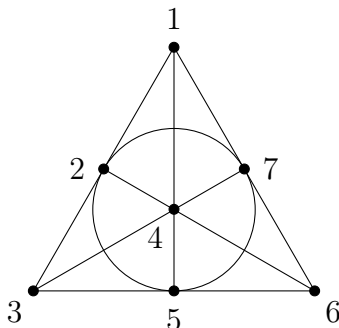
Ako su dva bloka u dizajnu jednaka, kažemo da se blokovi ponavljaju. Za dizajn ćemo reći da je jednostavan ako ne sadrži ponovljene blokove.

**Definicija 2.2.** *Neka su  $v, k$  i  $\lambda$  prirodni brojevi takvi da je  $v > k \geq 2$ . Incidencijska struktura  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  je  $(v, k, \lambda)$ -**balansirani nepotpuni blok dizajn**, tj.  $(v, k, \lambda)$ -**BIBD** ako vrijedi:*

1.  $|\mathcal{P}| = v$ ,
2. svaki element skupa  $\mathcal{B}$  incidentan je s točno  $k$  elemenata skupa  $\mathcal{P}$ ,
3. svaki par različitih elemenata skupa  $\mathcal{P}$  incidentno je s točno  $\lambda$  elemenata skupa  $\mathcal{B}$ .

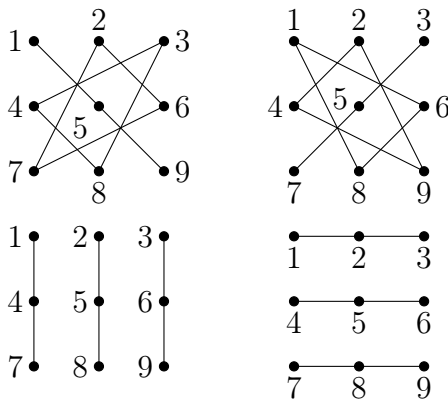
**Napomena 2.1.**  $(v, k, \lambda)$ -BIBD je zapravo blokovni  $(v, k, \lambda)$  dizajn, tj.  $t$ - $(v, k, \lambda)$  dizajn za kojeg je  $t = 2$ .

**Primjer 2.1.** Na Slici 1 prikazan je  $(7, 3, 1)$ -BIBD, poznat i kao Fanova ravnina. Vrijedi:  $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  te  $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}$ .



Slika 1: Fanova ravnina

**Primjer 2.2.** Dizajne s parametrom  $\lambda = 1$  nazivamo **Steinerovi dizajni**. Primjer jednog takvog dizajna je  $(9, 3, 1)$ -BIBD sa skupom točaka  $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  te familijom blokova  $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}, \{1, 5, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}, \{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \{3, 5, 7\}\}$ .



Slika 2:  $(9, 3, 1)$ -BIBD

**Teorem 2.1.** *Neka je  $\mathcal{D} (v, k, \lambda)$ -BIBD. Svaka točka pojavljuje se u dizajnu  $\mathcal{D}$  točno*

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} \quad (2.1)$$

*puta te dizajn  $\mathcal{D}$  ima točno*

$$b = \frac{vr}{k} = \frac{\lambda(v^2 - v)}{k^2 - k} \quad (2.2)$$

*blokova.*



**Teorem 2.2.** *Neka je incidencijska struktura  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  dizajn s parametrima  $t$ - $(v, k, \lambda)$ . Tada je  $\mathcal{D}$  ujedno  $s$ - $(v, k, \lambda_s)$  dizajn, za svaki  $s \in \{0, \dots, t\}$  i za*

$$\lambda_s = \lambda \cdot \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}. \quad (2.3)$$

**Teorem 2.3** (Fisherova nejednakost). *Ako postoji  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD, onda vrijedi da je  $b \geq v$ .*

Iz Fisherove nejednakosti, primjenom (2.1) i (2.2), također slijedi  $r \geq k$  te  $\lambda(v - 1) \geq k^2 - k$ .

**Definicija 2.3.** *Neka je  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  konačna incidencijska struktura takva da je  $|\mathcal{P}| = v$  i  $|\mathcal{B}| = b$ . Označimo elemente skupa  $\mathcal{P}$  sa  $P_1, \dots, P_v$  i elemente skupa  $\mathcal{B}$  sa  $x_1, \dots, x_b$ . **Matrica incidencije** incidencijske strukture  $\mathcal{D}$  je  $v \times b$  matrica  $M = (m_{ij})$  za koju vrijedi:*

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & (P_i, x_j) \in \mathcal{I}, \\ 0, & (P_i, x_j) \notin \mathcal{I}. \end{cases}$$

**Primjer 2.3.** Matrica incidencije  $M$  dizajna s parametrima 2-(7, 3, 1) iz Primjera 2.1 je:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Teorem 2.4.** *Neka je  $M$   $v \times b$   $(0-1)$  matrica. Matrica  $M$  je incidencijska matrica  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBDa ako i samo ako vrijedi:*

1.  $MM^T = \lambda J_v + (r - \lambda)I_v$ ,
2.  $u_v M = k u_b$ .

**Napomena 2.2.** Oznake iz prethodnog teorema koje ćemo koristiti u ostatku rada:

- $I_n$  -  $n \times n$  jedinična matrica,
- $J_n$  -  $n \times n$  matrica čiji su svi elementi jednaki 1,
- $u_n$  - vektor duljine  $n$  čiji su svi elementi jednaki 1.

**Definicija 2.4.** Incidencijska struktura  $\mathcal{D}^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{I}^*)$ , gdje je  $\mathcal{P}^* = \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^* = \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{I}^* = \{(x, P) \mid (P, x) \in \mathcal{I}\}$  naziva se **dualna struktura** incidencijske strukture  $\mathcal{D}$ .

Definirajmo sada i posebnu vrstu dizajna, simetrične dizajne koje ćemo generalizirati u nastavku rada.

**Definicija 2.5.** Balansirani nepotpuni blokovni dizajn za kojeg vrijedi da je  $b = v$  (ili ekvivalentno  $r = k$ ,  $\lambda(v - 1) = k^2 - k$ ) se naziva **simetrični BIBD**.

**Primjer 2.4.**  $(7, 3, 1)$ -BIBD iz Primjera 2.1 je simetrični dizajn. Naime, iz (2.1) i (2.2) slijedi  $b = 7$  pa vrijedi  $b = v = 7$ . S druge strane,  $(6, 3, 2)$ -BIBD primjer je dizajna koji nije simetričan budući da vrijedi  $10 = b \neq v = 6$ .

**Teorem 2.5.** Neka je  $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  simetrični  $(v, k, \lambda)$ -BIBD te neka je  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_v\}$ . Tada vrijedi  $|B_i \cap B_j| = \lambda$ , za  $1 \leq i, j \leq v$ ,  $i \neq j$ .

U nastavku prikazujemo načine konstrukcije novih dizajna iz postojećih.

**Teorem 2.6** (Konstrukcija sumom). Ako postoje  $(v, k, \lambda_1)$ -BIBD i  $(v, k, \lambda_2)$ -BIBD, tada postoji i  $(v, k, \lambda_1 + \lambda_2)$ -BIBD.

**Korolar 2.1** (Konstrukcija višekratnika dizajna). Ako postoji  $(v, k, \lambda)$ -BIBD, tada postoji i  $(v, k, s\lambda)$ -BIBD za svaki cijeli broj  $s \geq 1$ .

Uočimo da dizajni dobiveni Korolarom 2.1 nisu jednostavni, čak i kada je početni dizajn jednostavan, budući da sadrže ponovljene blokove.

**Teorem 2.7** (Konstrukcija komplementarnog dizajna). Ako postoji  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD, onda postoji  $(v, b, b - r, v - k, b - 2r + \lambda)$ -BIBD.

**Definicija 2.6.** Neka je  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  simetrični  $(v, k, \lambda)$ -BIBD i  $B_0 \in \mathcal{B}$ . Tada je

$$Der(\mathcal{P}, \mathcal{B}, B_0) = (B_0, \{B \cap B_0 \mid B \in \mathcal{B}, B \neq B_0\}, \mathcal{I})$$

*derivirani dizajn* dizajna  $\mathcal{D}$  s obzirom na blok  $B_0$ . Dizajn

$$Res(\mathcal{P}, \mathcal{B}, B_0) = (\mathcal{P} \setminus B_0, \{B \setminus B_0 \mid B \in \mathcal{B}, B \neq B_0\}, \mathcal{I})$$

je *rezidualni dizajn* dizajna  $\mathcal{D}$  s obzirom na blok  $B_0$ .

**Teorem 2.8.** Neka je  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  simetrični  $(v, k, \lambda)$ -BIBD i  $B_0 \in \mathcal{B}$ . Tada je  $Res(\mathcal{P}, \mathcal{B}, B_0)$   $(v - k, v - 1, k, k - \lambda, \lambda)$ -BIBD.

**Primjer 2.5.** Neka je  $\mathcal{D}$  simetrični  $(7, 3, 1)$ -BIBD iz Primjera 2.1 te neka je  $B_0 = \{2, 4, 6\}$ . Tada je  $(4, 2, 1)$ -BIBD rezidualni dizajn dizajna  $\mathcal{D}$  obzirom na blok  $B_0$  te vrijedi  $\mathcal{P} = \{1, 3, 5, 7\}$  i  $\mathcal{B} = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 5\}\}$ .

Označimo parametre  $(v - k, v - 1, k, k - \lambda, \lambda)$  rezidualnog dizajna s  $(v', b', r', k', \lambda')$ . Ti parametri zadovoljavaju jednakost  $r' = k' + \lambda'$ .  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD koji zadovoljava uvjet  $r = k + \lambda$  nazivamo **kvazi-rezidualan dizajn**. Kvazi-rezidualni  $(v, b, r, k, \lambda)$ -BIBD može se konstruirati kao rezidualni BIBD simetričnog  $(v + r, r, \lambda)$ -BIBDa pod uvjetom da takav dizajn postoji.

**Primjer 2.6.** Neka je  $\mathcal{D}$  dizajn s parametrima  $2$ - $(6, 3, 2)$  sa skupom točaka  $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  i familijom blokova  $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}\}$ . Ovaj dizajn je jedinstven za navedene parametre. Budući da iz (2.1) slijedi da je  $r = 5$  i s obzirom na to da vrijedi  $5 = r = k + \lambda = 3 + 2$ , zaključujemo da je  $\mathcal{D}$  kvazi-rezidualan dizajn.

Opišimo sada i specijalnu vrstu dizajna, Hadamardove dizajne, koje ćemo koristiti u nastavku rada. Započet ćemo s definicijom Hadamardove matrice.

**Definicija 2.7.** *Hadamardova matrica* reda  $m$  je  $m \times m$  matrica  $H = [h_{i,j}]$ ,  $h_{i,j} \in \{-1, 1\}$ , za koju je  $HH^T = mI_m$ .

**Primjer 2.7.** Sljedeće matrice su Hadamardove matrice reda 1, 2 i 4, respektivno.

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, H_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naime, vrijedi  $h_{i,j} \in \{-1, 1\}$  i

$$H_1 H_1^T = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, H_2 H_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } H_4 H_4^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Teorem 2.9.** *Hadamardova matrica reda  $m$  postoji ako i samo ako postoji  $(m - 1, \frac{1}{2}m - 1, \frac{1}{4}m)$ -BIBD*

Simetričan blokovni dizajn s parametrima  $(m - 1, \frac{1}{2}m - 1, \frac{1}{4}m - 1)$  naziva se **Hadamardov blokovni dizajn**.

**Primjer 2.8.** Dizajn s parametrima  $2-(7, 3, 1)$  zadovoljava uvjet Teorema 2.9 za  $m = 8$  pa zaključujemo da je riječ o Hadamardovu dizajnu. Odredimo stoga pripadnu Hadamardovu matricu reda 8.

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Definicija 2.8.** *Dizajn  $\mathcal{D}^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{I}^*)$  dobiven iz Hadamardovog  $(m - 1, \frac{1}{2}m - 1, \frac{1}{4}m - 1)$  dizajna na sljedeći način:*

- $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$ ,
- $\mathcal{B}^* = \{B \cup \{\infty\} \mid B \in \mathcal{B}\} \cup \{P \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$ ,

je  $3-(m, \frac{1}{2}m, \frac{1}{4}m - 1)$  dizajn i naziva se **Hadamardov 3-dizajn**.

**Primjer 2.9.** U Primjeru 2.8 pokazali smo da je dizajn s parametrima  $2-(7, 3, 1)$  Hadamardov dizajn. Odredimo stoga i Hadamardov 3-dizajn koji je dobiven iz ovog dizajna. Za skup točaka i familiju blokova vrijedi:

- $\mathcal{P} = \{\infty, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,
- $\mathcal{B} = \{\{\infty, 1, 2, 3\}, \{\infty, 1, 4, 5\}, \{\infty, 1, 6, 7\}, \{\infty, 2, 4, 6\}, \{\infty, 2, 5, 7\}, \{\infty, 3, 4, 7\}, \{\infty, 3, 5, 6\}\} \cup \{\{4, 5, 6, 7\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 7\}\}$ .

Dobiveni Hadamardov 3-dizajn ima parametre 3-(8, 4, 1) i matricu incidencije:

$$M' = \left[ \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

## 2.2 Osnovni pojmovi teorije grafova

U nastavku rada ćemo opisati vezu grafova i kvazisimetričnih dizajna, stoga u nastavku navodimo osnovne definicije i tvrdnje vezane uz grafove.

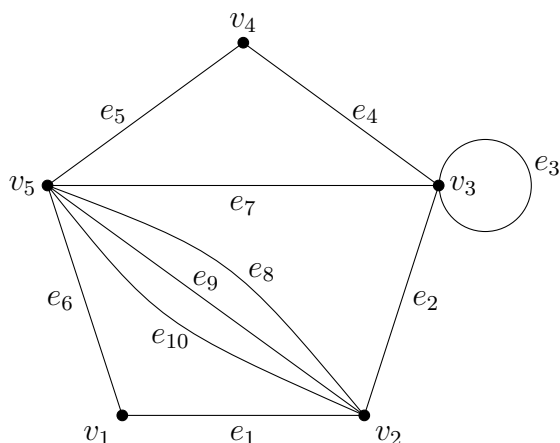
**Definicija 2.9.** *Graf*  $G$  je uređena trojka  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ , koja se sastoji od nepraznog skupa  $V = V(G)$ , čije elemente nazivamo **vrhovima** grafa  $G$ , skupa  $E = E(G)$  disjunktog s  $V(G)$ , čiji su elementi **bridovi** od  $G$  i **funkcije incidencije**  $\psi_G$ , koja svakom bridu od  $G$  pridružuje neuređeni par, ne nužno različitih, vrhova od  $G$ .

Ako za  $e \in E(G)$  i  $u, v \in V(G)$  vrijedi  $\psi_G(e) = uv$ , tada kažemo da brid  $e$  **spaja** vrhove  $u$  i  $v$  te da su  $u$  i  $v$  **krajevi** brida  $e$ . Također, u tom slučaju kažemo i da su vrhovi  $u$  i  $v$  **incidentni** s bridom  $e$ , i obratno, te da su ti vrhovi **susjedni**.

Brid kojemu se krajevi podudaraju nazivamo **petlja**, dok brid kojemu su krajevi različiti nazivamo **pravi brid** ili **karika**. Ukoliko dva ili više bridova imaju isti par krajeva, nazivamo ih **višestruki bridovi**.

**Stupanj** vrha  $v$  grafa  $G$  je broj bridova od  $G$  incidentnih s vrhom  $v$ , pri čemu se svaka petlja računa kao dva brida. Stupanj vrha  $v$  označavamo s  $d_G(v)$ , ali možemo pisati  $d(v)$  umjesto  $d_G(v)$  ukoliko je jasno o kojem se grafu radi.

**Primjer 2.10.** Na Slici 3 prikazan je primjer grafa  $G$  sa skupom vrhova  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  te skupom bridova  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ .



Slika 3: Primjer grafa  $G$

Matrični prikaz relacija incidencije i susjedstva u grafu često može biti vrlo koristan. Stoga ćemo definirati matricu incidencije i matricu susjedstva. Neka je  $G$  graf sa skupom vrhova  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  te skupom bridova  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ .

**Definicija 2.10.** *Matrica incidencije grafa  $G$  je  $n \times m$  matrica  $M = M(G) = [m_{ij}]$ , gdje je  $m_{ij} \in \{0, 1, 2\}$  broj koji označava koliko su puta vrh  $v_i$  i brid  $e_j$  incidentni.*

**Napomena 2.3.** Za elemente  $m_{ij}$  matrice incidencije grafa vrijedi:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{vrh } v_i \text{ i brid } e_j \text{ nisu incidentni,} \\ 1, & \text{brid } e_j \text{ je pravi brid incidentan s vrhom } v_i, \\ 2, & \text{brid } e_j \text{ je petlja u vrhu } v_i. \end{cases}$$

Također vrijedi da je suma elemenata u retku matrice  $M(G)$  jednaka stupnju odgovarajućeg vrha te da je suma elemenata u stupcu jednaka 2 budući da svaki brid ima 2 kraja.

**Primjer 2.11.** Odredimo matricu incidencije grafa  $G$  prikazanog u Primjeru 2.10.

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Definicija 2.11.** *Matrica susjedstva* grafa  $G$  je  $n \times n$  matrica  $A = A(G) = [a_{ij}]$ , gdje je  $a_{ij}$  broj bridova koji spajaju vrhove  $v_i$  i  $v_j$ .

**Napomena 2.4.** Matrica susjedstva  $A(G)$  je simetrična matrica čiji su članovi ne-negativni cijeli brojevi.

**Primjer 2.12.** Odredimo sada i matricu susjedstva  $A(G)$  grafa  $G$  iz Primjera 2.10.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

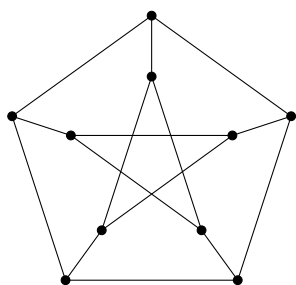
Ukoliko je zadan poredak vrhova i bridova grafa, matrica incidencije i matrica susjedstva su jedinstvene te u potpunosti određuju graf.

Definirajmo sada i neke vrste grafova koje ćemo spominjati u nastavku rada. Kažemo da je graf **jednostavan** ukoliko nema petlje i višestruke bridove. Jednostavan graf u kojemu je svaki par vrhova spojen bridom naziva se **potpun graf** te ga označavamo s  $K_n$ , pri čemu je  $n = |V(G)|$ . Ukoliko graf nije potpun, kažemo da je graf **nepotpun**. Nadalje, kažemo da je graf  $G$   $d$ -regularan ako je  $d(v) = d$ , za svaki  $v \in V(G)$ , a **regularan** ako je  $d$ -regularan za neki  $d \geq 0$ .

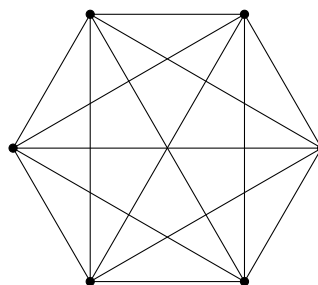
Pored toga, za graf  $G$  kažemo da je **bipartitan** ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa  $X$  i  $Y$  tako da svaki brid ima jedan kraj u  $X$ , a drugi u  $Y$ . Particija  $(X, Y)$  zove se biparticija grafa. Regularan bipartitni graf stupnja

1 zovemo *ljestve*<sup>1</sup>, a njegov komplement *cocktail party graf*. S druge strane, **potpun bipartitni** graf jednostavan je bipartitni graf s biparticijom  $(X, Y)$  u kojem je svaki vrh iz  $X$  spojen sa svakim vrhom iz  $Y$ . Ako je  $|X| = m$  i  $|Y| = n$ , takav graf označava se s  $K_{m,n}$ .

**Primjer 2.13.** Petersenov graf prikazan na Slici 4 je regularan budući da je svaki vrh stupnja 3. Nadalje, s obzirom da postoje vrhovi koji nisu susjedni, graf je nepotpun. S druge strane, graf  $K_6$  prikazan na Slici 5 ujedno je i potpun i 5-regularan graf.

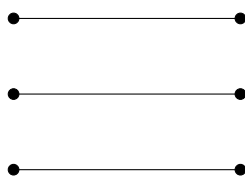


Slika 4: Petersenov graf



Slika 5: Potpuni graf  $K_6$

**Primjer 2.14.** Na Slici 6 prikazan je primjer grafa kojeg zovemo ljestve.



Slika 6: Graf ljestve

Kako bi definirali i povezane grafove, najprije moramo navesti definiciju puta u grafu.

**Definicija 2.12.** *Put* u grafu  $G$  je konačan niz  $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$ , čiji su članovi naizmjenice međusobno različiti vrhovi  $v_j$  i međusobno različiti bridovi  $e_i$  grafa  $G$ , gdje su krajevi brida  $e_i$  vrhovi  $v_{i-1}$  i  $v_i$ , za  $i = 1, \dots, k$ .

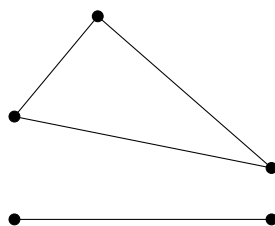
Kažemo da su dva vrha povezana u grafu  $G$  ako postoji put između njih te kažemo da je graf **povezan** ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem.

---

<sup>1</sup>engl. *ladder graph*



**Primjer 2.15.** Grafovi prikazani na Slikama 3, 4 i 5 su primjeri povezanih grafova. S druge strane, graf prikazan na Slici 7 primjer je nepovezanog grafa.

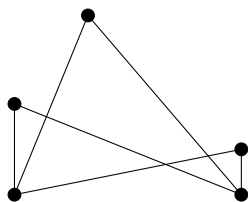


Slika 7: Primjer nepovezanog grafa

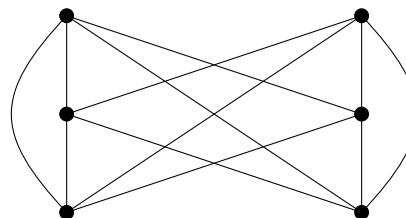
**Definicija 2.13.** *Komplementaran graf* jednostavnog grafa  $G$  je jednostavan graf s istim skupom vrhova  $V$ , u kojem su dva vrha susjedna ako i samo ako nisu susjedna u  $G$ .

Komplementaran graf grafa  $G$  označavamo s  $G^c$  ili  $\overline{G}$ .

**Primjer 2.16.** Na Slikama 8 i 9 prikazani su komplementarni grafovi grafova iz Primjera 2.15 i 2.14, respektivno.



Slika 8: Komplementaran graf



Slika 9: Cocktail party graf

### 2.2.1 Jako regularni grafovi

Kao što je već navedeno ranije, u radu će se posebno opisati veza kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova. Definirajmo stoga i jako regularne grafove.

**Definicija 2.14.** Za graf  $G$  kažemo da je **jako regularan**<sup>2</sup> s parametrima  $SRG(v, a, c, d)$  ako je  $a$ -regularan graf reda  $v$  te ako zadovoljava sljedeća dva uvjeta:

- (i) svaka dva susjedna vrha imaju  $c$  zajedničkih susjeda,
- (ii) svaka dva nesusjedna vrha imaju  $d$  zajedničkih susjeda.

---

<sup>2</sup>engl. *strongly regular graph*

**Primjer 2.17.** Ispitajmo je li Petersenov graf prikazan na Slici 4 jako regularan. U Primjeru 2.13 pokazali smo da je Petersenov graf 3-regularan. Nadalje, uočimo da svaka dva susjedna vrha nemaju zajedničkih susjeda, dok svaka dva nesusjedna vrha dijele jednog zajedničkog susjeda. Stoga zaključujemo da je Petersenov graf jako regularan graf s parametrima  $SRG(10, 3, 0, 1)$ .

Pokažimo sada da je komplement jako regularnog grafa  $G$  također jako regularan i istražimo kako su parametri komplementarnog grafa  $\overline{G}$  povezani s parametrima grafa  $G$ .

**Propozicija 2.1.** *Neka je  $G$  jako regularan graf s parametrima  $SRG(v, a, c, d)$ . Tada je i njegov komplement  $\overline{G}$  jako regularan s parametrima  $SRG(v, v - 1 - a, v - 2a + d - 2, v - 2a + c)$ .*

**Dokaz:** Budući da su u komplementarnom grafu  $\overline{G}$  vrhovi susjedni s vrhovima s kojima nisu susjedni u grafu  $G$ , komplement grafa je regularan stupnja  $\bar{a} = v - 1 - a$ . Nadalje, ako su dva vrha u  $G$  nesusjedna, tada su ukupno susjedna s  $2a - d$  vrhova. To znači da oba vrha nisu susjedna s  $v - 2a + d - 2$  vrhova u  $G$ , što predstavlja parametar  $\bar{c}$  komplementa. Analogno tome možemo odrediti parametar  $\bar{d} = v - 2a + c$ .  $\square$

Navedimo sada posebnu vrstu jako regularnih grafova koju ćemo spominjati u nastavku.

**Definicija 2.15.** *Rešetkasti graf<sup>3</sup>  $L_2(n)$ , za  $n > 2$ , ima skup vrhova  $S \times S$ , gdje je  $S$  skup s kardinalnošću  $n$ . Dva različita vrha  $(i_1, j_1)$  i  $(i_2, j_2)$  su povezana bridom ako i samo ako imaju zajedničku koordinatu, tj. ako i samo ako je  $i_1 = i_2$  ili  $j_1 = j_2$ .*

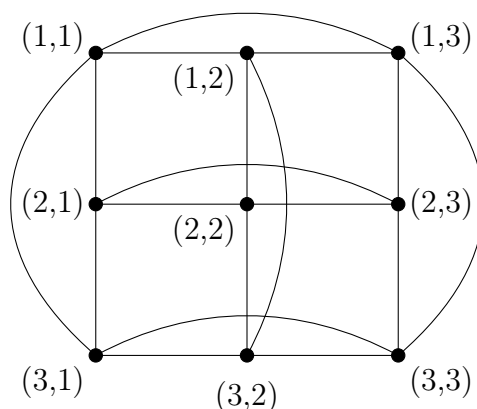
**Napomena 2.5.** Graf  $L_2(n)$  je jako regularan s parametrima  $SRG(n^2, 2(n - 1), n - 2, 2)$ . Naime, graf  $L_2(n)$  kao skup vrhova ima skup  $S \times S$ , pri čemu je  $S$   $n$ -člani skup pa direktno slijedi da  $L_2(n)$  ima  $n^2$  vrhova. Nadalje, ako u proizvoljnom vrhu  $(i, j)$  fiksiramo koordinatu  $i$ , tada je vrh  $(i, j)$  susjedan s još  $n - 1$  vrhova  $(i, l)$ , pri čemu je  $l \neq j$ . Analogno, ako fiksiramo koordinatu  $j$ , tada je vrh  $(i, j)$  susjedan s još  $n - 1$  vrhova  $(k, j)$ , gdje je  $k \neq i$ . Dakle, slijedi da je svaki vrh stupnja  $2(n - 1)$ . Potom, ako pretpostavimo da su proizvoljni vrhovi  $(i_1, j_1)$  i  $(i_2, j_2)$  susjedni, tada

---

<sup>3</sup>engl. *lattice graph*

vrijedi ili  $i_1 = i_2 = i$  ili  $j_1 = j_2 = j$ . U oba slučaja, vrhovi  $(i_1, j_1)$  i  $(i_2, j_2)$  imaju  $n - 2$  zajedničkih susjeda:  $(i, l)$ , za  $l \neq j_1, j_2$  u prvom ili  $(k, j)$ , za  $k \neq i_1, i_2$  u drugom slučaju. Konačno, ako su vrhovi  $(i_1, j_1)$  i  $(i_2, j_2)$  nesusjedni tada su im jedini zajednički susjedi vrhovi  $(i_1, j_2)$  i  $(i_2, j_1)$ .

**Primjer 2.18.** Neka je  $S = \{1, 2, 3\}$ . Tada je skup vrhova rešetkastog grafa  $L_2(3)$  definiran kao  $V = S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ . Graf  $L_2(3)$  prikazan je na slici u nastavku.



Slika 10: Graf  $L_2(3)$

U nastavku navodimo svojstvo matrice susjedstva jako regularnih grafova. Također navodimo teorem koji opisuje da, za određene tipove jako regularnih grafova, graf ili njegov komplement je ili *graf ljestve* ili zadovoljava specifične parametre, što je dokazano u [7]. Ovo svojstvo i teorem bit će korišteni pri dokazivanju teorema koji slijede.

**Propozicija 2.2.** *Simetrična  $(0, 1)$ -matrica  $A$  je matrica susjedstva jako regularnog grafa s parametrima  $SRG(v, a, c, d)$  ako i samo ako*

$$A^2 = aI + cA + d(J - I - A). \quad (2.4)$$

**Dokaz:** Uočimo da  $A_{ij}^2$  odgovara broju zajedničkih susjeda vrhova  $i$  i  $j$ . Stoga, prema definiciji jako regularnih grafova, zaključujemo da vrijedi jednakost (2.4).  $\square$

**Teorem 2.10.** *Neka je  $G$  jako regularan graf s  $n = 2m$  vrhova čije svojstvene vrijednosti imaju kratnosti 1,  $m - 1$  i  $m$ . Tada vrijedi jedno od sljedećeg:*

(i)  *$G$  ili njegov komplement je graf ljestve,*

(ii)  *$G$  ili njegov komplement ima parametre  $n = 4s^2 + 4s + 2$ ,  $a = s(2s + 1)$ ,  $c = s^2 - 1$ ,  $d = s^2$ , za neki pozitivan cijeli broj  $s$ .*

### 3 Kvazisimetrični dizajni

U ovom poglavlju ćemo istražiti posebnu vrstu dizajna – kvazisimetrične dizajne. Osim što ćemo definirati kvazisimetrične dizajne, razmotrit ćemo konkretne primjere i dokazati neka njihova osnovna svojstva.

Neka je  $\mathcal{D} t\text{-}(v, k, \lambda)$  dizajn s blokovima  $B_1, \dots, B_b$ . Kardinalne brojeve  $|B_i \cap B_j|$ ,  $i \neq j$ , nazivamo **presječnim brojevima** dizajna  $\mathcal{D}$ . Definiranje nekih od presječnih brojeva ponekad može pružiti vrlo korisne informacije o dizajnu. Primjerice, prema Teoremu 2.5, svaki 2-dizajn s točno jednim presječnim brojem je simetričan. U ovom radu opisat ćemo dizajne koji su „bliski” simetričnim dizajnim.

**Primjer 3.1.** Odredimo presječne brojeve dizajna  $\mathcal{D}$  s parametrima  $2\text{-}(9, 4, 3)$ . Dizajn  $\mathcal{D}$  ima skup točaka  $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, 9\}$  te familiju blokova  $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 4, 7\}, \{1, 2, 5, 9\}, \{1, 2, 6, 8\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 8\}, \{1, 3, 7, 9\}, \{1, 4, 8, 9\}, \{1, 5, 6, 7\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 6, 8\}, \{2, 3, 7, 9\}, \{2, 4, 7, 8\}, \{2, 5, 6, 9\}, \{3, 4, 6, 9\}, \{3, 5, 7, 8\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{4, 5, 8, 9\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$ .

Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} |\{2, 3, 4, 5\} \cap \{6, 7, 8, 9\}| &= 0, & |\{1, 2, 4, 7\} \cap \{1, 3, 5, 8\}| &= 1, \\ |\{1, 2, 4, 7\} \cap \{1, 2, 5, 9\}| &= 2, & |\{1, 2, 4, 7\} \cap \{2, 4, 7, 8\}| &= 3. \end{aligned}$$

Na analogan način može se provjeriti da će kardinalni brojevi presjeka svaka dva međusobno različita bloka dizajna  $\mathcal{D}$  poprimiti vrijednosti iz skupa  $\{0, 1, 2, 3\}$  pa možemo zaključiti da dizajn ima četiri presječna broja 0, 1, 2 i 3.

**Definicija 3.1.**  *$t\text{-}(v, k, \lambda)$  dizajn s točno dva presječna broja nazivamo **kvazisimetrični dizajn**.*

Drugim riječima, za dizajn kažemo da je kvazisimetričan ako postoje brojevi  $0 \leq x < y$  takvi da se svaka dva bloka sijeku u  $x$  ili  $y$  točaka.

**Napomena 3.1.** Ako je  $\mathcal{D}$  kvazisimetričan  $2-(v, k, \lambda)$  dizajn, tada je i komplementarni dizajn  $\overline{\mathcal{D}}$  kvazisimetričan  $2-(v, v - k, b - 2r + \lambda)$  dizajn. Naime, neka su  $x$  i  $y$  presječni brojevi dizajna  $\mathcal{D}$  takvi da vrijedi  $x < y$ . Tada za skupove  $\overline{B_i}$  i  $\overline{B_j}$ , za koje vrijedi  $|B_i \cap B_j| = x$ , iz De Morganovih<sup>4</sup> zakona<sup>5</sup> slijedi

$$\begin{aligned}\bar{x} &= |\overline{B_i} \cap \overline{B_j}| \\ &= |(B_i \cup B_j)^c| \\ &= |\mathcal{P}| - |B_i| - |B_j| + |B_i \cap B_j| \\ &= v - 2k + x.\end{aligned}$$

Analogno, ako za skupove  $\overline{B_i}$  i  $\overline{B_j}$  vrijedi  $|B_i \cap B_j| = y$ , tada imamo

$$\bar{y} = v - 2k + y,$$

pri čemu vrijedi  $\bar{x} < \bar{y}$ .

**Primjer 3.2.** Budući da dizajn  $\mathcal{D}$  iz Primjera 3.1 ima četiri presječna broja, zaključujemo da nije kvazisimetričan.

**Primjer 3.3.** Neka je  $\mathcal{D}$  višekratnik simetričnog  $2-(v, k, \lambda)$  dizajna. Tada je  $\mathcal{D}$  kvazisimetričan  $2-(v, k, m\lambda)$  dizajn, pri čemu je  $m \geq 2$ , za koji vrijedi  $x = \lambda$  i  $y = k$ . Naime, budući da je  $\mathcal{D}$  višekratnik simetričnog  $2-(v, k, \lambda)$  dizajna, prema Teoremu 2.5 slijedi da su presječni brojevi jednaki  $\lambda$  za različite blokove dizajna  $\mathcal{D}$ . Ukoliko promatramo jednake blokove, presječni brojevi bit će jednaki  $k$ .

U nastavku ćemo pokazati da vrijedi i obrat tvrdnje koju smo koristili u Primjeru 3.3.

---

<sup>4</sup>Augustus De Morgan (1806. – 1871.), britanski matematičar i logičar koji je značajno pridonio razvoju simboličke logike i algebre te definirao matematičku indukciju.

<sup>5</sup>De Morganovi zakoni: za skupove  $A$  i  $B$  vrijedi

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

**Propozicija 3.1.** *Ako kvazisimetrični 2- $(v, k, \mu)$  dizajn  $\mathcal{D}$  ima presječne brojeve  $k$  i  $\lambda$ , tada je  $\mathcal{D}$  višekratnik simetričnog  $(v, k, \lambda)$  dizajna.*

**Dokaz:** Neka je  $\mathcal{D}$  kvazisimetričan 2- $(v, k, \mu)$  dizajn s presječnim brojevima  $k$  i  $\lambda$  te neka je  $A$  proizvoljan blok dizajna  $\mathcal{D}$ . Označimo sa  $s$  broj blokova koji se podudaraju s blokom  $A$  u  $k$  točaka. Nadalje, definirajmo skup  $I := \{(x, B) : x \in A \cap B, B \neq A\}$ . Odredimo  $|I|$  prebrojavanjem na dva načina.

1. Točku  $x$  možemo odabrati na  $k$  načina, a svaka točka  $x$  se nalazi u  $r - 1$  blokova različitih od bloka  $A$ . Slijedi  $|I| = k(r - 1)$ .
2. Znamo da imamo  $s$  blokova koji se s blokom  $A$  podudaraju u  $k$  točaka. Preostalih blokova, različitih od bloka  $A$ , imamo  $b - s - 1$ , a u svakom bloku imamo  $\lambda$  točaka koje se nalaze i u bloku  $A$ . Slijedi  $|I| = sk + (b - s - 1)\lambda$ .

Iz navedenog dobivamo jednadžbu

$$k(r - 1) = |I| = sk + (b - s - 1)\lambda$$

koja ima jedinstveno rješenje

$$s = \frac{k(r - 1) + \lambda(1 - b)}{k - \lambda}$$

koje ne ovisi o bloku  $A$ . Zaključujemo da se svi blokovi ponavljaju  $s$  puta, tj. da je dizajn  $\mathcal{D}$   $s$ -višekratnik 2-dizajna s jedinstvenim presječnim brojem. Slijedi da je  $\mathcal{D}$   $s$ -višekratnik simetričnog dizajna.  $\square$

**Primjer 3.4.** Neka je  $\mathcal{D}$  proizvoljan  $(v, k, 1)$ -BIBD takav da je  $b > v$ . Tada je  $\mathcal{D}$  kvazisimetričan dizajn s presječnim brojevima  $x = 0$  i  $y = 1$ . Naime, neka su  $A$  i  $B$  proizvoljni blokovi dizajna  $\mathcal{D}$  takvi da vrijedi  $A \neq B$ . Označimo sa  $x_1, \dots, x_k$  točke bloka  $A$  te fiksirajmo točku  $x_i$ , za  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Ukoliko se točka  $x_i$  nalazi u bloku  $B$ , tada, budući da je  $\lambda$  jednak 1, znamo da se točke  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$  ne nalaze u bloku  $B$  pa slijedi  $|A \cap B| = 1$ . Nadalje, ukoliko se točke bloka  $A$  ne nalaze u bloku  $B$ , vrijedi  $|A \cap B| = 0$ .

**Napomena 3.2.** Pokažimo da vrijedi i obrat tvrdnje iz prethodnog primjera, tj. da ako za presječne brojeve vrijedi  $x = 0$  i  $y = 1$ , tada nužno slijedi da je  $\lambda = 1$ . Naime, neka su  $x_1$  i  $x_2$  dvije proizvoljne točke dizajna  $\mathcal{D}$ . Točke  $x_1$  i  $x_2$  ne mogu biti prisutne zajedno u više od jednog bloka jer bi u tom slučaju vrijedilo  $y > 1$ . Stoga, broj blokova u kojima se pojavljuju proizvoljne dvije točke, tj.  $\lambda$ , mora biti 1.

Prije nego što navedemo još jedan primjer kvazisimetričnih dizajna u Propoziciji 3.2, dokazat ćemo pomoćnu tvrdnju koja će nam trebati u dokazu.

**Lema 3.1.** *Neka je  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$   $(v, k, \lambda)$ -dizajn i neka je  $A \in \mathcal{B}$ . Za  $i = 0, 1, \dots, k$ , s  $n_i$  označimo broj blokova  $B \in \mathcal{B} \setminus \{A\}$  za koje vrijedi  $|A \cap B| = i$ . Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k n_i &= b - 1, \\ \sum_{i=0}^k i n_i &= k(r - 1), \\ \sum_{i=0}^k i(i - 1) n_i &= k(k - 1)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

**Dokaz:** Prva jednakost je očita. Druga jednakost dobivena je prebrojavanjem na dva načina uređenih parova  $(x, B)$ , gdje je  $B \in \mathcal{B} \setminus \{A\}$  i  $x \in A \cap B$ . Naime, točku  $x$  možemo odabrati na  $k$  načina, a svaka točka  $x$  se nalazi u još  $r - 1$  blokova različitih od bloka  $A$ . Nadalje, blok  $B$  koji ima zajedničke točke s blokom  $A$  možemo odabrati na  $n_1 + \dots + n_k$  načina, dok se u  $n_i$  blokova nalazi  $i$  točaka  $x$  za koje vrijedi  $x \in A \cap B$ . Analogno prethodnoj jednakosti, prebrojavanjem na dva načina uređenih trojki  $(x, y, B)$ , gdje je  $B \in \mathcal{B} \setminus \{A\}$ ,  $x \neq y$  i  $x, y \in A \cap B$  dobivamo posljednju jednakost.  $\square$

**Propozicija 3.2.** *Svaki kvazi-rezidualni  $2$ - $(v, k, 2)$  dizajn je kvazisimetričan s presječnim brojevima  $x = 1$  i  $y = 2$ .*

**Dokaz:** Neka je  $\mathcal{D}$  kvazi-rezidualni  $(v, b, r, k, 2)$ -BIBD. Parametri dizajna  $\mathcal{D}$  su:

$$r = k + 2, \quad v = \frac{k(k + 1)}{2} = \binom{k + 1}{2}, \quad b = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \binom{k + 2}{2}.$$

Fiksirajmo blok  $A$  dizajna  $\mathcal{D}$  te s  $n_i$ , za  $i = 0, 1, \dots, k$ , označimo broj blokova  $B$  različitih od bloka  $A$  takvih da vrijedi  $|A \cap B| = i$ . Prema Lemi 3.1 vrijede sljedeće

jednakosti:

$$\sum_{i=0}^k n_i = b - 1 = \binom{k+2}{2} - 1 = \frac{k(k+3)}{2}, \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=0}^k i n_i = k(r-1) = k(k+1), \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=0}^k i(i-1)n_i = k(k-1)(\lambda-1) = k(k-1). \quad (3.3)$$

Promotrimo izraz

$$Q = \sum_{i=0}^k (i-1)(i-2)n_i = 2n_0 + 2n_3 + 6n_4 + \dots + (k-1)(k-2)n_k.$$

Budući da vrijedi  $(i-1)(i-2)n_i = i(i-1)n_i - 2in_i + 2n_i$ , uvrštavanjem izraza (3.1), (3.2) i (3.3) dobivamo

$$Q = \sum_{i=0}^k i(i-1)n_i - 2 \sum_{i=0}^k i n_i + 2 \sum_{i=0}^k n_i = k(k-1) - 2k(k+1) + 2 \cdot \frac{k(k+3)}{2} = 0.$$

Dakle,  $n_0 = n_3 = n_4 = \dots = n_k = 0$ , tj.  $n_i = 0$ , za  $i \neq 1, 2$ . Budući da  $\mathcal{D}$  nije simetričan, vrijedi da mora imati barem dva presječna broja. Stoga, zaključujemo da je  $\mathcal{D}$  kvazisimetrični dizajn s presječnim brojevima  $x = 1$  i  $y = 2$ .  $\square$

**Napomena 3.3.** Iz (3.1) i (3.2) dobijemo sljedeći sustav jednadžbi

$$n_1 + n_2 = \frac{k(k+3)}{2},$$

$$n_1 + 2n_2 = k(k+1),$$

čija su rješenja

$$n_1 = 2k \quad \text{i} \quad n_2 = \binom{k}{2}.$$

Drugim riječima, zaključujemo da  $2k$  blokova sijeku blok  $A$  u jednoj, a  $\binom{k}{2}$  blokova sijeku blok  $A$  u dvije točke.

U prethodnoj napomeni smo za svaki kvazi-rezidualni  $2$ - $(v, k, 2)$  dizajn odredili koliko blokova sijeku fiksni blok dizajna u jednoj, odnosno u dvije točke. Odredimo sada te vrijednosti i za proizvoljan kvazisimetrični dizajn.



Neka je  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$  kvazisimetričan dizajn s presječnim brojevima  $x$  i  $y$  te neka je  $B_0 \in \mathcal{B}$  fiksni blok dizajna  $\mathcal{D}$ . Označimo s  $n_x$  broj blokova koji sijeku blok  $B_0$  u  $x$  točaka te s  $n_y$  broj blokova koji sijeku blok  $B_0$  u  $y$  točaka. Tada vrijedi

$$n_x + n_y = b - 1. \quad (3.4)$$

Nadalje, definirajmo skup  $I := \{(T, B) : T \in B_0 \cap B, B \neq B_0\}$  te odredimo  $|I|$  prebrojavanjem na dva načina. Točku  $T$  možemo odabrati na  $k$  načina, dok se svaka točka nalazi u  $r-1$  blokova različitih od bloka  $B_0$ . Nadalje, blok  $B$  koji nije disjunktan s blokom  $B_0$  možemo odabrati na  $n_x + n_y$  načina te se u  $n_x$  blokova nalazi  $x$  točaka  $T$ , a u  $n_y$  blokova  $y$  točaka  $T$  za koje vrijedi  $T \in B_0 \cap B$ . Iz navedenog slijedi

$$xn_x + yn_y = k(r - 1). \quad (3.5)$$

Jednadžbe (3.4) i (3.5) imaju jedinstveno rješenje

$$n_x = \frac{y(b-1) - k(r-1)}{y-x} \quad \text{i} \quad n_y = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x} \quad (3.6)$$

koje ne ovisi o izboru bloka  $B_0$ . Zaključujemo da  $\frac{y(b-1)-k(r-1)}{y-x}$  blokova sijeku proizvoljni blok u  $x$ , a  $\frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x}$  blokova sijeku proizvoljan blok u  $y$  točaka.

U Propoziciji 3.1 pokazali smo da ako kvazisimetrični dizajn ima presječne brojeve  $k$  i  $\lambda$ , tada je taj dizajn višekratnik simetričnog dizajna. Pokazat ćemo da isti zaključak vrijedi i za kvazisimetrični dizajn s ponovljenim blokovima.

**Propozicija 3.3.** *Neka je  $\mathcal{D}$  kvazisimetrični dizajn s ponovljenim blokovima. Tada je  $\mathcal{D}$  višekratnik simetričnog dizajna.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da dizajn  $\mathcal{D}$  s parametrima  $(v, k, \lambda)$  ima ponovljene blokove. Tada je  $y = k$  i svaki blok se ponavlja  $m = n_y + 1$  puta, pri čemu je  $n_y$  definiran kao u (3.6). Stoga,  $\mathcal{D}$  je  $m$ -strukli višekratnik nekog  $t$ - $(v, k, \frac{\lambda}{m})$  dizajna u kojem se svaka dva bloka sijeku u  $x = \frac{\lambda}{m}$  točaka. Prema Teoremu 2.5, taj dizajn je simetričan.  $\square$

Sljedeća dva rezultata pružaju korisne odnose i nejednakosti među parametrima kvazisimetričnih dizajna, pretpostavljajući određene vrijednosti presječnih brojeva.

**Propozicija 3.4.** *Neka su  $x$  i  $y$  presječni brojevi kvazisimetričnog dizajna s parametrima  $v, b, r, k, \lambda$ .*

(i) *Ako je  $x = 0$ , tada vrijedi  $(r - 1)(y - 1) = (k - 1)(\lambda - 1)$ .*

(ii) *Ako je  $x = 0$ , tada vrijedi  $b \leq \frac{v(v-1)}{k}$  i  $y \leq \lambda$ .*

(iii) *Ako su  $x = 0$  i  $y = 1$ , tada vrijedi  $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ .*

**Dokaz:**

(iii) Iz relacija (2.1) i (2.2) slijedi:

$$b = \frac{v(v-1)\lambda}{k(k-1)}.$$

Prema Napomeni 3.2, ako su presječni brojevi  $x = 0$  i  $y = 1$ , tada nužno slijedi  $\lambda = 1$ . Time je dokazana tvrdnja (iii).

(i) Pretpostavimo da za kvazisimetrični dizajn vrijedi  $x = 0$ . Neka je  $p$  proizvoljna točka i  $\mathcal{D}_p$  derivirana konfiguracija. Točke u  $\mathcal{D}_p$  su točke iz  $\mathcal{D}$  osim točke  $p$ , dok su blokovi u  $\mathcal{D}_p$  blokovi iz  $\mathcal{D}$  koji sadrže  $p$ . Tada  $\mathcal{D}_p$  ima  $v - 1$  točaka,  $r$  blokova, veličinu bloka  $k - 1$  te se svaka točka iz  $\mathcal{D}_p$  nalazi u  $\lambda$  blokova. Budući da je  $x = 0$ , dual dizajna  $\mathcal{D}_p$  je dizajn s parametrima  $(r, v - 1, k - 1, \lambda, y - 1)$ . Stoga iz (2.1) slijedi jednakost  $(r - 1)(y - 1) = (k - 1)(\lambda - 1)$ .

(ii) Primjenom Fisherove nejednakosti 2.3 na dual dizajna  $\mathcal{D}_p$  dobivamo  $v - 1 \geq r$  iz čega slijedi  $b \leq \frac{v(v-1)}{k}$ .  $y \leq \lambda$  slijedi iz (i) i  $r \geq k$ .  $\square$

U nastavku navodimo posljednicu prethodne propozicije koju su dokazali Cameron<sup>6</sup> i van Lint<sup>7</sup> [7].

**Korolar 3.1.** *Neka je  $\mathcal{D}$  dizajn s parametrima  $2$ - $(v, k, \lambda)$  takav da vrijedi  $2 < k < v - 1$ . Tada bilo koje dvije od sljedeće tri tvrdnje impliciraju treću tvrdnju.*

(i)  $\mathcal{D}$  je 3-dizajn,

---

<sup>6</sup>Peter Jephson Cameron (1947. - ), australski profesor matematike na Sveučilištu St Andrews te profesor emeritus na Queen Mary Sveučilištu u Londonu.

<sup>7</sup>Jacobus Hendricus van Lint (1932. - 2004.), nizozemski matematičar rođen u Indoneziji koji je radio u teoriji brojeva, kao i u kombinatorici i teoriji kodiranja.

(ii)  $\mathcal{D}$  je kvazisimetričan dizajn s  $x = 0$ ,

(iii)  $b = \frac{v(v-1)}{k}$ .

Nadalje, vrijedi i da je  $\mathcal{D}$  proširenje simetričnog 2-dizajna.

Osim uvjeta navedenih u Propoziciji 3.4, parametri i brojevi presjeka kvazisimetričnog dizajna zadovoljavaju sljedeću jednadžbu.

**Propozicija 3.5.** *U svakom kvazisimetričnom  $2$ - $(v, k, \lambda)$  dizajnu  $\mathcal{D}$  s presječnim brojevima  $x$  i  $y$  vrijedi*

$$k(r-1)(x+y-1) + xy(1-b) = k(k-1)(\lambda-1). \quad (3.7)$$

**Dokaz:** Neka je  $A$  proizvoljan blok dizajna  $\mathcal{D}$ . Za blok  $A$  vrijedi da  $n_y$  blokova sijeku  $A$  u  $y$  točaka, dok se preostalih  $b-1-n_y$  blokova siječe s  $A$  u  $x$  točaka, pri čemu je  $n_y$  definiran kao u (3.6). Prebrojavanjem parova  $(p, B)$  na dva načina, gdje je  $B$  blok dizajna  $\mathcal{D}$  različit od bloka  $A$  i gdje je  $p \in A \cap B$ , dobivamo

$$yn_y + (b-1-n_y)x = k(r-1). \quad (3.8)$$

Analogno, dvostrukim prebrojavanjem trojki  $(p, q, B)$ , gdje je  $B$  blok dizajna  $\mathcal{D}$  različit od bloka  $A$ ,  $p, q \in A \cap B$  i  $p \neq q$ , dobivamo

$$y(y-1)n_y + (b-1-n_y)x(x-1) = k(k-1)(\lambda-1). \quad (3.9)$$

Nadalje, iz jednadžbe (3.8) slijedi

$$n_y = \frac{k(r-1) + x(1-b)}{y-x},$$

dok iz jednadžbe (3.9) slijedi

$$n_y = \frac{k(k-1)(\lambda-1) + x(x-1)(1-b)}{y(y-1) - x(x-1)}.$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih dvaju izraza za  $n_y$  slijedi jednakost (3.7).  $\square$

### 3.1 Veza kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova

U ovom potpoglavlju razmotrit ćemo povezanost između kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova. Započet ćemo s Boseovim<sup>8</sup> rezultatom [3] koji uspostavlja vezu između jako regularnih grafova i Steinerovih 2-dizajna, pružajući osnovu za razumijevanje tih struktura. Nakon toga, proširit ćemo ovu konstrukciju na proizvoljne kvazisimetrične dizajne. Također ćemo obuhvatiti osnovna svojstva kvazisimetričnih dizajna i njihovih blokovnih grafova te analizirati kako ove karakteristike utječu na njihovu povezanost s jako regularnim grafovima.

**Propozicija 3.6.** *Neka je  $\mathcal{D}$  dizajn s parametrima  $2-(v, k, 1)$  takav da je  $b > v$ . Nadalje, neka je  $\Gamma(\mathcal{D})$  graf dobiven iz  $\mathcal{D}$  tako da blokovi predstavljaju vrhove, pri čemu su dva vrha susjedna ako se odgovarajući blokovi sijeku. Tada je  $\Gamma(\mathcal{D})$  jako regularan graf s  $b$  vrhova i parametrima:*

$$a = k(r - 1), \quad c = r - 2 + (k - 1)^2, \quad d = k^2.$$

**Dokaz:** Svaki vrh grafa  $\Gamma(\mathcal{D})$  je stupnja  $k(r - 1)$  budući da se svaka od  $k$  točaka nalazi u još  $r - 1$  blokova. Potom, neka su  $B_1$  i  $B_2$  blokovi koji odgovaraju susjednim vrhovima grafa  $\Gamma(\mathcal{D})$ . Iz Primjera 3.4 znamo da se blokovi  $B_1$  i  $B_2$  sijeku u jednoj točki. Označimo s  $x$  točku koja se nalazi u oba bloka. Znamo da se točka  $x$  nalazi u još  $r - 2$  drugih blokova. Preostali blokovi koji sijeku oba bloka, a ne sadrže točku  $x$ , sadrže jednu od preostalih  $k - 1$  točaka bloka  $B_1$  i  $k - 1$  točaka bloka  $B_2$ . Slijedi da dva susjedna vrha grafa  $\Gamma(\mathcal{D})$  imaju  $r - 2 + (k - 1)^2$  zajedničkih susjeda. Naposljetku, pretpostavimo sada da su blokovi  $B_1$  i  $B_2$  disjunktni. Tada blokovi koji sijeku oba bloka sadrže jednu od  $k$  točaka bloka  $B_1$  i  $k$  točaka bloka  $B_2$ . Dakle, svaka dva nesusjedna vrha imaju  $k^2$  zajedničkih susjeda.  $\square$

**Primjer 3.5.** Odredimo graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  dobiven iz dizajna  $\mathcal{D}$  s parametrima  $2-(9, 3, 1)$ .

Označimo za početak blokove dizajna  $\mathcal{D}$  s

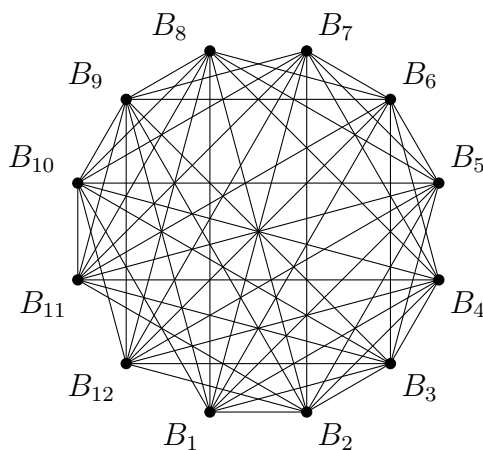
$$\begin{aligned} B_1 &:= \{1, 2, 3\}, & B_2 &:= \{1, 4, 7\}, & B_3 &:= \{1, 5, 9\}, & B_4 &:= \{1, 6, 8\}, \\ B_5 &:= \{2, 4, 9\}, & B_6 &:= \{2, 5, 8\}, & B_7 &:= \{2, 6, 7\}, & B_8 &:= \{3, 4, 8\}, \\ B_9 &:= \{3, 5, 7\}, & B_{10} &:= \{3, 6, 9\}, & B_{11} &:= \{4, 5, 6\}, & B_{12} &:= \{7, 8, 9\}. \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Raj Chandra Bose (1901. - 1987.), indijski matematičar i statističar. Najpoznatiji je po svom radu u teoriji dizajna, konačnoj geometriji i teoriji kodova za ispravljanje pogrešaka.

Prema Propoziciji 3.6, znamo da blokovi  $B_1, \dots, B_{12}$  predstavljaju vrhove grafa  $\Gamma(\mathcal{D})$ . Odredimo sada susjedne vrhove od  $B_1$ . Uočimo da blokovi  $B_2, B_3, \dots, B_{10}$  sijeku blok  $B_1$  u točno jednoj točki. Dakle, vrhovi koji odgovaraju blokovima  $B_2, B_3, \dots, B_{10}$  bit će susjedni vrhu koji odgovara bloku  $B_1$ . Susjedi preostalih vrhova se određuju analogno.

Dobiveni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  je prikazan u nastavku.



Slika 11: Graf  $\Gamma(\mathcal{D})$

Uočimo da je  $\Gamma(\mathcal{D})$  jako regularan graf s parametrima  $SRG(12, 9, 6, 9)$ .

S.S. Shrikhande<sup>9</sup> i Bhagwandas su proširili navedenu konstrukciju na proizvoljne kvazisimetrične dizajne [27]. Dobiveni grafovi se nazivaju blokovni grafovi, a definiciju istih navodimo u nastavku.

**Definicija 3.2.** *Blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  pridružen kvazisimetričnom  $2-(v, k, \lambda)$  dizajnu  $\mathcal{D}$  s presječnim brojevima  $x$  i  $y$ , gdje je  $x < y$ , definiramo na sljedeći način:*

- *vrhovi grafa predstavljaju blokove,*
- *dva vrha su susjedna ako se odgovarajući blokovi sijeku u točno  $y$  točaka.*

Znamo da je komplement kvazisimetričnog dizajna kvazisimetričan. Štoviše, budući da se blokovi  $B_i$  i  $B_j$  sijeku u  $y$  točaka ako i samo ako se njihovi komplementi  $\overline{B}_i$  i  $\overline{B}_j$  sijeku u  $\bar{y}$  točaka, slijedi da je  $\Gamma(\mathcal{D}) = \Gamma(\overline{\mathcal{D}})$ .

---

<sup>9</sup>Shartchandra Shankar Shrikhande (1917.-2020.), indijski kombinatorni matematičar.

Kako bi pokazali da su blokovni grafovi jako regularni, najprije dokazujemo pomoćne tvrdnje koje ćemo koristiti u dokazu.

**Lema 3.2.** *Neka je  $A = pI + q(J - I)$  kvadratna matrica reda  $v$ , pri čemu je  $q \neq 0$ . Spektar matrice  $A$  jednak je  $\{p+(v-1)q, p-q\}$ , gdje je svojstvena vrijednost  $p+(v-1)q$  kratnosti 1, a  $p - q$  kratnosti  $v - 1$ .*

**Dokaz:** Budući da vrijedi  $A \cdot j = (p + (v - 1)q)j$ , zaključujemo da je  $p + (v - 1)q$  svojstvena vrijednost matrice  $A$  pridružena svojstvenom vektoru  $j$ . Također, vektor  $x = (x_1, \dots, x_v)$  zadovoljava jednakost  $A \cdot x = (p - q)x$  ako i samo ako je  $q(x_1 + \dots + x_v) = 0$ . Dakle, slijedi da je  $p - q$  svojstvena vrijednost čiji je svojstveni potprostor  $(v - 1)$ -dimenzionalni potprostor zadan jednadžbom  $x_1 + \dots + x_v = 0$ . Drugim riječima, zaključujemo da je  $p - q$  svojstvena vrijednost matrice  $A$  kratnosti  $v - 1$ .  $\square$

**Lema 3.3.** *Za proizvoljnu matricu  $N$ , svaka nenula svojstvena vrijednost matrice  $NN^T$  ujedno je i svojstvena vrijednost matrice  $N^TN$  s istom kratnosti.*

**Dokaz:** Neka je  $s$  svojstvena vrijednost matrice  $NN^T$ , pri čemu je  $s \neq 0$ , te neka je  $x$  pripadajući svojstveni vektor različit od nul-vektora. Tada vrijedi  $NN^T x = sx$  iz čega slijedi

$$N^T x \neq 0 \quad \text{i} \quad (N^T N)(N^T x) = s(N^T x).$$

Dakle, zaključujemo da je  $s$  svojstvena vrijednost matrice  $N^T N$  pridružena svojstvenom vektoru  $N^T x$  koji je različit od nul-vektora. Nadalje, znamo da dimenzija svojstvenog prostora pridruženog svojstvenoj vrijednosti simetrične matrice odgovara (geometrijskoj) kratnosti te svojstvene vrijednosti. Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_m$  linearno nezavisni svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti  $s \neq 0$  matrice  $NN^T$ . Tada su odgovarajući svojstveni vektori  $N^T x_1, N^T x_2, \dots, N^T x_m$  matrice  $N^T N$  također linearno nezavisni. Naime, pretpostavimo da vrijedi  $\sum_{i=1}^m \alpha_i N^T x_i = 0$ . Tada vrijedi i  $\sum_{i=1}^m \alpha_i NN^T x_i = 0$ , iz čega slijedi  $\sum_{i=1}^m \alpha_i s x_i = 0$ , odnosno  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$ . Budući da su vektori  $x_1, \dots, x_m$  linearno nezavisni, slijedi  $\alpha_i = 0$  za svaki  $i = 1, \dots, m$ . Dakle, svaka nenula svojstvena vrijednost matrice  $NN^T$  ujedno je i svojstvena vrijednost matrice  $N^T N$  s najmanje istom kratnosti. Zamjenom matrica  $N$  i  $N^T$ , tvrdnja leme je dokazana.  $\square$

U nastavku je navedena direktna posljedica Leme 3.3 te teorem čiji dokaz možete pronaći u [26].

**Korolar 3.2.** *Neka je  $N$   $v \times b$  matrica, pri čemu je  $v \leq b$ . Tada se spektar matrice  $N^T N$  može dobiti dodavanjem  $b - v$  nula u spektar od matrice  $NN^T$ .*

**Teorem 3.1.** *Regularan, povezan i nepotpun graf reda  $v$  s matricom susjedstva  $A$  je jako regularan s parametrima  $SRG(v, a, c, d)$  ako i samo ako matrica  $A$  ima točno tri svojstvene vrijednosti  $\theta_0, \theta_1$  i  $\theta_2$ . U tom slučaju vrijedi  $\theta_0 = a, c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$  i  $d = a + \theta_1\theta_2$ .*

Dokažimo sada da je blokovni graf pridružen proizvoljnom kvazisimetričnom dizajnu jako regularan uz pretpostavku da je blokovni graf povezan.

**Teorem 3.2.** *Neka je  $\mathcal{D}$  kvazisimetrični  $2$ - $(v, b, r, k, \lambda)$  dizajn s presječnim brojevima  $x$  i  $y$ , gdje je  $x < y$ . Pretpostavimo da mu je pridruženi blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  povezan. Tada je graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  jako regularan graf reda  $b$  s parametrima*

$$a = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x}, \quad c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2, \quad d = a + \theta_1\theta_2,$$

gdje su  $\theta_1 = \frac{r-\lambda-k+x}{y-x}$  i  $\theta_2 = -\frac{k-x}{y-x}$ .

**Dokaz:** Označimo s  $N$   $v \times b$  incidencijsku matricu dizajna  $\mathcal{D}$  te s  $A$  matricu susjedstva blokovnog grafa  $\Gamma(\mathcal{D})$ . Promotrimo matricu  $N^T N$ . Svaki element  $(i, j)$  matrice  $N^T N$  odgovara kardinalnom broju presjeka  $i$ -tog i  $j$ -tog bloka dizajna  $\mathcal{D}$ . U slučaju  $i = j$  veličina presjeka jednaka je  $k$ . U protivnom, ako su odgovarajući vrhovi blokovnog dizajna  $\Gamma(\mathcal{D})$  susjedni, veličina presjeka je  $y$  te je jednaka  $x$  ukoliko vrhovi nisu susjedni. Iz navedenog slijedi da je veza između matrica  $N$  i  $A$  sljedeća

$$N^T N = kI + yA + x(J - I - A).$$

Drugim riječima, vrijedi

$$(y-x)A = N^T N + (x-k)I - xJ. \tag{3.10}$$

Prema Teoremu 2.4 znamo da vrijedi  $NN^T = (r-\lambda)I + \lambda J = rI + \lambda(J-I)$ . Nadalje, prema Lemi 3.2 znamo da matrica  $NN^T$  ima svojstvene vrijednosti  $r +$

$(v - 1)\lambda$  kratnosti 1 i  $r - \lambda$  kratnosti  $v - 1$ . Primijenimo li (2.1), možemo pisati  $r + (v - 1)\lambda = rk$  te zaključujemo da vrijedi  $\sigma(NN^T) = \{rk, r - \lambda\}$ .

Odredimo sada i spektar matrice  $N^T N$ . Prema Lemi 3.3, znamo da matrice  $NN^T$  i  $N^T N$  imaju jednake nenula svojstvene vrijednosti iste kratnosti. Također, prema Korolaru 3.2, slijedi da matrica  $N^T N$  ima i svojstvenu vrijednost 0 kratnosti  $b - v$ . Iz navedenog zaključujemo da je  $\sigma(N^T N) = \{rk, r - \lambda, 0\}$ .

Primjenjujući vezu (3.10) slijedi da spektar od  $A$  sadrži sljedeće svojstvene vrijednosti:  $\theta_0 = \frac{rk+x-k-xb}{y-x} = \frac{r(k-1)+x(1-b)}{y-x}$  kratnosti 1,  $\theta_1 = \frac{r-\lambda-k+x}{y-x}$  kratnosti  $v - 1$  i  $\theta_2 = \frac{x-k}{y-x}$  kratnosti  $b - v$ .

Prema Teoremu 3.1 zaključujemo da je blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  pridružen kvazisimetričnom dizajnu  $\mathcal{D}$  jako regularan s parametrima  $SRG(b, a, c, d)$ , pri čemu vrijedi  $a = \theta_0 = \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x}$ ,  $c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$  i  $d = a + \theta_1\theta_2$ .  $\square$

**Primjer 3.6.** Odredimo blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  pridružen dizajnu  $\mathcal{D}$  s parametrima 2-(6, 3, 2). U Primjeru 2.6 smo pokazali da je dizajn  $\mathcal{D}$  kvazi-rezidualan, dok prema Propoziciji 3.2 znamo da je dizajn  $\mathcal{D}$  ujedno i kvazisimetričan s presječnim brojevima  $x = 1$  i  $y = 2$ .

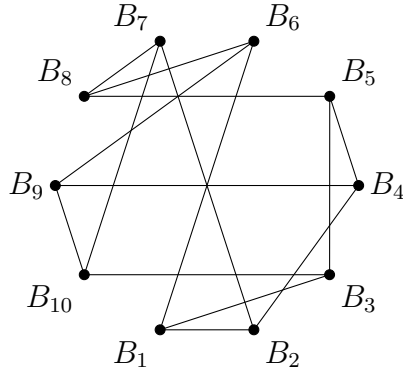
Označimo najprije blokove dizajna  $\mathcal{D}$  s

$$B_1 := \{1, 2, 3\}, \quad B_2 := \{1, 2, 4\}, \quad B_3 := \{1, 3, 6\}, \quad B_4 := \{1, 4, 5\}, \quad B_5 := \{1, 5, 6\}, \\ B_6 := \{2, 3, 5\}, \quad B_7 := \{2, 4, 6\}, \quad B_8 := \{2, 5, 6\}, \quad B_9 := \{3, 4, 5\}, \quad B_{10} := \{3, 4, 6\}.$$

Prema definiciji blokovnog grafa slijedi da blokovi  $B_1, \dots, B_{10}$  predstavljaju vrhove blokovnog grafa  $\Gamma(\mathcal{D})$  te da će dva vrha biti susjedna ukoliko se odgovarajući blokovi sijeku u točno dvije točke. Odredimo sada susjedne vrhove od vrha koji odgovara bloku  $B_1$ . Uočimo da za blokove  $B_2, B_3$  i  $B_6$  vrijedi  $|B_1 \cap B_2| = |\{1, 2\}| = 2$ ,  $|B_1 \cap B_3| = |\{1, 3\}| = 2$  te  $|B_1 \cap B_6| = |\{2, 3\}| = 2$ . Stoga zaključujemo da će vrhovi koji odgovaraju blokovima  $B_2, B_3$  i  $B_6$  biti susjedni vrhu koji odgovara bloku  $B_1$ . Susjedni vrhovi preostalih vrhova se određuju analogno.

Dobiveni blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  prikazan je na slici u nastavku.





Slika 12: Blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$

Uočimo da je blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  jako regularan s parametrima  $SRG(10, 3, 0, 1)$ .

**Napomena 3.4.** Budući da je poznato ([5]) da postoji jedinstveni jako regularni graf s parametrima  $SRG(10, 3, 0, 1)$ , poznat i kao Petersenov graf, dobiveni blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  iz prethodnog primjera je Petersenov graf.

U dokazu posljedice prethodnog teorema koristit ćemo pomoćne tvrdnje navedene u nastavku.

**Lema 3.4.** *Neka je  $M$  simetrična matrica s realnim elementima. Tada su svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima matrice  $M$  ortogonalni.*

**Dokaz:** Neka su  $\alpha$  i  $\beta$  različite svojstvene vrijednosti matrice  $M$  te neka su  $x$  i  $y$  odgovarajući svojstveni vektori. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
 \alpha y^T x &= y^T M x \\
 &= (x^T M y)^T \\
 &= (x^T \beta y)^T \\
 &= \beta y^T x.
 \end{aligned}$$

Budući da vrijedi  $\alpha \neq \beta$ , slijedi  $y^T x = 0$ . Dakle, zaključujemo da su svojstveni vektori  $x$  i  $y$  ortogonalni.  $\square$

**Lema 3.5.** *Ako je  $\alpha$  racionalan broj takav da vrijedi*

$$\alpha^2 + b\alpha + c = 0,$$

*gdje su  $b$  i  $c$  cijeli brojevi, tada je  $\alpha$  cijeli broj.*

**Dokaz:** Neka je  $\alpha = \frac{x}{y}$ , pri čemu je najveći zajednički djelitelj od  $x$  i  $y$  jednak 1.

Tada imamo

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y}b + c = 0,$$

iz čega slijedi

$$x^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$x^2 = -y(bx + cy)$$

iz čega zaključujemo da  $y$  dijeli  $x^2$ . Budući da smo pretpostavili da je najveći zajednički djelitelj od  $x$  i  $y$  jednak 1, slijedi da je  $y = 1$ , tj. zaključujemo da je  $\alpha$  cijeli broj.  $\square$

**Korolar 3.3.** *Ako su  $x < y$  presječni brojevi kvazisimetričnog 2- $(v, b, r, k, \lambda)$  dizajna, tada  $y - x$  dijeli  $k - x$  i  $r - \lambda$ .*

**Dokaz:** Pokažimo najprije da su parametri  $\theta_1$  i  $\theta_2$  iz Teorema 3.2 ujedno i korijeni normiranog polinoma  $\theta^2 + (d - c)\theta + d - a$  s cjelobrojnim koeficijentima. Neka je  $\mathcal{D}$  kvazisimetrični dizajn te neka je  $A$  matrica susjedstva blokovnog grafa  $\Gamma(\mathcal{D})$ . Prema Teoremu 3.2 znamo da je graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  jako regularan s parametrima  $SRG(b, a, c, d)$ . Nadalje, prema definiciji jako regularnog grafa, znamo da je suma retka (stupca) matrice  $A$  jednaka  $a$ . Dakle, vrijedi  $Aj = aj$ , pri čemu je  $j$  vektor duljine  $v$  čiji su svi elementi jednaki 1. Stoga zaključujemo da je  $j$  svojstveni vektor matrice  $A$  te da je  $a$  jedna od njezinih svojstvenih vrijednosti.

Neka je sada  $\theta \neq a$  svojstvena vrijednost matrice  $A$  koja odgovara svojstvenom vektoru  $x$ . Primjenjujući (2.4) dobivamo

$$A^2x + (d - c)Ax + (d - a)Ix - dJx = 0.$$

Nadalje, prema Lemi 3.4 slijedi  $j^T x = 0$  pa vrijedi  $Jx = 0$ . Stoga vrijedi

$$\theta^2 x + (d - c)\theta x + (d - a)x = 0$$

te budući da je svojstveni vektor  $x$  različit od nul-vektora, slijedi

$$\theta^2 + (d - c)\theta + d - a = 0. \tag{3.11}$$

Iz Vièteovih<sup>10</sup> formula<sup>11</sup> slijedi da rješenja  $\theta_1$  i  $\theta_2$  kvadratne jednadžbe (3.11) zadovoljavaju  $\theta_1\theta_2 = d - a$  te  $\theta_1 + \theta_2 = c - d$  iz čega slijedi  $d = a + \theta_1\theta_2$  i  $c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$ . Uočimo da smo dobili parametre iz Teorema 3.2.

Pokazali smo da su racionalni brojevi  $\theta_1 = \frac{r-\lambda-k+x}{y-x}$  i  $\theta_2 = -\frac{k-x}{y-x}$  ujedno i nultočke normiranog polinoma  $\theta^2 + (d - c)\theta + d - a$  s cjelobrojnim koeficijentima. Prema Lemi 3.5, slijedi da  $\theta_1$  i  $\theta_2$  moraju biti cijeli brojevi, čime su zadovoljeni uvjeti djeljivosti navedeni u korolaru.  $\square$

Sljedeći rezultat, koji su dokazali D. K. Ray-Chaudhuri<sup>12</sup> i R. M. Wilson<sup>13</sup> [24], koristit ćemo u dokazu za gornju ogradu broja blokova kvazisimetričnog dizajna bez ponovljenih blokova.

**Teorem 3.3.** *Neka je  $X$   $v$ -člani skup i  $\mathcal{A}$  familija  $k$ -članih podskupova od  $X$  takva da za svaka dva različita skupa  $A, B \in \mathcal{A}$  vrijedi*

$$|A \cap B| \in \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\},$$

pri čemu vrijedi  $0 \leq \mu_s < \dots < \mu_2 < \mu_1 < k$ . Tada vrijedi

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{v}{s}.$$

**Teorem 3.4.** *Kvazisimetrični dizajn bez ponovljenih blokova i čiji je pridruženi blokovni graf povezan može imati najviše  $\binom{v}{2}$  blokova.*

**Dokaz:** Tvrdnja teorema direktno slijedi iz Teorema 3.3 za parametre  $s = 2$ ,  $\mu_1 = y$  i  $\mu_2 = x$ .  $\square$

Cameron i van Lint [7] pokazali su za koje kvazisimetrične dizajne vrijedi da je broj blokova  $b$  točno jednak  $\binom{v}{2}$ .

<sup>10</sup>François Viète (1540. - 1603.), francuski matematičar i astronom.

<sup>11</sup>Za rješenja  $x_1$  i  $x_2$  kvadratne jednadžbe  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdje je  $a \neq 0$  vrijedi:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

<sup>12</sup>Dwijendra Kumar Ray-Chaudhuri (1933. - ), najpoznatiji je po svom radu u teoriji dizajna i teoriji kodova za ispravljanje pogrešaka.

<sup>13</sup>Richard Michael Wilson (1945. - ), američki matematičar poznat po svom radu u kombinatornoj matematici.

**Teorem 3.5.** *Neka je  $\mathcal{D}$  kvazisimetrični dizajn bez ponovljenih blokova takav da vrijedi  $4 \leq k \leq v - 4$ . Tada je  $b = \binom{v}{2}$  ako i samo ako je  $\mathcal{D}$  4-dizajn.*

U svom radu [12], Goethals<sup>14</sup> i Seidel<sup>15</sup> su ispitali različite poznate jako regularne grafove kako bi utvrdili koji od njih mogu biti blokovni grafovi kvazisimetričnih 2-dizajna. U nastavku navodimo ključne rezultate njihovog istraživanja.

**Teorem 3.6.** *Neka je  $\mathcal{D}$  kvazisimetrični 2-dizajn čiji je blokovni graf  $\Gamma$ . Tada vrijedi:*

- (i) *Ako je  $\Gamma$  graf ljestve, tada je  $\mathcal{D}$  dizajn koji se sastoji od dvije kopije simetričnog blokovnog dizajna.*
- (ii) *Ako je  $\Gamma$  cocktail party graf, tada je  $\mathcal{D}$  Hadamardov 3-dizajn.*
- (iii) *Nema kvazisimetričnog 2-dizajna čiji je blokovni graf rešetkasti graf  $L_2(n)$  ili njegov komplement.*

Sljedeći rezultat, koji također potječe iz istraživanja Goethalsa i Seidela [12], dodatno doprinosi našem razumijevanju karakteristika kvazisimetričnih 2-dizajna sa specifičnim parametrima.

**Teorem 3.7.** *Kvazisimetrični 2-dizajn s  $b = 2v - 2$  je ili Hadamardov 3-dizajn ili jedinstveni 2-(6, 3, 2) dizajn.*

**Dokaz:** Neka je  $\mathcal{D}$  kvazisimetričan  $2-(v, k, \lambda)$  dizajn za koji vrijedi  $b = 2v - 2$ . Tada iz (2.2) slijedi  $2(v - 1)k = vr$  pa  $v - 1$  mora biti djeljitelj od  $r$ . Budući da je  $r < b = 2(v - 1)$ , zaključujemo da je  $r = v - 1$ , iz čega slijedi da je  $v = 2k$  te  $b = 4k - 2$ .

Neka je  $\Gamma$  blokovni graf dizajna  $\mathcal{D}$  s parametrima  $SRG(b, a, c, d)$  te neka je  $A$  proizvoljni blok dizajna  $\mathcal{D}$ . Pretpostavimo da postoji  $a$  blokova koji se s blokom  $A$  sijeku u  $y$  točaka te  $4k - a - 3$  blokova koji se s  $A$  sijeku u  $x$  točaka. Iz toga proizlazi da su  $x$  i  $y$  presječni brojevi dizajna  $\mathcal{D}$ . Prebrojavanjem parova  $(B, x)$  na dva načina, gdje je  $B$  blok različit od  $A$  i  $x \in A \cap B$ , dobivamo:

$$ay + (4k - a - 3)x = 2k(k - 1). \quad (3.12)$$

---

<sup>14</sup>Jean-Marie Goethals, belgijski matematičar.

<sup>15</sup>Johan Jacob Seidel (1919. - 2001.), nizozemski matematičar poznat po radu u geometriji i teoriji grafova.

Neka je  $A$  matrica susjedstva grafa  $\Gamma$ . U dijelu dokaza Teorema 3.2 pokazali smo da svojstvene vrijednosti matrice  $A$  imaju kratnosti 1,  $v - 1$  i  $b - v = v - 2$ , stoga možemo primijeniti Teorem 2.10, koji obuhvaća dva slučaja koja ćemo promotriti.

1. Ako je  $\Gamma$  ili njegov komplement *graf ljestve*, možemo pretpostaviti da vrijedi  $a = n - 2$ . Budući da je  $n = b = 4k - 2$ , vrijedi  $a = 4(k - 1)$  te iz (3.12) slijedi

$$4(k - 1)y + x = 2k(k - 1).$$

Stoga zaključujemo da  $2(k - 1)$  dijeli  $x$ , a s obzirom da vrijedi  $x < k$ , slijedi da je  $x = 0$ . Iz (3.12) tada slijedi  $y = \frac{k}{2}$ . Nadalje, budući da vrijedi  $b = \frac{v(v-1)}{k}$ , možemo primijeniti Korolar 3.1, čime zaključujemo da je  $\mathcal{D}$  3-dizajn i posljedično Hadamardov 3-dizajn. Naime, iz Definicije 2.8 znamo da Hadamardov 3-dizajn ima parametre  $3-(m, \frac{1}{2}m, \frac{1}{4}m - 1)$ . U našem slučaju vrijedi  $v = 2k$ , iz čega slijedi  $m = 2k$  pa vrijedi i  $k = \frac{m}{2}$ . Nadalje, iz (2.1) slijedi  $\lambda_2 = \frac{m}{2} - 1$  pa iz (2.3) slijedi  $\lambda = \left(\frac{m}{2} - 1\right) \cdot \frac{\binom{\frac{m}{2}-2}{3-2}}{\binom{m-2}{3-2}} = \frac{m}{4} - 1$ .

2. U drugom slučaju imamo:

$$v = 2s^2 + 2s + 2, \quad k = s^2 + s + 1, \quad a = s(2s + 1) \quad (3.13)$$

te iz (3.12) slijedi

$$s(2s + 1)y + (s + 1)(2s + 1)x = 2s(s + 1)(s^2 + s + 1).$$

Dakle,  $2s + 1$  dijeli  $2s(s + 1)(s^2 + s + 1)$ , što implicira da je  $s = 1$ . Tada iz (2.1) i (3.13) slijedi  $v = 6$ ,  $k = 3$  te  $\lambda = 2$  pa zaključujemo da je  $\mathcal{D}$  dizajn s parametrima  $2-(6, 3, 2)$ .  $\square$

**Napomena 3.5.** Pokažimo sada da u dokazu prethodnog teorema iz uvjeta da  $2s + 1$  dijeli  $2s(s + 1)(s^2 + s + 1)$  slijedi da je jedini pozitivni cijeli broj  $s$  koji zadovoljava taj uvjet  $s = 1$ . Naime, definirajmo  $t := 2s + 1$ . Tada je  $s = \frac{t-1}{2}$  i vrijedi:

$$2s(s + 1)(s^2 + s + 1) = \frac{t^4 + 2t^2 - 3}{8}.$$

Budući da  $t$  dijeli  $\frac{t^4 + 2t^2 - 3}{8}$ ,  $t$  mora biti djelitelj od  $-3$ . S obzirom na to da je  $t$  pozitivan, moguće vrijednosti su  $t = 1$  ili  $t = 3$ . Ukoliko je  $t = 3$ , slijedi  $s = 1$ . S druge strane, iz  $t = 1$  slijedi  $s = 0$  što je u kontradikciji s pretpostavkom da je  $s$  pozitivan cijeli broj. Dakle, zaključujemo da jedino rješenje koje zadovoljava uvjet je  $s = 1$ .

## 3.2 Kvazisimetrični dizajni i kodovi

U prethodnom potpoglavlju opisali smo povezanost kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova. U nastavku ćemo pokazati i vezu s kodovima, konkretno između generirajućih matrica kodova i incidencijskih matrica dizajna kada su  $k$ ,  $x$  i  $y$  iste parnosti. Ova povezanost omogućuje nam da primijenimo svojstva kodova za dokazivanje tvrdnji o kvazisimetričnim dizajnama.

Navedimo za početak osnovne pojmove iz teorije kodiranja. Neka je  $A = \mathbb{F}_q$  konačno polje reda  $q$ , gdje je  $q$  potencija prostog broja.

**Definicija 3.3.** *Kod  $C$  je  $q$ -naran **linearan kod** duljine  $n$  i dimenzije  $k$  (tj.  $[n, k]_q$  ili  $[n, k]$  kod) ako je  $C$   $k$ -dimenzionalni potprostor  $n$ -dimenzionalnog vektorskog prostora  $A^n$ .*

Elemente vektorskog prostora  $A^n$  nazivamo riječi, a elemente koda  $C$  **riječi koda**. Kada je  $q = 2$ , kod  $C$  se naziva binaran linearan kod.

**Definicija 3.4.** *Neka je  $C$  linearan  $[n, k]$  kod. **Generirajuća matrica** koda  $C$  je  $k \times n$  matrica čiji su retci vektori baze prostora  $C$ .*

**Primjer 3.7.** Generirajuća matrica binarnog linearnog koda  $C = \{0000, 1100, 0011, 1111\}$  je

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Definicija 3.5.** ***Dualan kod**  $C^\perp$  linearnog koda  $C$  je*

$$C^\perp = \{x \in A^n \mid x \cdot c = 0, \forall c \in C\},$$

pri čemu je  $x \cdot c = \sum_{i=1}^n x_i c_i$  skalarni produkt vektora  $x, c \in A^n$ .

Linearni kod  $C$  je **samoortogonalan** ako je  $C \subseteq C^\perp$  te **samodualan** ako vrijedi  $C = C^\perp$ .

**Primjer 3.8.** Linearan kod  $C$  iz Primjera 3.7 je samodualan.

V. Tonchev<sup>16</sup> je pokazao kako se samoortogonalni kodovi mogu povezati s kvazisimetričnim dizajnama čiji presječni brojevi imaju istu parnost [33].

---

<sup>16</sup>Vladimir D. Tonchev, profesor na Tehnološkom sveučilištu Michigan.

**Teorem 3.8.** *Neka je  $M$   $b \times v$  incidencijska matrica kvazisimetričnog  $2$ - $(v, k, \lambda)$  dizajna s presječnim brojevima  $x$  i  $y$  koji zadovoljavaju  $k \equiv x \equiv y \pmod{2}$ . Tada vrijedi:*

1. *Ako je  $k$  paran, tada je binarni kod duljine  $v$  s generirajućom matricom  $M$  samoortogonalan.*
2. *Neka je  $N$  proširena  $b \times (v+1)$  matrica dobivena dodavanjem stupca svih jedinica (s lijeva) u  $M$ . Ako je  $k$  neparan, tada  $N$  generira binarni samoortogonalni kod duljine  $v + 1$ .*

**Napomena 3.6.** Proširena matrica  $N$  iz prethodnog teorema je oblika:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \vdots & M & \\ 1 & & \end{bmatrix}.$$

Na temelju povezanosti s kodovima, Tonchev je dokazao da su neki kvazisimetrični dizajni jedinstveni, dok drugi sa specifičnim parametrima ne postoje [33].

**Teorem 3.9.** *Kvazisimetrični dizajni s parametrima i presječnim brojevima navedenim u nastavku su jedinstveni:*

- $2$ - $(21, 6, 4)$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,
- $2$ - $(21, 7, 12)$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3$ ,
- $2$ - $(22, 7, 16)$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3$ .

*S druge strane, kvazisimetrični dizajni sa sljedećim parametrima ne postoje:*

- $2$ - $(29, 7, 12)$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3$ ,
- $2$ - $(28, 7, 16)$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3$ .

## 4 Primjeri u GAP-u

U ovom poglavlju prikazat ćemo konkretne primjere upotrebe GAP-a za rad s kvazisimetričnim dizajnama, jako regularnim grafovima i kodovima. Implementirat ćemo dvije različite metode za konstrukciju blokovnih grafova, kao i funkciju za provjeru jake regularnosti grafova nastalih ovim konstrukcijama. Također, konstruirat ćemo generirajuće matrice linearnih kodova iz incidencijskih matrica kvazisimetričnih dizajna.

Kako bi kod bio pregledniji i organiziraniji, uključit ćemo nekoliko pomoćnih funkcija koje ispituju osnovna svojstva dizajna, poput određivanja presječnih brojeva i provjere je li dizajn kvazisimetričan.

Svaka funkcija bit će detaljno objašnjena uz pripadajuće primjere, pružajući uvid u to kako GAP može biti korišten za rješavanje problema u teoriji dizajna, grafova i kodiranja.

Za rad s dizajnama, grafovima i kodovima koristili smo pakete *Design*, *Grape* i *Guava*, respektivno.

**Funkcija 4.1** (Presječni brojevi). Funkcija `presjecni_brojevi` uzima dizajn kao ulazni argument i određuje kardinalne brojeve presjeka dvaju različitih blokova danog dizajna, a zatim vraća skup svih različitih presječnih brojeva.

```
presjecni_brojevi:=function(design)
  local L, i, j;
  L:=[];
  for i in [1..Size(design.blocks)] do
    for j in [1..Size(design.blocks)] do
      if i<>j then
        Add(L,Size(Intersection(design.blocks[i],design.blocks[j])));
      fi;
    od;
  od;
  return Set(L);
end;
```



**Primjer 4.1.** Pomoću Funkcije 4.1 odredimo presječne brojeve  $(9, 4, 3)$ -BIBDa iz Primjera 3.1. Kako bi definirali navedeni dizajn, koristit ćemo funkciju `BlockDesign` koja kao argumente ima broj točaka dizajna i listu blokova.

```
B1:=[ [1,2,4,7], [1,2,5,9], [1,2,6,8], [1,3,4,6], [1,3,5,8], [1,3,7,9], [1,4,8,9],
      [1,5,6,7], [2,3,4,5], [2,3,6,8], [2,3,7,9], [2,4,7,8], [2,5,6,9], [3,4,6,9],
      [3,5,7,8], [4,5,6,7], [4,5,8,9], [6,7,8,9] ];
D1:=BlockDesign(9,B1);
presjecni_brojevi(D1);
```

Dobiveni presječni brojevi dizajna s parametrima  $2-(9, 4, 3)$  dizajn su  $[0, 1, 2, 3]$ . Uočimo da se ovi rezultati podudaraju s onima prikazanim u Primjeru 3.1.

**Funkcija 4.2** (Presječni brojevi kvazisimetričnog dizajna  $x$  i  $y$ ). Funkcija `xy` pomoću funkcije `presjecni_brojevi` za dani kvazisimetrični dizajn vraća listu  $[x, y]$  s presječnim brojevima dizajna, pri čemu su  $x$  i  $y$  sortirani u rastućem redoslijedu. Ako dizajn nije kvazisimetričan, funkcija vraća `false`.

```
xy:=function(design)
    if Size(presjecni_brojevi(design)) <> 2 then return false; fi;

    if presjecni_brojevi(design)[1] < presjecni_brojevi(design)[2] then
        return [presjecni_brojevi(design)[1],presjecni_brojevi(design)[2]];
    else
        return [presjecni_brojevi(design)[2],presjecni_brojevi(design)[1]];
    fi;
end;
```

**Primjer 4.2.** Odredimo presječne brojeve  $x$  i  $y$  dizajna s parametrima  $2-(6, 3, 2)$  pomoću Funkcije 4.2.

```
B2:=[ [1,2,3], [1,2,4], [1,3,6], [1,4,5], [1,5,6], [2,3,5], [2,4,6], [2,5,6],
      [3,4,5], [3,4,6] ];
D2:=BlockDesign(6,B2);
xy(D2);
```

Funkcija vraća listu [ 1, 2 ] iz čega zaključujemo da su presječni brojevi  $x$  i  $y$  danog dizajna jednaki 1 i 2, respektivno. Ovo je u skladu s rezultatom prikazanim u Primjeru 3.6.

**Funkcija 4.3** (Je li dizajn kvazisimetričan?). Funkcija `kvazi_sim` na temelju duljine liste koju vraća funkcija `presjecni_brojevi` ispituje je li dani dizajn kvazisimetričan. Ako lista sadrži točno dva presječna broja, funkcija vraća `true`, dok u suprotnom vraća `false`.

```
kvazi_sim:=function(D)
  if Size(presjecni_brojevi(D)) = 2 then
    return true;
  else
    return false;
  fi;
end;
```

**Primjer 4.3.** Prethodna funkcija za dizajn iz Primjera 4.1 vraća `false`, a za dizajn iz Primjera 4.2 `true`.

```
kvazi_sim(D1);
kvazi_sim(D2);
```

**Konstrukcija 4.1.** Funkcija `konstrukcija1` konstruira graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  iz Steinerovog 2-dizajna  $\mathcal{D}$  prema načinu opisanom u Propoziciji 3.6. Za konstrukciju grafova koristi funkciju `EdgeOrbitsGraph` koja kao argumente ima permutacijsku grupu, listu bridova i broj vrhova grafa. Ukoliko dani dizajn nije kvazisimetričan, funkcija vraća `false`.

```
konstrukcija1:=function(design)
  local G, n, bridovi, graf, i, j;
  n:=Size(design.blocks);
  G:=SymmetricGroup(0);
  bridovi:=[];
```

```

if kvazi_sim(design)=false then return false; fi;

for i in [1..Size(design.blocks)] do
  for j in [1..Size(design.blocks)]do
    if Size(Intersection(design.blocks[i],design.blocks[j]))=1 then
      Add(bridovi,[i,j]);
    fi;
  od;
od;

return EdgeOrbitsGraph(G,bridovi,n);
end;

```

**Primjer 4.4.** Odredimo graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  dobiven iz dizajna s parametrima  $2-(9,3,1)$ .

```

B4:=[[1,2,3],[1,4,7],[1,5,9],[1,6,8],[2,4,9],[2,5,8],[2,6,7],[3,4,8],
[3,5,7],[3,6,9],[4,5,6],[7,8,9]];
D4:=BlockDesign(9,B4);
graf1:=konstrukcija1(D4);

```

Dobiveni graf prikazan je u nastavku.

```

rec( adjacencies := [ [ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ], [ 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9,
11, 12 ], [ 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12 ], [ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11,
12 ], [ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12 ], [ 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12 ],
[ 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12 ], [ 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12 ],
[ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12 ], [ 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12 ],
[ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ], [ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ] ],
group := Group(()), isGraph := true, order := 12, representatives :=
[ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ], schreierVector := [ -1,
-2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12 ] )

```

Naredbama `Vertices`, `UndirectedEdges` i `Adjacency` možemo detaljnije ispitati svojstva dobivenog grafa.

```

Vertices(graf1);
Length(UndirectedEdges(graf1));
Adjacency(graf1,1);

```

U ovom slučaju, vrhovi grafa su [ 1 .. 12 ], broj bridova je 54, a susjedni vrhovi vrha 1 su [ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ]. Uočimo da su sve navedene karakteristike u skladu s onima iz Primjera 3.5.

**Konstrukcija 4.2.** Funkcija konstrukcija2 konstruira blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  proizvoljnog kvazisimetričnog dizajna  $\mathcal{D}$  prema načinu opisanom u Definiciji 3.2. Analogno kao i u Konstrukciji 4.1, funkcija vraća false ukoliko dani dizajn nije kvazisimetričan.

```

konstrukcija2:=function(design)
    local G, n, bridovi, graf, pr_br, y, x, i, j;
    n:=Size(design.blocks);
    G:=SymmetricGroup(0);
    pr_br:=presjecni_brojevi(design);
    bridovi:=[];

    if kvazi_sim(design)=false then return false; fi;

    x:=xy(design)[1]; y:=xy(design)[2];

    for i in [1..Size(design.blocks)] do
        for j in [1..Size(design.blocks)]do
            if i<>j then
                if Size(Intersection(design.blocks[i],design.blocks[j]))=y then
                    Add(bridovi,[i,j]);
                fi;
            fi;
        od;
    od;
    return EdgeOrbitsGraph(G,bridovi,n);
end;

```

**Primjer 4.5.** Odredimo blokovni graf  $\Gamma(\mathcal{D})$  pridružen dizajnu s parametrima 2-(6,3,2). Funkciju ćemo pozvati za dizajn D2 definiran u Primjeru 4.2.

```
graf2:=konstrukcija(D2);
```

Graf koji smo konstruirali prikazan je u nastavku.

```
rec( adjacencies := [ [ 2, 3, 6 ], [ 1, 4, 7 ], [ 1, 5, 10 ], [ 2, 5, 9 ],
    [ 3, 4, 8 ], [ 1, 8, 9 ], [ 2, 8, 10 ], [ 5, 6, 7 ], [ 4, 6, 10 ],
    [ 3, 7, 9 ] ], group := Group(()), isGraph := true, order := 10,
    representatives := [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ], schreierVector :=
    [ -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10 ] )
```

Analogno kao u prethodnom primjeru, možemo odrediti broj vrhova i bridova, kao i susjedne vrhove za proizvoljan vrh u dobivenom grafu.

```
Vertices(graf2);
Length(UndirectedEdges(graf2));
Adjacency(graf2,1);
```

Konstruirani blokovni graf ima vrhove označene s [ 1 .. 10 ], 15 bridova te su [ 2, 3, 6 ] susjedni vrhovi vrha 1. Uočimo da su dobivene vrijednosti u skladu s onima iz Primjera 3.6

**Funkcija 4.4** (Je li graf jako regularan?). Funkcija SRG ispituje je li dani graf jako regularan. Ukoliko je, funkcija vraća listu [v,a,c,d], dok u suprotnom vraća false.

```
SRG:=function(graf)
    local v, u, L1, L2, Diff;
    L1:=[];
    L2:=[];

    if IsRegularGraph(graf)=false then return false; fi;
```

```

for v in Vertices(graf) do
  for u in Adjacency(graf,v) do
    Add(L1,Size(Intersection(Adjacency(graf,v),Adjacency(graf,u))));
  od;
  Diff:=Difference(Vertices(graf),Adjacency(graf,v));
  RemoveSet(Diff,v);
  for u in Diff do
    Add(L2,Size(Intersection(Adjacency(graf,v),Adjacency(graf,u))));
  od;
od;

if Size(Set(L1))<>1 or Size(Set(L2)) <> 1 then return false; fi;
return [OrderGraph(graf),VertexDegree(graf,Vertices(graf)[1]),L1[1],L2[1]];
end;

```

**Primjer 4.6.** Pomoću Funkcije 4.4 ispitajmo jesu li prethodno konstruirani grafovi jako regularni.

```
SRG(graf1);
```

```
SRG(graf2);
```

Dobiveni parametri su [ 12, 9, 6, 9 ] i [ 10, 3, 0, 1 ] respektivno, što znači da su oba konstruirana grafa jako regularna. Parametri također odgovaraju parametrima iz Primjera 3.5 i 3.6.

**Konstrukcija 4.3.** Funkcija `konstrukcija3` konstruira binarni kod pomoću generirajuće matrice dobivene na način opisan u Teoremu 3.8. Kao argument ima  $v \times b$  matricu incidencije kvazisimetričnog dizajna, iz koje najprije konstruira pripadajući kvazisimetrični dizajn i određuje parametre  $k$ ,  $x$  i  $y$ . Ako ti parametri nemaju istu parnost, funkcija vraća `false`. Zatim, ovisno o parnosti parametra  $k$ , konstruira generirajuću matricu. Za konstrukciju koda koristi funkciju `GeneratorMatCode`, koja kao argumente ima generirajuću matricu i konačno polje.

```

konstrukcija3:=function(M)
  local v, k, x, y, M_T, D, blokovi, G, i, blok, blok_G, C;
  v:=DimensionsMat(M)[1];
  M_T:=TransposedMat(M);
  blokovi:=[];

  for i in M_T do Add(blokovi,Positions(i,1)); od;

  D:=BlockDesign(v,blokovi);
  k:=Size(D.blocks[1]);
  x:=xy(D)[1];
  y:=xy(D)[2];

  if ((k mod 2 = x mod 2) and (x mod 2 = y mod 2))=false then return false; fi;

  if (k mod 2) = 0 then G:=M_T;
  else
    G:=[];
    for i in M_T do
      blok:=[1];
      blok_G:=Concatenation(blok,i);
      Add(G,blok_G);
    od;
  fi;

  C:=GeneratorMatCode(G,GF(2));
  return C;
end;

```

**Primjer 4.7.** Primjenom funkcije `konstrukcija3` generirajmo binarne kodove iz dizajna navedenih u Teoremu 3.8. Dizajni koji su korišteni su:

- 2-(21, 6, 4) s presječnim brojevima  $x = 0$  i  $y = 2$ ,
- 2-(21, 7, 12) s presječnim brojevima  $x = 1$  i  $y = 3$ .

Uočimo da za oba dizajna vrijedi uvjet  $k \equiv x \equiv y \pmod{2}$ . Za generiranje kodova koristimo  $v \times b$  incidencijske matrice prikazane u Prilozima.

```
C1:=konstrukcija3(M1);
```

```
C2:=konstrukcija3(M2);
```

Dobiveni binarni kodovi su:

- a linear [21,10,1..6]4..10 code defined by generator matrix over GF(2),
- a linear [22,10,1..8]4..10 code defined by generator matrix over GF(2).

Prvi binarni kod je duljine 21, a drugi 22, što odgovara duljinama navedenim u Teoremu 3.8. Pored toga, oba koda imaju dimenziju 10.

**Funkcija 4.5** (Je li kod samoortogonalan?). Funkcija `samoortogonalan_kod` kao ulazni argument prima kod i koristi funkciju `DualCode` za dobivanje njegovog dualnog koda. Zatim, funkcija provjerava je li svaka riječ koda iz originalnog koda prisutna u njegovom dualnom kodu. Ako je, kod je samoortogonalan i funkcija vraća `true`, dok u suprotnom vraća `false`.

```
samoortogonalan_kod:=function(C)
    local C_D, i;
    C_D:=DualCode(C);

    for i in C do
        if (i in C_D)= false then return false; fi;
    od;

    return true;
end;
```



**Primjer 4.8.** Prethodna funkcija za oba koda konstruirana u Primjeru 4.7 vraća `true` pa zaključujemo da su oba koda samoortogonalna. Ovaj rezultat je u skladu s Teoremom 3.8.

```
samoortogonalan_kod(C1);
```

```
samoortogonalan_kod(C2);
```

## Zaključak

Ovaj rad istražuje kvazisimetrične dizajne, specifičnu vrstu dizajna koja je slična simetričnim dizajnima, kroz analizu njihovih osnovnih svojstava, definicija i konkretnih primjera. Osim toga, uspostavljene su veze između kvazisimetričnih dizajna i jako regularnih grafova, kao i između generirajućih matrica binarnih kodova i incidencijskih matrica kvazisimetričnih dizajna kada su parametri  $k$ ,  $x$  i  $y$  iste parnosti. Ove veze doprinose dubljem razumijevanju kvazisimetričnih dizajna i omogućuju preciznije formuliranje i dokazivanje njihovih svojstava. U praktičnom dijelu rada prikazani su konkretni primjeri upotrebe GAP-a za rad s kvazisimetričnim dizajnima, uključujući metode za konstrukciju blokovnih grafova te generirajućih matrica kodova iz incidencijskih matrica kvazisimetričnih dizajna. Ovi primjeri pokazuju kako se teoretski koncepti mogu primijeniti u stvarnim situacijama, nudeći korisne alate za daljnje istraživanje u teoriji dizajna, grafova i kodiranja.

## Popis slika

1	Fanova ravnina . . . . .	3
2	$(9, 3, 1)$ -BIBD . . . . .	3
3	Primjer grafa $G$ . . . . .	9
4	Petersenov graf . . . . .	11
5	Potpuni graf $K_6$ . . . . .	11
6	Graf ljestve . . . . .	11
7	Primjer nepovezanog grafa . . . . .	12
8	Komplementaran graf . . . . .	12
9	<i>Cocktail party graf</i> . . . . .	12
10	Graf $L_2(3)$ . . . . .	14
11	Graf $\Gamma(\mathcal{D})$ . . . . .	24
12	Blokovni graf $\Gamma(\mathcal{D})$ . . . . .	28

## Literatura

- [1] M. Behbahani, *On strongly regular graphs* (Doctoral dissertation), Concordia University, (2009).
- [2] R. C. Bose, *On the construction of balanced incomplete block designs*, *Annals of Eugenics*, 9(4) (1939), 353-399.
- [3] R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, *Pacific Journal of Mathematics*, 13(2) (1963), 389-419.
- [4] D. R. Breach, *The 2-(9, 4, 3) and 3-(10, 5, 3) designs*, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 27(1) (1979), 50-63.
- [5] A. E. Brouwer, H. van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Cambridge University Press, (2022).
- [6] P. J. Cameron, J. H. van Lint, *Designs, graphs, codes and their links* (Vol. 22), Cambridge University Press, (1991).
- [7] P. J. Cameron, J. H. van Lint, *Graphs, codes and designs* (Vol. 43), Cambridge University Press, (1980).
- [8] C.J. Colbourn, J.H. Dinitz (Eds.), *Handbook of Combinatorial Designs* (2nd ed.), Chapman and Hall/CRC, (2006).
- [9] L. Euler, *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*, *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen*, 9 (1782), 85-239.
- [10] R. A. Fisher, *The arrangement of field experiments*, *Journal of the Ministry of Agriculture*, 33 (1926), 503-513.
- [11] R. A. Fisher, F. Yates, *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*, Edinburgh: Oliver and Boyd, (1938).
- [12] J. M. Goethals, J. J. Seidel, *Strongly Regular Graphs Derived from Combinatorial Designs*, *Canadian Journal of Mathematics*, 22(3) (1970), 597-614.

- [13] J. I. Hall, *Notes on coding theory*, Department of Mathematics, Michigan State University, (2010). <https://users.math.msu.edu/users/halljo/classes/codenotes/Topstuff.pdf>
- [14] Hrvatska enciklopedija, A. De Morgan, <https://www.enciklopedija.hr/clanak/de-morgan-augustus>, (1.8.2024.)
- [15] Institute of Mathematical Statistics, Obituary: S.S. Shrikhande, <https://imstat.org/2020/05/17/obituary-s-s-shrikhande-1917-2020/>, (30.4.2024.)
- [16] Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, *Combinatorics of symmetric designs* (Vol. 5), Cambridge University Press, (2006).
- [17] T. P. Kirkman, *On a problem in combinations*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 2 (1847), 191-204.
- [18] V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, (2016/2017). <https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/kvazisim.pdf>
- [19] Maths History, F. Viète, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete/>, (10.5.2024.)
- [20] Maths History, J. J. Seidel, [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Seidel\\_Jaap/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Seidel_Jaap/), (29.7.2024.)
- [21] Maths History, J. van Lint, [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van\\_Lint/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van_Lint/), (2.8.2024.)
- [22] Maths History, R. C. Bose, [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bose\\_Raj/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bose_Raj/), (30.4.2024.)
- [23] Peter Cameron's homepage, <https://cameroncounts.github.io/web/>, (2.8.2024.)
- [24] D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, *On  $t$ -designs*, Osaka J. Math., 12(3) (1975), 737-744.

- [25] ResearchGate, Vladimir Tonchev, <https://www.researchgate.net/profile/Vladimir-Tonchev>, (27.8.2024.)
- [26] M. S. Shrikhande, S. S. Sane, *Quasi-symmetric designs* (Vol. 164), Cambridge University Press, (1991).
- [27] S. S. Shrikhande, Bhagwandas, *Duals of incomplete block designs*, J. Indian Statist. Assoc., 3(1) (1965), 30-37.
- [28] D. A. Spielman, *Lecture 23: Strongly Regular Graphs, part 1*, (2009). <https://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/2009/lect23-09.pdf>
- [29] D. Stinson, *Combinatorial designs: constructions and analysis*, Springer Science & Business Media, (2007).
- [30] The Mathematics Genealogy Project, D. Ray-Chaudhuri, <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=11328>, (29.7.2024.)
- [31] The Mathematics Genealogy Project, J. M. Goethals, <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=66096>, (29.7.2024.)
- [32] The Mathematics Genealogy Project, R. Wilson, <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=10076>, (29.7.2024.)
- [33] V. D. Tonchev, *Quasi-symmetric designs and self-dual codes*, European Journal of Combinatorics, 7(1) (1986). 67-73.
- [34] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, (2021).
- [35] D. Veljan, M. Mišetić, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, (1989).
- [36] R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima* (Disertacija), Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, (2019). <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:446211>

## Prilozi

Preuzeto iz [8, pp. 578–582].

### Matrica incidencije kvazisimetričnog $(21,6,4)$ -BIBDa

```
10010111000001100000110000101000010100010010001000000000
11001011100000110000001000010100001010001001000100000000
11100100110000011000010100001010000001000100100010000000
0111001001100000110000101000010100010010001001000000000
1011100000110000011000010100001010001001000100100000000
0101110000011000001100001010000101000100100010010000000
0010111000001100000110000101000010100010010001001000000
10000000011001000010000001110100000101001000000011000101
01000001001100000001010000110010000010100110000001100010
00100000100110000000111000010001000101010001000000110001
00010000010011100000011100000000100010101000100001011000
00001001001001010000001110000000010001010100010000101100
00000101100100001000000111000000001100101000001000010110
00000010110010000100000011101000000010010100000100001011
10000000000100001100101000000000111000000110100101000101
01000000000010100110000100001000011100000001010011100010
00100000000001010011000010001100001010000010101000110001
00010001000000001001100001001110000001000001010101011000
00001000100000100100100000100111000000100000101010101100
00000100010000110010000000010011100000010010010100010110
0000001000100001100101000000001110000001001001010001011
```

### Matrica incidencije kvazisimetričnog $(21,7,12)$ -BIBDa

```
01000000000100010000011000111000000000000000000000001000010110
    011100000000101101001001111100001010111001001111000001001111
000001000000010010000000010100000001000101000111000000111110
```

101001110011000000001110101001001001000110110100011001000100  
001000100000001100000100110001000000110101100110010101000100  
01011000010001000011100001000100000000010000001111100101111  
010001000000000010111001101100101110010000101001000111000101  
01101000000110100001011001000110000001100000000001011000000  
000011100000101001010110101100011000110011001010000000100001  
00001011101000111100101000100000011000000001100000000101000  
10101000110000101101111001010100011001000011000000000000000  
110001100010000000100000100100011111001011000010001010000010  
000100010010011000001000000101011101001011000001011010110000  
000110010000000101010001010001010101010010000110000110000010  
000100001101100101000101000001000111001000000110001001001011  
000010110001011110000000000000101001010001000001001101110000  
011000001010111100100010000010001000101110111010000001010000  
000101000010000100000010001011100001001101000000100011010001  
101101110100100000110000000010000001000111000000100100011001  
101000000010100001010000000000110010010001101001101010100110  
010100011000010010000001000011110000110001010100100011000011  
101000101000000110100010010100000010000100000111110010001000  
100001000111100000000011000000110011101100001001100100000000  
010111100100110001101000000100000100100110010101000011000000  
011011010100000110101001101001000000101010010000110000000000  
010001010101000010000001001001001110110000100100010000110100  
001000000001100010010100110010001010000001000001110111001110  
000100001000000010100000001010010101111100111010000100010000  
000010111110010010100100001010101100100000100100011100001001  
000000011010010001000100110100010000100010010000000001010101  
100100101010101101101001100000010000000000000001000000010010  
000001011000111000101111110010010010101000100000111100000000  
010010000000010001000000110101010011000010101010101010000011  
100101000101110000010101000110010000000001011000100000011100



100000010011000001000001011000000101010000011100000110100000  
001000001110000100001101000101101100001100101000100100110011  
1110111111000000000001010000000111010011000000010001000111100  
100000000100001010010100000010101000100110001011010100000001  
100110000001011000110000010000100100001100011001110001101000  
01100010100101100101000110101000000000001000010010000101001  
000100100111000101011010001010100000000110110100011010100100  
100010000101100010100010100010100001000000110100000000001010